УДК 512.643.5

С. Ю. Гоголенко (аспирант)
Донецкий национальный технический университет
gogolenko@cs.dgtu.donetsk.ua

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ И СПЕКТРЫ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ НА ГРАФАХ ВТОРИЧНЫХ ТОПОЛОГИЙ

В работе рассматривается проблема локализации спектров симметричных вещественных матриц на графах вторичной топологии. Такими матрицами, в частности, описываются конечно-разностные приближения некоторых дифференциальных операторов на геометрических графах (оператор Лапласа и т. п.). Для матриц рассматриваемого типа в работе выведено выражение характеристического многочлена через полиномы Чебышева, с помощью которого получена теорема о поведении спектров таких матриц при росте их размерности. В качестве одного из следствий этой теоремы приводятся оптимальные оценки максимального собственного числа для различных спектров графа на основе знания максимальной степени вершины.

ДУЧП на геометрическом графе, граф вторичной топологии, характеристический многочлен, спектр матрицы, спектр графа, матрица смежности, Лапласиан графа

Введение

Модели сетевых динамических объектов с распределёнными параметрами обычно описываются дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП) на стратифицированных многообразиях. В простейшем случае стратифицированное многообразие представляет собой конечный связный геометрический граф $\mathbf{\Gamma} = (V, E)$ [1,2]. При этом рёбра графа $E = \{e_i : i \in \mathcal{I}\}$ являются одномерными гладкими регулярными многообразиями, а вершины $V = \{v_J : J \in \mathcal{J}\}$ — точками. Графы $\mathbf{\Gamma}$ могут содержать как петли, так и кратные рёбра. В теории ДУЧП на геометрических графах при описании элементов графа нередко используется следующая система обозначений [1]. Индексы вершин графа принято обозначать прописными, а индексы рёбер — строчными латинскими буквами. С каждым ребром e_i связана пара вершин — вершина v_{I0}, из которой исходит ребро, и вершина v_{I1}, в которую ребро входит. Множество индексов конечных вершин рёбер, инцидентных вершине v_I, обозначают $\mathcal{J}_I^{(0)} = \{J \in \mathcal{J} : (v_I, v_J) \in E\}$, а множество индексов начальных вершин — $\mathcal{J}_I^{(1)} = \{J \in \mathcal{J} : (v_J, v_I) \in E\}$. Множество индексов всех вершин, инцидентных вершине v_I, обозначается $\mathcal{J}_I = \mathcal{J}_I^{(0)} \cup \mathcal{J}_I^{(1)}$. Аналогично, множество индексов рёбер, исходящих из вершины v_I, обозначают $\mathcal{I}_I^{(0)} = \{i \in \mathcal{I} : e_i = (v_I, v_J), J \in \mathcal{J}_I\}$, входящих — $\mathcal{I}_I^{(1)} = \{i \in \mathcal{I} : e_i = (v_J, v_I), J \in \mathcal{J}_I\}$, а множество индексов всех инцидентных рёбер — $\mathcal{I}_I = \mathcal{I}_I^{(0)} \cup \mathcal{I}_I^{(1)}$.

Анализ устойчивости и построение априорных оценок глобальной погрешности для численных методов решения ДУЧП на геометрических графах нередко сводится к задаче анализа спектра разреженных матриц, расположение ненулевых элементов которой определяется структурой сетки по пространственной координате — так называемого графа вторичной топологии $\mathbf{\Gamma}_{\Delta x}$. Простейший метод оценки разброса спеткрта для подобных матриц заключается в локализации спектра с помощью кругов Гершгорина и овалов Кассини, а также в применении известных матричных неравенств, таких как неравенства Остроградского, Брауэра, Паркера, Фарнелла, Хирша, Бендикссона и т. п. [3] В ряде случаев полезным является использование результатов из спектральной теории графов [4–7]. Нередко подобные оценки оказываются слабыми. Данная работа представляет собой попытку усиления существующих оценок разброса спектров симметричных матриц на графах вторичной топологии за счёт исследования поведения спектра при уменьшении шага дискретизации Δx.

Матрицы на графах вторичной топологии

Среди матриц на графах вторичной топологии наиболее важными с теоретической точки зрения, по-видимому, являются симметричные матрицы с ненулевыми элементами на главной диагонали и на позициях, в которых содержатся ненулевые элементы матрицы смежности графа вторичной топологии. В случае, когда параметры исходного ДУЧП на геометрическом графе не меняются вдоль ветвей графа, путём переупорядочивания строк и столбцов такие симметричные матрицы можно привести к блочному виду

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|cccccc} \mathbf{D} & \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \dots & \dots & \mathbf{E}_m \\ \hline \mathbf{E}_1^T & \mathbf{L}_1 & \mathbf{O} & \dots & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{E}_2^T & \mathbf{O} & \mathbf{L}_2 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \mathbf{O} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \mathbf{O} \\ \mathbf{E}_m^T & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & \mathbf{L}_m \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^T & \mathbf{L} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

При этом матрица $\mathbf{D}$ является диагональной матрицей размерности $|V| \times |V|$. Матрица $\mathbf{E}$ представляет собой блочную матрицу

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \dots & \mathbf{E}_m \end{pmatrix}, \tag{2}$$

каждый из блоков которой имеет вид

$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} b_i^{(0)} e_{I0}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & b_i^{(1)} e_{I1}^{(1)} \\ b_i^{(0)} e_{I0}^{(2)} & 0 & \dots & 0 & b_i^{(1)} e_{I1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_i^{(0)} e_{I0}^{(n)} & 0 & \dots & 0 & b_i^{(1)} e_{I1}^{(n)} \end{pmatrix} = b_i^{(0)} \mathbf{e}_{I0} \mathbf{e}_1^T + b_i^{(1)} \mathbf{e}_{I1} \mathbf{e}_{s_i}^T,$$

