

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ**

**И**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению расчетно - проектировочных работ  
по сопротивлению материалов

**ЧАСТЬ 1**

Донецк - ДонНТУ, 2003

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ**

**И**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению расчетно - проектировочных работ  
по сопротивлению материалов

**ЧАСТЬ 1**

(для студентов **механических специальностей**)

Рассмотрено  
на заседании кафедры  
“Сопротивление материалов”  
Протокол № 14 от 21.04.2003 г.

Утверждено  
на заседании учебно-издательского  
совета ДонНТУ, протокол № 8 от  
02.06.2003 г.

УДК 539.4.

Контрольные задания и методические указания к выполнению расчетно - проектировочных работ по сопротивлению материалов. /Сост. Л.Н.Дядык, А.Ф.Толкачев, А.Н.Сурженко. - Донецк, ДонНТУ, - 79 с.

Приведены задания и примеры выполнения расчетно - проектировочных работ по разделам курса сопротивления материалов: растяжение - сжатие, плоское напряженно-деформированное состояние, кручение, геометрические характеристики плоских сечений, плоский поперечный изгиб.

Составители: доц. Л.Н.Дядык  
ст.пр. А.Ф.Толкачев,  
доц. А.Н.Сурженко

Ответственный за выпуск профессор Ф.Л.Шевченко.

## ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов рассматривает расчеты на прочность, жесткость и устойчивость отдельных элементов конструкций. При проведении таких расчетов необходимо сочетать надежность работы конструкции с ее экономичностью, добиваясь наибольшей прочности при наименьшем расходе материалов.

В методических указаниях рассматриваются схематизированные типовые элементы конструкций, методы их расчетов на прочность, жесткость и устойчивость, позволяющие студентам овладеть навыками самостоятельной работы.

Методические указания составлены в соответствии с учебной программой курса сопротивления материалов для студентов механических специальностей. Приведены условия и контрольные задания. Количество задач, выполняемых студентами, определяется решением кафедры, применительно к конкретной специальности, по которой осуществляется инженерная подготовка.

Данные для выполнения задач следует выбирать из соответствующей таблицы согласно фамилии и имени студента.

Например,

К	о	н	о	н	е	н	к	о	С	е	р	г	е	й
1	2	3	4	5	6	7	8		9	10				

На пересечении буквы и цифры находится заданная величина исходных данных.

## 1. РАСТЯЖЕНИЕ - СЖАТИЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются вопросы определения напряжений и деформаций в статически определимом стержне, а также расчет на прочность статически неопределимой стержневой системы.

### 1.1. Расчет статически определимого стержня

#### Задача 1

Для стального стержня ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа), находящегося под действием продольных сил (рис. 1.1), требуется построить эпюры продольных усилий, нормальных напряжений и перемещений.

Данные взять из табл. 1.1.

Таблица 1.1.

Буквы алфавита	Схема по рис. 1.1	$F, \text{см}^2$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$c, \text{м}$	$P, \text{кН}$	$q, \text{кН/м}$
а, б, в	I	11	31	11	21	1	0,30
г, д, е	II	12	32	12	22	2	0,28
ё, ж, з	III	13	33	13	23	3	0,27
и, й, к	IV	14	34	14	24	4	0,26
л, м, н,	V	15	35	15	25	5	0,25
о, п, р	VI	16	36	16	26	1,5	0,24
с, т, у	VII	17	37	17	27	2,5	0,23
ф, х, ц	VIII	18	38	18	28	3,5	0,22
ч, ш, щ	IX	19	39	19	29	4,5	0,21
э, ю, я	X	20	40	20	30	5,5	0,20
	1	2	3	4	5	6	7

Порядок выполнения задачи 1 аналогичен решению примера 1.

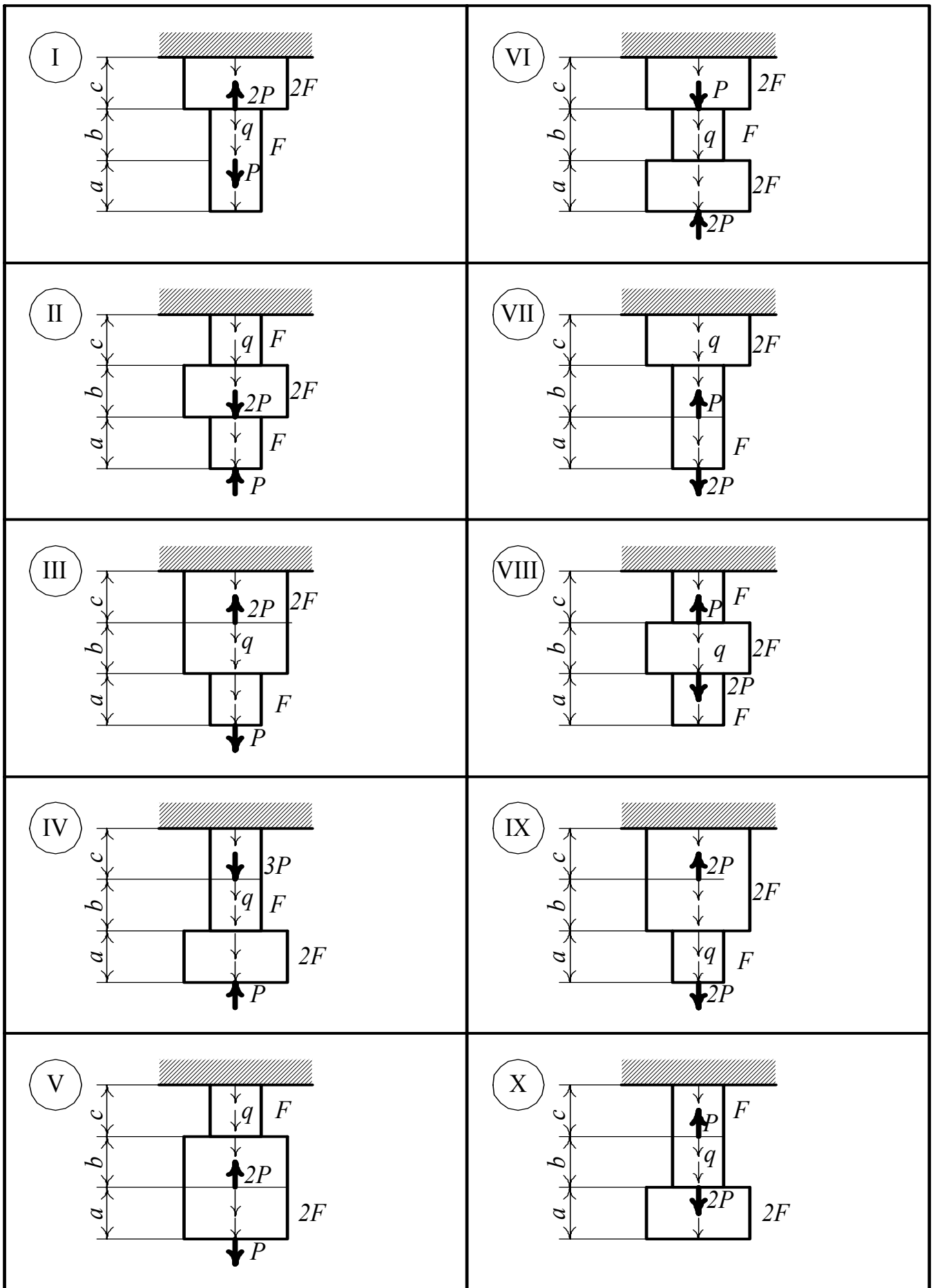


Рис. 1.1

Пример 1. Выполнить расчет стержня (рис. 1.2, а), у которого площади поперечных сечений участков (ступеней) равны:  $F_1 = F_3 = F = 20 \text{ см}^2$ , а  $F_2 = 2F = 40 \text{ см}^2$ . Длины участков  $l_1 = a = 30 \text{ м}$ ,  $l_2 = b = 20 \text{ м}$ ,  $l_3 = c = 10 \text{ м}$ . Вдоль оси стержня приложены силы  $P_1 = P = 4 \text{ кН}$  и  $P_2 = 2P = 8 \text{ кН}$  и распределенная нагрузка интенсивностью  $q = 0,2 \text{ кН/м}$  по всей длине стержня.

Решение.

1) Построение эпюры продольных усилий.

Разделим стержень на участки, в пределах которых силовой фактор описывается одним и тем же математическим выражением. Заданный стержень состоит из трех участков. В опоре возникает реакция, ее можно не вычислять, если нормальные усилия в различных сечениях стержня определять из условия равновесия свободной части стержня. Усилия на участках определяем методом сечений.

Вычислим продольное усилие на первом участке (рис. 1.2,б). Из условия равновесия ( $\sum Y = 0$ ) части первого участка длиной  $x$ , расположенной ниже сечения  $d - d$ , получим  $N_1(x) - P - qx = 0$ , откуда  $N_1(x) = P + qx$ . Так как на первом участке  $0 \leq x \leq a$ , то в начале первого участка при  $x = 0$   $N_1(0) = P = 4 \text{ кН}$ , а в конце участка при  $x = a = 30 \text{ м}$   $N_1(a) = P + qa = 4 + 0,2 \cdot 30 = 10 \text{ кН}$ .

Для второго участка начало координат берется на границе первого и второго участков. Рассматриваем равновесие части стержня, расположенной ниже сечения  $e - e$  (рис. 1.2, в):  $\sum Y = 0$ :  $N_2(x) - P - q(a + x) = 0$ : откуда  $N_2(x) = P + q(a + x)$ . Так как на втором участке  $0 \leq x \leq b$ , то при  $x = 0$   $N_2(0) = P + qa = 10 \text{ кН}$ , а при  $x = b$   $N_2(b) = P + q(a + b) = 4 + 0,2(30 + 20) = 14 \text{ кН}$ .

На третьем участке рассматриваем равновесие части стержня ниже сечения  $\kappa - \kappa$  (рис. 1.2, г):  $\sum Y = 0$ :  $N_3(x) - P - q(a + b + x) + 2P = 0$ ; откуда  $N_3(x) = P + q(a + b + x) - 2P = q(a + b + x) - P$ . Так как на третьем участке  $0 \leq x \leq c$ , то при  $x = 0$   $N_3(0) = q(a + b) - P = 0,2(30 + 20) - 4 = 6 \text{ кН}$ ; а при  $x = c$   $N_3(c) = q(a + b + c) - P = 0,2(30 + 20 + 10) - 4 = 8 \text{ кН}$ .

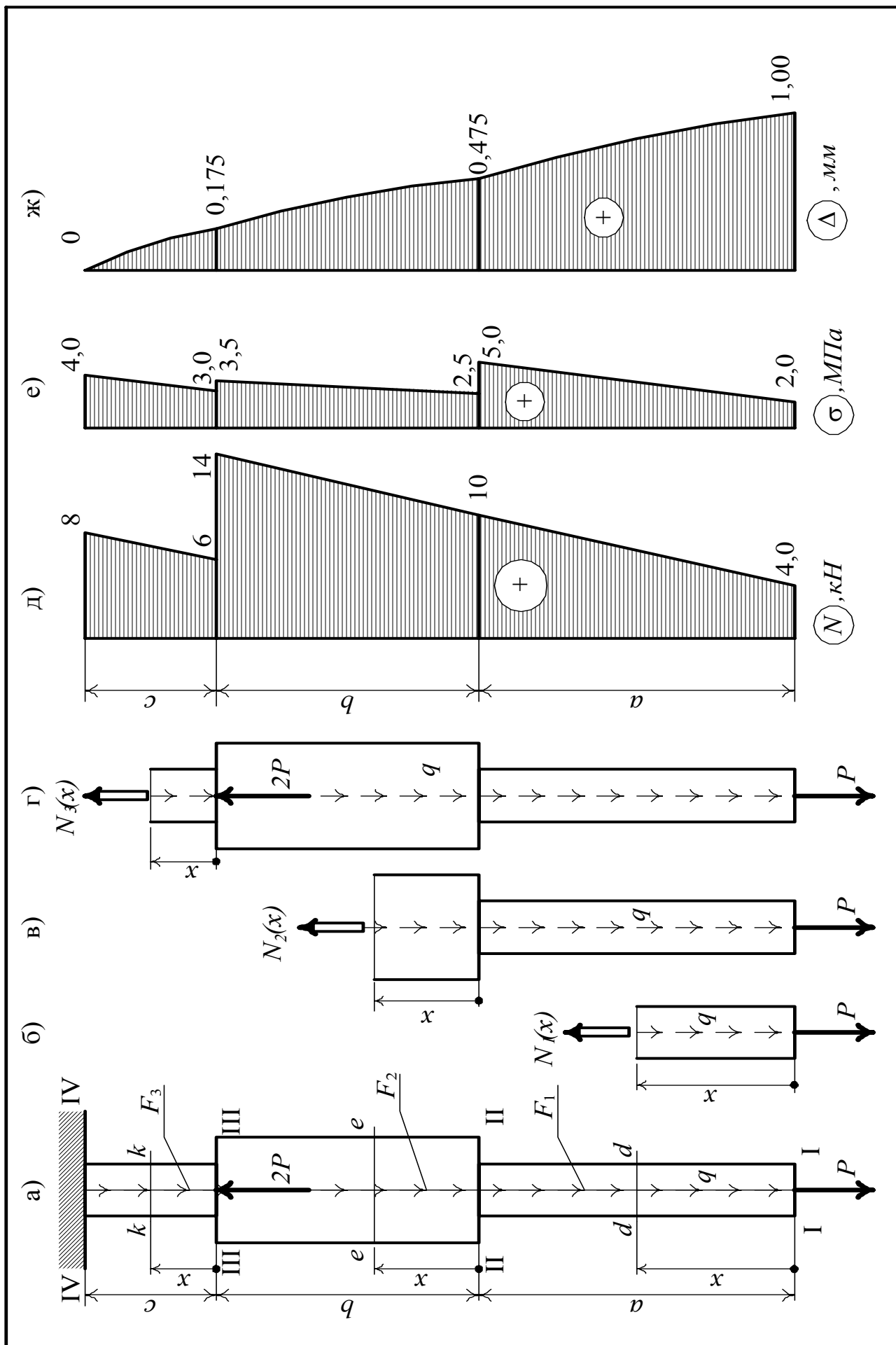


Рис. 1.2



По вычисленным значениям строим график распределения внутренних усилий  $N$  по длине стержня, т.е. строим эпюру продольных усилий (рис. 1.2, д).

2) Построение эпюры нормальных напряжений.

В любом сечении напряжение может быть определено по формуле

$$\sigma_i(x) = \frac{N_i(x)}{F_i}.$$

Подставляя в эту формулу значения усилий и площадей по участкам, получим:

Первый участок:

$$\sigma_1(x) = \frac{N_1(x)}{F_1} = \frac{P}{F_1} + \frac{qx}{F_1} = \frac{4 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,2 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} x = 2 \cdot 10^6 + 0,1 \cdot 10^6 x = (2 + 0,1x) \text{ МПа};$$

$$\sigma_1(0) = 2 \text{ МПа}, \quad \sigma_1(a) = \sigma_1(30) = 5 \text{ МПа}.$$

Второй участок:

$$\begin{aligned} \sigma_2(x) &= \frac{N_2(x)}{F_2} = \frac{P}{F_2} + \frac{q(a+x)}{F_2} = \frac{4 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,2 \cdot 10^3 \cdot (30+x)}{40 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 10^6 + 0,05 \cdot 10^6 \cdot (30+x) = (1 + 0,05 \cdot (30+x)) \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_2(0) = 2,5 \text{ МПа}, \quad \sigma_2(b) = \sigma_2(20) = 3,5 \text{ МПа}.$$

Третий участок:

$$\begin{aligned} \sigma_3(x) &= \frac{N_3(x)}{F_3} = \frac{q(a+b+x)}{F_3} - \frac{P}{F_3} = \frac{0,2 \cdot 10^3 \cdot (30+20+x)}{20 \cdot 10^{-4}} - \frac{4 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 0,1 \cdot 10^6 \cdot (50+x) - 2 \cdot 10^6 = (0,1 \cdot (50+x) - 2) \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_3(0) = 3 \text{ МПа}, \quad \sigma_3(c) = \sigma_3(10) = 4 \text{ МПа}.$$

На рис. 1.2, е показана эпюра нормальных напряжений.

3) Определение абсолютных деформаций участков стержня производится по формуле

$$\Delta l_i = \int_0^{l_i} \frac{N_i(x) dx}{EF(x)} = \frac{1}{E} \int_0^{l_i} \sigma_i(x) dx = \frac{\omega_i}{E},$$

где  $\omega_i$  - площадь эпюры напряжений на рассматриваемом участке.

Следовательно:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1(0) + \sigma_1(a)}{2} \cdot \frac{a}{E} = \frac{2 + 5}{2} \cdot \frac{30}{2 \cdot 10^5} = 0,525 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,525 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2(0) + \sigma_2(b)}{2} \cdot \frac{b}{E} = \frac{2,5 + 3,5}{2} \cdot \frac{20}{2 \cdot 10^5} = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,300 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3(0) + \sigma_3(c)}{2} \cdot \frac{c}{E} = \frac{3 + 4}{2} \cdot \frac{10}{2 \cdot 10^5} = 0,175 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,175 \text{ мм}.$$

Если эпюра напряжений не строится, тогда деформации можно определять интегрально. Например:

$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= \frac{1}{EF_2} \int_0^b N_2(x) dx = \frac{1}{EF_2} \int_0^b (P + q(a + x)) dx = \frac{1}{EF_2} \left( Px + q(a + x)^2 / 2 \right) \Big|_0^b = \\ &= \frac{1}{EF_2} \left( Pb + q \left( (a + b)^2 - a^2 \right) / 2 \right) = \frac{1}{EF_2} (Pb + qb(a + 0,5b)) = \frac{b(P + q(a + 0,5b))}{EF_2} = \\ &= \frac{20 \cdot (4 + 0,2 \cdot (30 + 0,5 \cdot 20)) \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,3 \text{ мм}. \end{aligned}$$

#### 4) Построение эпюры перемещений.

Перемещение сечения стержня равно алгебраической сумме деформаций участков, расположенных между этим сечением и закреплением стержня. Поэтому

$$\Delta_{IV} = 0, \quad \Delta_{III} = \Delta l_3 = 0,175 \text{ мм}, \quad \Delta_{II} = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 0,175 + 0,3 = 0,475 \text{ мм},$$

$$\Delta_I = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0,175 + 0,300 + 0,525 = 1,000 \text{ мм}.$$

Эпюра перемещений показана на рис. 1.2, ж.

Перемещение любого сечения можно определить и интегрально. Например,

$$\begin{aligned} \Delta_2(x) &= \Delta l_3 + \int_x^b \frac{N_2(x) dx}{EF_2} = \Delta l_3 + \frac{1}{EF_2} \left( Px + q(a + x)^2 / 2 \right) \Big|_x^b = \\ &= \Delta l_3 + \frac{1}{EF_2} \left( P(b - x) + q \left( (a + b)^2 - (a + x)^2 \right) / 2 \right). \end{aligned}$$

При  $x=0$   $\Delta_2(0) = \Delta_{II} = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 0,175 + 0,300 = 0,475$  мм;

при  $x = \frac{b}{2}$   $\Delta_2\left(\frac{b}{2}\right) = 0,175 + 0,1625 = 0,3375$  мм;

при  $x = b$   $\Delta_2(b) = \Delta l_3 = \Delta_{III} = 0,175$  мм.

## 1.2. Расчет на прочность статически неопределимой стержневой системы

### Задача 2

Абсолютно жесткая балка (показана двойной линией) поддерживается стальными стержнями заданной площади поперечного сечения (рис. 1.4). Подобрать допускаемую нагрузку, приняв допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа. Данные взять из табл. 1.2.

Таблица 1.2.

Буквы алфавита	Схема по рис. 1.3	$F, \text{см}^2$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$
а, б, в	I	5	1,1	2,1
г, д, е	II	6	1,2	2,2
ё, ж, з	III	7	1,3	2,3
и, й, к	VI	8	1,4	2,4
л, м, н	V	9	1,5	2,5
о, п, р	VI	10	1,6	2,6
с, т, у	VII	11	1,7	2,7
ф, х, ц	VIII	12	1,8	2,8
ч, ш, щ	IX	13	1,9	2,9
э, ю, я	X	14	2,0	3,0
	1	2	3	4

Порядок выполнения задачи аналогичен решению примера 2.

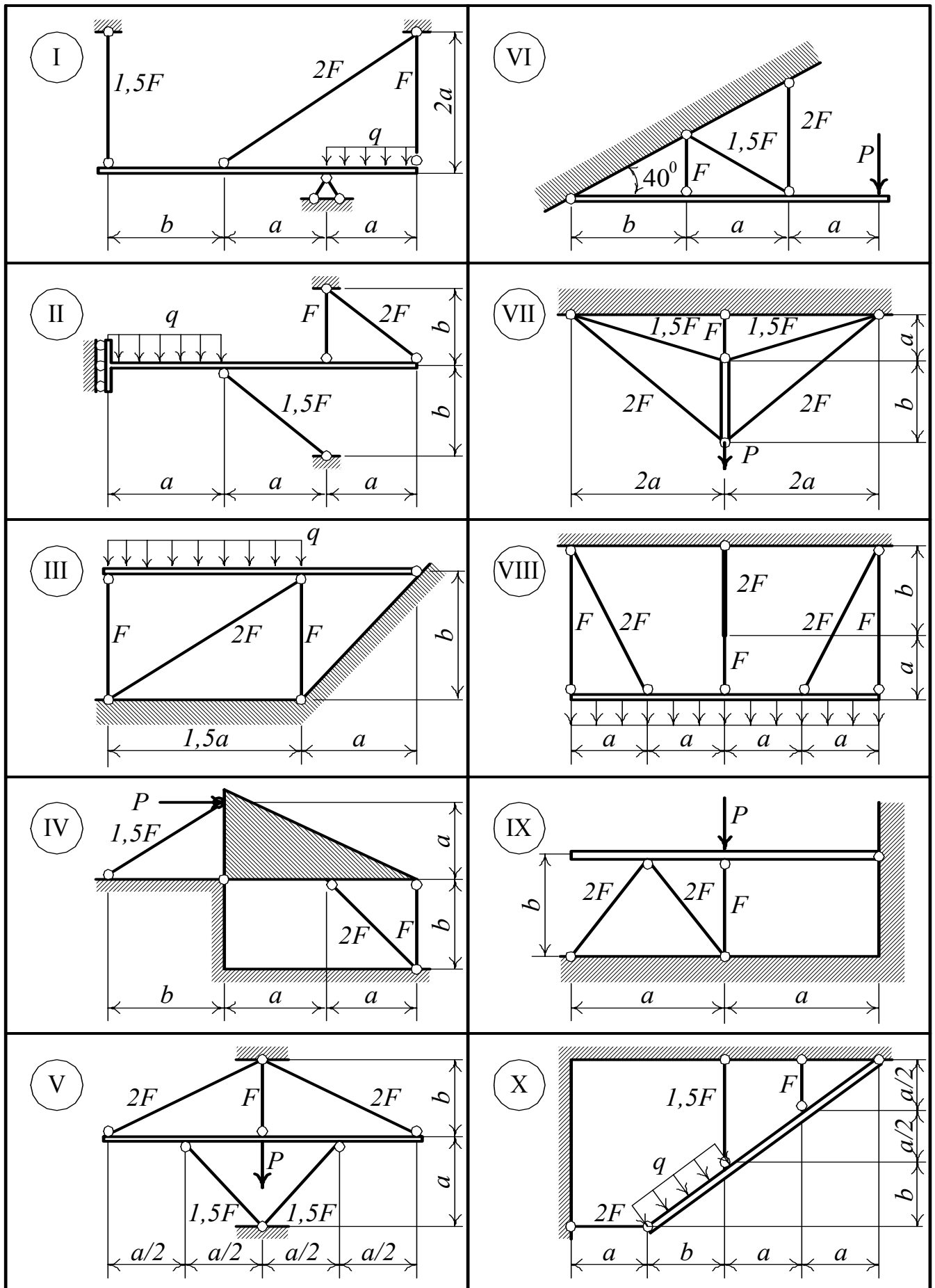


Рис. 1.3

Пример 2. Произвести указанный в задаче 2, расчет статически неопределимой стержневой системы (рис. 1.4) при следующих исходных данных:  $F_1 = F = 10 \text{ см}^2$ ,  $F_2 = 0,8F = 8 \text{ см}^2$ ,  $F_3 = 0,5F = 5 \text{ см}^2$ ,  $a = 0,4 \text{ м}$ ,  $b = 0,6 \text{ м}$ .