где $s_i = \ell_i / \Delta x$ — количество дискретных элементов в ребре e_i, ℓ_i — длина ребра e_i, $I1$ — индекс конечной вершины ребра e_i, $I0$ — индекс начальной вершины ребра e_i. Матрица $\mathbf{E}$ может быть легко построена на основе матрицы инцидентности графа $\mathbf{\Gamma}$ и информации о длине его рёбер. Матрица $\mathbf{L}$ является блочно-диагональной матрицей

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{O} & \dots & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L}_2 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \mathbf{O} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & \mathbf{L}_m \end{pmatrix} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i,$$

каждый из блоков которой имеет размерность $s_i \times s_i$ и в свою очередь является симметричной трёхдиагональной матрицей вида

$$\mathbf{L}_i = \begin{pmatrix} a_i^{(0)} & b_i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_i & a_i & b_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_i & a_i & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & b_i \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_i & a_i^{(1)} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(a_i^{(0)}, a_i, \dots, a_i^{(1)}\right) + b_i \mathbf{C}, \tag{5}$$

где $\mathbf{C}$ — матрица смежности пути длины s_i.

Особое значение матриц вида (1) обусловлено тем, что их частным случаем является дискретный аналог $L_{\Delta x}$ оператора

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad x \in \mathbf{\Gamma}$$

с параметризирующей функцией p, принимающей постоянное значение p_i на каждом из рёбер e_i. Кроме того, имея методику оценки спектра симметричных матриц вида (1), достаточно просто оценивать разброс спектра в более общем случае, когда вещественная матрица на графе вторичной топологии асимметрична. При этом достаточно воспользоваться свойством

$$\mathrm{Re}\lambda\left[\mathbf{M}\right]=\lambda\left[\frac{\mathbf{M}+\mathbf{M}^{*}}{2}\right]=\lambda\left[\mathbf{M}_{s}\right],\qquad \mathrm{Im}\lambda(\mathbf{M})=\lambda\left[\frac{\mathbf{M}-\mathbf{M}^{*}}{2i}\right]=-i\lambda\left[\mathbf{M}_{c}\right], \tag{6}$$

справедливым для произвольной матрицы $\mathbf{M}$.

Характеристические полиномы матриц на графах вторичной топологии

Прежде чем перейти к определению характеристического полинома матрицы (1) рассмотрим характеристические полиномы трёхдиагональных матриц вида (5). Для матриц (5) справедлива следующая

Теорема 1. Характеристический полином матрицы (5) размерности $s_i \times s_i$ имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{P_{\mathbf{L}}(\lambda)}{b_i^{s_i}} =& U_{s_i}\left(\frac{\lambda-a_i}{2b_i}\right)+\frac{a_i^{(0)}-2a_i+a_i^{(1)}}{b_i}U_{s_i-1}\left(\frac{\lambda-a_i}{2b_i}\right)+\\ &+\frac{(a_i-a_i^{(0)})(a_i-a_i^{(1)})}{b_i^2}U_{s_i-2}\left(\frac{\lambda-a_i}{2b_i}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. [1] Пусть $a=a^{(0)}=a^{(1)}$, тогда матрица $\mathbf{L}$ представима в виде $\mathbf{L}=a\mathbf{I}+b\mathbf{C}$ и

$$\begin{aligned}P''_{\mathbf{L}}(\lambda) =& \det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}\right)=\det\left(\lambda\mathbf{I}-(a\mathbf{I}+b\mathbf{C})\right)=b^{s}\det\left(\frac{\lambda-a}{b}\mathbf{I}-\mathbf{C}\right)\\ =& b^{s}P_{\mathbf{C}}\left(\frac{\lambda-a}{b}\right)=b^{s}U_{s}\left(\frac{\lambda-a}{2b}\right).\end{aligned}$$

При переходе от характеристического полинома для матрицы смежности пути $P_{\mathbf{C}}(\cdot)$ к полиному Чебышева второго рода $U_s(\cdot)$ в последнем равенстве использовалась известная теорема о характеристическом полиноме и спектре матрицы смежности пути (см., например, [4, с. 73]). Таким образом, для случая $a=a^{(0)}=a^{(1)}$ справедливо соотношение

$$\frac{P''_{\mathbf{L}}(\lambda)}{b^{s}}=U_{s}\left(\frac{\lambda-a}{2b}\right). \tag{8}$$

Используя (8) при выводе соотношений для более общего случая, когда $a=a^{(1)}$, но $a\neq a^{(0)}$, имеем

[1] Для того, чтобы упростить запись, в доказательстве теоремы опущен индекс i.

$$P'_{\mathbf{L}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a^{(0)} & -b\cdot\mathbf{e}_{s-1}^T \\ -b\cdot\mathbf{e}_{s-1} & \lambda\mathbf{I} - \mathbf{L}^{(s-1)} \end{pmatrix} = \left(\lambda - a^{(0)}\right) P''_{\mathbf{L}_i^{(s-1)}} - b^2 P''_{\mathbf{L}^{(s-2)}} =$$
$$= \left(\lambda - a^{(0)}\right) b^{s-1} U_{s-1}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right) - b^s U_{s-1}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right) =$$
$$= b^{-s}\left(\frac{\lambda - a^{(0)}}{b} U_{s-1}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right) - U_{s-2}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right)\right)$$
$$= b^{-s}\left(\left(2\frac{\lambda - a}{2b} U_{s-1}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right) - U_{s-2}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right)\right) - \frac{a - a^{(0)}}{b} U_{s-1}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right)\right).$$