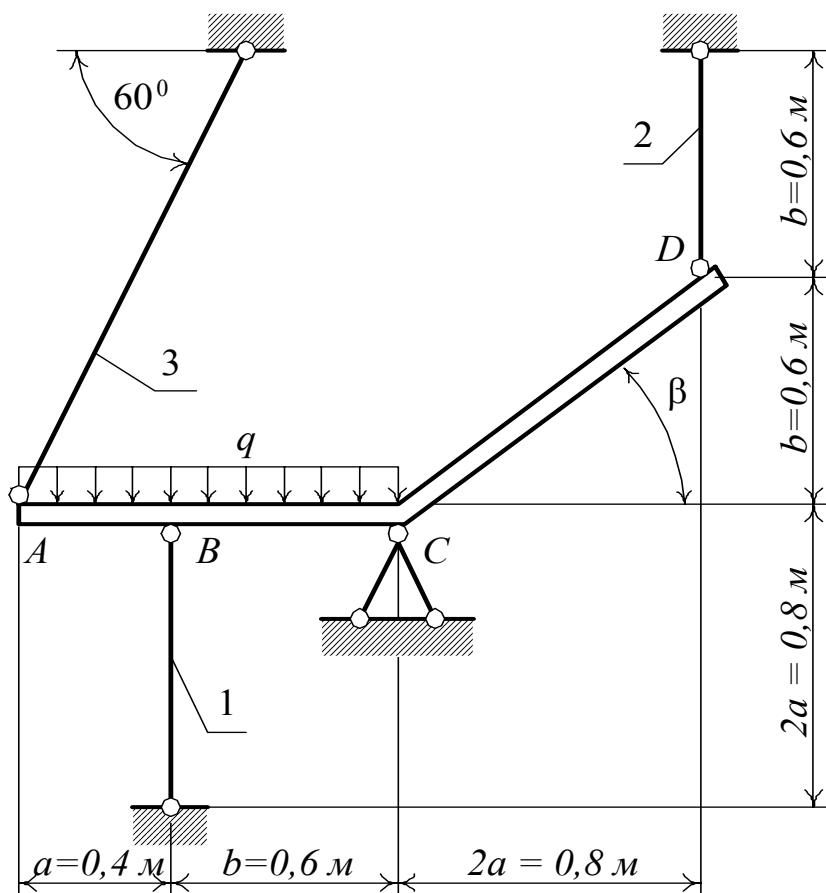


Рис. 1.4

### Решение

Допускаемая интенсивность распределенной нагрузки  $q$  или сила  $P$  определяются из условия прочности при растяжении  $\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$ , где наибольшее напряжение  $\sigma$  должно быть выражено через нагрузку в общем виде.

Так как абсолютно жесткий стержень  $ABCD$  опирается на шарнирно неподвижную опору, где возникают две составляющие реакции  $C_x$  и  $C_y$ , и поддерживается тремя стальными стержнями, в которых при действии нагрузки возникают усилия  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ , то рассматриваемая стержневая система имеет 5 неизвестных, а независимых уравнений статики для плоской системы можно составить только три. Разность количества неизвестных величин и числа независимых уравнений ( $5 - 3 = 2$ )

определяет степень статической неопределимости системы. Для нахождения неизвестных надо составить 2 дополнительных уравнения - уравнения совместности деформаций.

Рассмотрим заданную систему в деформированном состоянии под действием нагрузки  $q$  (рис. 1.5). Каждая точка абсолютно жесткого стержня перемещается по дуге соответствующего радиуса поворота. Из-за малости углов поворота перемещение по дуге можно заменить перемещением по перпендикуляру к радиусу поворота. Так, точка  $A$  перемещается по перпендикуляру к радиусу поворота  $CA$ , т.е. перемещается вниз. Упругий стержень, мысленно отсоединенный от жесткой балки, удлиняется на  $\Delta l_3$  и поворачивается вокруг точки подвески, т.е. точка  $A'$  при повороте перемещается по перпендикуляру к стержню 3 до пересечения с линией  $AA'$ , в точке  $A_1$ , представляющей положение узла  $A$  в деформированном состоянии.

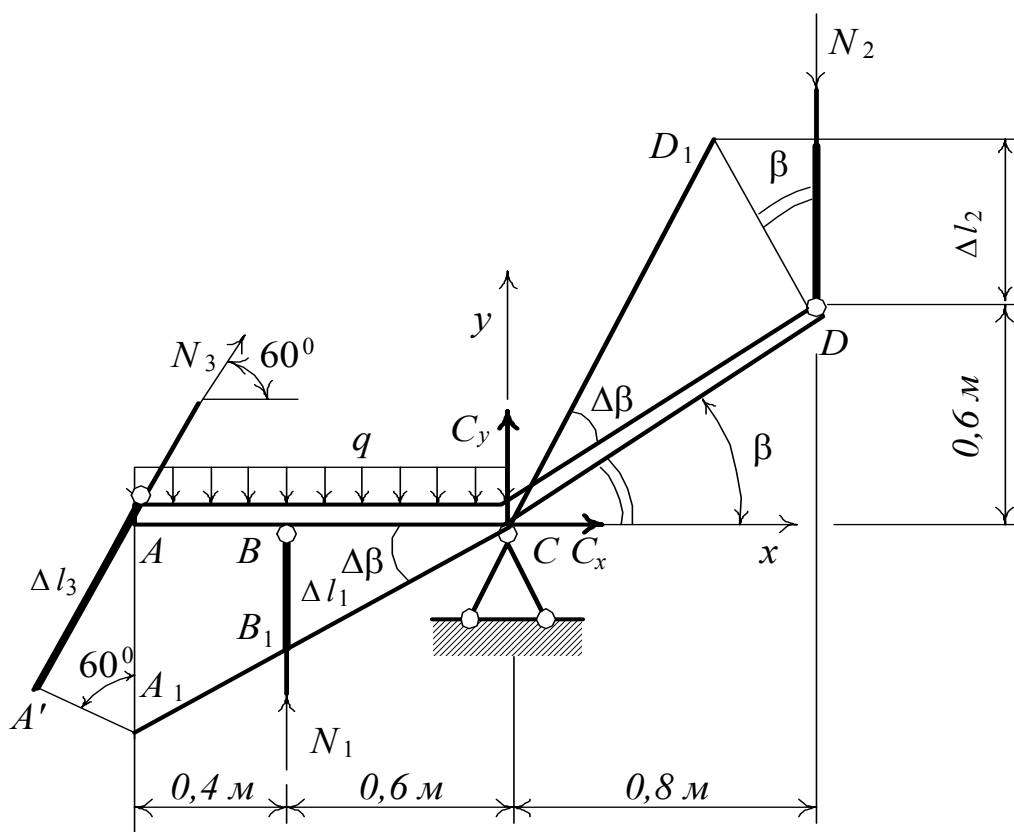


Рис. 1.5

Таким же путем находятся положения точек  $B$  и  $D$ . Проведя прямую  $A_1C$  (новое положения части  $ABC$  абсолютно жесткого стержня), получим деформацию стержня 1 - укорочение  $BB_1 = \Delta l_1$ . Так как левая часть стержня  $ABCD$  повернулась против часовой стрелки на угол  $\Delta\beta$ , то и правая ее часть повернется на такой же угол. Проводим перпендикуляр  $DD_1$  к неизменной по длине части  $CD$ . Из точки  $D_1$  (новое положение узла  $D$ ) проводим перпендикуляр на стержень 2 - получаем деформацию стержня 2 - укорочение  $\Delta l_2$ .

Усилия в стержнях направляем в соответствии с изображенными деформациями:  $N_1$  и  $N_2$  - на сжатие,  $N_3$  - на растяжение. Направление реакций  $C_x$  и  $C_y$  - произвольно.

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X = 0, \quad C_x + N_3 \cos 60^\circ &= 0, \\ \sum Y = 0, \quad C_y + N_1 - N_2 + N_3 \sin 60^\circ - q(0,4 + 0,6) &= 0, \\ \sum M_C = 0, \quad N_1 \cdot 0,6 + N_2 \cdot 0,8 + N_3(0,4 + 0,6) \sin 60^\circ - q \cdot 1 \cdot 0,5 &= 0.\end{aligned}$$

Первые два уравнения можно не использовать, так как для решения данной задачи определение реакций  $C_x$  и  $C_y$  не требуется. Третье уравнение перепишем так:

$$0,6N_1 + 0,8N_2 + 0,866N_3 = 0,5q. \quad (1.1)$$

Это уравнение содержит три неизвестных усилия.

Составим два уравнения совместности деформаций стержней. Из подобия треугольников  $DD_1C$  и  $BB_1C$  следует:  $\frac{DD_1}{CD} = \frac{BB_1}{BC}$  или  $\frac{\Delta l_2 / \cos \beta}{0,8 / \cos \beta} = \frac{\Delta l_1}{0,6}$ , откуда

$0,6\Delta l_2 = 0,8\Delta l_1$ . Используя для определения деформаций закон Гука  $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EF_i}$ ,

получим  $0,6 \frac{N_2 l_2}{EF_2} = 0,8 \frac{N_1 l_1}{EF_1}$ ,

откуда  $N_2 = \frac{4 l_1 F_2}{3 l_2 F_1} N_1 = \frac{4 \cdot 0,8 \cdot 8}{3 \cdot 0,6 \cdot 10} N_1 = 1,422 N_1$ .

Из подобия треугольников  $AA_1C$  и  $BB_1C$  аналогично получаем  $\frac{AA_1}{CA} = \frac{BB_1}{BC}$

или 
$$\frac{\Delta l_3}{1 \cdot \sin 60^0} = \frac{\Delta l_1}{0,6}; \quad \frac{N_3 l_3}{EF_3 \sin 60^0} = \frac{N_1 l_1}{EF_1 \cdot 0,6}, \quad \text{откуда}$$

$$N_3 = \frac{l_1}{l_3} \frac{F_3}{F_1} \frac{\sin 60^0}{0,6} N_1 = \frac{0,8 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{1,2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} / 0,866} \frac{0,866}{0,6} N_1 = 0,417 N_1.$$

Таким образом,  $N_2 = 1,422 N_1,$  (1.2)

$$N_3 = 0,417 N_1. \quad (1.3)$$

Решая совместно уравнения (1.1), (1.2) и (1.3), т.е. подставляя (1.2) и (1.3) в уравнение (1.1), получим

$0,6 N_1 + 0,8 \cdot 1,422 N_1 + 0,866 \cdot 0,417 N_1 = 0,5q,$  т.е.  $2,1 N_1 = 0,5q,$  откуда  $N_1 = 0,24q,$  а из (1.2) и (1.3), получаем  $N_2 = 0,339q, N_3 = 0,1q.$

Определяем напряжения в стержнях:  $\sigma_i = \frac{N_i}{F_i},$

$$\sigma_1 = \frac{0,24q}{10 \cdot 10^{-4}} = 240q \text{ (Па)}, \quad \sigma_2 = \frac{0,339q}{8 \cdot 10^{-4}} = 424q \text{ (Па)}, \quad \sigma_3 = \frac{0,1q}{5 \cdot 10^{-4}} = 200q \text{ (Па)}.$$

Допускаемую нагрузку найдем из условия прочности, приравняв наибольшее напряжение допускаемому:  $\sigma_{\max} = \sigma_2 = [\sigma]; 424q = 160 \cdot 10^6,$  откуда

$$q = \frac{160 \cdot 10^6}{424} = 377 \cdot 10^3 \text{ Н/м, или } [q] = 377 \text{ кН/м.}$$

### Задача 3

Для заданной стальной (модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , температурный коэффициент линейного расширения  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$ ) статически неопределимой системы требуется определить температурные напряжения при нагревании (охлаждении) одного из стержней на  $\Delta t^0 \text{ C}$  (стержень, указанный двойной линией, - абсолютно жесткий). Данные взять из табл. 1.3.



Порядок выполнения задачи 3 аналогичен решению примера 3.

Таблица 1.3.

Буквы алфавита	Схема по рис. 1.6	Номер нагреваемого (охлаждаемого) стержня	$\Delta t^0 C$	$F, см^2$	$a, м$	$b, м$
а, б, в	I	1	+20	18	1,1	2,1
г, д, е	II	2	-30	10	1,2	2,2
ё, ж, з	III	1	+25	15	1,3	2,3
и, й, к	IV	2	-20	11	1,4	2,4
л, м, н	V	1	+30	12	1,5	2,5
о, п, р	VI	2	-25	13	1,6	2,6
с, т, у	VII	1	+20	14	1,7	2,7
ф, х, ц	VIII	2	-25	8	1,8	2,8
ч, ш, щ	IX	1	+30	9	1,9	2,9
э, ю, я	X	2	-20	16	2,0	3,0
	1	2	3	4	5	6

Пример 3. Определить температурные напряжения при нагревании второго стержня на  $\Delta t = 20^0 C$  (рис. 1.7).

Решение.

Второй стержень под действием температуры нагревается и, если бы не было препятствия со стороны первого стержня, его деформация была бы  $\Delta l_2(t) = \alpha l_2 \Delta t^0$ , где  $\alpha$  - температурный коэффициент линейного расширения. Сопротивление стержня 1 приведет к уменьшению деформации второго стержня на величину  $\Delta l_2(N)$  (рис. 1.8).

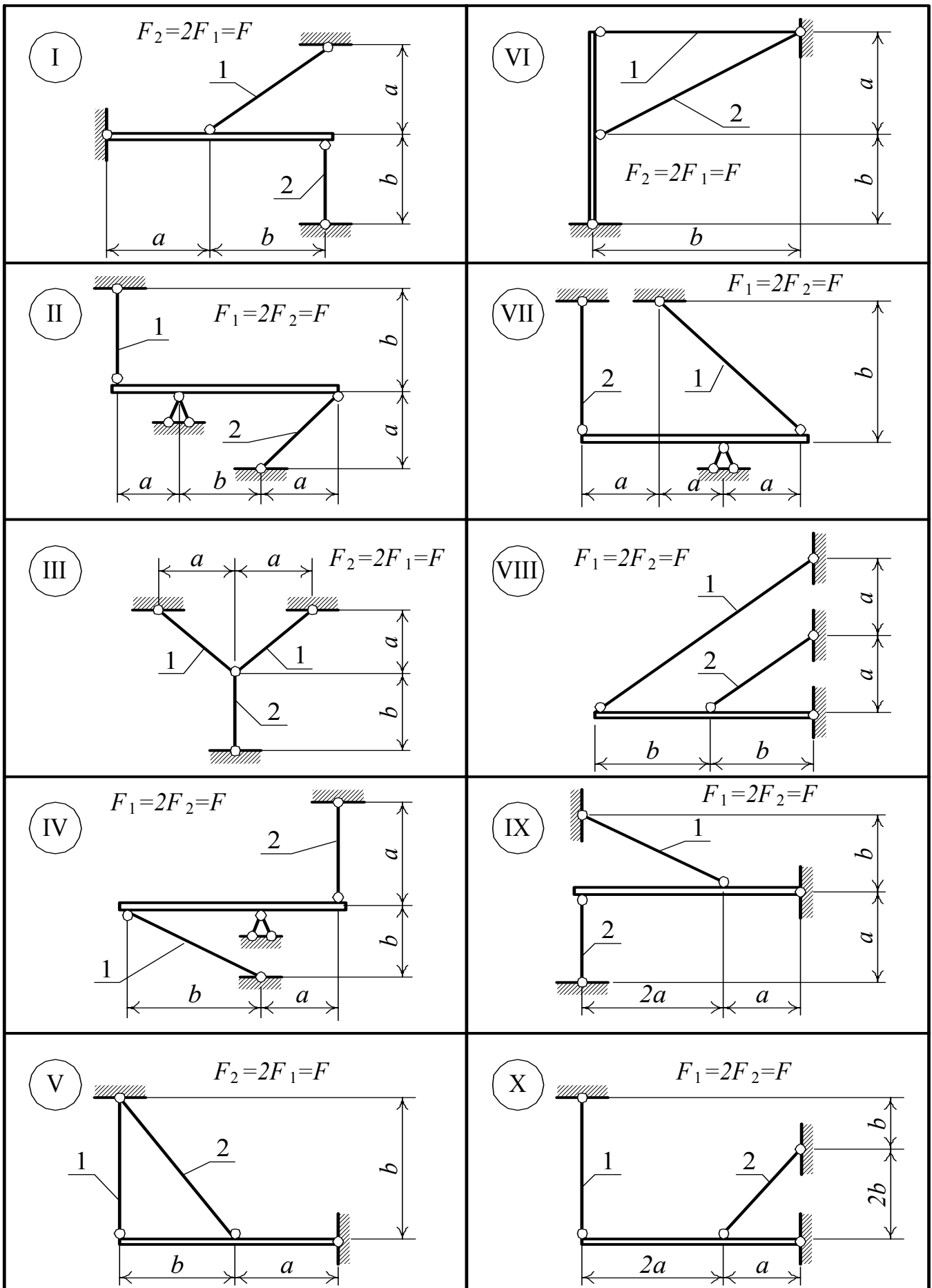


Рис. 1.6

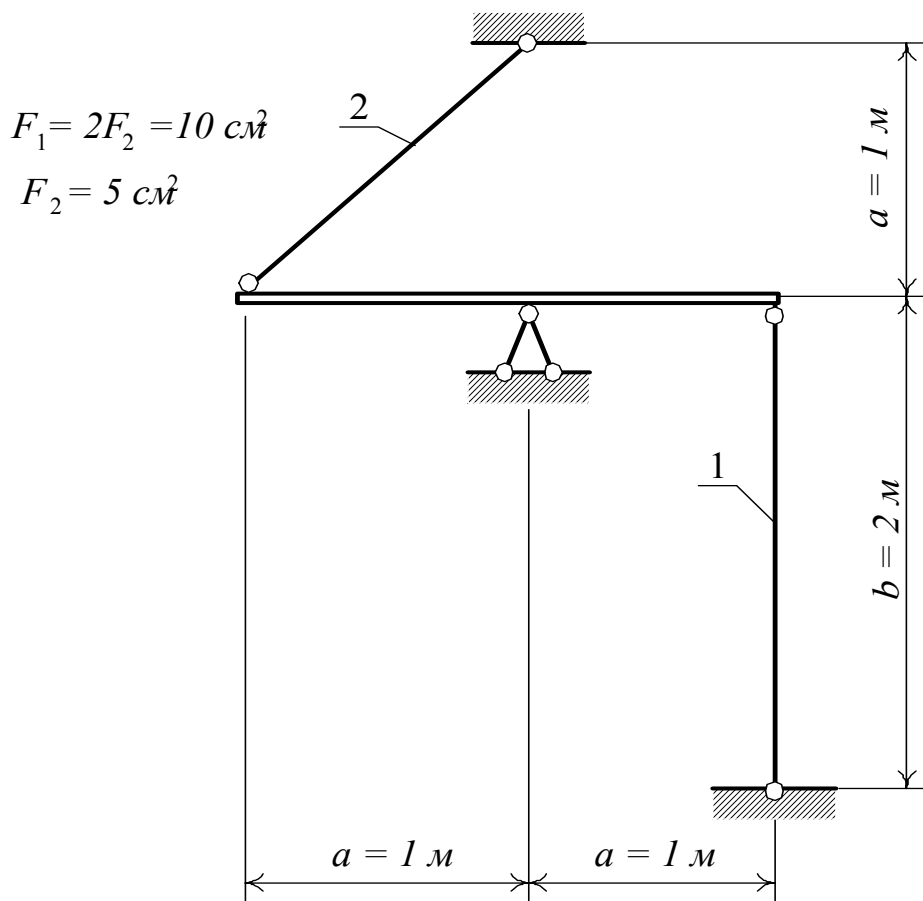


Рис. 1.7

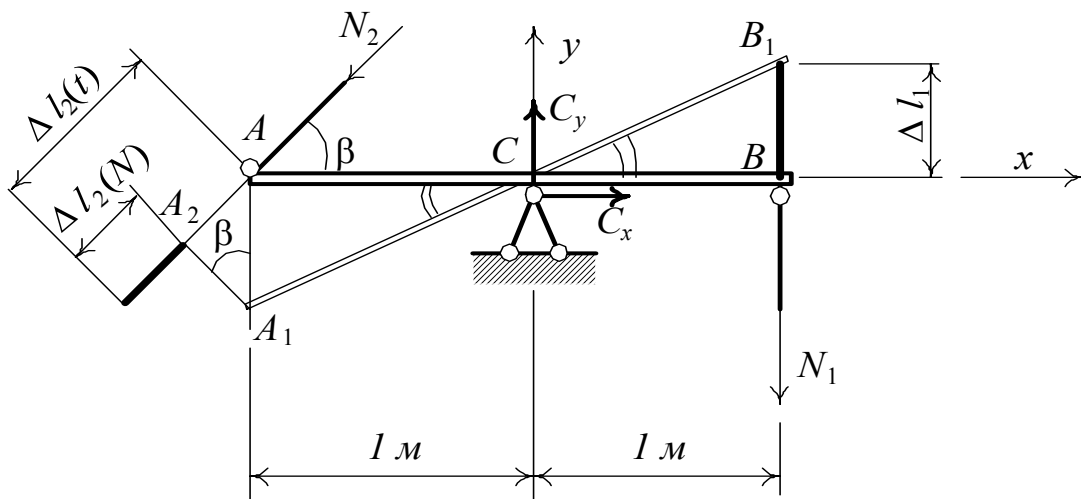


Рис. 1.8.

Точки  $A$  и  $B$  абсолютно жесткой балки  $ACB$  перемещаются по дугам, радиусы которых  $AC$  и  $BC$ . Так как перемещение намного меньше по сравнению с длиной радиуса поворота, то дуги заменяем перпендикулярами, проведенными к первоначальному положению радиуса поворота. Проведя перпендикуляр к деформированному

стрелю 2 до пересечения с перпендикуляром к левой части  $AC$  абсолютно жесткого стержня, получим точку  $A_1$ , т.е. новое положение узла  $A$ . Затем изображаем новое положение  $A_1CB_1$  абсолютно жесткого стержня  $ACB$ . Тогда  $BB_1 = \Delta l_1$ .

Усилия в стержнях направляем в соответствии с изображенными деформациями:  $N_2$  - на сжатие, а  $N_1$  - на растяжение. Реакции  $C_x$  и  $C_y$  направляем произвольно.

Составляем одно уравнение равновесия:

$$\sum M_C = 0: N_2 a \sin \beta - N_1 a = 0; \quad N_2 \sin \beta \cdot 1 - N_1 \cdot 1 = 0.$$

$$\text{Так как } \beta = 45^\circ, \text{ то } N_1 = 0,707N_2. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) содержит два неизвестных, поэтому задача один раз статически неопределима, и, следовательно, надо составить дополнительно одно уравнение совместности деформаций стержневой системы.

Из подобия треугольников  $AA_1C$  и  $BB_1C$  следует:

$$\frac{AA_1}{AC} = \frac{BB_1}{BC}, \text{ или } \frac{\Delta l_2(t) - \Delta l_2(N)}{a \sin \beta} = \frac{\Delta l_1}{a}; \quad \Delta l_2(t) - \Delta l_2(N) = \Delta l_1 \sin \beta.$$

Используем закон Гука  $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$ .

$$\text{Тогда } \alpha l_2 \Delta t^0 - \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{N_1 l_1}{EF_1} \sin \beta,$$

$$1,25 \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{2} \cdot 20 - \frac{N_2 \sqrt{2}}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \frac{N_1 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$50 \cdot 10^3 - 2 N_2 = N_1. \quad (1.5)$$

Решаем совместно систему уравнений (1.4) и (1.5). Подставим (1.4) в (1.5) и получим:

$$50 \cdot 10^3 - 2 N_2 = 0,707 N_2, \text{ откуда } N_2 = 18,47 \cdot 10^3 \text{ Н,}$$

$$\text{а } N_1 = 0,707 N_2 = 0,707 \cdot 18,47 \cdot 10^3 = 13,06 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Определяем температурные напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{13,06 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 13,06 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13,06 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{18,47 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 36,94 \cdot 10^6 \text{ Па} = 36,94 \text{ МПа}.$$

#### Задача 4

Для заданной стальной (модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ) статически неопределимой системы требуется определить монтажные напряжения после сборки конструкции, если один из стержней выполнен короче требуемой длины на величину  $\Delta$ . Данные взять из табл. 1.4. Стержень, показанный двойной линией - абсолютно жесткий.

Таблица 1.4.

Буквы алфавита	Схема по рис. 1.9	$F, \text{ см}^2$	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$\Delta, \text{ мм}$
а, б, в	I	5	1,1	2,1	0,3
г, д, е	II	6	1,2	2,2	0,4
ё, ж, з	III	7	1,3	2,3	0,5
и, й, к	IV	8	1,4	2,4	0,6
л, м, н	V	9	1,5	2,5	0,7
о, п, р	VI	10	1,6	2,6	0,8
с, т, у	VII	11	1,7	2,7	0,7
ф, х, ц	VIII	12	1,8	2,8	0,6
ч, ш, щ	IX	13	1,9	2,9	0,5
э, ю, я	X	14	2	3,0	0,4
		1	2	3	4

Порядок выполнения задачи 4 аналогичен решению примера 4.

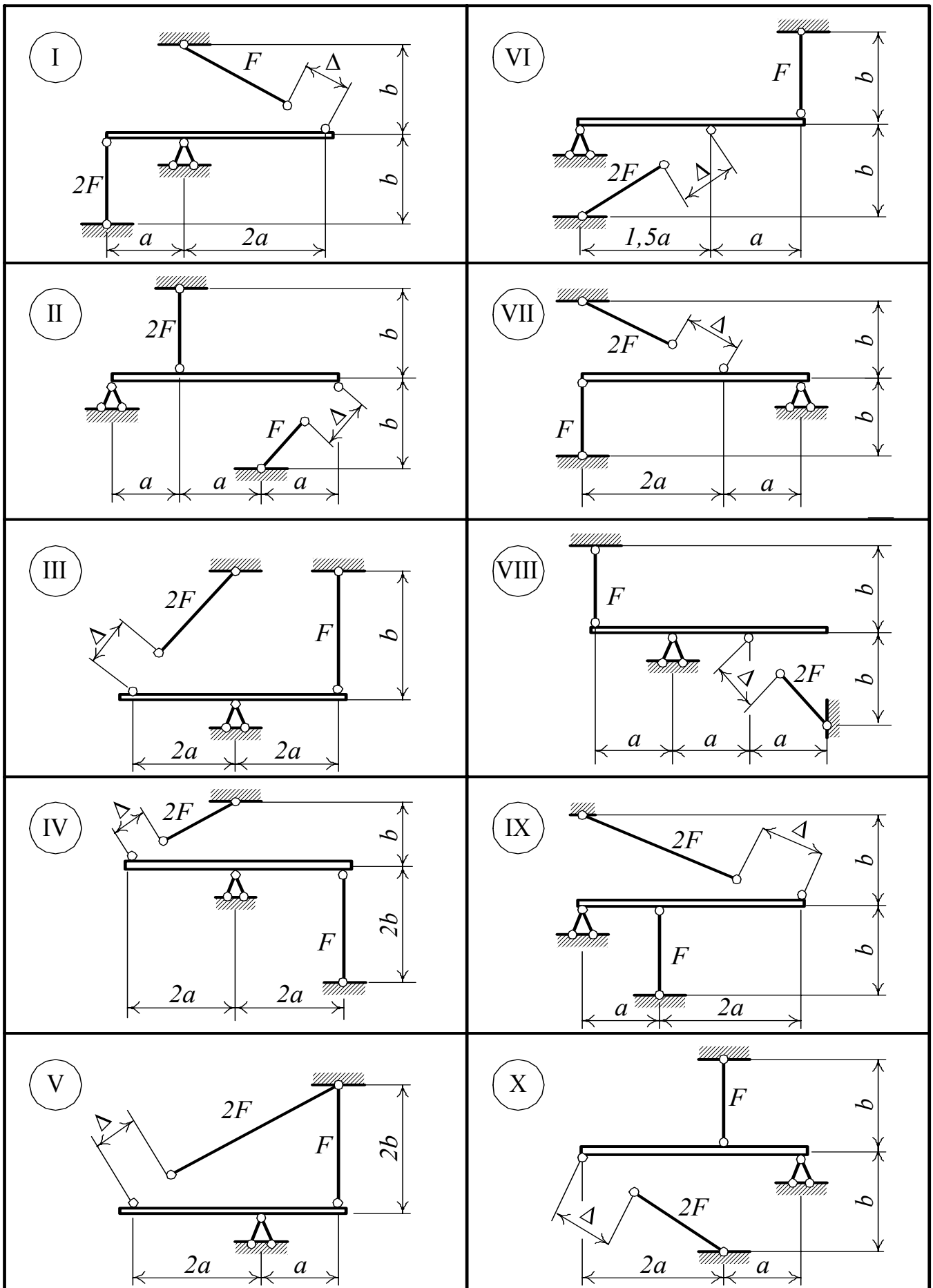


Рис. 1.9

Пример 4. Определить напряжения в стальных стержнях после сборки конструкции, если один стержень выполнен короче требуемой длины на  $\Delta = 0,5 \text{ мм}$ ,  $F = 5 \text{ см}^2$ ,  $a = 0,6 \text{ м}$ ,  $b = 3,0 \text{ м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  (рис. 1.10).

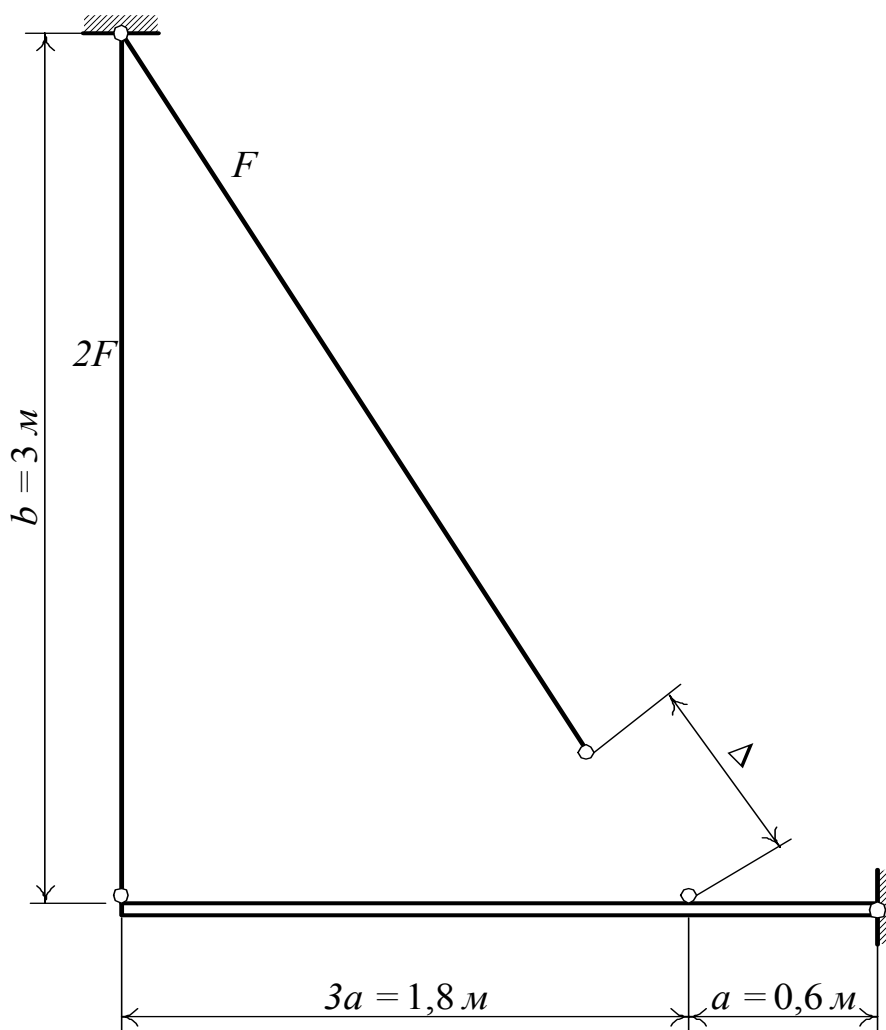


Рис. 1.10

Решение.

Так как наклонный стержень выполнен короче требуемой длины на величину  $\Delta = 0,5 \text{ мм}$ , то надо его растянуть и прикрепить к абсолютно жесткому стержню, т.е. произвести монтаж конструкции (рис. 1.11).

В силу упругих свойств материала нижний конец наклонного стержня будет стремиться вернуться в прежнее положение, чему будет сопротивляться вертикальный стержень. Окончательное положение конструкции после сборки показано на рис. 1.11.

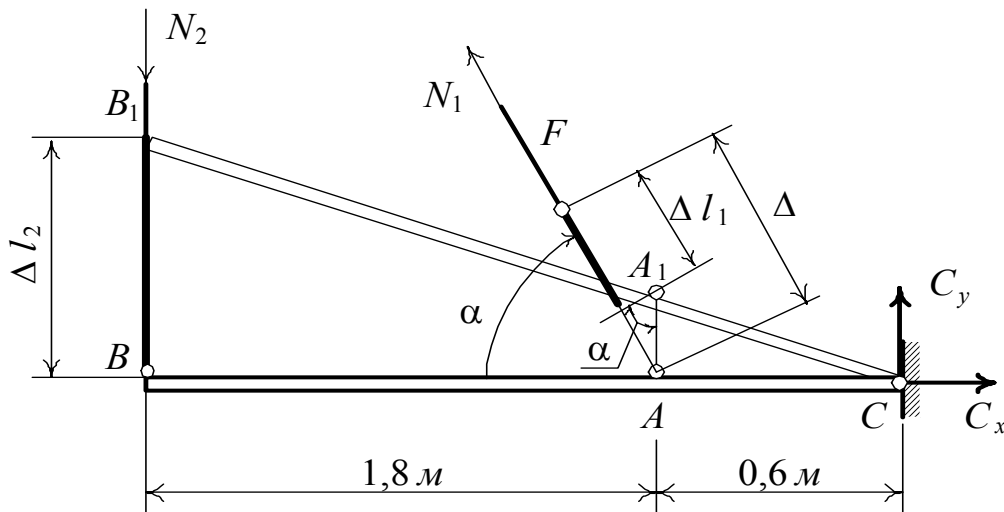


Рис. 1.11

Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_C = 0; N_2 \cdot 2,4 - N_1 \cdot 0,6 \cdot \sin \alpha = 0; \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1,8^2}} = 0,857.$$

$$\text{Тогда } N_2 = 0,214N_1. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) содержит два неизвестных. Значит, задача один раз статически неопределима, и для ее решения необходимо дополнительно составить одно уравнение совместности деформаций стержней системы.

Из подобия треугольников  $CAA_1$  и  $CBB_1$  следует  $\frac{AA_1}{CA} = \frac{BB_1}{CB}$  или

$$\frac{\Delta - \Delta l_1}{\sin \alpha \cdot 0,6} = \frac{\Delta l_2}{2,4}; 2,4(\Delta - \Delta l_1) = 0,6\Delta l_2 \sin \alpha.$$

Используем закон Гука и тогда уравнение деформаций примет вид

$$2,4 \left( \Delta - \frac{N_1 l_1}{EF_1} \right) = 0,6 \frac{N_2 l_2}{EF_2} \sin \alpha.$$

Так как  $l_1 = 3,498 \approx 3,5$  м, то

$$2,4 \left( 5 \cdot 10^{-4} - \frac{N_1 \cdot 3,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \right) = 0,6 \frac{N_2 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,857;$$

$$24 \cdot 10^4 - 16,8N_1 = 1,54N_2. \quad (1.7)$$



Решая совместно систему (1.6) и (1.7) уравнений (подставив (1.6) в (1.7)), получим

$$24 \cdot 10^4 - 16,8N_1 = 1,54 \cdot 0,214N_1.$$

Откуда  $N_1 = 1,4 \cdot 10^4 \text{ Н}$ , а  $N_2 = 0,214N_1 = 0,214 \cdot 1,4 \cdot 10^4 = 0,3 \cdot 10^4 \text{ Н}$ .

Определяем монтажные напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{1,4 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-4}} = 28 \cdot 10^6 \text{ Па} = 28 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0,3 \cdot 10^4}{10 \cdot 10^{-4}} = 3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3 \text{ МПа}.$$

## 2. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННО - ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассматриваются аналитический и графический способы определения величины, направления главных напряжений и напряжений на наклонной площадке при плоском напряженном состоянии.

### 2.1. Определение главных напряжений при плоском напряженном состоянии

#### Задача 5

Стальной элемент (модуль упругости ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,25$ ) находится в плоском напряженном состоянии (рис. 2.1). Требуется определить:

- 1) аналитически и графически величину и направление главных напряжений;
- 2) максимальные касательные напряжения;
- 3) относительные деформации заданного элемента;
- 4) определить расчетные напряжения по четырем теориям прочности.

Данные взять из табл. 2.1.

Таблица 2.1.

Буквы алфавита	Схема по рис. 2.1	$\sigma_x, \text{МПа}$	$\sigma_y, \text{МПа}$	$\tau, \text{МПа}$
а, б, в	I	10	60	70
г, д, е	II	20	70	80
ё, ж, з	III	30	80	60
и, й, к	IV	40	90	40
л, м, н	V	50	100	30
о, п, р	VI	60	10	20
с, т, у	VII	70	20	100
ф, х, ц	VIII	80	30	10
ч, ш, щ	IX	90	40	50
э, ю, я	X	100	50	90
	1	2	3	4

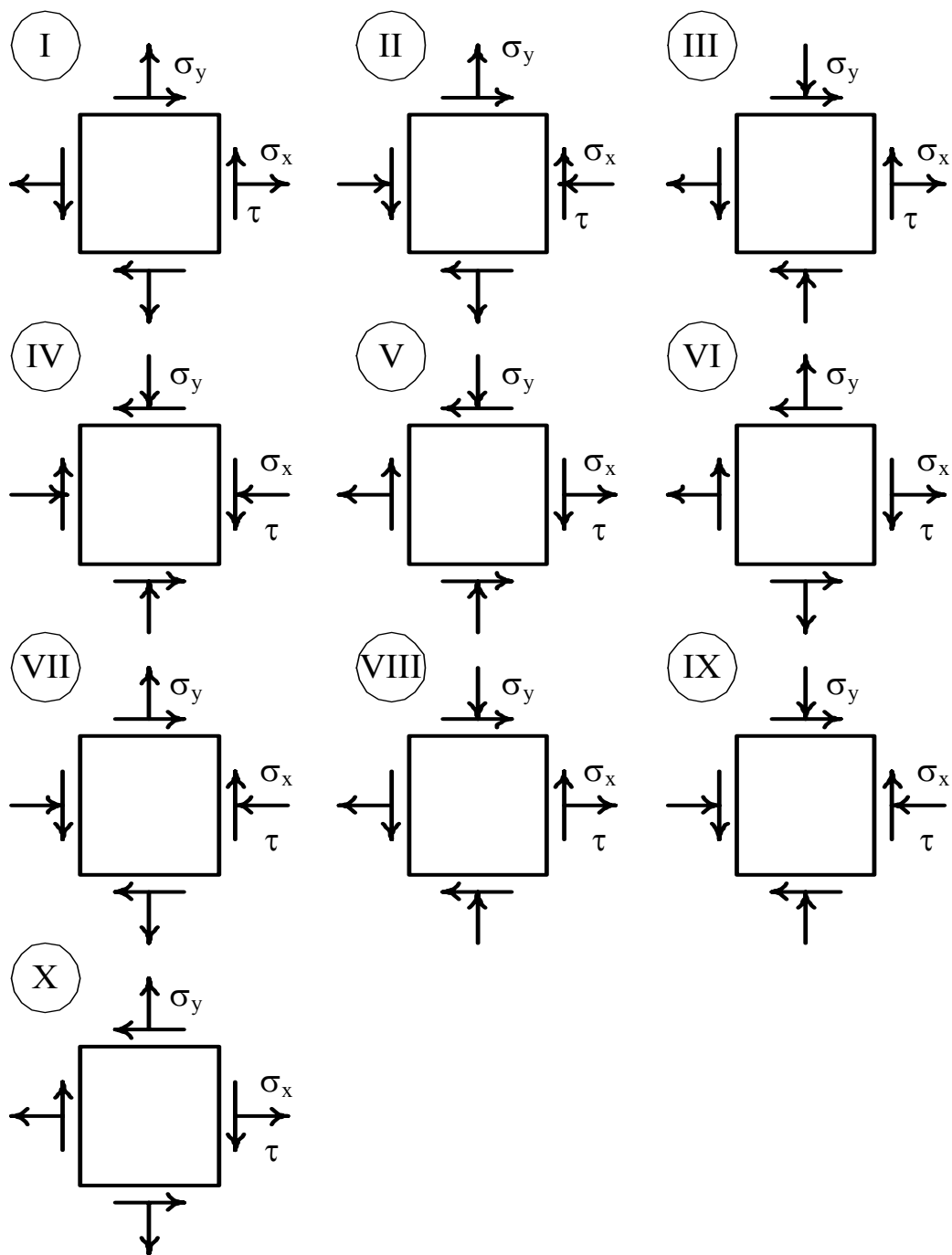


Рис. 2.1

Порядок выполнения задачи 5 аналогичен решению примера 5.

Пример 5. Для заданного стального элемента ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,25$ ) выполнить указанные в задаче 5 расчеты (рис. 2.2 а).

Решение.

1. Аналитическое определение величин и направлений главных напряжений.

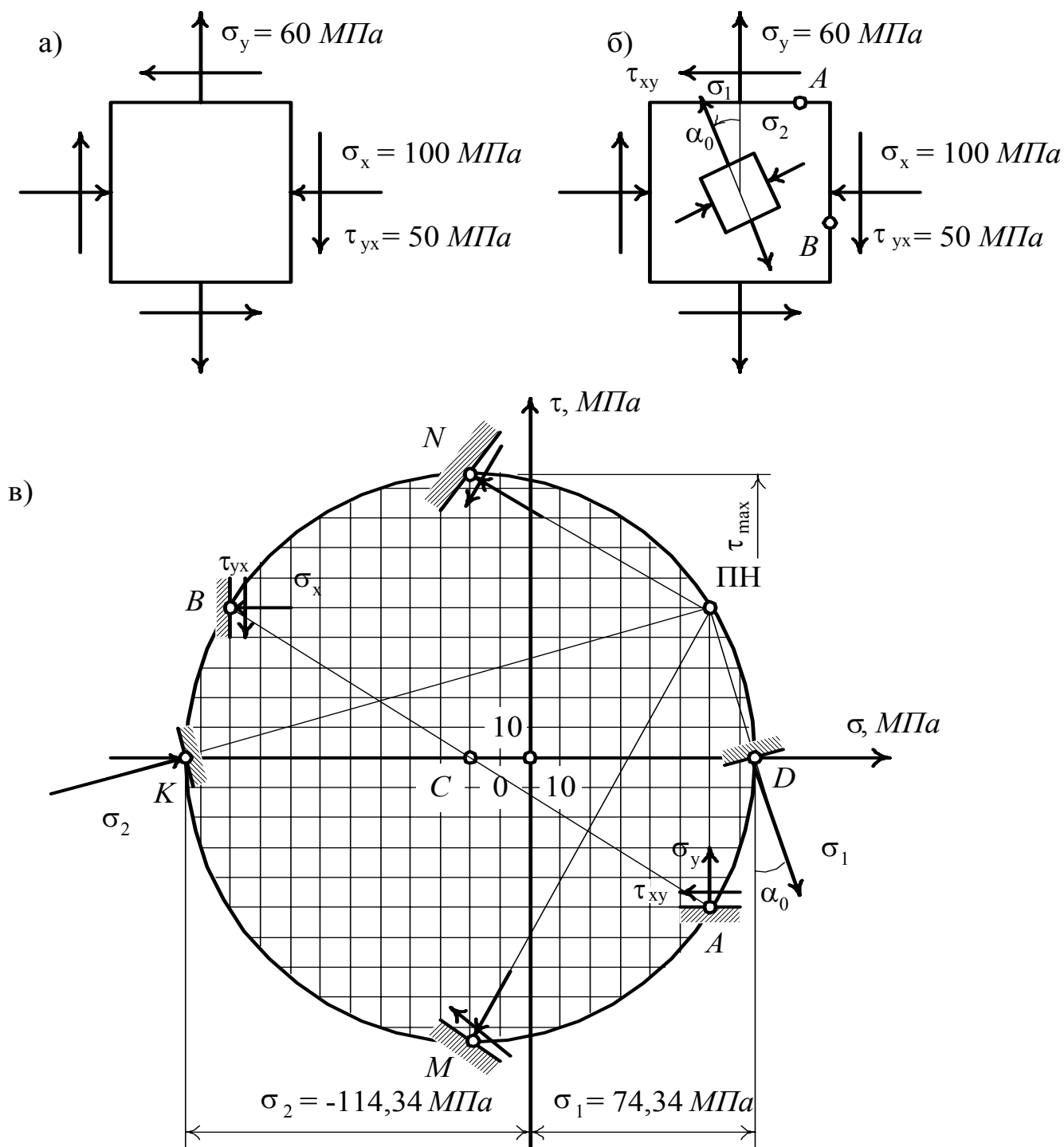


Рис. 2.2

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными, и нормальные напряжения на таких площадках называются главными напряжениями. Главные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}. \quad (2.1)$$

После подстановки заданных напряжений:  $\sigma_x = -100 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_y = 60 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{yx} = 50 \text{ МПа}$  получим

$$\sigma_{1,2} = \frac{-100 + 60}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-100 - 60)^2 + 4 \cdot 50^2} = (-20 \pm 94,34) \text{ МПа}.$$

Значит  $\sigma_1 = -20 + 94,34 = 74,34 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = -20 - 94,34 = -114,34 \text{ МПа}$ .

Таким образом, на главных площадках действуют главные растягивающие напряжения  $\sigma_1 = 74,34 \text{ МПа}$  и сжимающие напряжения  $\sigma_2 = -114,34 \text{ МПа}$ .

Направление главных напряжений определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (2.2)$$

После подстановки исходных данных получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot 50}{-100 - 60} = 0,625, \quad 2\alpha_0 = 32^\circ, \quad \alpha_0 = 16^\circ.$$

Угол  $\alpha_0$  откладывается от большего (с учетом знака) нормального напряжения против часовой стрелки, если угол  $\alpha_0$  положительный. При этом получаем направление  $\sigma_1$ , а  $\sigma_2$  перпендикулярно  $\sigma_1$  (рис. 2.2 б).