После применения к последнему выражению в скобках рекурентного определения многочлена Чебышева второго рода соотношение для характеристического полинома приобретает вид

$$\frac{P_{\mathbf{L}}(\lambda)}{b^s} = U_s\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right) + \frac{a^{(0)} - a}{b} U_{s-1}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right). \tag{9}$$

Распространяя использованный при доказательстве соотношения (9) подход на случай, когда $a \neq a^{(0)}$ и $a \neq a^{(1)}$, получаем

$$P_{\mathbf{L}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda\mathbf{I} - \mathbf{L}^{(s-1)} & -b\cdot\mathbf{e}_1 \\ -b\cdot\mathbf{e}_1^T & \lambda - a^{(1)} \end{pmatrix} = \left(\lambda - a^{(0)}\right) P'_{\mathbf{L}_i^{(s-1)}} - b^2 P'_{\mathbf{L}^{(s-2)}} =$$
$$= b^s\left(\frac{(\lambda - a^{(0)})(\lambda - a^{(1)})}{b^2} U_{s-2}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{a^{(0)} - 2\lambda + a^{(1)}}{b} U_{s-3}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right) + U_{s-4}\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right)\right).$$

Применение к последнему выражению рекурентного определения многочлена Чебышева второго рода позволяет получить соотношение (7).$\blacksquare$

Воспользовавшись теоремой 2, несложно получить выражение для характеристического полинома матрицы (1) на произвольном графе вторичной топологии $\mathbf{\Gamma}_{\Delta x}$.

Теорема 2. Характеристический полином матрицы (1) имеет вид

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\left(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}' - \mathbf{A}'\right) \prod_{i\in\mathcal{I}} P_{\mathbf{L}_i}(\lambda), \tag{10}$$

где

$$\mathbf{D}' = \bigoplus_{I\in\mathcal{J}}\left(d_I + \sum_{j\in\mathcal{I}_I}\left(b_j^{(d)}\right)^2 \frac{P_{\mathbf{L}_j^{(1-d)}}(\lambda)}{P_{\mathbf{L}_j}(\lambda)}\right), \tag{11}$$

в матрице $\mathbf{A}'$

$$(\mathbf{A}')_{I,J} = \sum_{i\in\mathcal{I}_I\cap\mathcal{I}_J} \frac{b_i^{(0)} b^{s_i-2} b_i^{(1)}}{P_{\mathbf{L}_j}(\lambda)}, \qquad I,J=\overline{1,n}, \tag{12}$$

$P_{\mathbf{L}_j}(\cdot)$ задаётся формулой (7), а матрица $\mathbf{L}_j^{(1-d)}$ получается из матрицы $\mathbf{L}_j$ путём вычёркивания строки и столбца, содержащих элемент $a_j^{(d)}$.

Доказательство. Применение свойств определителя, кронекеровского произведения и основных матричных операций, а также определения алгебраического дополнения [8] позволяет получить следующий результат

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{A}}(\lambda) = {} & \det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix}\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D} & -\mathbf{E}\\ -\mathbf{E}^T & \lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}\end{pmatrix} = \det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L})\times\\
& \times\det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}-\mathbf{E}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{E}^T\right)=\\
= {} & \det\left(\bigoplus_{i=1}^m(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)\right)\det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}-\mathbf{E}\bigoplus_{i=1}^m\frac{\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)}{\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)}\mathbf{E}^T\right)=\\
= {} & \prod_{i=1}^m\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)\det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}-\sum_{i=1}^m\mathbf{E}_i\frac{\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)}{\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)}\mathbf{E}_i^T\right)=\\
= {} & \prod_{i=1}^m\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)\det\Bigg(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}-\\
& -\sum_{i=1}^m\left(b_i^{(0)}\mathbf{e}_{I0}\mathbf{e}_1^T+b_i^{(1)}\mathbf{e}_{I1}\mathbf{e}_{s_i}^T\right)\frac{\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)}{\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)}\left(b_i^{(0)}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{I0}^T+b_i^{(1)}\mathbf{e}_{s_i}\mathbf{e}_{I1}^T\right)\Bigg)=\\
= {} & \prod_{i=1}^m\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)\det\Bigg(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}-\sum_{i=1}^m\left(b_i^{(1)}\right)^2\mathbf{e}_{I0}\frac{\mathbf{e}_1^T\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)\mathbf{e}_1}{\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)}\mathbf{e}_{I0}^T-\\
& -\sum_{i=1}^m\left(b_i^{(0)}\right)^2\mathbf{e}_{I1}\frac{\mathbf{e}_{s_i}^T\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)\mathbf{e}_{s_i}}{\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)}\mathbf{e}_{I1}^T-\sum_{i=1}^m\frac{b_i^{(0)}b^{s_i-2}b_i^{(1)}}{\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_j)}\left(\mathbf{e}_{I0}\mathbf{e}_{I1}^T+\mathbf{e}_{I1}\mathbf{e}_{I0}^T\right)\Bigg)=\\
= {} & \prod_{i=1}^m\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)\det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}-\sum_{i=1}^m\sum_{d\in\{0,1\}}\left(b_i^{(d)}\right)^2\frac{\det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i^{(1-d)}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)}\mathbf{e}_{Id}\mathbf{e}_{Id}^T-\mathbf{A}'\right)=\\
= {} & \prod_{i=1}^m\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_i)\det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}-\operatorname{diag}\left(\sum_{j\in\mathcal{I}_I}\left(b_j^{(d)}\right)^2\frac{\det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_j^{(1-d)}\right)}{\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{L}_j)}\right)-\mathbf{A}'\right)=\\
= {} & \prod_{i=1}^m P_{\mathbf{L}_i}(\lambda)\det\left(\lambda\mathbf{I}-\bigoplus_{I=1}^n\left(d_I+\sum_{j\in\mathcal{I}_I}\left(b_j^{(d)}\right)^2\frac{P_{\mathbf{L}_j^{(1-d)}}(\lambda)}{P_{\mathbf{L}_j}(\lambda)}\right)-\mathbf{A}'\right).
\end{aligned}$$

Последнее выражение является одной из форм записи (10). ■

Вычисление значений характеристических полиномов матриц вида (1) с помощью элементарных функций

Для быстрого вычисления с помощью элементарных функций значения характеристического полинома матрицы (5) от комплексного аргумента можно воспользоваться следующим следствием теоремы 2.