Определяем главные напряжения графически построением круга Мора (рис. 2.2 в). В системе координат  $\sigma - \tau$  (масштаб - в 1 см 20 МПа) находим точку  $A$  горизонтальной грани заданного элемента, откладывая  $\sigma_y = 60 \text{ МПа}$ ,  $\tau_{xy} = -50 \text{ МПа}$ . Таким же образом находим точку  $B$  вертикальной грани заданного элемента, откладывая  $\sigma_x = -100 \text{ МПа}$ ,  $\tau_{yx} = +50 \text{ МПа}$ . На отрезке  $AB$  как на диаметре строим окружность с центром  $C$  (круг Мора). Координаты точек пересечения окружности с осью  $\sigma$  соответствуют главным напряжениям (точки  $D$  и  $K$ ). Точка пересечения заданных нормальных напряжений есть полюс напряжений ПН. Соединяя ПН с точками  $D$  и  $K$  получим направление главных напряжений, а главные площадки перпендикулярны к направлениям главных напряжений.

## 2. Определение максимальных касательных напряжений аналитически

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{74,34 - (-114,34)}{2} = 94,34 \text{ МПа},$$

а площадки с  $\tau_{\max}$  находятся под углом  $45^0$  к главным площадкам.

Графически  $\tau_{\max}$  равно радиусу круга Мора, а площадки с такими напряжениями определяются точками  $M$  и  $N$ .

3. Определение относительных деформаций заданного элемента по направлению главных напряжений производится по обобщенному закону Гука:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu\sigma_2]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu\sigma_1]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [-\mu(\sigma_1 + \sigma_2)].\end{aligned}\tag{2.3}$$

При  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,25$ ,  $\sigma_1 = 74,34$  МПа,  $\sigma_2 = -114,34$  МПа, получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} [74,34 - 0,25 \cdot (-114,34)] = 5,146 \cdot 10^{-4}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-114,34 - 0,25 \cdot 74,34] = -6,646 \cdot 10^{-4}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-0,25 \cdot (74,34 - 114,34)] = 0,5 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

4. Определяем расчетные напряжения по четырем теориям прочности.

Первая теория прочности:

$$\sigma_{\text{рас}}^{\text{I}} = |\sigma_{\max}| = |\sigma_2| = 114,34 \text{ МПа}.$$

Вторая теория прочности - теория максимальных относительных деформаций:

$$\sigma_{\text{рас}}^{\text{II}} = |\sigma_2 - \mu\sigma_1| = |-114,34 - 0,25 \cdot 74,34| = 132,9 \text{ МПа}.$$

Третья теория прочности - теория максимальных касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{рас}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_2 = 74,34 + 114,34 = 188,7 \text{ МПа.}$$

Четвертая теория прочности - энергетическая:

$$\sigma_{\text{рас}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{74,34^2 + (-114,34)^2 - 74,34 \cdot (-114,34)} = 164,62 \text{ МПа.}$$

Для заданного стального элемента (пластичный материал) первую и вторую теории прочности применять нельзя, третья теория прочности дает лишний запас прочности, т.е. приводит к перерасходу материала, и только четвертая теория прочности дает результаты, хорошо согласующиеся с опытными значениями.

## 2.2. Определение напряжений на наклонной площадке при плоском напряженном состоянии

### Задача 6

Стальной элемент (модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,25$ ) находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (рис. 2.3). Требуется аналитически и графически определить напряжения на наклонной площадке.

Данные взять из табл. 2.2.

Порядок выполнения задачи аналогичен примеру 6.

Пример 6. Для заданного стального элемента аналитически и графически определить напряжения на наклонной площадке (рис. 2.4, а).

### Решение.

Аналитически напряжения по наклонной площадке при плоском напряженном состоянии определяются по формулам:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha; \quad (2.4)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha. \quad (2.5)$$

Таблица 2.2.

Буквы алфавита	Схема по рис. 2.3	$\sigma_x, МПа$	$\sigma_y, МПа$	$\tau, МПа$	$\varphi, град$
а, б, в	I	10	60	70	15
г, д, е	II	20	70	80	20
ё, ж, з	III	30	80	60	25
и, й, к	IV	40	90	40	30
л, м, н	V	50	100	30	35
о, п, р	VI	60	10	20	40
с, т, у	VII	70	20	100	20
ф, х, ц	VIII	80	30	10	25
ч, ш, щ	IX	90	40	50	30
э, ю, я	X	100	50	90	35
	1	2	3	4	5

Подставим в (2.4) и (2.5) заданные напряжения:  $\sigma_x = 100 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_y = -50 \text{ МПа}$ ,  $\tau_{yx} = -25 \text{ МПа}$ ,  $\varphi = 30^0$ . На наклонной площадке берем произвольную точку и проводим в этой точке внешнюю нормаль к наклонной площадке (рис. 2.4,б). Угол  $\alpha$  получается вращением направления  $\sigma_x$  до совпадения с внешней нормалью к площадке. Если вращение происходит по часовой стрелке, то угол  $\alpha$  отрицателен. В рассматриваемом примере  $\alpha = -30^0$ .

После подстановки исходных данных в (2.4) и (2.5) получим

$$\sigma_\alpha = 100 \cos^2(-30^0) + (-50) \sin^2(-30^0) - (-25) \sin(-60^0) = 40,85 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = \frac{100 - (-50)}{2} \sin(-60^0) + (-25) \cos(-60^0) = -77,45 \text{ МПа}.$$

Значит, на наклонной площадке действуют растягивающие нормальные напряжения  $\sigma_\alpha = 40,85 \text{ МПа}$  и касательные напряжения  $\tau_\alpha = -77,45 \text{ МПа}$ , направленные на наклонной площадке против хода часовой стрелки (рис. 2.4, б).



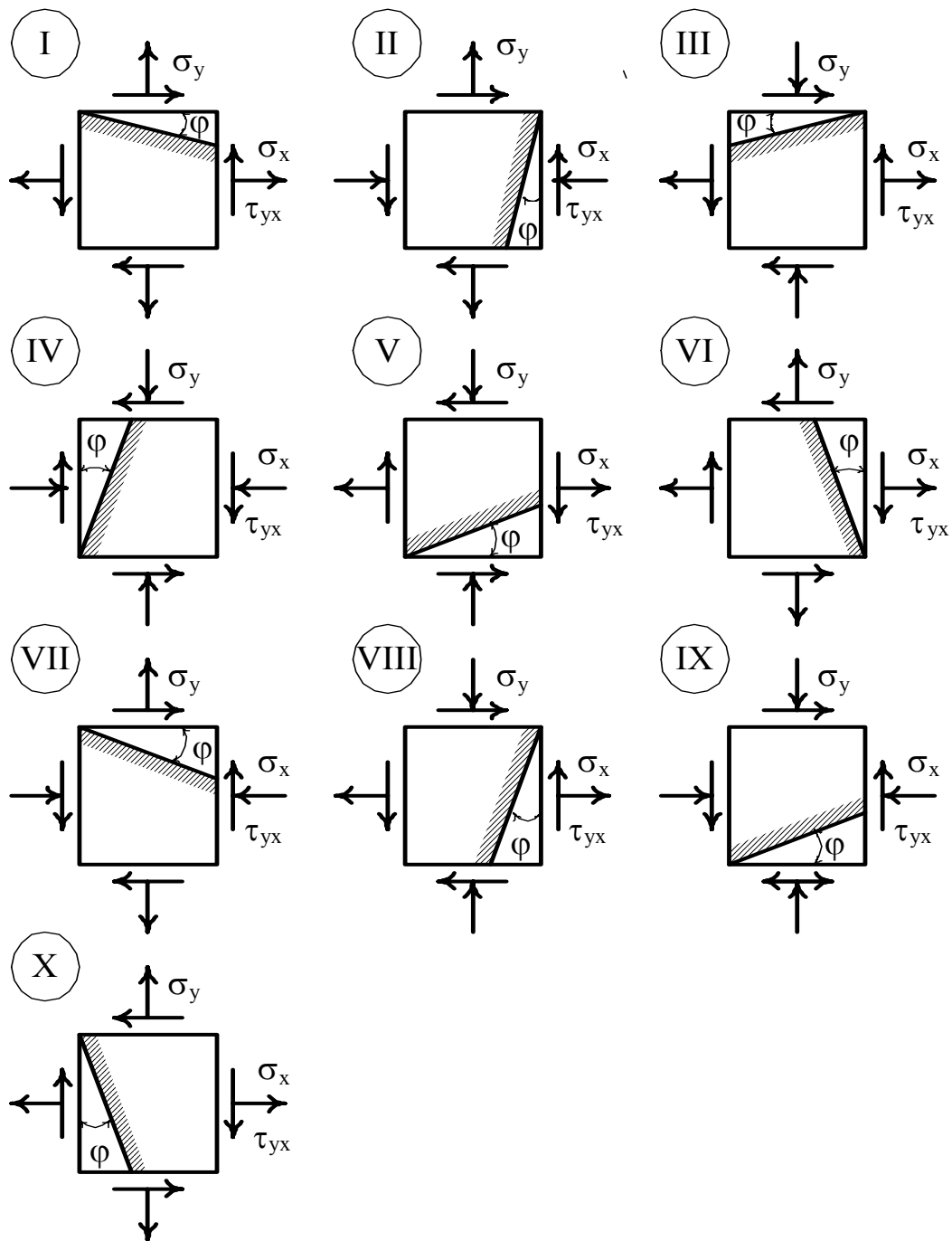


Рис. 2.3.

Определяем главные напряжения графически построением круга Мора (рис. 2.4, в). В системе координат  $\sigma - \tau$  (масштаб - в 1 см 20 МПа) находим точку  $A$ , соответствующую вертикальной грани заданного элемента, откладывая  $\sigma_x = 100$  МПа,  $\tau_{yx} = -25$  МПа. Таким же образом находим точку  $B$  горизонтальной грани заданного элемента, откладывая  $\sigma_y = -50$  МПа,  $\tau_{xy} = 25$  МПа. На диаметре  $AB$  строим окружность с центром  $C$  (круг Мора). Точки пересечения заданных нормальных напряжений определяют полюс напряжений ПН. Из полюса напряжений от горизонтальной

оси  $\sigma$  откладываем по часовой стрелке угол  $\alpha = -30^0$  и получаем направление  $\sigma_\alpha$ . Наклонная площадка перпендикулярна к направлению  $\sigma_\alpha$ . Координаты точки  $D$  на круге Мора есть величины нормального  $\sigma_\alpha$  и касательного  $\tau_\alpha$  напряжений, действующих на наклонной площадке.

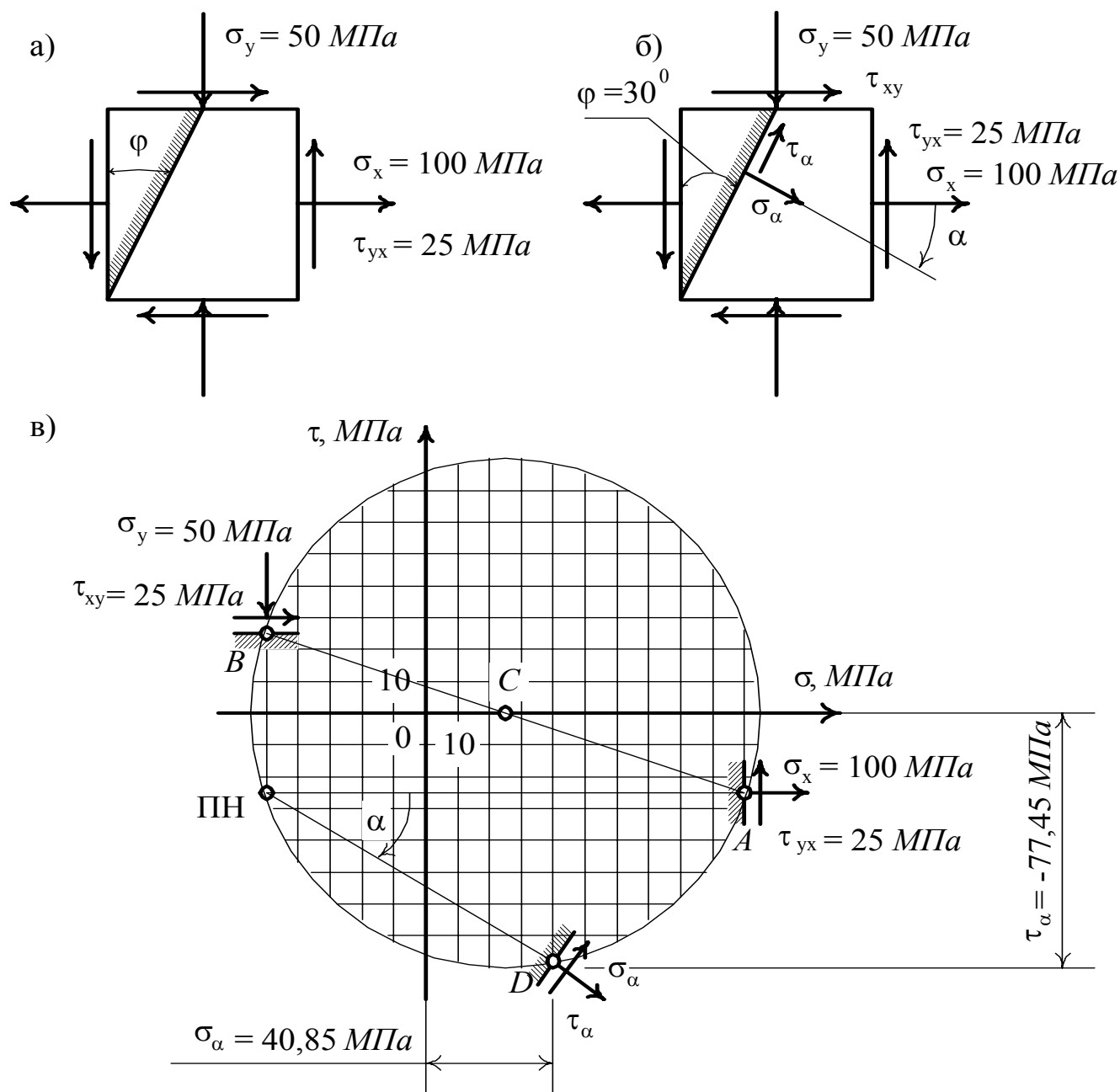


Рис. 2.4

### 3. КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассматриваются вопросы подбора сечения и определения углов закручивания статически неопределимого вала.

#### 3.1. Напряжения и перемещения при кручении статически неопределимого вала

##### Задача 7

Стальной вал (рис. 3.1) защемлен по концам и нагружен парами сил  $M_1$  и  $M_2$ .

Требуется:

- 1) определить моменты в опорах;
- 2) построить эпюру крутящих моментов;
- 3) определить размеры сечений вала из расчета на прочность при заданном допуске напряжении  $[\tau]$  (модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа);
- 4) определить углы закручивания на каждом участке вала;
- 5) построить эпюру углов закручивания.

Данные взять из табл. 3.1.

Порядок выполнения задачи 7 аналогичен решению примера 7.

Пример 7. Стальной вал нагружен моментом  $M_1 = 2$  кНм и  $M_2 = 5$  кНм (рис. 3.2,а),  $d_2 = 1,5 d_1$ ,  $d_3 = 2,5 d_1$ ,  $[\tau] = 60$  МПа,  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

##### Решение.

1. Определение моментов в опорах.

Под действием приложенной к заданному валу нагрузки в опорах  $A$  и  $B$  возникают моменты  $M_A$  и  $M_B$ . Уравнение равновесия можно составить только одно - сумма всех моментов относительно оси вала равна нулю:

$$\sum M_x = 0; M_A - M_1 + M_2 - M_B = 0.$$

Таблица 3.1.

Буквы ал- фавита	Схема по рис. 3.1	$a,$ $m$	$b,$ $m$	$c,$ $m$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_3}{d_1}$	$M_1,$ $\kappa Нм$	$M_2,$ $\kappa Нм$	$[\tau],$ $МПа$
ф, б, в	I	0,1	1,1	0,5	1,2	3,2	4,2	1,2	35
г, д, е	II	0,2	1,2	0,4	1,4	3,4	4,4	1,4	40
ё, ж, з	III	0,3	1,3	0,3	1,6	3,6	4,6	1,6	45
и, й, к	IV	0,4	1,4	0,2	1,8	3,8	4,8	1,8	50
л, м, н	V	0,5	1,5	0,1	2,0	4,0	5,0	2,0	55
о, п, р	VI	0,6	1,6	0,5	2,2	3,2	2,2	3,2	60
с, т, у	VII	0,7	1,7	0,4	2,4	3,4	2,4	3,4	65
ф, х, ц	VIII	0,8	1,8	0,3	2,6	3,6	2,6	3,6	70
ч, ш, щ	IX	0,9	1,9	0,4	2,8	3,8	2,8	3,8	75
э, ю, я	X	1,0	2,0	0,5	3,0	4,0	3,0	4,0	80
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Подставляя значения заданных моментов, получим  $M_A + M_B = M_1 - M_2$  или

$$M_A + M_B = -3 \text{ кНм..} \quad (3.1)$$

Так как неизвестных два, а уравнение равновесия (3.1) одно, вал является один раз статически неопределимым.

Для раскрытия статической неопределимости составляем дополнительное уравнение (уравнение деформаций), которое представляет собой равенство нулю угла закручивания сечения  $B$  вала по отношению к сечению  $A$ , так как заделки не поворачиваются. Заданный вал имеет три участка, поэтому  $\varphi_{BA} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III}$ , или

$$\frac{M_x^I l_I}{GJ_{pI}} + \frac{M_x^{II} l_{II}}{GJ_{pII}} + \frac{M_x^{III} l_{III}}{GJ_{pIII}} = 0. \quad (3.2)$$

Крутящий момент  $M_x$  на каждом участке вала определяем методом сечений.

Тогда:

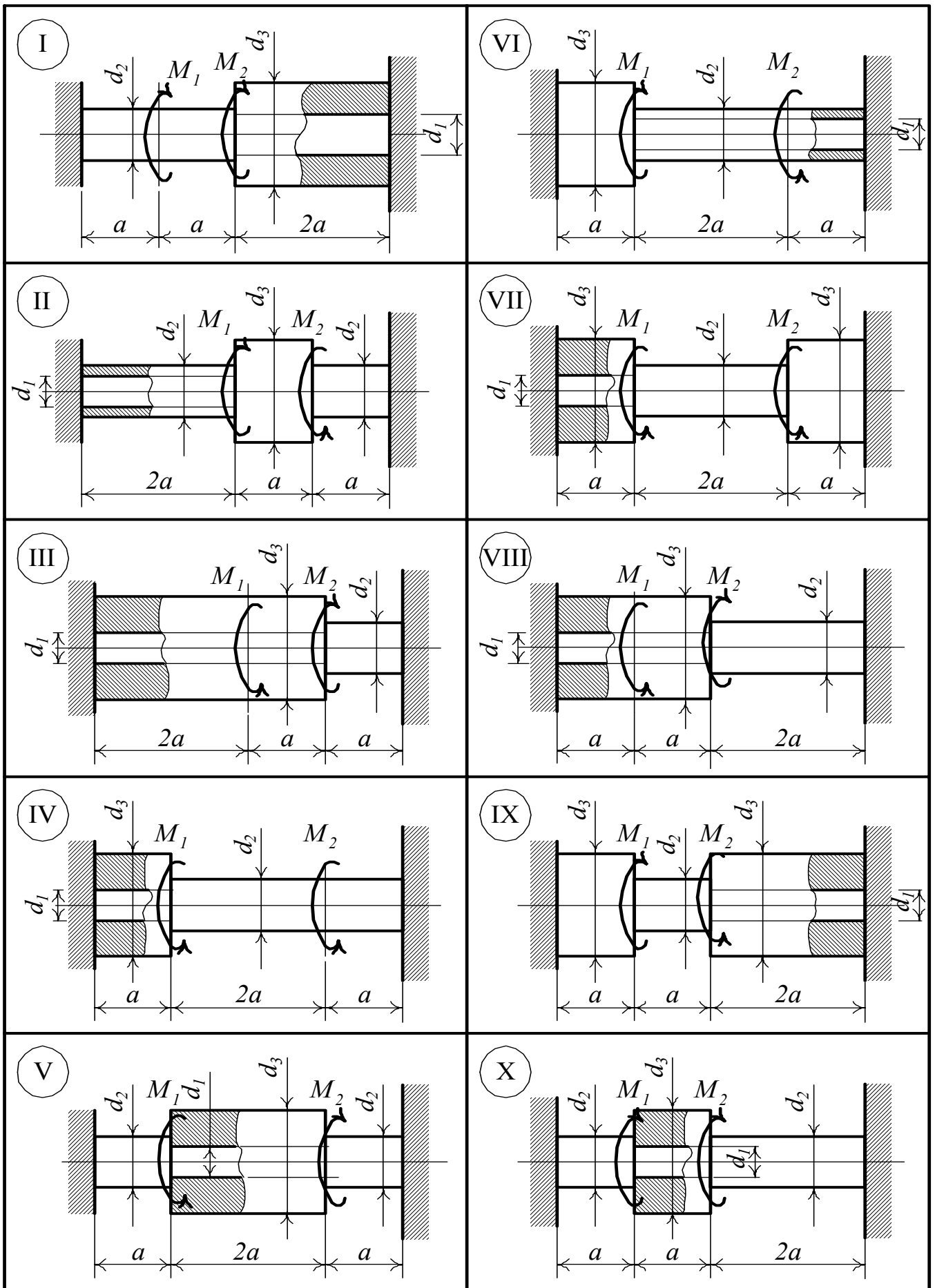


Рис. 3.1

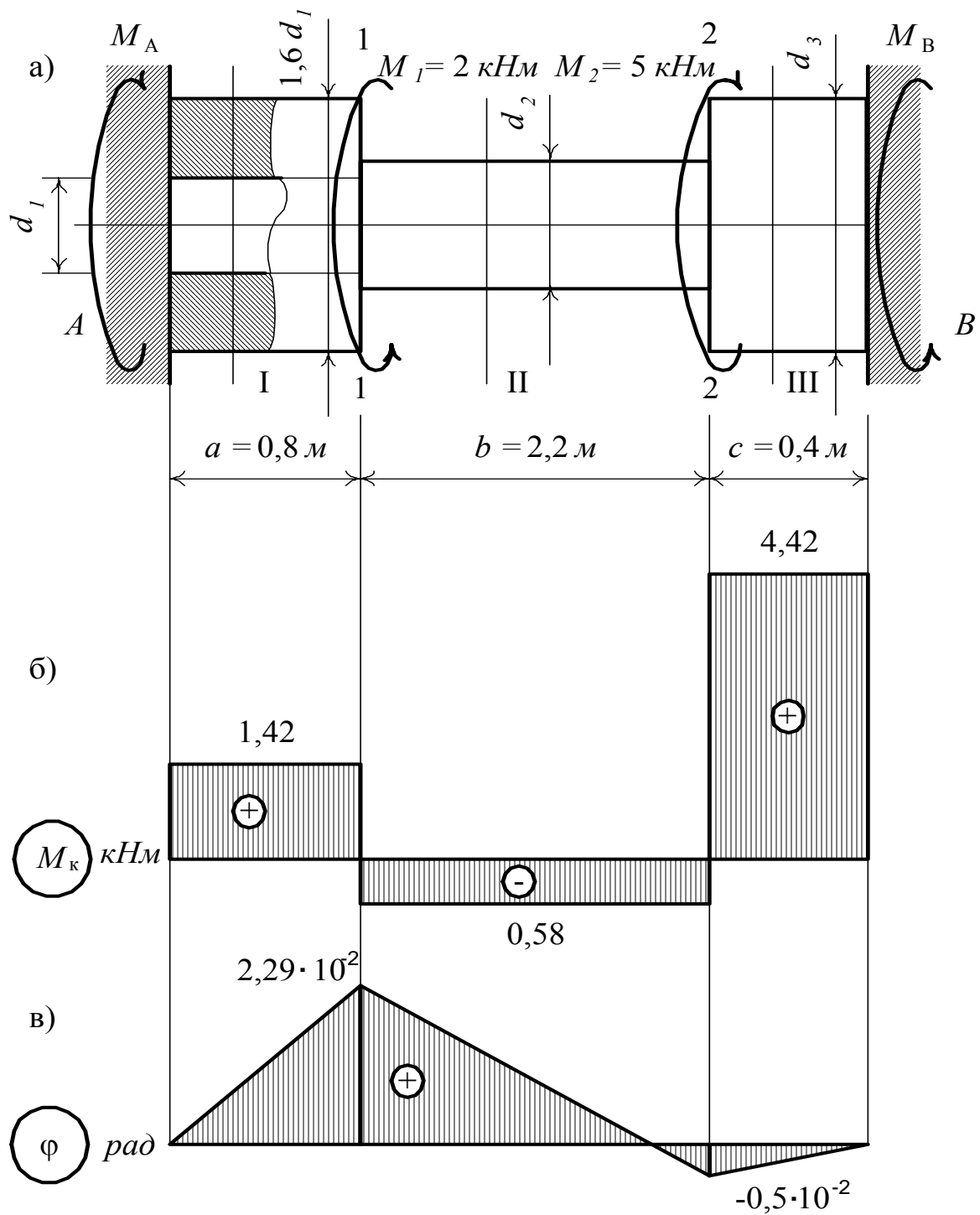


Рис. 3.2

$$M_x^I = M_A;$$

$$M_x^{II} = M_A - M_1 = (M_A - 2)\text{ кНм};$$

$$M_x^{III} = M_A - M_1 + M_2 = (M_A - 2 + 5) = (M_A + 3)\text{ кНм}.$$

Длины участков:  $l_I = a = 0,8\text{ м}$ ,  $l_{II} = b = 2,2\text{ м}$ ,  $l_{III} = c = 0,4\text{ м}$ .

Определяем полярные моменты инерции на участках вала с учетом заданных в условии соотношений диаметров.

На первом участке вал имеет отверстие, полярный момент инерции такого сечения вала определяется по формуле

$$J_{pI} = \frac{\pi d_H^4}{32} \left( 1 - \frac{d_B^4}{d_H^4} \right), \quad (3.3)$$

где  $d_H$  - наружный диаметр вала,  $d_B$  - внутренний диаметр вала.

На первом участке  $d_H = 1,6d_1$ ,  $d_B = d_1$ , поэтому

$$J_{pI} = \frac{\pi(1,6d_1)^4}{32} \left( 1 - \frac{d_1^4}{(1,6d_1)^4} \right) = 0,54d_1^4. \quad (3.4)$$

На втором и третьем участках вал имеет сплошные круглые сечения, для которых полярный момент инерции определяется по формуле  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ .

Учитывая заданные в примере соотношения диаметров, получим на втором участке при  $d_2 = 1,5d_1$

$$J_{pII} = \frac{\pi(1,5d_1)^4}{32} = 0,5d_1^4. \quad (3.5)$$

На третьем участке при  $d_3 = 2,5d_1$ , получим

$$J_{pIII} = \frac{\pi(2,5d_1)^4}{32} = 3,83d_1^4. \quad (3.6)$$

Подставим все заданные величины в (3.2) и получим

$$\frac{M_A \cdot 0,8}{0,54d_1^4} + \frac{(M_A - 2) \cdot 2,2}{0,5d_1^4} + \frac{(M_A + 3) \cdot 0,4}{3,83d_1^4} = 0.$$

Отсюда находим  $M_A = 1,42 \text{ кНм}$ , а из уравнения (3.1)  $M_B = -4,42 \text{ кНм}$ .

2. Вычисляем крутящие моменты внутренних усилий на каждом участке вала:

$$M_x^I = M_A = 1,42 \text{ кНм}; \quad M_x^{II} = M_A - 2 = 1,42 - 2 = -0,58 \text{ кНм}; \quad M_x^{III} = M_A + 3 = 1,42 + 3 = 4,42 \text{ кНм}.$$

По этим значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 3.2, б).

3. Из условия прочности определяем диаметр вала на каждом участке

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau],$$

где  $W_p$  - полярный момент сопротивления. Для полого вала  $W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}$ . С учетом

$$(3.3) \text{ и } \rho_{\max} = \frac{d_H}{2} \text{ получим на первом участке } W_{pI} = \frac{\pi d_H^3}{16} \left( 1 - \frac{d_B^4}{d_H^4} \right). \text{ Учитывая, что}$$

$d_H = 1,6d_1, d_B = d_1$  получим

$$W_{pI} = \frac{\pi(1,6d_1)^3}{16} \left( 1 - \frac{d_1^4}{(1,6d_1)^4} \right) = 0,68d_1^3. \quad (3.7)$$

Из условия прочности первого участка вала находим

$$W_{pI} = \frac{M_x^I}{[\tau]} = \frac{1,42 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^6} = 23,67 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 23,67 \text{ см}^3. \quad (3.8)$$

Приравнявая (3.7) и (3.8), вычислим диаметр вала на первом участке:

$0,68d_1^3 = 23,67 \text{ см}^3$ , откуда

$$d_1 = 3,27 \text{ см}. \quad (3.9)$$

На втором и третьем участках вал имеет сплошное сечение, для которого

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}. \text{ Тогда из условия прочности } \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau] \text{ получим } d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi[\tau]}}.$$

$$\text{На втором участке } d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,58 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 3,66 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,66 \text{ см}. \text{ Но}$$

$d_2 = 1,5d_1$ , тогда

$$d_1 = 2,44 \text{ см}. \quad (3.10)$$

$$\text{На третьем участке } d_3 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4,42 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 7,22 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 7,22 \text{ см}.$$



Учитывая, что  $d_3 = 2,5d_1$ , получим

$$d_1 = 2,89 \text{ см.} \quad (3.11)$$

Из трех полученных значений  $d_1$  (3.9), (3.10) и (3.11) принимаем большее значение, чтобы была обеспечена прочность всех участков вала, т.е.  $d_1 = 3,27 \text{ см.}$

Тогда на первом участке  $d_{\text{н}} = 1,6d_1 = 5,23 \text{ см}$ ,  $d_{\text{в}} = d_1 = 3,27 \text{ см}$ .

На втором участке  $d_2 = 1,5d_1 = 4,91 \text{ см}$ , а на третьем участке

$$d_3 = 2,5d_1 = 8,2 \text{ см.}$$

4. Вычисляем углы закручивания каждого участка вала по формуле  $\varphi = \frac{M_x l}{GJ_p}$ .

На первом участке  $M_x^I = 1,42 \text{ кНм}$ ,  $l_I = 0,8 \text{ м}$ ,  $J_{pI} = 0,54d_1^4$ ,  $d_1 = 3,27 \text{ см}$ ,

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

$$\text{Тогда } \varphi_I = \frac{1,42 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,54 \cdot 3,27^4 \cdot 10^{-8}} = 2,29 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Аналогично на втором участке:

$$\varphi_{II} = \frac{-0,58 \cdot 10^3 \cdot 2,2}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 3,27^4 \cdot 10^{-8}} = -2,79 \cdot 10^{-2} \text{ рад,}$$

$$\varphi_{III} = \frac{4,42 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3,83 \cdot 3,27^4 \cdot 10^{-8}} = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

5. Построим эпюру углов закручивания вала. Угол закручивания любого сечения вала равен алгебраической сумме углов закручивания участков, расположенных между этим сечением и закрепленным.

В приведенном примере вал имеет два неподвижных сечения в опорах. Значит, угол поворота сечения  $A$  и угол поворота сечения  $B$  равны нулю. Сечение на границе между первым и вторым участками повернется по отношению к сечению  $A$  на угол поворота первого участка  $\varphi_1 = \varphi_I = 2,29 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$ . Сечение на границе между вто-

рым и третьим участками по отношению к сечению  $A$  повернется на угол

$$\varphi_2 = \varphi_I + \varphi_{II} = 2,29 \cdot 10^{-2} + (-2,79 \cdot 10^{-2}) = -0,5 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Угол поворота сечения  $B$  по отношению к сечению  $A$  должен быть равен нулю

$$\varphi_B = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = 2,29 \cdot 10^{-2} + (-2,79 \cdot 10^{-2}) + 0,5 \cdot 10^{-2} = 0.$$

С учетом полученных данных строим эпюру углов закручивания (рис. 3.2,в).

## 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Рассматривается определение направления главных центральных осей инерции плоского сечения и моментов инерции относительно этих осей.

### 4.1. Моменты инерции относительно главных центральных осей

#### Задача 8

Для заданного плоского сечения, состоящего из швеллера или двутавра, неравнобокого уголка и полосы (рис. 4.1) требуется:

- 1) выписать исходные данные из таблиц сортамента прокатной стали, вычертить сечение в удобном масштабе и указать на нем все размеры;
- 2) определить положение центра тяжести;
- 3) найти осевые и центробежные моменты инерции относительно центральных осей;
- 4) определить направление главных центральных осей;
- 5) найти моменты инерции относительно главных центральных осей.

Данные взять из табл. 4.1.

Порядок выполнения задачи 8 аналогичен решению примера 8.

Пример 8. Для заданного плоского сечения, состоящего из швеллера № 20, неравнобокого уголка  $200 \times 125 \times 12$  мм и полосы  $120 \times 20$  мм определить положение главных центральных осей инерции и вычислить главные центральные моменты инерции (рис. 4.2).

#### Решение.

1. Из таблиц сортамента прокатной стали (ГОСТ 8240 - 72 и ГОСТ 8510 -72) для швеллера № 20 и неравнобокого уголка  $20 \times 12,5 \times 1,2$  см выписываем их размеры, площади поперечных сечений, осевые моменты инерции и другие параметры. Для полосы вычисляем площадь и моменты инерции по формулам (рис. 4.2,а).

Вычерчиваем заданное сечение в масштабе (рис. 4.2, б).

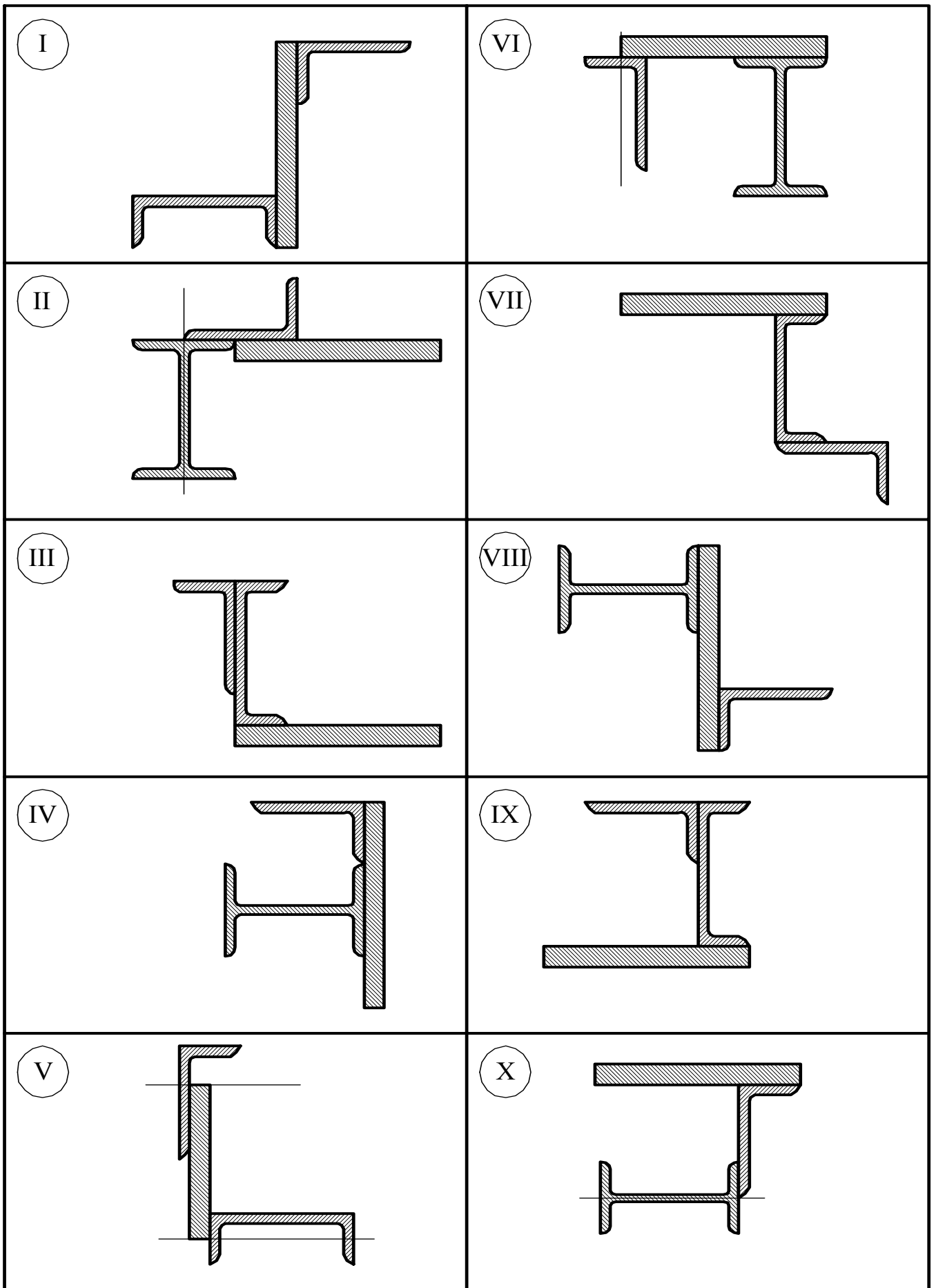


Рис. 4.1

Таблица 4.1.

Буквы алфавита	тип сечения	швеллер №	двутавр №	неравнобокий уголок, мм	полоса, мм
а, б, в	I	14	12	90 × 56 × 8	180 × 19
г, д, е	II	16	14	100 × 63 × 10	190 × 18
ё, ж, з	III	18	16	110 × 70 × 8	200 × 17
и, й, к	VI	20	18	125 × 80 × 12	210 × 16
л, м, н	V	22	20а	140 × 90 × 10	220 × 15
о, п, р	VI	24	20	75 × 50 × 8	230 × 14
с, т, у	VII	27	22а	80 × 50 × 6	240 × 13
ф, х, ц	VIII	30	22	90 × 56 × 6	250 × 12
ч, ш, щ	IX	33	24а	100 × 63 × 8	260 × 11
э, ю, я	X	36	24	125 × 80 × 8	270 × 10
	1	2	3	4	5

2. Выбираем вспомогательные оси  $z_0$  и  $y_0$ , совпадающие с центральными осями швеллера. Тогда координаты центра тяжести каждого элемента заданного сечения будут такими (рис. 4.2,б): швеллера  $z_1 = 0$ ;  $y_1 = 0$ ; уголка  $z_2 = -(10+2,83) = -12,83$  см;  $y_2 = 20 - 2,07 - 6,54 = 11,39$  см; полосы  $z_3 = 10 + 1 = 11$  см;  $y_3 = 12/2 - 2,07 = 3,93$  см.

Положение центра тяжести всего сечения определяем по формулам:

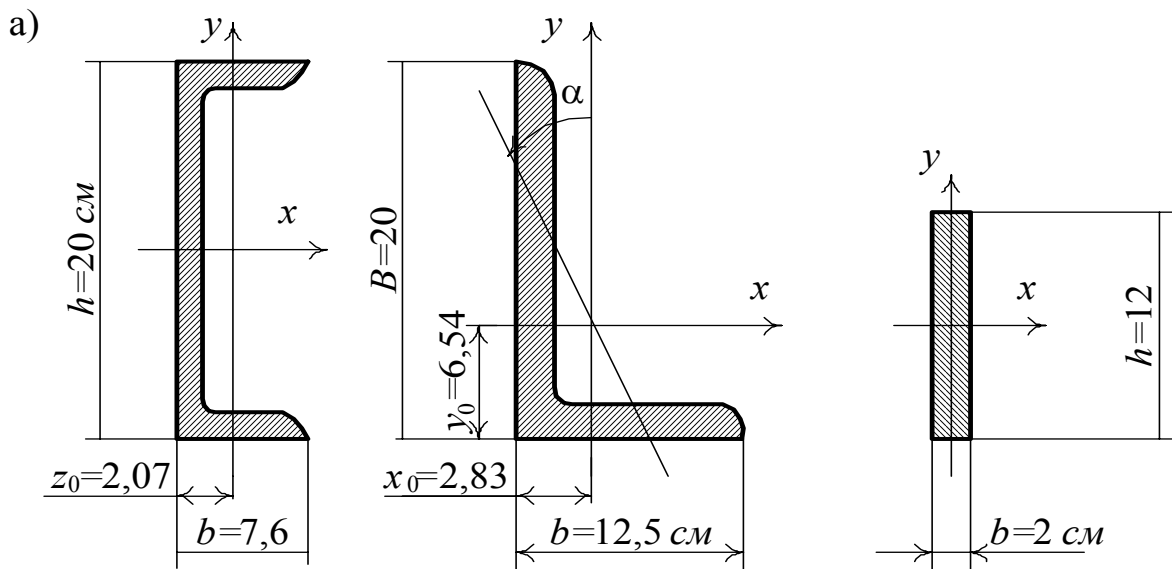
$$z_c = \frac{\sum F_i z_{ci}}{\sum F_i} = \frac{F_1 z_{c1} + F_2 z_{c2} + F_3 z_{c3}}{F_1 + F_2 + F_3}; \quad (4.1)$$

$$y_c = \frac{\sum F_i y_{ci}}{\sum F_i} = \frac{F_1 y_{c1} + F_2 y_{c2} + F_3 y_{c3}}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Тогда

$$z_c = \frac{0 + 37,9 \cdot (-12,83) + 24 \cdot 11}{23,4 + 37,9 + 24} = -2,606 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{0 + 37,9 \cdot 11,39 + 24 \cdot 3,93}{23,4 + 37,9 + 24} = 6,166 \text{ см}.$$



Швеллер № 20

$$F = 23,4 \text{ см}^2$$

$$J_x = 1520 \text{ см}^4$$

$$J_y = 113 \text{ см}^4$$

Неравнобокий уголок

$$20 \times 12,5 \times 1,2$$

$$F = 37,9 \text{ см}^2$$

$$J_x = 1568 \text{ см}^4$$

$$J_y = 482 \text{ см}^4$$

$$\text{tg} \alpha = 0,392$$

Полоса 12×2

$$F = b \times h = 24 \text{ см}^2$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = 288 \text{ см}^4$$

$$J_y = \frac{b^3h}{12} = 8 \text{ см}^4$$

б)

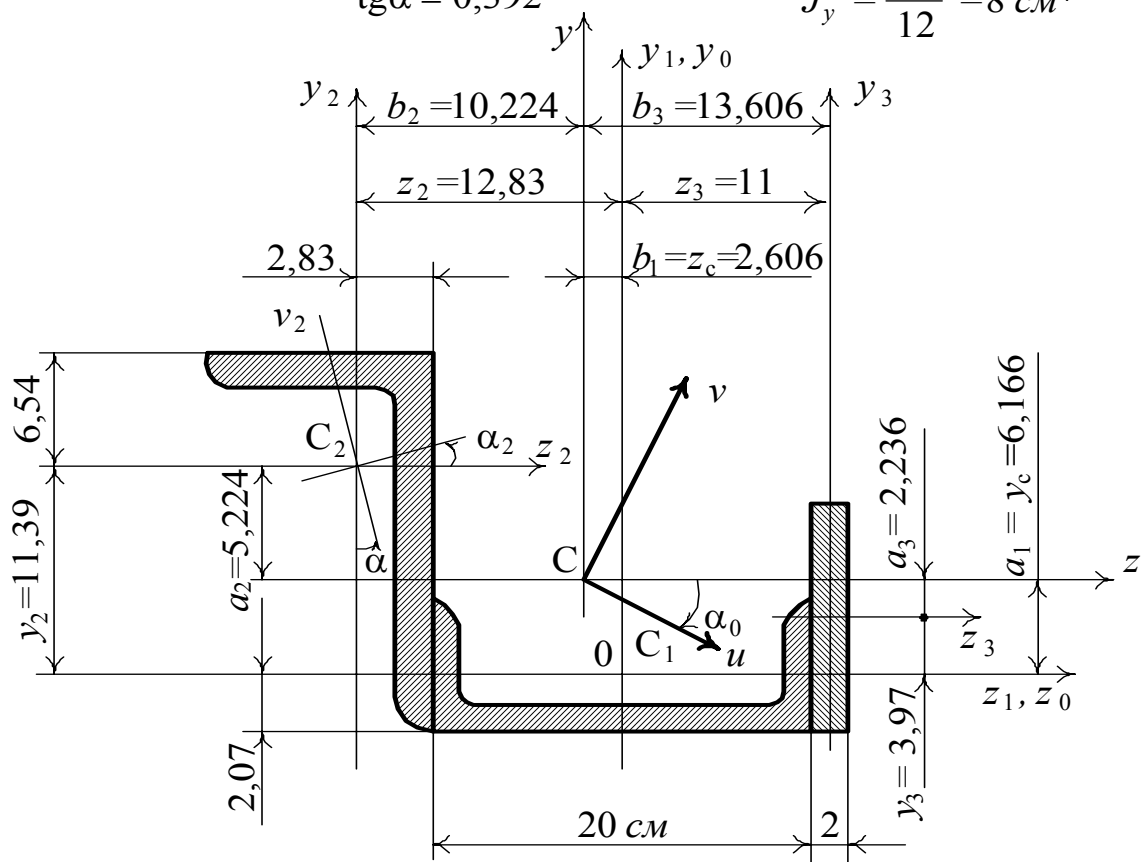


Рис. 4.2.

По найденным координатам получаем центр тяжести всего сечения  $C$  и через него проводим центральные оси всего сечения  $z, y$ , параллельные осям  $z_0$  и  $y_0$ .

3. Вычисляем осевые и центробежные моменты инерции всего сечения относительно общих центральных осей  $z, y$ , используя зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей:

$$\begin{aligned} J_z &= \sum (J_{zi} + F_i a_i^2); \\ J_y &= \sum (J_{yi} + F_i b_i^2); \\ J_{zy} &= \sum (J_{ziyi} + F_i a_i b_i). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Определяем расстояние между собственными центральными осями каждого элемента сечения и общими центральными осями:

$$\begin{aligned} a_1 &= y_1 - y_c = -6,166 \text{ см}, \\ a_2 &= y_2 - y_c = 11,39 - 6,166 = 5,224 \text{ см}, \\ a_3 &= y_3 - y_c = 3,93 - 6,166 = -2,236 \text{ см}; \\ b_1 &= z_1 - z_c = 0 - (-2,606) = 2,606 \text{ см}, \\ b_2 &= z_2 - z_c = -12,83 - (-2,606) = -10,224 \text{ см}, \\ b_3 &= z_3 - z_c = 11 - (-2,606) = 13,606 \text{ см}. \end{aligned}$$

Для заданного сечения (рис. 2.4,б), используя данные, приведенные на рис. 4.2,а и учитывая характер расположения элементов сечения, получим:

$$\begin{aligned} J_z &= J_{z1} + F_1 a_1^2 + J_{z2} + F_2 a_2^2 + J_{z3} + F_3 a_3^2 = \\ &= 113 + 23,4 \cdot 6,166^2 + 1568 + 37,9 \cdot 5,224^2 + 288 + 24 \cdot 2,236^2 = \\ &= 4012,95 \text{ см}^4; \\ J_z &= 4012,95 \text{ см}^4. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
J_y &= J_{y1} + F_1 b_1^2 + J_{y2} + F_2 b_2^2 + J_{y3} + F_3 b_3^2 = \\
&= 1520 + 23,4 \cdot 2,606^2 + 482 + 37,9 \cdot 10,224^2 + 8 + 24 \cdot 13,606^2 = \\
&= 10573,57 \text{ см}^4;
\end{aligned}$$

$$J_y = 10573,57 \text{ см}^4. \quad (4.4)$$

Центробежные моменты инерции швеллера и полосы относительно собственных центральных осей равны нулю, так как эти оси являются главными для указанных сечений, т.е.  $J_{z_1y_1} = J_{z_3y_3} = 0$ .