Теорема 3. Если $\lambda \in \mathbb{C}$ и $s_i \geq 3$, то

$$P_{\mathbf{L}_i}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{if } \lambda = a_i; \\ \left(1+\alpha_i^{(0)}\right)\left(1+\alpha_i^{(1)}\right)(s_i-1)+\alpha_i^{(0)}+\alpha_i^{(1)}+2, & \text{if } \lambda = a_i+2b_i; \\ (-1)^{s_i}\left(\left(1-\alpha_i^{(0)}\right)\left(1-\alpha_i^{(1)}\right)(s_i-1)-\right. & \\ \quad \left.-\alpha_i^{(0)}-\alpha_i^{(1)}+2\right), & \text{if } \lambda = a_i-2b_i; \\ \frac{b_i^{s_i}}{z-z^{-1}}\left(\left(1+\frac{\alpha_i^{(0)}}{z}\right)\left(1+\frac{\alpha_i^{(1)}}{z}\right)z^{s_i}-\right. & \\ \quad \left.-\left(1+\frac{\alpha_i^{(0)}}{z^{-1}}\right)\left(1+\frac{\alpha_i^{(1)}}{z^{-1}}\right)z^{-s_i}\right), & \text{if } \left|\frac{\lambda-a_i}{2b_i}\right| \neq 1 \vee \lambda \neq a_i, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\alpha_i^{(d)} = \frac{a_i - a_i^{(d)}}{b_i},$$

$$z = \frac{\lambda - a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right)^2 - 1}.$$

Доказательство. Поскольку при $z \neq 0$ справедливо тождество

$$\frac{\lambda - a_i}{2b_i} = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right),$$

то в соответствии со свойствами многочлена Чебышева второго рода (см. [9, с. 27] и [10, с. 116-121]) при $z \neq \pm 1$ имеем

$$U_s\left(\frac{\lambda - a}{2b}\right) = U_s\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^s - z^{-s}}{z - z^{-1}}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{P_{\mathbf{L}_i}(\lambda)}{b^s} &= \frac{z^s - z^{-s}}{z - z^{-1}} - \frac{a^{(0)} - 2a + a^{(1)}}{b}\frac{z^{s-1} - z^{1-s}}{z - z^{-1}} + \\ &\quad + \frac{(a - a^{(0)})(a - a^{(1)})}{b^2}\frac{z^{s-2} - z^{2-s}}{z - z^{-1}} = \\ &= \frac{z^s}{z - z^{-1}}\left(1 - \frac{a^{(0)} - 2a + a^{(1)}}{b}z^{-1} + \frac{(a - a^{(0)})(a - a^{(1)})}{b^2}\left(z^{-1}\right)^2\right) - \\ &\quad - \frac{z^{-s}}{z - z^{-1}}\left(1 - \frac{a^{(0)} - 2a + a^{(1)}}{b}z + \frac{(a - a^{(0)})(a - a^{(1)})}{b^2}z^2\right). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остаётся рассмотреть частные случаи, когда $z = 0$ или $z = \pm 1$. Поскольку $U_s(0) = 0$ для $s \geq 1$, то при $z = 0$ ($\lambda = a$)

$$\frac{P_{\mathbf{L}}(a)}{b^s} = \frac{a^{(0)}a^{(1)}}{b^2}U_{s-2}(0) + \frac{a^{(0)} + a^{(1)}}{b}U_{s-3}(0) + U_{s-4}(0) = 0.$$

Поскольку $U_s(1) = s + 1$ для $s \geq 1$, то при $z = 1$ ($\lambda = a + 2b$)

$$\frac{P_{\mathbf{L}}(\lambda)}{b^s} = \frac{(a + 2b - a^{(0)})(a + 2b - a^{(1)})}{b^2}(s-1) + \frac{a^{(0)} - 2(a + 2b) + a^{(1)}}{b}(s-2) + \\ + (s-3) = \left(1 + \frac{a - a^{(0)}}{b}\right)\left(1 + \frac{a - a^{(1)}}{b}\right)(s-1) + \frac{a - a^{(0)}}{b} + \frac{a - a^{(1)}}{b} + 2.$$

Поскольку $U_s(-1) = (-1)^s(s+1)$ для $s \geq 1$, то при $z = 1$ ($\lambda = a + 2b$)

$$\frac{P_{\mathbf{L}}(\lambda)}{b^s} = \frac{(a - 2b - a^{(0)})(a - 2b - a^{(1)})}{b^2}(-1)^{s-2}(s-1) + \\ + \frac{a^{(0)} - 2(a - 2b) + a^{(1)}}{b}(-1)^{s-3}(s-2) + (-1)^{s-4}(s-3) = \\ = (-1)^s\left(\left(1 - \frac{a - a^{(0)}}{b}\right)\left(1 - \frac{a - a^{(1)}}{b}\right)(s-1) - \frac{a - a^{(0)}}{b} - \frac{a - a^{(1)}}{b} + 2\right). \quad \blacksquare$$