Центробежный момент инерции уголка можно определить по формуле

$$J_{z_2y_2} = \frac{(J_{y2} - J_{z2}) \operatorname{tg} \alpha_2}{(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_2)}, \text{ где } \alpha_2 \text{ отсчитывается от горизонтальной центральной оси}$$

уголка до ближайшей главной оси. Если при этом угол  $\alpha_2$  отсчитывается против часовой стрелки, то  $\alpha_2 > 0$ , а если по часовой стрелке, то  $\alpha_2 < 0$ . В рассматриваемом примере (рис. 4.2,б)  $\alpha_2 = +\alpha$ , т.е. равен углу, значение тангенса которого  $\operatorname{tg} \alpha$  приведено в исходных данных. Итак,  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha = 0,392$ .

$$\text{Тогда } J_{z_2y_2} = \frac{(482 - 1568) \cdot 0,392}{(1 - 0,392^2)} = -503,00 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции всего сечения относительно общих центральных осей равен:

$$\begin{aligned}
J_{zy} &= J_{z_1y_1} + F_1 a_1 b_1 + J_{z_2y_2} + F_2 a_2 b_2 + J_{z_3y_3} + F_3 a_3 b_3 = \\
&= 0 + 23,4 \cdot (-6,166) \cdot (2,606) - 503 + 37,9 \cdot (5,224) \cdot (-10,224) + \\
&+ 0 + 24 \cdot (-2,236) \cdot (13,606) = -3633,40 \text{ см}^4;
\end{aligned}$$

$$J_{zy} = -3633,40 \text{ см}^4. \quad (4.5)$$

4. Используя (4.3), (4.4) и (4.5), вычислим угол наклона главных осей всего сечения  $u$  и  $v$  по отношению к центральным осям  $z$ ,  $y$  по формуле



$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{2 \cdot (-3633,40)}{10573,57 - 4012,95} = -1,108, \quad 2\alpha_0 = -47,93^0,$$

$$\alpha_0 = -23,97^0. \quad (4.6)$$

Если угол  $\alpha$  отрицательный, то центральные оси поворачиваем по часовой стрелке (положительный - против часовой стрелки) и получаем направление главных центральных осей  $u$  и  $v$  всего сечения (рис. 4.2, б).

5. Главные центральные моменты инерции вычисляются по формулам:

$$J_u = J_z \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - J_{zy} \sin 2\alpha_0, \quad (4.7)$$

$$J_v = J_z \sin^2 \alpha_0 + J_y \cos^2 \alpha_0 + J_{zy} \sin 2\alpha_0. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.3), (4.4), (4.5) и (4.6) в (4.7) и (4.8), получим:

$$J_u = 4012,95 \cdot \cos^2(-23,97^0) + 10573,57 \cdot \sin^2(-23,97^0) - (-3633,43) \cdot \sin(-47,93^0) =$$

$$= 2398,13 \text{ см}^4$$

$$J_u = 2398,13 \text{ см}^4. \quad (4.9)$$

$$J_v = 4012,95 \cdot \sin^2(-23,97^0) + 10573,57 \cdot \cos^2(-23,97^0) + (-3633,43) \cdot \sin(-47,93^0) =$$

$$= 12188,38 \text{ см}^4$$

$$J_v = 12188,38 \text{ см}^4. \quad (4.10)$$

Проверка решения задачи:

1) главные моменты инерции являются экстремальными, т.е. используя (4.3), (4.4), (4.9) и (4.10) получаем

$$J_u = 2398,13 \text{ см}^4 < J_z = 4012,95 \text{ см}^4 \text{ и}$$

$$J_v = 12188,38 \text{ см}^4 > J_y = 10573,57 \text{ см}^4;$$

2) сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проведенных через одну и ту же точку есть величина постоянная, т.е.

$J_z + J_y = J_u + J_v$ . В рассматриваемом случае, используя (4.3), (4.4), (4.9) и (4.10), получаем

$$4012,95 + 10573,57 = 2398,13 + 12188,38,$$

или  $14586,52=14586,51$ , т.е. погрешность практически равна нулю (допускается погрешность до 1%);

3) центробежный момент инерции относительно главных осей  $u$  и  $v$  должен быть равен нулю

$$J_{uv} = J_{zy} \cos 2\alpha_0 - \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha_0.$$

Используем (4.3), (4.4) и (4.6) и получим

$$\begin{aligned} J_{uv} &= (-3633,40) \cdot \cos(-47,93^0) - \frac{10573,57 - 4012,95}{2} \cdot \sin(-47,93^0) = \\ &= -2432,92 + 2434,65 = 1,73 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

$$\text{Погрешность } \frac{1,73}{2432,92} \times 100\% = 0,07\% < 1\%.$$

## 5. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Рассматриваются вопросы прочности и жесткости статически определимых и статически неопределимых балок и рам.

### 5.1. Внутренние силовые факторы и подбор сечения балок и рам при изгибе

#### Задача 9

Для заданных балок требуется:

1) для балки (рис. 5.1, а) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать двутавровое, круглое и прямоугольное сечение с заданным соотношением  $h$  и  $b$ , если  $[\sigma]=160 \text{ МПа}$  (рис. 5.2, а б, в);

2) сравнить массы балки;

3) для балки (рис. 5.1, б) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать тавровое сечение (рис. 5.4, г), если балка выполнена из чугуна ( $[\sigma]_{с ж} = -100 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma]_p = 30 \text{ МПа}$ ).

Данные взять из табл. 5.1.

Таблица 5.1.

Буквы алфавита	схема рис.	$a$ , $м$	$b$ , $м$	$c$ , $м$	$P$ , $кН$	$M$ , $кНм$	$q$ , $кН/м$	$\frac{h}{b}$
а, б, в	I	2,1	1,1	3,1	10	10	10	2,1
г, д, е	II	2,2	1,2	3,2	20	20	20	2,2
ё, ж, з	III	2,3	1,3	3,3	30	30	30	2,3
и, й, к	VI	2,4	1,4	3,4	40	40	40	2,4
л, м, н	V	2,5	1,5	3,5	50	50	50	2,5
о, п, р	VI	2,6	1,6	3,6	6	6	6	1,6
с, т, у	VII	2,7	1,7	3,7	7	7	7	1,7
ф, х, ц	VIII	2,8	1,8	3,8	8	8	8	1,8
ч, ш, щ	IX	2,9	1,9	3,9	9	9	9	1,9
э, ю, я	X	3,0	2,0	4,0	10	10	10	2,0
	1	2	3	4	5	6	7	8

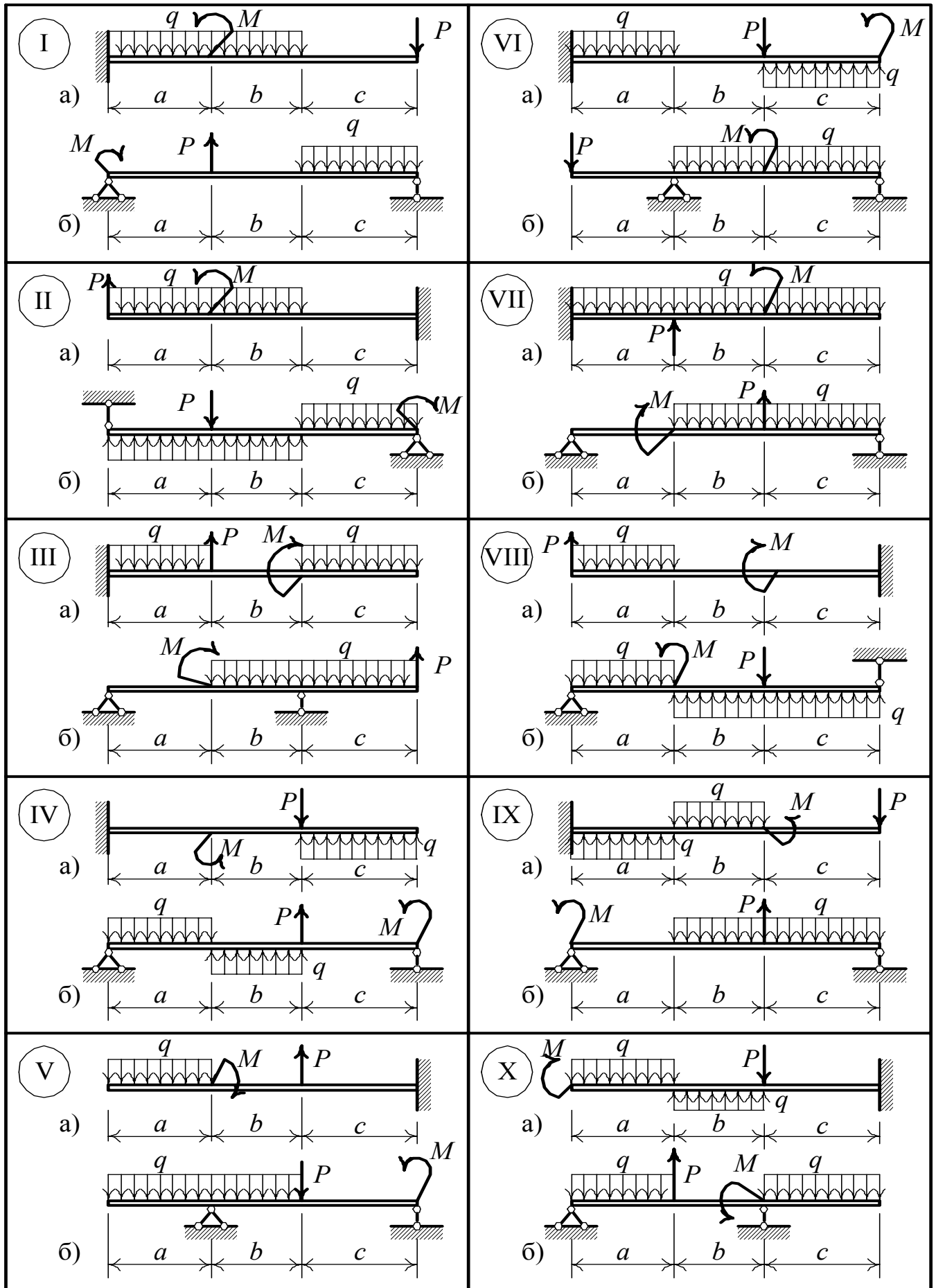


Рис. 5.1

Порядок выполнения задачи 9 аналогичен решению примеров 9 а, б.

Пример 9.а. Для заданной балки (рис. 5.3, а) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Подобрать двутавровое, круглое и прямоугольное сечения с отношением сторон прямоугольника  $\frac{h}{b}=2$ , если  $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ .

Решение.

В защемлении от действия внешних сил возникают реакции в виде момента и силы. Их величину можно определить с помощью уравнений равновесия. Однако, в консольной балке реакции можно не определять, если уравнения поперечных сил и изгибающих моментов составлять, рассматривая отсеченные части балки со стороны свободного конца.

Первый участок ( $0 \leq x \leq 1 \text{ м}$ ):

$$Q(x) = q_1 x = 40x, \text{ при } x = 0, Q(0) = 0; \text{ при } x = 1 \text{ м}, Q(1) = 40 \text{ кН};$$

$$M(x) = M - \frac{q_1 x^2}{2} = 30 - \frac{40x^2}{2} = 30 - 20x^2, \text{ при } x = 0, M(0) = 30 \text{ кНм}; \text{ при } x=1 \text{ м},$$

$$M(1) = 10 \text{ кНм};$$

Второй участок ( $1 \text{ м} \leq x \leq 2 \text{ м}$ ):

$$Q(x) = 40 \cdot 1 = 40 \text{ кН};$$

$$M(x) = M - q_1 \cdot 1 \cdot (x - 0,5) = 30 - 40 \cdot (x - 0,5), \text{ при } x = 1 \text{ м}, M(1) = -10 \text{ кНм}; \text{ при } x = 2 \text{ м}, M(2) = -30 \text{ кНм};$$

Третий участок ( $2 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$ ):

$$Q(x) = q_1 \cdot 1 + P - q_2(x - 2) = 40 \cdot 1 + 10 - 30 \cdot (x - 2) = 50 - 30 \cdot (x - 2), \text{ при } x = 2 \text{ м}, Q(2) = 50 \text{ кН}, \text{ при } x = 4 \text{ м}, Q(4) = 50 - 30 \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$M(x) = M - q_1 \cdot 1 \cdot (x - 0,5) - P(x - 2) + q_2 \frac{(x - 2)^2}{2} = \\ = 30 - 40 \cdot (x - 0,5) - 10(x - 2) + 15(x - 2)^2,$$

$$\text{при } x = 2 \text{ м}, M(2) = -30 \text{ кНм}; \text{ при } x = 4 \text{ м}, M(4) = -70 \text{ кНм}.$$



На третьем участке определяем экстремум изгибающего момента в сечении, где  $\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = 0$ , т.е.

$$Q^{III}(x) = q_1 \cdot 1 + P - q_2(x - 2) = 0: x = 3,667 \text{ м.}$$

Полученное значение  $x$  подставим в уравнение изгибающих моментов на третьем участке, получаем  $M_{\max} = -71,67 \text{ кНм}$ .

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 5.3, б, в.

Подбор размеров поперечных сечений балки выполняется на основании условия прочности по нормальным напряжениям

$$W_z = \frac{M(x)_{\max}}{[\sigma]}. \quad (5.2)$$

Из эпюры изгибающих моментов (рис. 5.3, в)  $M(x)_{\max} = 71,67 \text{ кНм}$ , тогда

$$W_z \geq \frac{71,67 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 447,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 447,9 \text{ см}^3.$$

Подбираем двутавровое сечение по таблице прокатных профилей ГОСТ 8239-72 так, чтобы осевой момент сопротивления принятого профиля был близок к  $W_z$ , полученному по условию прочности. Для рассматриваемого примера следует принять двутавр №30 с моментом сопротивления  $W_z = 472 \text{ см}^3$  и площадью сечения  $F_{\text{дв}} = 46,5 \text{ см}^2$ . При этом подборе допускается превышение допускаемых напряжений до 5%.

Подбираем круглое сечение балки. Осевой момент сопротивления для круглого сечения равен

$$W_z = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (5.3)$$

Приравнявая (5.3) и (5.4), получим  $\frac{\pi d^3}{32} = 447,9 \text{ см}^3$ , откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{447,9 \cdot 32}{3,14}} = 16,6 \text{ см} - \text{диаметр круглого сечения балки,}$$

$$F_{к\ p} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 16,6^2}{4} = 216,4 \text{ см}^2.$$

Подбираем прямоугольное сечение балки с отношением сторон  $\frac{h}{b} = 2$ . Момент сопротивления прямоугольного сечения балки

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3. \quad (5.4)$$

Приравнявая (5.4) и (5.2), получим  $\frac{2}{3}b^3 = 447,9 \text{ см}^3$ , откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{447,9 \cdot 3}{2}} = 8,756 \text{ см} \approx 8,8 \text{ см}.$$

Таким образом, размеры прямоугольного сечения балки будут  $b = 8,8 \text{ см}$ ,  $h = 2 \cdot 8,8 = 17,6 \text{ см}$ ,  $F_{п\ p} = bh = 8,8 \cdot 17,6 = 154,88 \text{ см}^2$ .

Сравним массы балок двутаврового, круглого и прямоугольного сечения (рис. 5.2). Так как масса балки прямо пропорциональна площади поперечного сечения, то сравним площади сечений.

Отношения  $\frac{F_{к\ p}}{F_{дв}} = \frac{216,4}{46,5} = 4,65$  и  $\frac{F_{п\ p}}{F_{дв}} = \frac{154,88}{46,5} = 3,33$  показывают, что двутав-

ровая балка легче круглой в 4,65 и легче прямоугольной в 3,3 раза.

Следовательно, из рассмотренных трех видов сечений двутавровое сечение является наиболее рациональным.

Пример 9,б. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для двухопорной балки (рис. 5.4, а) и подобрать размеры заданного сечения (рис. 5.4, г) чугунной балки, если  $[\sigma]_{с\ ж} = -100 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma]_p = 30 \text{ МПа}$ .



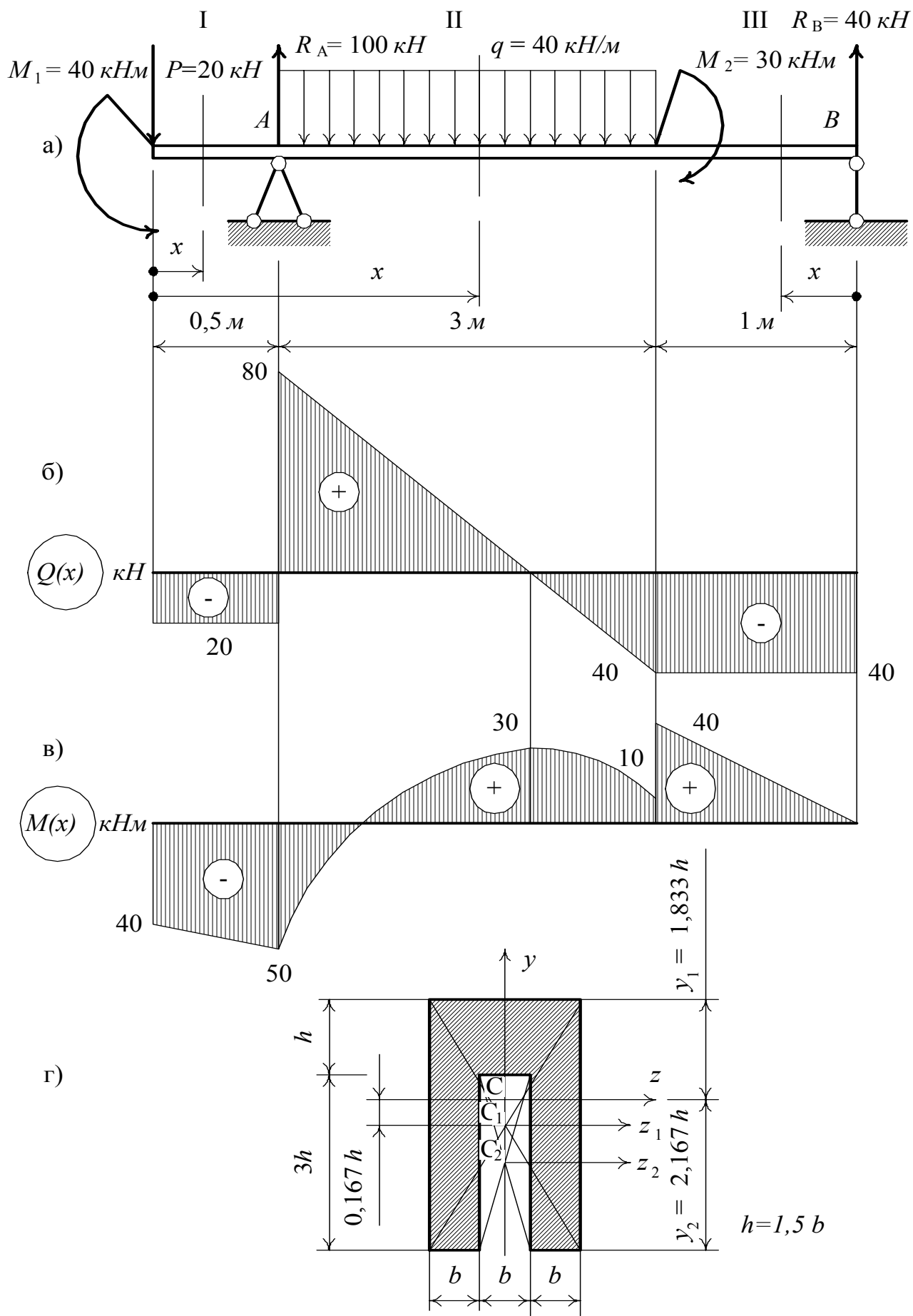


Рис. 5.4.

В шарнирно подвижной опоре возникает опорная реакция, направленная перпендикулярно направлению возможного перемещения. В шарнирно неподвижной опоре реакция раскладывается на 2 составляющие вдоль осей координат. Так как к балке приложена только вертикальная нагрузка, то горизонтальная составляющая в шарнирно неподвижной опоре равна нулю.

Опорные реакции определяются из уравнений равновесия (рис. 5.4, а):

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 4 + M_1 + P \cdot 3,5 + q \cdot 3 \cdot 2,5 - M_2 = 0, \text{ откуда}$$

$$R_A = \frac{40 + 20 \cdot 4,5 + 40 \cdot 3 \cdot 2,5 - 30}{4} = 100 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 4 + M_1 + P \cdot 0,5 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - M_2 = 0, \text{ откуда}$$

$$R_B = \frac{-40 + 20 \cdot 0,5 + 40 \cdot 3 \cdot 1,5 + 30}{4} = 40 \text{ кН}.$$

Проверка правильности определения реакций.

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - P - q \cdot 3 = 0, \quad 100 + 40 - 20 - 40 \cdot 3 = 0.$$

Если при вычислении реакция окажется с отрицательным знаком, то она направлена в противоположную сторону по отношению к первоначально выбранному направлению.

Для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов составляются уравнения  $Q(x)$  и  $M(x)$  на трех участках заданной балки.

Первый участок ( $0 \leq x \leq 0,5 \text{ м}$ ):

$$Q(x) = -P = 20 \text{ кН},$$

$$M(x) = -M_1 - Px = -40 - 20x, \text{ при } x=0, M(0) = 40 \text{ кНм}, \text{ при } x = 0,5 \text{ м},$$

$$M(0,5) = -40 - 20 \cdot 0,5 = -50 \text{ кНм}.$$

Второй участок ( $0,5 \leq x \leq 3,5 \text{ м}$ ):

$Q(x) = -P + R_A - q(x - 0,5) = -20 + 100 - 40(x - 0,5)$ , при  $x = 0,5$  м,  $Q(0,5) = 80$  кН,  
при  $x = 3,5$  м,  $Q(3,5) = -40$  кН.

$M(x) = -M_1 - Px + R_A(x - 0,5) - q \frac{(x - 0,5)^2}{2} = -40 - 20x + 100(x - 0,5) - 20(x - 0,5)^2$ ,  
при  $x = 0,5$ ,  $M(0,5) = -50$  кНм, при  $x = 3,5$  м,  $M(3,5) = 10$  кНм.

Так как на втором участке задана равномерно распределенная нагрузка, то следует определить экстремум изгибающего момента.

На основании теоремы Журавского  $\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$  экстремум изгибающих моментов будет в сечении, где поперечная сила равна нулю:

$$\frac{dM(x)}{dx} = -20 + 100 - 40(x - 0,5) = 0, \quad x = 2,5 \text{ м.}$$

При  $x = 2,5$  м,  $M_{\max} = M(2,5) = -20 \cdot 2,5 + 100 \cdot 2 - 20 \cdot 2^2 - 40 = 30$  кНм.

Третий участок ( $0 \leq x \leq 1$  м):

$$Q(x) = -R_B = -40 \text{ кН,}$$

$$M(x) = R_B x = 40x, \text{ при } x = 0, M(0) = 0, \text{ при } x = 1 \text{ м, } M(1) = 40 \text{ кНм.}$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 5.4, б, в.