Прямым следствием теоремы 2 является также формула для вычисления $P_{\mathbf{L}_i}(\cdot)$ при вещественном значении аргумента $\lambda \in \mathbb{R}$

$$P_{\mathbf{L}_i}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{if } \lambda = a_i; \\ (-1)^{s_i}\left(\left(1 - \alpha_i^{(0)}\right)\left(1 - \alpha_i^{(1)}\right)(s_i - 1) - \right. \\ \quad \left. -\alpha_i^{(0)} - \alpha_i^{(1)} + 2\right), & \text{if } \lambda = a_i - 2b_i; \\ \frac{b_i^{s_i}}{\sin\theta}\left(\sin s_i\theta - (\alpha_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)})\sin(s_i - 1)\theta + \right. \\ \quad \left. + \alpha_i^{(0)}\alpha_i^{(1)}\sin(s_i - 2)\theta\right) & \text{if } \left|\frac{\lambda - a_i}{2b_i}\right| < 1 \vee \lambda \neq a_i, \\ \left(1 + \alpha_i^{(0)}\right)\left(1 + \alpha_i^{(1)}\right)(s_i - 1) + \alpha_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)} + 2, & \text{if } \lambda = a_i + 2b_i; \\ \frac{b_i^{s_i}}{\omega - \omega^{-1}}\left(\left(1 + \frac{\alpha_i^{(0)}}{\omega}\right)\left(1 + \frac{\alpha_i^{(1)}}{\omega}\right)\omega^{s_i} - \right. \\ \quad \left. - \left(1 + \frac{\alpha_i^{(0)}}{\omega^{-1}}\right)\left(1 + \frac{\alpha_i^{(1)}}{\omega^{-1}}\right)\omega^{-s_i}\right), & \text{if } \left|\frac{\lambda - a_i}{2b_i}\right| > 1; \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\omega + \omega^{-1} = \frac{\lambda - a_i}{b_i}, |\omega| > 1; \quad \theta = \arccos\left(\frac{\lambda - a_i}{2b_i}\right),$$

доказательство которой идентично доказательству следствия 3.

Предельные свойства спектра матрицы $\mathbf{A}$

Для исследования предельных свойств спектров матриц вида (1) при уменьшении шага дискретизации по пространству Δx чрезвычайно полезной оказывается

Лемма 4. Предел отношения значений характеристических полиномов матриц $\mathbf{L}_i^{(1-d)}$ и $\mathbf{L}_i$ размерности $s_i \times s_i$ одного и того же аргумента $\lambda \in \mathbb{R}$ при $\left|\frac{\lambda - a_i}{2b_i}\right| > 1$ и $s_i \to \infty$ существует и равен

$$\lim_{s_i \to \infty} \frac{P_{\mathbf{L}_i^{(1-d)}}(\lambda)}{P_{\mathbf{L}_i}(\lambda)} = \frac{1}{b_i\omega + a_i - a_i^{(d)}} \tag{15}$$

где $\lambda = a_i + b_i\left(\omega + \omega^{-1}\right)$, $|\omega| > 1$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно воспользоваться формулой (14)

$$\lim_{s_i \to \infty} \frac{P_{\mathbf{L}_i^{(1-d)}}(\lambda)}{P_{\mathbf{L}_i}(\lambda)} =$$

$$= \lim_{s_i \to \infty} \frac{\left(1 + \alpha_i^{(1-d)}\omega^{-1}\right)\omega^{s_i - 1} - \left(1 + \alpha_i^{(0)}\omega\right)\omega^{1 - s_i}}{b_i\left(\left(1 + \alpha_i^{(0)}\omega^{-1}\right)\left(1 + \alpha_i^{(1)}\omega^{-1}\right)\omega^{s_i} - \left(1 + \alpha_i^{(0)}\omega\right)\left(1 + \alpha_i^{(1)}\omega\right)\omega^{-s_i}\right)} =$$

$$= \frac{1}{b_i\left(1 + \alpha_i^{(d)}\omega^{-1}\right)\omega}. \quad \blacksquare$$

Основываясь на лемме 4 докажем вспомогательную теорему.

Теорема 5. Для всех

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \left[a_i - 2|b_i|, a_i + 2|b_i|\right]\right)$$

следующий предел существует и равен

$$\lim_{\min_{i \in \mathcal{I}} s_i \to \infty} \frac{P_{\mathbf{A}}(\lambda)}{\prod_{i \in \mathcal{I}} P_{\mathbf{L}_i}(\lambda)} = \prod_{I \in \mathcal{J}} \left(\lambda - d_I - \sum_{j \in \mathcal{I}_I} \frac{\left(b_j^{(d)}\right)^2}{b_j\omega_j + a_j - a_j^{(d)}}\right), \tag{16}$$

где значения $\omega_i \in \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| > 1\}$ удовлетворяют соотношениям

$$\omega_i + \omega_i^{-1} = \frac{\lambda - a_i}{b_i}. \tag{17}$$

Доказательство. Поскольку

$$\lim_{s_i\to\infty}\frac{b_i^{(0)}b_i^{(1)}}{P_{\mathbf{L}_j}(\lambda)}=$$

$$=\lim_{s_i\to\infty}\frac{b_i^{(0)}b^{s_i-2}b_i^{(1)}(\omega-\omega^{-1})}{b_i^2\left(\left(1+\alpha_i^{(0)}\omega^{-1}\right)\left(1+\alpha_i^{(1)}\omega^{-1}\right)\omega^{s_i}-\left(1+\alpha_i^{(0)}\omega\right)\left(1+\alpha_i^{(1)}\omega\right)\omega^{-s_i}\right)}=0,$$