Вычисление размеров заданного сечения (рис. 5.4, г) чугуновой балки, если

$$[\sigma]_p = 30 \text{ МПа и } [\sigma]_{сж} = -100 \text{ МПа, } \frac{h}{b} = 1,5.$$

Определим положение центра тяжести сечения. Заданное сечение разделим на два прямоугольника: первый прямоугольник со сторонами  $4h$  и  $3b$  и центром тяжести  $C_1$  и второй прямоугольник (вырез) со сторонами  $3h$  и  $b$  и центром тяжести  $C_2$ . Площади прямоугольников  $F_1 = 12hb$  и  $F_2 = 3hb$ .

Так как сечение симметрично относительно оси  $y$ , то центры тяжести  $C_1$ ,  $C_2$  и центр тяжести всего сечения лежат на оси  $y$ , т.е.  $z_C = 0$ . Принимаем систему осей  $z_1$  и  $y_1$  за вспомогательную. Тогда

$$y_C = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i} = \frac{y_1 F_1 - y_2 F_2}{F_1 - F_2} = \frac{0 - (-0,5h) \cdot 3h \cdot b}{12 \cdot h \cdot b - 3h \cdot b} = 0,167h.$$

Откладываем от оси  $z_1$   $y_C = 0,167h$  и получаем точку С - центр тяжести заданного сечения. Через полученную точку С проводим систему центральных осей  $z$  и  $y$ . Ось  $z$ , проходящая через центр тяжести сечения, является нейтральной осью, где  $\sigma = 0$ .

Определим момент инерции относительно нейтральной оси  $z$ . Для этого применим формулу зависимости моментов инерции между параллельными осями (см. задачу 8).

$$\begin{aligned} J_z &= (J_{z1} + a_1^2 F_1) - (J_{z2} + a_2^2 F_2) = \\ &= \left[ \frac{3b(4h)^3}{12} + (0,167h)^2 \cdot 12bh \right] - \left[ \frac{b(3h)^3}{12} + (0,667h)^2 \cdot 3bh \right] = 12,75bh^3, \end{aligned}$$

т.к. по заданию  $h = 1,5b$ , то  $J_z = 12,75b(1,5b)^3 = 43,03b^4$ .

$$J_z = 43,03b^4. \quad (5.5)$$

Вычислим размеры поперечного сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям. Максимальный изгибающий момент на эпюре  $M(x)_{\max} = -50 \text{ кНм}$ . Так как  $M(x)_{\max}$  отрицательный, то в этом месте балка изгибается выпуклостью вверх. Поэтому выше нейтральной оси  $z$  в поперечном сечении балки будут растягивающие нормальные напряжения, а ниже оси  $z$  - сжимающие.

Наиболее удаленные точки поперечного сечения балки, в которых будут максимальные растягивающие и сжимающие напряжения имеют координаты соответственно  $y_1 = 1,833h = 2,75b$  и  $y_2 = 2,167h = 3,25b$  (рис. 5.4, г). Подбираем размеры сечения балки из расчета по допускаемым растягивающим напряжениям

$$\sigma_{\max p} = \frac{M(x)_{\max}}{J_z} y_1 \leq [\sigma]_p,$$

подставим числовые значения, с учетом (5.5) получим  $\frac{50 \cdot 10^3}{43,03b^4} \cdot 2,75b \leq 30 \cdot 10^6$ .

Отсюда находим

$$b = \sqrt[3]{\frac{3,195 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 4,73 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,73 \text{ см.} \quad (5.6)$$

Подбираем размеры сечения балки из расчета по допускаемым сжимающим напряжениям:

$$\sigma_{\text{max с ж}} = \frac{M(x)_{\text{max}}}{J_z} y_2 \leq [\sigma]_{\text{с ж}}.$$

После подстановки числовых значений, с учетом (5.4) получим

$\frac{50 \cdot 10^3}{43,03b^4} \cdot 3,25b \leq 100 \cdot 10^6$ . Отсюда находим

$$b = \sqrt[3]{\frac{3,776 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6}} = 3,35 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,35 \text{ см.} \quad (5.7)$$

Из двух полученных ответов в (5.6) и (5.7) для  $b$  принимаем больший, т.е.  $b=4,73 \text{ см}$ ,  $h=1,5b = 1,5 \cdot 4,73=7,1 \text{ см}$ , чтобы обеспечить прочность балки в растянутой и сжатой зонах.

В сечении с моментом  $40 \text{ кНм}$  в крайних волокнах балки будет растяжение

$$\sigma_p = \frac{40 \cdot 10^3}{43,03b^4} \cdot 3,25b = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 3,25}{43,03 \cdot 4,73^3} = 28,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 28,5 \text{ МПа} < [\sigma]_p.$$

### Задача 10

Для рамы (рис. 5.5) построить эпюры продольных и поперечных сил, изгибающих моментов и подобрать сечение рамы, состоящей из двух швеллеров (рис. 5.2, д) при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Данные взять из табл. 5.1.

Порядок выполнения задачи 10 аналогичен решению примера 10.

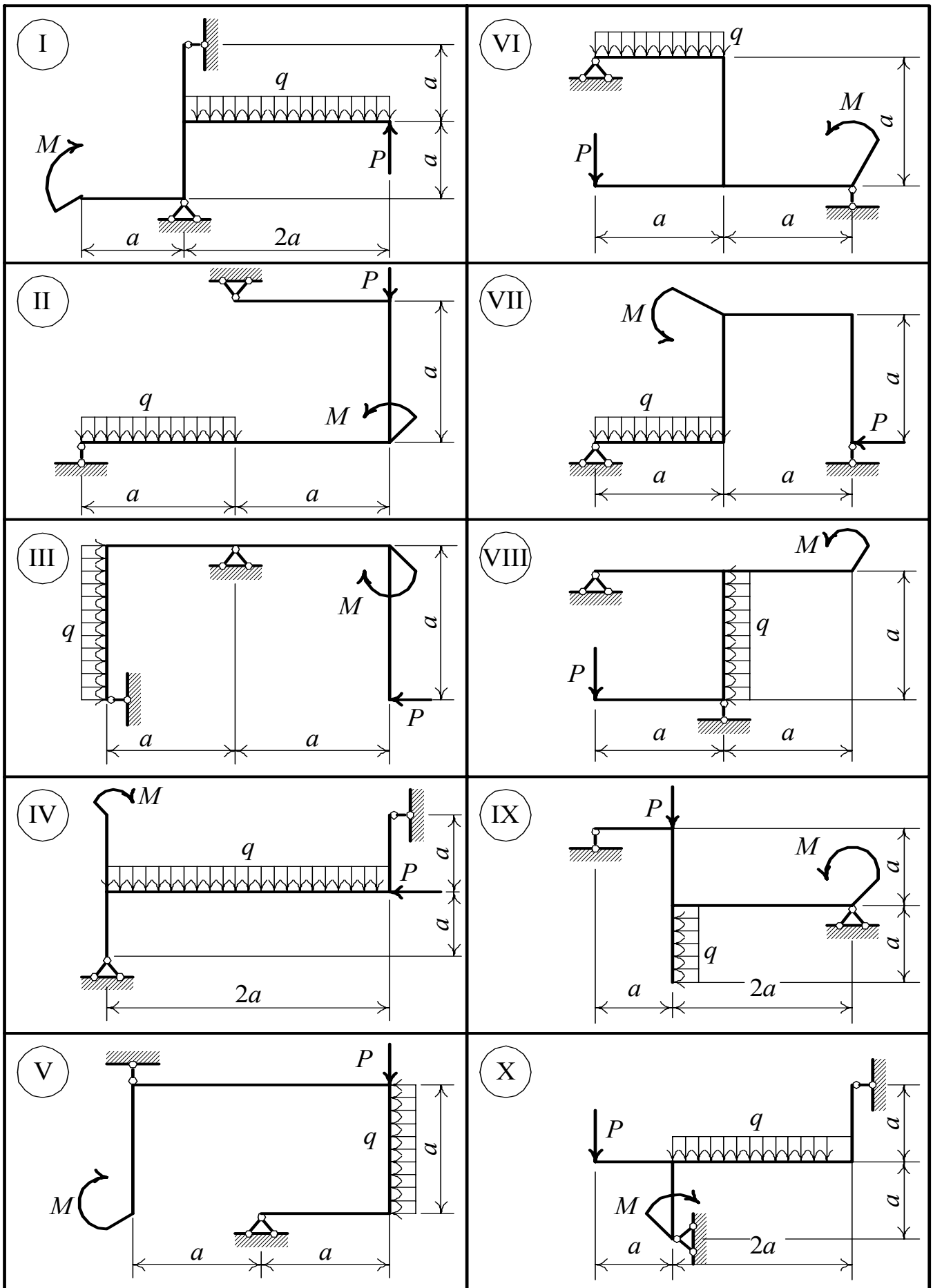


Рис. 5.5

Пример 10. Построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и продольных усилий для заданной рамы (рис. 5.6,а) и подобрать номер швеллера для сечения (рис. 5.2, д).

Решение.

Определяем опорные реакции из уравнений равновесия:

$$\sum X = 0, P - H = 0, H = 60 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot 6 - M + q \cdot 4 \cdot 2 = 0, R_A = \frac{-90 + 30 \cdot 4 \cdot 2}{6} = 25 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 6 - M + q \cdot 4 \cdot 4 + P \cdot 3 - H \cdot 3 = 0, R_B = \frac{-90 + 30 \cdot 4 \cdot 4}{6} = 95 \text{ кН}.$$

Проверка правильности определения вертикальных опорных реакций:

$$\sum Y = 0, R_A + R_B - q \cdot 4 = 0, 25 + 95 - 30 \cdot 4 = 0.$$

Реакции определены правильно.

Для построения эпюр составляем уравнения поперечных сил, изгибающих моментов и продольных усилий на каждом участке. Рама имеет четыре участка.

При составлении уравнений  $Q(x)$ ,  $M(x)$ , и  $N(x)$  следует поворачивать чертеж так, чтобы каждый участок можно было рассматривать в горизонтальном положении и применять правило знаков, как для балок. Положительные изгибающие моменты откладываются вверх (над осью эпюры), а отрицательные - вниз (под осью эпюры). Таким образом, вся эпюра изгибающих моментов получается построена на сжатом волокне стержня. На этой эпюре знаки не ставятся. На эпюрах поперечных и продольных сил указываются знаки, при этом на вертикальных стержнях рамы эпюры  $Q(x)$  и  $N(x)$  можно откладывать с любой стороны стержня.

Первый участок ( $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$ ):

$$Q(x) = R_A = 25 \text{ кН};$$

$$M(x) = R_A x = 25x, \text{ при } x = 0, M(0) = 0, \text{ при } x = 2 \text{ м}, M(2) = 50 \text{ кНм};$$

$$N(x) = 0.$$

Второй участок ( $0 \leq x \leq 4$  м):

$$Q(x) = -R_B + q \cdot x = -95 + 30x; \text{ при } x = 0, Q(0) = -95 \text{ кН, при } x = 4 \text{ м } Q(4) = 25 \text{ кН};$$

$$M(x) = -R_B x + \frac{q \cdot x^2}{2} - H \cdot 3 = 95x - 15x^2 - 60 \cdot 3, \text{ при } x=0, M(0) = -180, \text{ при } x = 4 \text{ м,}$$

$$M(4) = 40 \text{ кНм};$$

$$N(x) = -H = -60 \text{ кН}.$$

Определим экстремум изгибающего момента на втором участке:

$$\frac{dM(x)}{dx} = -95 + 30x = 0, x = 3,166 \text{ м, } M(3,166) = 29,58 \text{ кНм}.$$

Третий участок ( $0 \leq x \leq 3$  м):

$$Q(x) = H = 60 \text{ кН};$$

$$M(x) = Hx = 60x, \text{ при } x = 0, M(0) = 0, \text{ при } x = 3 \text{ м, } M(3) = 180 \text{ кНм};$$

$$N(x) = -R_B = -95 \text{ кН}.$$

Четвертый участок ( $0 \leq x \leq 3$  м):

$$Q(x) = -P = -60 \text{ кН};$$

$$M(x) = -Px + M = -60x + 90, \text{ при } x = 0, M(0) = 90 \text{ кНм, при } x = 3 \text{ м,}$$

$$M(3) = -90 \text{ кНм};$$

$$N(x) = 0.$$

Эпюры показаны на рис. 5.6, б, в, г.

На эпюрах поперечных сил в рамах, как и в балках в месте приложения сосредоточенной силы получается скачок, равный силе. На участках, где нет распределенной нагрузки, поперечная сила постоянна.

На эпюрах изгибающих моментов в месте приложения заданного сосредоточенного момента получается скачок, равный моменту. Выпуклость кривой на эпюре изгибающих моментов всегда направлена навстречу действия распределенной на-



грузки. Там, где поперечная сила равна нулю (т.е. эпюра  $Q(x)$  пересекается с осью  $x$ ), изгибающий момент принимает экстремальное значение.

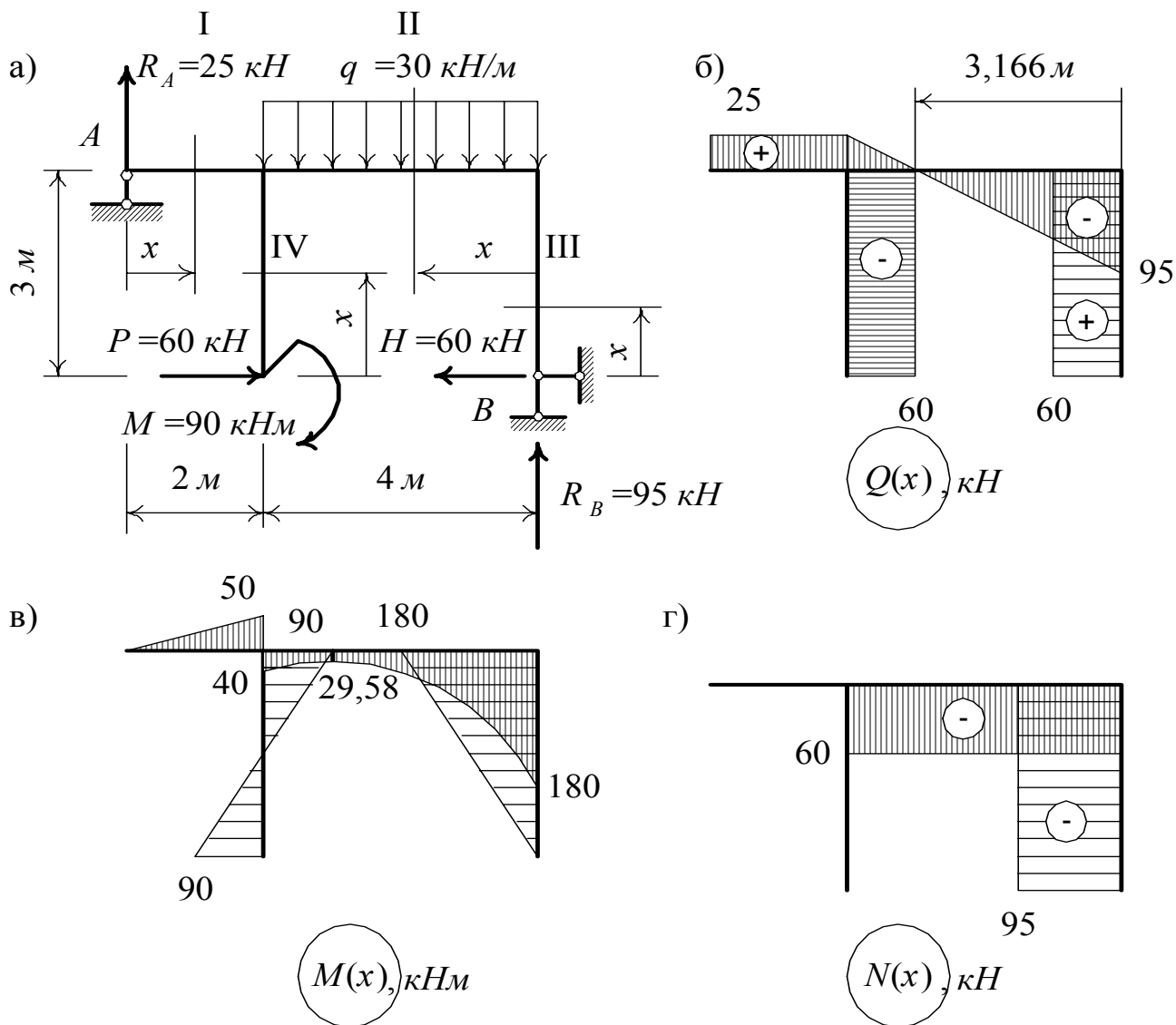


Рис. 5.6

Подбираем сечение стержневой рамы, состоящее из двух швеллеров (рис. 5.2, д). Из условия прочности (5.1) определяем требуемый момент сопротивления. Максимальный момент на эпюре  $M(x) = 180 \text{ кНм}$ .

$$W_z \geq \frac{M(x)_{\max}}{[\sigma]} = \frac{180 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 1125 \text{ см}^3.$$

Один швеллер должен иметь момент сопротивления

$$W_{z_{\text{шв}}} = \frac{1125}{2} = 562,5 \text{ см}^3.$$

По таблице прокатных профилей (ГОСТ 8240-72) подбираем номер швеллера. Принимаем швеллер №36 с  $W_z = 601 \text{ см}^3$ . Следовательно, стойки и ригели рамы должны быть выполнены из двух швеллеров №36, тогда момент сопротивления всего сечения будет равен  $W_z = 601 \cdot 2 = 1202 \text{ см}^3$ .

## 5.2. Расчет балки на прочность и жесткость

### Задача 11

Для заданной стальной балки (рис. 5.7) ( $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ) требуется:

- 1) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 2) подобрать двутавровое поперечное сечение;
- 3) для опасного сечения балки сделать полную проверку прочности по четвертой теории;
- 4) определить прогибы и углы поворота на границах всех участков методом начальных параметров;
- 5) проверить по правилу Верещагина угол поворота в начале координат и наибольший прогиб балки;
- 6) построить изогнутую ось балки;
- 7) проверить балку на жесткость, приняв  $[y] = \frac{l}{500}$ , где  $l$  - длина балки.

Данные взять из табл. 5.2.

Порядок выполнения задачи 11 аналогичен решению примера 11.

Пример 11. Рассчитать балку (рис. 5.8, а) на прочность и жесткость.

Решение.

- 1) Определяем опорные реакции из уравнений равновесия (рис. 5.8, а):

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 5 - M - P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 1 = 0, R_A = \frac{60 + 40 \cdot 3 + 40 \cdot 4 \cdot 1}{5} = 68 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: -R_B \cdot 5 - M + q \cdot 4 \cdot 4 + P \cdot 2 - M = 0, R_B = \frac{40 \cdot 4 \cdot 4 + 40 \cdot 2 - 60}{5} = 132 \text{ кН}.$$

Таблица 5.2

Буквы ал- фавита	Схема	$a, м$	$b, м$	$c, м$	$P, кН$	$M, кНм$	$q, кН/м$
а, б, в	I	1,1	2,1	1,1	10	10	10
г, д, е	II	1,2	2,2	1,2	20	15	15
ё, ж, з	III	1,3	2,3	1,3	30	20	20
и, й, к	VI	1,4	2,4	1,4	40	25	25
л, м, н	V	1,5	2,5	1,5	50	30	30
о, п, р	VI	1,6	2,6	1,6	6	35	35
с, т, у	VII	1,7	2,7	1,7	7	40	40
ф, х, ц	VIII	1,8	2,8	1,8	8	45	45
ч, ш, щ	IX	1,9	2,9	1,9	9	50	50
э, ю, я	X	2,0	3,0	2,0	10	55	55
	1	2	3	4	5	6	7

Проверка правильности определения реакций.

$$\sum Y = 0, R_A + R_B - P - q \cdot 4 = 0, 68 + 132 - 40 - 40 \cdot 4 = 0.$$

Реакции найдены правильно.

Для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов составим уравнения  $Q(x)$  и  $M(x)$  на каждом участке балки (рис. 5,8, а):

Первый участок ( $0 \leq x \leq 2 м$ ):

$$Q(x) = R_A = 68 \text{ кН},$$

$$M(x) = R_A \cdot x - M = 68x - 60, \text{ при } x = 0, M(0) = -60 \text{ кНм}, \text{ при } x = 2 м,$$