имеем

$$\lim_{s\to\infty}\mathbf{A}'=\lim_{s\to\infty}\sum_{i\in\mathcal{I}}\frac{b_i^{(0)}b^{s_i-2}b_i^{(1)}}{P_{\mathbf{L}_j}(\lambda)}\left(\mathbf{e}_{I0}\mathbf{e}_{I1}^T+\mathbf{e}_{I1}\mathbf{e}_{I0}^T\right)=\mathbf{O}.$$

Т. о.

$$\lim_{s\to\infty}\frac{P_{\mathbf{A}}(\lambda)}{\prod_{i\in\mathcal{I}}P_{\mathbf{L}_i}(\lambda)}=\lim_{s\to\infty}\det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}'-\mathbf{A}'\right)=\lim_{s\to\infty}\det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}'\right)=$$

$$=\prod_{I\in\mathcal{J}}\left(\lambda-d_I-\sum_{j\in\mathcal{I}_I}\left(b_j^{(d)}\right)^2\frac{P_{\mathbf{L}_j^{(1-d)}}(\lambda)}{P_{\mathbf{L}_j}(\lambda)}\right).$$

Применив к последнему выражению лемму 4 в итоге получаем формулу (16). ∎

Теорема 5 позволяет получить следующий результат по оценке спектра матрицы (1) в пределе при $\Delta x\to 0$.

Теорема 6. Пусть

$$s\stackrel{\mathrm{def}}{=}\min_{i\in\mathcal{I}}s_i$$

и задано множество

$$\Lambda^\infty=\Lambda_1^\infty\cup\Lambda_2^\infty\cup\Lambda_3^\infty, \tag{18}$$

где

$$\Lambda_1^\infty\stackrel{\mathrm{def}}{=}\bigcup_{i\in\mathcal{I}}\left[a_i-2\left|b_i\right|,a_i+2\left|b_i\right|\right], \tag{19}$$

$$\Lambda_2^\infty\stackrel{\mathrm{def}}{=}\bigcup_{i\in\mathcal{I},d\in\{0,1\}}\left\{a_i^{(d)}+\frac{b_i^2}{a_i^{(d)}-a_i}:\left|\frac{a_i^{(d)}-a_i}{b_i}\right|>1\right\}, \tag{20}$$

$$\Lambda_3^\infty\stackrel{\mathrm{def}}{=}\bigcup_{I\in\mathcal{J}}\left\{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\left(\Lambda_1^\infty\cup\Lambda_2^\infty\right):\lambda-d_I-\sum_{j\in\mathcal{I}_I}\frac{\left(b_j^{(d)}\right)^2}{b_j\omega_j+a_j-a_j^{(d)}}=0\right\}. \tag{21}$$

Тогда при $s \to \infty$ собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ (1) стремятся к значениям из некоторого счётного подмножества множества Λ^{∞}, плотного в Λ^{∞}. Причём

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_{\min} = \inf \Lambda^{\infty}, \qquad \lim_{s\to\infty} \lambda_{\max} = \sup \Lambda^{\infty}. \tag{22}$$

Доказательство. Поскольку матрица $\mathbf{A}$ (1) симметрична, все её собственные значения являются вещественными числами.

Рассмотрим каждый из сомножителей в (10) по отдельности.

Для анализа распределения корней многочленов $P_{\mathbf{L}_i}(\cdot)$ воспользуемся формулой (14). Согласно формуле (14), одним из нулей полинома $P_{\mathbf{L}_i}(\cdot)$ обязательно является число a_i. Если $\lambda \in (a_i - 2|b_i|, a_i + 2|b_i|)$, то

$$\lim_{s_i\to\infty} P_{\mathbf{L}_i}(\lambda) = \lim_{s_i\to\infty} \frac{b_i^{s_i}}{\sin\theta} \Big(\sin s_i\theta - (\alpha_i^{(0)} + \alpha_i^{(1)})\sin(s_i-1)\theta + \\ +\alpha_i^{(0)}\alpha_i^{(1)}\sin(s_i-2)\theta\Big) = \frac{(1-\alpha_i^{(0)})(1-\alpha_i^{(1)})}{\sin\theta} \lim_{s_i\to\infty} b_i^{s_i}\sin s_i\theta,$$

где $\lambda = a_i + 2b_i\cos\theta$. Но последний предел обращается в ноль только, когда $s_i\theta = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда можно заключить, что при $s_i \to \infty$ значения корней полинома $P_{\mathbf{L}_i}(\cdot)$, заключённые в интервале $(a_i - 2|b_i|, a_i + 2|b_i|)$, стремятся к

$$\lambda = a_i + 2b_i\cos\frac{\pi k}{s_i}, \qquad k \in \overline{1, s_i - 1}. \tag{23}$$

Этим объясняется присутствие в утверждении теоремы множества Λ_1^{∞}, счётным подмножеством которого являются значения большинства корней $P_{\mathbf{L}_i}(\cdot)$, а также то, что множество корней $P_{\mathbf{L}_i}(\cdot)$ является плотным в интервалах $(a_i - 2|b_i|, a_i + 2|b_i|)$. Также из (23), очевидно, следует, что наименьший из корней стремится к $a_i - 2|b_i|$, а наибольший к $a_i + 2|b_i|$. Граничные точки отрезка $[a_i - 2|b_i|, a_i + 2|b_i|]$ (числа $\lambda = a_i \pm 2b_i$) являются нулями полинома $P_{\mathbf{L}_i}(\cdot)$ лишь в том случае, когда либо $\alpha_i^{(0)} = \alpha_i^{(1)} = 1$, либо $\alpha_i^{(0)} = \alpha_i^{(1)} = -1$. Если какой-либо из нулей λ полинома $P_{\mathbf{L}_i}(\cdot)$ находится вне интервала $[a_i - 2|b_i|, a_i + 2|b_i|]$, т. е. $|\omega| > 1$, то

$$P_{\mathbf{L}_i}(\lambda) = \frac{b_i^{s_i}}{\omega - \omega^{-1}} \left(\left(1 + \frac{\alpha_i^{(0)}}{\omega}\right)\left(1 + \frac{\alpha_i^{(1)}}{\omega}\right)\omega^{s_i} - \left(1 + \frac{\alpha_i^{(0)}}{\omega^{-1}}\right)\left(1 + \frac{\alpha_i^{(1)}}{\omega^{-1}}\right)\omega^{-s_i} \right) = 0.$$

Но последнее для $\omega \in \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| > 1\}$ при $s_i \to \infty$ возможно лишь в том случае, когда

$$\omega = -\alpha_i^{(0)} \quad \text{или} \quad \omega = -\alpha_i^{(1)}.$$

Т. о. множество нулей полиномов $P_{\mathbf{L}_i}(\cdot)$, которые лежат вне отрезков $[a_i - 2|b_i|, a_i + 2|b_i|]$ при $s \to \infty$ стремится к значениям, равным элементам множества

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}, d \in \{0,1\}} \left\{ a_i - b_i \left(\alpha_i^{(d)} + \frac{1}{\alpha_i^{(d)}} \right) : \left| \alpha_i^{(d)} \right| > 1 \right\}.$$

Последнее множество в свою очередь совпадает с Λ_2^∞ из (20).

Для отыскания предельных значений дополнительных корней $P_{\mathbf{A}}(\cdot)$, не входящих в множество $\Lambda_1^\infty \cup \Lambda_2^\infty$ при $s \to \infty$, достаточно воспользоваться теоремой 5. Исходя из формулы (16), такие значения должны удовлетворять условию

$$\prod_{I \in \mathcal{J}} \left(\lambda - d_I - \sum_{j \in \mathcal{I}_I} \frac{\left(b_j^{(d)}\right)^2}{b_j \omega_j + a_j - a_j^{(d)}} \right) = 0. \tag{24}$$

Но множество чисел λ, удовлетворяющих этому условию, совпадает с множеством Λ_3^∞. $\blacksquare$

При $a_i = a_i^{(0)} = a_i^{(1)} = a$ и $b_i = b_i^{(0)} = b_i^{(1)} = b$ для всех $i \in \mathcal{I}$ структура множества Λ^∞ значительно упрощается за счёт того, что $\Lambda_2^\infty = \emptyset$, и принимает вид:

$$\Lambda^\infty = [a - 2|b|, a + 2|b|] \cup \left(\bigcup_{I \in \mathcal{J}} \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \setminus [a - 2|b|, a + 2|b|] : \lambda - d_I - \frac{m_I}{b\omega} = 0 \right\} \right). \tag{25}$$

Спектры графов вторичной топологии

Из спектральной теории графов известно, что наиболее важные спектры графов можно описать с помощью корней полинома

$$F_\mu(\lambda) = F(\lambda, \mu) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mu \mathbf{D} - \mathbf{A}), \tag{26}$$

где $\mathbf{D}$ — матрица степеней вершин графа, $\mathbf{A}$ — матрица смежности графа. Если рассматривать $F_\mu(\cdot)$ как характеристический полином матрицы $\mathbf{A}$ (1), то $a_i = a_i^{(0)} = a_i^{(1)} = a = 2\mu$, $d_I = m_I \mu$, $b_i = b_i^{(0)} = b_i^{(1)} = b = 1$, и подстановка в формулу (25) значений a, b и d_I даёт

$$\Lambda^\infty = [2(\mu - 1), 2(\mu + 1)] \cup \left(\bigcup_{I \in \mathcal{J}} \left\{ 2\mu + \omega_I + \frac{1}{\omega_I} \right\} \right), \tag{27}$$

где

$$\omega_I = \begin{cases} \mu\left(\frac{m_I}{2}-1\right) - \sqrt{\mu^2\left(\frac{m_I}{2}-1\right)^2 + m_I - 1}, & \text{if } \mu < 0; \\ \mu\left(\frac{m_I}{2}-1\right) + \sqrt{\mu^2\left(\frac{m_I}{2}-1\right)^2 + m_I - 1}, & \text{if } \mu \geq 0. \end{cases}$$

В частности, для матрицы смежности ($P_{\mathbf{A}}(\lambda) = F_0(\lambda)$)

$$\Lambda^\infty = [-2, 2] \cup \left(\bigcup_{I \in \mathcal{J}} \left\{ \frac{m_I}{\sqrt{m_I - 1}} \right\} \right),$$

а для Лапласиана ($P_{\mathcal{L}}(\lambda) = (-1)^n F_{-1}(-\lambda)$)

$$\Lambda^\infty = [0, 4] \cup \left(\bigcup_{I \in \mathcal{J}} \left\{ \frac{m_I^2}{m_I - 1} \right\} \right).$$

Более того, использование теоремы 6, позволяет получить важные оценки для максимального собственного значения различных спектров произвольного графа, отсутствующие в основных литературных источниках по спектральной теории графов [4–7].

Теорема 7. Пусть

$$\Delta(\mathbf{\Gamma}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{v \in V} \deg v.$$

(i) Справедливы следующие оценки для максимальных собственных значений спектров произвольного связного графа:

(a) для спектра матрицы смежности

$$\frac{\Delta(\mathbf{\Gamma})}{\sqrt{\Delta(\mathbf{\Gamma}) - 1}} < \lambda_{\max} \leq \Delta(\mathbf{\Gamma}); \tag{28}$$

(b) для спектра Лапласиана

$$\frac{\Delta(\mathbf{\Gamma})^2}{\Delta(\mathbf{\Gamma}) - 1} < \lambda_{\max} \leq 2\Delta(\mathbf{\Gamma}). \tag{29}$$

(ii) Основываясь лишь на знании значения максимальной степени вершины графа $\Delta(\mathbf{\Gamma})$, нельзя улучшить оценки (28) и (29).

Выводы

Анализ устойчивости и оценка глобальной погрешности численных методов интегрирования ДУЧП на геометрических графах нередко связаны с рядом промежуточных задач, таких как оценивание μ-норм и спектров конечно-разностных приближений дифференциальных операторов на геометрических графах. При их решении, если шаг дискретизации Δx достаточно мал, могут успешно использоваться полученные в данной работе результаты о разбросе спектра матриц вида (1) на графах вторичной топологии. В то же время следует отметить, что для многих матриц оценки разброса спектра на основе теоремы 6 лишь незначительно точнее оценок на основе классических методов локализации спектра [3]. Так, например, оценка наибольшего собственного значения Лапласиана графа на основе теоремы 6 менее чем в два раза отличается от простейшей оценки с помощью кругов Гершгорина. Представляет интерес также вопрос о скорости сходимости собственных чисел матриц вида (1) при уменьшении шага дискретизации Δx.

Литература

1. Lagnese, J. E. Domain Decomposition Methods in Optimal Control of Partial Differential Equations [Text] / John E. Lagnese, Günter Leugering. — Berlin, 2004. — Vol. 148 of International Series of Numerical Mathematics. — 443 p. — ISBN 978-3-7643-2194-9.

2. Gogolenko, S. Y. Architecture aware parallelization of solvers for PDE systems on geometrical graphs / Sergiy Y. Gogolenko, Volodymyr Svjatnyj // Computer Science - R&D. — 2009. — Vol. 23, no. 3-4. — P. 225–230.

3. Маркус, М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств [Текст] / М. Маркус, Х. Минк; Пер. с англ. Серия: Физико-математическое наследие: математика (алгебра). — 3-е изд. — Москва: Книжный дом ”ЛИБРОКОМ”, 2009. — 232 с. — ISBN 978-5-397-00208-0.

4. Цветкович, Д. Спектры графов [Текст]: Теория и применение / Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс; Пер. с англ. В. С. Королюка; Под ред. В. С. Королюка. — 2-е изд. — Киев: Наукова думка, 1984. — 384 с. — Библиогр.: С. 338–372.

5. Chung, F. R. K. Spectral Graph Theory [Text] / Fan R. K. Chung. — Providence, RI: AMS Publisher, 1997. — Vol. 92 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. — 207 p. — ISBN 0821803158.

6. Doob, M. Spectral Graph Theory [Text] / Michael Doob // Gross, J. Handbook of Graph Theory / Jonathan Gross, Jay Yellen. — 1st ed. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. — Vol. 25 of Discrete Mathematics and Its Applications. — P. 1–2.

7. Spielman, D. Spectral Graph Theory and its Applications [Electronic resource]: web page of the course at Yale University / Dan Spielman; Yale University. — Yale, 2004. — Access: http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/eigs/.

8. Магнус, Я. Р. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике [Текст] / Ян Р. Магнус, Хайнц Нейдеккер; Пер. с англ. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 496 с. — ISBN 5-9221-0262-1.

9. Mason, J. C. Chebyshev polynomials [Text] / John C. Mason, David Christopher Handscomb. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. — 335 p. — ISBN 0849303559.

10. Прасолов, В. В. Многочлены [Текст] / Виктор Васильевич Прасолов. — 3-е, испр. изд. — Москва: МЦНМО, 2003. — 336 с. — Библиогр.: С. 324–330. — Режим доступа: ftp://ftp.mccme.ru/users/prasolov/polynoms/poly2pdf.zip. — ISBN 5-94057-077-1.

Надійшла до редакції 20.10.2009 р. Рецензент: к.т.н., доц. Зеленьова І. Я.

С. Ю. Гоголенко
Донецький національный технічний університет

Характеристичні поліноми і спектри дійсних симетричних матриць на графах вторинної топології. У роботі розглядається проблема локалізації спектрів дійсних симетричних матриць на графах вторинної топології. Такими матрицями, зокрема, описуються кінцево-різницеві наближення деяких диференціальних операторів на геометричних графах (оператор Лапласа, тощо). Для матриць розглянутого типу в роботі виведено вираз характеристичного многочлена через поліноми Чебишева, за допомогою якого в свою чергу отримана теорема про поведінку спектрів таких матриць при зростанні їх розмірності. В якості одного з наслідків цієї теореми наводяться оптимальні оцінки максимального власного числа для різних спектрів графа на основі знання максимального ступеня вершини.
ДРЧП на геометричному графі, граф вторинної топології, характеристичний поліном, спектр матриці, спектр графа, матриця суміжності, Лапласіан графа

S. Y. Gogolenko
Donetsk National Technical University

Characteristic polynomials and spectra of real symmetric matrices on graphs of secondary topologies. This paper addresses the problem of spectra localization for real symmetric matrices on secondary topology graphs. In particular, such kind of matrices describes finite-difference approximations of some differential operators on geometric graphs (Laplace operator, etc.). Compact expression for the characteristic polynomial of these matrices is derived on the basis of Chebyshev polynomials. This expression is used to obtain a theorem about behavior of the spectra if matrix's dimensions increase. As a consequence of this theorem the optimal estimates of maximum eigenvalue for different spectra of graphs based on the maximum degree are obtained.
PDEs on geometric graphs, graph of secondary topology, characteristic polynomial, spectrum of matrix, spectrum of graph, adjacency matrix, Laplacian matrix