$$M(2) = 76 \text{ кНм}.$$

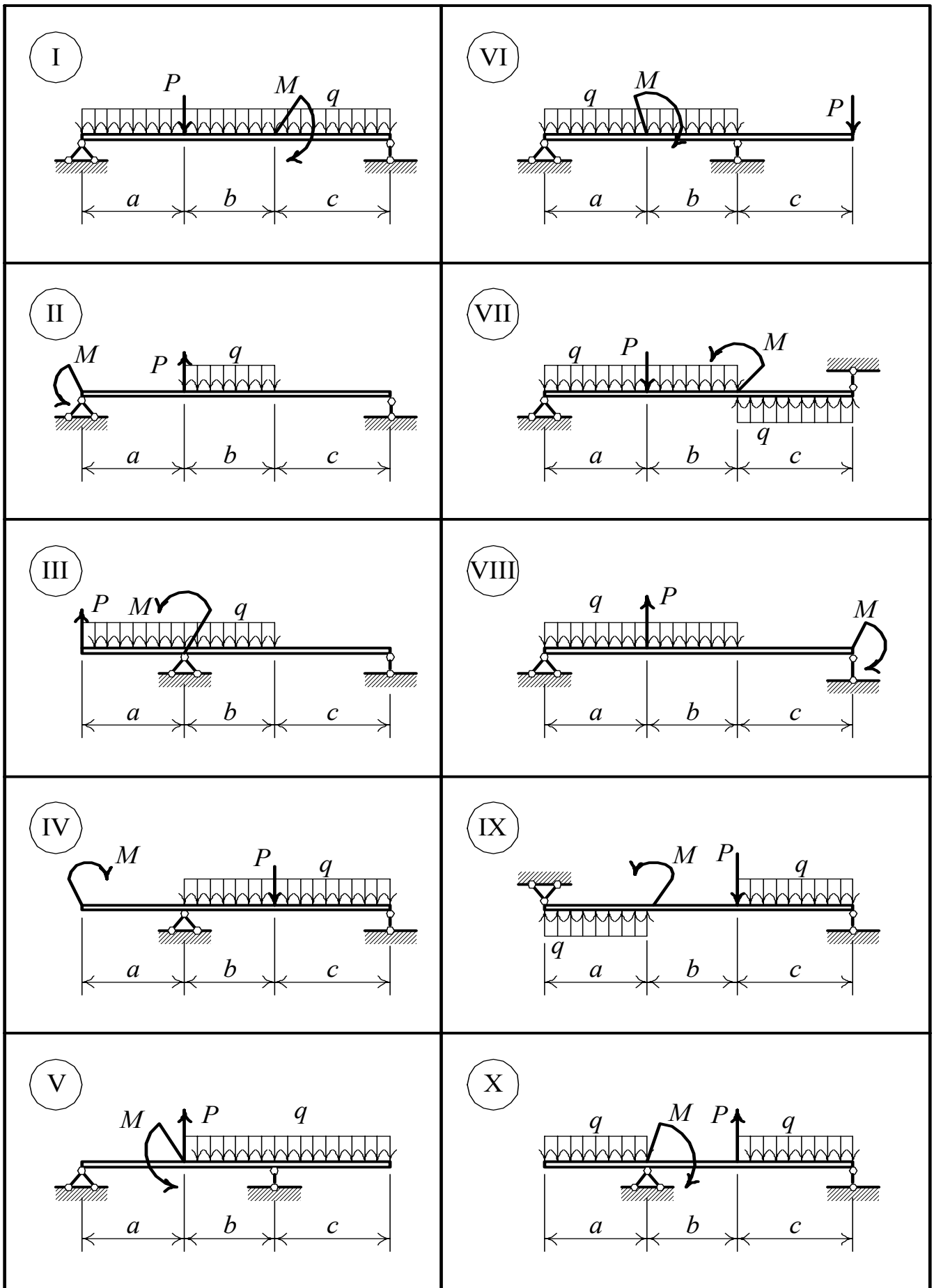


Рис. 5.7

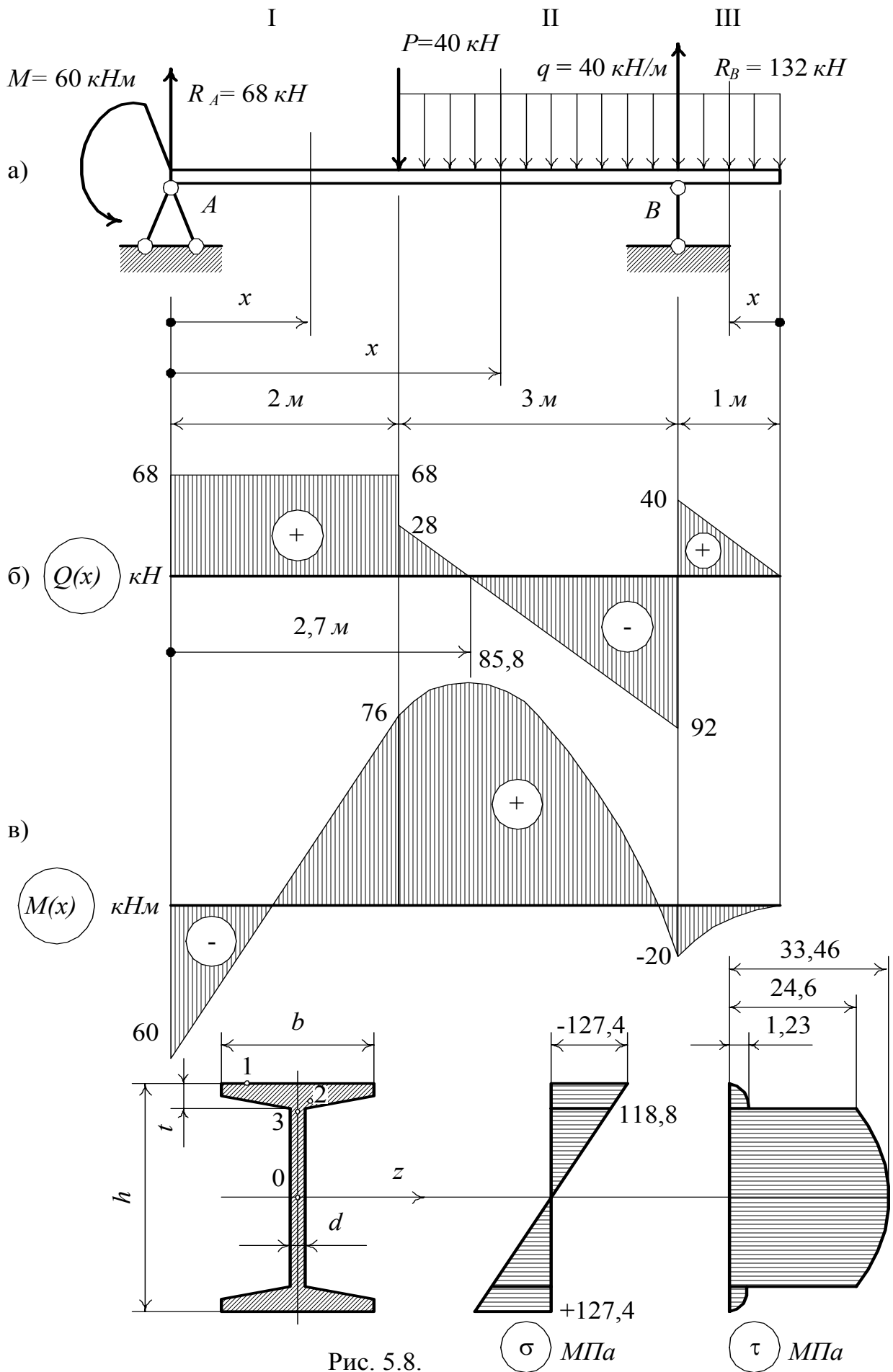


Рис. 5.8.

Второй участок ( $2 \text{ м} \leq x \leq 5 \text{ м}$ ):

$$Q(x) = R_A - P - q(x - 2) = 68 - 40 - 40(x - 2), \text{ при } x = 2 \text{ м}, Q(2) = 28 \text{ кН}, \text{ при } x = 5 \text{ м}, \\ Q(5) = -92 \text{ кН};$$

$$M(x) = R_A x - M - P(x - 2) - q \frac{(x - 2)^2}{2} = 68x - 60 - 40(x - 2) - 20(x - 2)^2, \text{ при } x = 2 \text{ м},$$

$$M(2) = 76 \text{ кНм}, \text{ при } x = 5 \text{ м}, M(5) = -20 \text{ кНм}.$$

Определяем экстремум изгибающего момента на втором участке.

$$\frac{dM(x)}{dx} = R_A - P - q(x - 2) = 0,$$

$$\text{Откуда } x = 2,7 \text{ м}, M(2,7) = 85,8 \text{ кНм}.$$

Третий участок ( $0 \leq x \leq 1 \text{ м}$ ):

$$Q(x) = qx, \text{ при } x = 0 \text{ м}, Q(0) = 0, \text{ при } x = 1 \text{ м}, Q(1) = 40 \text{ кН};$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2}, \text{ при } x = 0 \text{ м}, M(0) = 0, \text{ при } x = 1 \text{ м}, M(1) = -20 \text{ кНм};$$

По полученным результатам строим эпюры  $Q(x)$  и  $M(x)$  (рис. 5.8, б, в).

2) Подбираем двутавровое поперечное сечение балки из условия прочности по нормальным напряжениям (по 5.1). На эпюре  $M(x)_{\max} = 85,8 \text{ кНм}$ .

$$W_z = \frac{M(x)_{\max}}{[\sigma]} = \frac{85,8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 536,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 536,25 \text{ см}^3.$$

По таблице ГОСТ 8239-72 принимаем двутавр №33 для которого  $W_z = 597 \text{ см}^3$ ,  $h = 33 \text{ см}$ ,  $b = 14 \text{ см}$ ,  $d = 0,7 \text{ см}$ ,  $t = 1,12 \text{ см}$ ,  $I_z = 9840 \text{ см}^4$ ,  $S_z = 339 \text{ см}^3$ .

3) Полная проверка прочности двутавра по четвертой теории.

Опасным сечением в балке считается такое, где сочетание поперечной силы и изгибающего момента будет самым неблагоприятным (т.е. и  $Q(x)$  и  $M(x)$  в этом сечении вызывают наибольшее расчетное напряжение по сравнению с другими се-

чениями). Из эпюр видно, что на границе первого и второго участков (слева от силы  $P$ ) сочетание  $Q(x)$  и  $M(x)$  будет самым неблагоприятным для заданной балки по сравнению с другими границами участков. Следовательно, в опасном сечении  $M(x)=76 \text{ кНм}$ ,  $Q(x)=68 \text{ кН}$ .

Построим эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении балки. Для этого вычислим  $\sigma$  и  $\tau$  в нескольких характерных точках: а) в крайних волокнах; в месте сопряжения полки со стенкой (в точках 2 и 3), предположив, что точки 2 и 3 лежат бесконечно близко к границам полки, но точка 2 - в полке, а точка 3 - в стенке двутавра; в) в точках на нейтральной линии.

Нормальные напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma = -\frac{M(x)}{J_z} y. \quad (5.8)$$

На нейтральной оси, проходящей через центр тяжести сечения,  $\sigma=0$ .

В точке 1 по (5.7) (рис. 5.8, г)  $y_1 = \frac{h}{2} = 16,5 \text{ см}$ , тогда

$$\sigma_1 = -\frac{M(x)}{J_z} y_1 = -\frac{76 \cdot 10^3}{9840 \cdot 10^{-8}} \cdot 16,5 \cdot 10^{-2} = -127,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 127,4 \text{ МПа}.$$

Для точек 2 и 3  $y_2 = y_3 = \frac{h}{2} - t = 16,5 - 1,12 = 15,38 \text{ см}$ .

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{M(x)}{J_z} y_2 = -\frac{76 \cdot 10^3}{9840 \cdot 10^{-8}} \cdot 15,38 \cdot 10^{-2} = -118,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 118,8 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 5.8.

Касательные напряжения вычисляются по формуле

$$\tau = \frac{Q(x)S_z}{J_z b}. \quad (5.9)$$

В точке 1  $\tau=0$ , потому что  $S_z=0$ .

Для точки 2  $S_z$  будет равен статическому моменту полки. С достаточной точностью полку можно считать прямоугольником с размерами  $b \times t$ . Тогда  $S_z = bt \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 1,12 \cdot 14 \cdot \frac{33 - 1,12}{2} = 249,94 \text{ см}^3$ . Ширина сечения для точки 2 равна

$b = 14 \text{ см}$ . Подставив числовые значения в формулу, получим

$$\tau_2 = \frac{68 \cdot 10^3 \cdot 249,94 \cdot 10^{-6}}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 14 \cdot 10^{-2}} = 1,23 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,23 \text{ МПа}.$$

Для точки 3 статический момент останется тем же, но ширина сечения  $d = 0,7 \text{ см}$ ,

$$\tau_3 = \frac{68 \cdot 10^3 \cdot 249,94 \cdot 10^{-6}}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,7 \cdot 10^{-2}} = 24,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24,6 \text{ МПа}.$$

Для точек на нейтральной оси ширина сечения равна  $d = 0,7 \text{ см}$ , а статический момент следует взять для половины сечения. Эта величина дается в таблице для двутавра  $S_z = 339 \text{ см}^3$ . Тогда

$$\tau_0 = \frac{68 \cdot 10^3 \cdot 339 \cdot 10^{-6}}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,7 \cdot 10^{-2}} = 33,46 \cdot 10^6 \text{ Па} = 33,46 \text{ МПа}.$$

По полученным данным строим эпюру касательных напряжений (рис. 5.8).

Условия прочности по четвертой теории прочности записывается так:

$$\sigma_{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Опасная точка в поперечном сечении находится на границе между полкой и стенкой двутавра (т. 3) здесь  $\sigma = 118,8 \text{ МПа}$ , а  $\tau = 24,6 \text{ МПа}$ . После подстановки этих напряжений в формулу, получим

$$\sigma_{\text{рас}}^{IV} = \sqrt{118,8^2 + 3 \cdot 24,6^2} = 126,2 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Следовательно, подобранное сечение удовлетворяет условию прочности. (Допускается превышение допускаемых напряжений до 5%).

4) Определение прогибов и углов поворота балки методом начальных параметров. Уравнение изогнутой оси (прогибов) имеет вид:



$$y(x) = y_0 + \alpha_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ_z} + \frac{P_0 x^3}{6EJ_z} + \sum \frac{Mm^2}{2EJ_z} + \sum \frac{Pp^3}{6EJ_z} + \sum \frac{q(u_H^2 - u_K^2)}{24EJ_z}.$$

Примем начало отсчета на левом конце балки. Запишем уравнение изогнутой оси для последнего (третьего) участка балки (рис. 5.8, а).

$$y(x) = y_0 + \alpha_0 x - \frac{M_0 x^2}{2EJ_z} + \frac{P_0 x^3}{6EJ_z} - \frac{P(x-2)^3}{6EJ_z} - \frac{q(x-2)^4}{24EJ_z} + \frac{R_B(x-5)^3}{6EJ_z}. \quad (5.10)$$

Знак каждого слагаемого в уравнении определяется знаком изгибающего момента от соответствующей нагрузки. Уравнением (5.10) можно пользоваться на любом участке балки: на рассматриваемом участке действительны те слагаемые, которые получены от нагрузок, расположенных между началом отсчета  $x$  и сечением на этом участке (или на участке действительны те слагаемые, у которых выражения в скобках не принимают отрицательных значений).

Для заданной балки в точке  $x = 0$  известны начальные параметры  $y_0 = 0$ ,  $M_0 = -M$  и  $P_0 = R_A$ . Необходимо определить один неизвестный начальный параметр  $\alpha_0$ . Для этого используем условие закрепления в опоре  $B$ : при  $x = 5$  м  $y_B = 0$ . Подставляя эти условия в уравнение (5.10), получим

$$\alpha_0 5 - \frac{60 \cdot 5^2}{2EJ_z} + \frac{68 \cdot 5^3}{6EJ_z} - \frac{40 \cdot 3^3}{6EJ_z} - \frac{40 \cdot 3^4}{24EJ_z} = 0, \text{ откуда } \alpha_0 = -\frac{70,33}{EJ_z}.$$

Уравнение изогнутой оси (5.10) с учетом  $\alpha_0$  будет иметь вид

$$y(x) = -\frac{70,33}{EJ_z} x - \frac{60x^2}{2EJ_z} + \frac{68x^3}{6EJ_z} - \frac{40(x-2)^3}{6EJ_z} - \frac{40(x-2)^4}{24EJ_z} + \frac{132(x-5)^3}{6EJ_z}. \quad (5.11)$$

Подставляя значения  $x$ , вычисляем прогибы на границах всех участков:

$$\text{при } x = 2 \text{ м, } y(2) = -\frac{70,33}{EJ_z} \cdot 2 - \frac{60 \cdot 2^2}{2EJ_z} + \frac{68 \cdot 2^3}{6EJ_z} = -\frac{170}{EJ_z}, \quad (5.12)$$

$$\text{при } x = 5 \text{ м, } y(5) = 0, \quad (5.13)$$

при  $x = 6$  м,

$$y(6) = -\frac{70,33}{EJ_z} \cdot 6 - \frac{60 \cdot 6^2}{2EJ_z} + \frac{68 \cdot 6^3}{6EJ_z} - \frac{40 \cdot 4^3}{6EJ_z} - \frac{40 \cdot 4^4}{24EJ_z} + \frac{132 \cdot 1}{6EJ_z} = -\frac{114,66}{EJ_z}, \quad (5.14)$$

При расчете на прочность для заданной балки было подобрано двутавровое сечение № 33,  $J_z = 9840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ . Следовательно, подставив в (5.12) и (5.14) числовые значения получим

$$y(2) = -\frac{170 \cdot 10^3}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 8,64 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$y(6) = -\frac{114,66 \cdot 10^3}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 5,83 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Дифференцируя уравнение (5.11), получим уравнение углов поворота для третьего участка балки

$$\frac{d y(x)}{d x} = \alpha(x) = -\frac{70,33}{EJ_z} - \frac{60x}{EJ_z} + \frac{68x^2}{2EJ_z} - \frac{40(x-2)^2}{2EJ_z} - \frac{40(x-2)^3}{6EJ_z} + \frac{132(x-5)^2}{2EJ_z}. \quad (5.15)$$

Определим углы поворота на всех границах участков:

$$\text{при } x = 0 \quad \alpha_A = \alpha_0 = -\frac{70,33}{EJ_z} = -\frac{70,33 \cdot 10^3}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = -0,0036 \text{ рад},$$

при  $x = 2 \text{ м}$ ,

$$\alpha(2) = -\frac{70,33}{EJ_z} - \frac{60 \cdot 2}{EJ_z} + \frac{68 \cdot 2^2}{2EJ_z} = -\frac{54,33}{EJ_z} = -\frac{30,33 \cdot 10^3}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = -0,0027 \text{ рад},$$

при  $x = 5 \text{ м}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(5) &= -\frac{70,33}{EJ_z} - \frac{60 \cdot 5}{EJ_z} + \frac{68 \cdot 5^2}{2EJ_z} - \frac{40 \cdot 3^2}{2EJ_z} - \frac{40 \cdot 3^3}{6EJ_z} = \frac{119,66}{EJ_z} = \\ &= \frac{119,66 \cdot 10^3}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 0,0061 \text{ рад}, \end{aligned}$$

при  $x = 6 \text{ м}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(6) &= -\frac{70,33}{EJ_z} - \frac{60 \cdot 6}{EJ_z} + \frac{68 \cdot 6^2}{2EJ_z} - \frac{40 \cdot 4^2}{2EJ_z} - \frac{40 \cdot 4^3}{6EJ_z} + \frac{132 \cdot 1}{6EJ_z} = \frac{113}{EJ_z} = \\ &= \frac{113 \cdot 10^3}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 0,0058 \text{ рад}. \end{aligned}$$

5) Проверим с помощью правила Верещагина угол поворота на левом конце балки  $\alpha_A = \alpha_0$  и один прогиб балки.

Перемещения по правилу Верещагина определяются по формуле

$$\Delta_{1p} = \sum_0^n \frac{\omega_i m_i}{EJ_z}, \quad (5.16)$$

где  $\Delta_{1p}$  - прогиб (или угол поворота) по направлению единичной силы (единичного момента) от заданной нагрузки,  $\omega$  - площадь эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки,  $m$  - величина изгибающего момента на эпюре от единичной нагрузки, взятая под центром тяжести грузовой эпюры. Количество участков при перемножении зависит в первую очередь от числа участков на эпюре изгибающих моментов от единичной нагрузки. Эпюру изгибающих моментов (рис. 5.8, в) разделим на простейшие площади, положение центров тяжести которых легко вычисляются.

На рис. 5.9 показаны часто встречающиеся площади эпюр (а - прямоугольник, б - треугольник, в - парабола) и положение их центров тяжести.

Вычислим площади  $\omega$  грузовой эпюры (рис. 5.10, а)

$$\omega_1 = \frac{76 \cdot 2}{2} = 76 \text{ кНм}^2, \quad \omega_2 = \frac{60 \cdot 2}{2} = 60 \text{ кНм}^2, \quad \omega_3 = \frac{q l^3}{12} = \frac{40 \cdot 3^3}{12} = 90 \text{ кНм}^2,$$

$$\omega_4 = \frac{76 \cdot 3}{2} = 114 \text{ кНм}^2, \quad \omega_5 = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30 \text{ кНм}^2.$$

Площади  $\omega_6$  и  $\omega_7$  не вычисляем, так как в приведенном случае  $m_6 = m_7 = 0$ .

Для определения угла поворота в точке  $A$  заданной балки, прикладываем в этой точке единичный момент в любом направлении. Строим эпюру изгибающих моментов от действия этого момента. На полученной эпюре с помощью подобия треугольников определяем ординаты под каждым центром тяжести площадей грузовой эпюры. Тогда  $m_1 = \frac{13}{15}$ ,  $m_2 = \frac{11}{15}$ ,  $m_3 = \frac{3}{10}$ ,  $m_4 = \frac{2}{5}$ ,  $m_5 = \frac{1}{5}$ . Эти ординаты безразмерные. Перемножая, получим

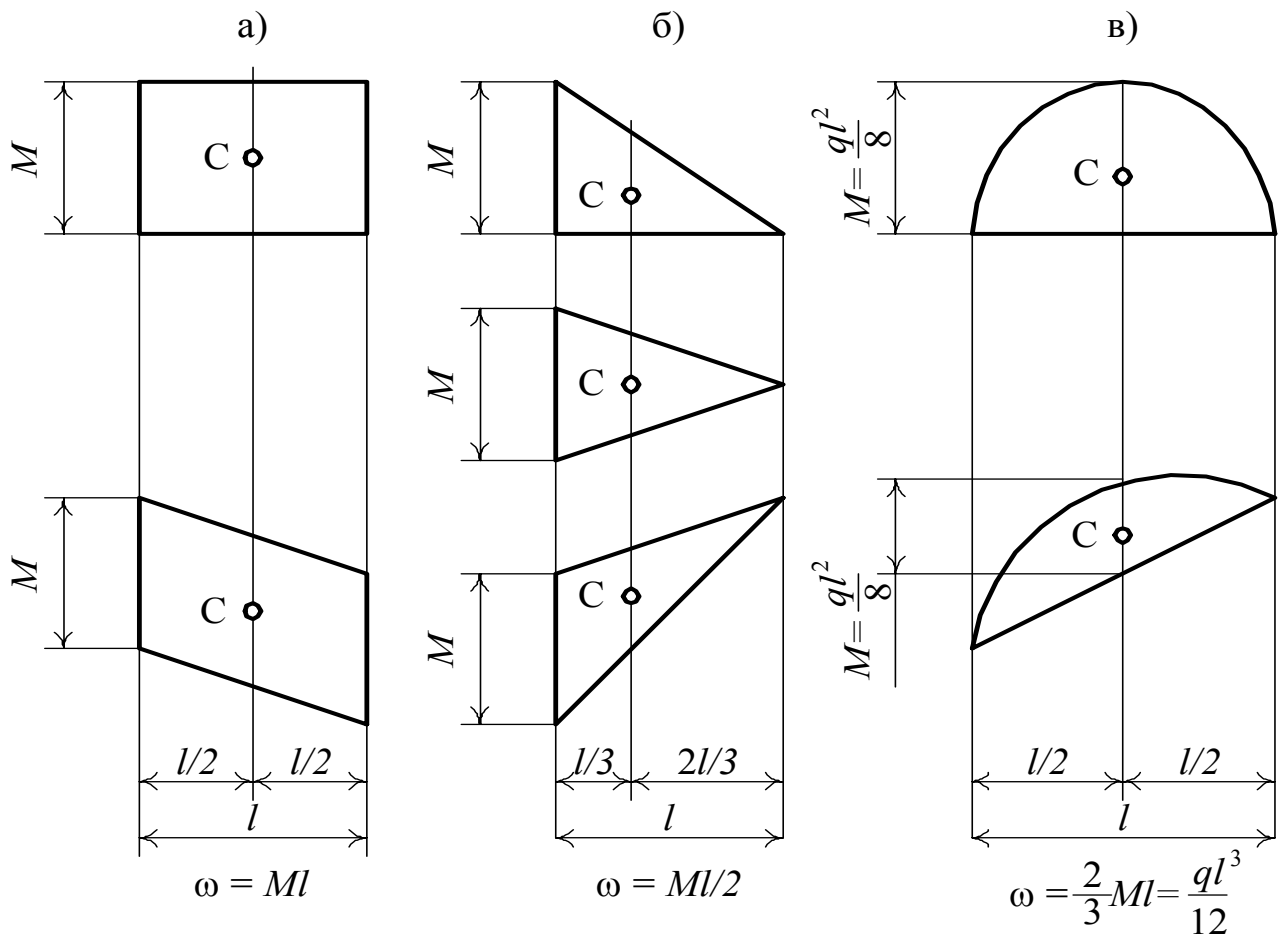


Рис. 5.9

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \frac{1}{EJ_z} (\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3 + \omega_4 m_4 + \omega_5 m_5) = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{76 \cdot 13}{15} - \frac{60 \cdot 11}{15} + \frac{90 \cdot 3}{10} + \frac{114 \cdot 2}{5} - \frac{30 \cdot 1}{5} \right) = \frac{70,33}{EJ_z}. \end{aligned}$$

При перемножении следует учитывать, что площади  $\omega$  и ординаты  $m$ , лежащие выше оси эпюры - положительные, а лежащие ниже оси - отрицательные.

Для определения прогиба к балке прикладывается единичная сила в той точке, где определяется этот прогиб. Найдем прогиб при  $x = 2$  м. Единичная эпюра показана на рис. 5.10, в. Из подобия треугольников определяем ординаты, которые равны:

$m_1 = \frac{2}{5}$  м,  $m_2 = \frac{4}{5}$  м,  $m_3 = \frac{3}{5}$  м,  $m_4 = \frac{4}{5}$  м,  $m_5 = \frac{2}{5}$  м. Тогда

$$y(2) = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{76 \cdot 4}{5} - \frac{60 \cdot 2}{5} + \frac{90 \cdot 3}{5} + \frac{114 \cdot 4}{5} + \frac{30 \cdot 2}{5} \right) = \frac{170}{EJ_z}.$$

Положительные знаки  $\alpha(0)$  и  $y(2)$  показывают, что перемещения происходят по направлению единичной нагрузки.

Сравним значения  $\alpha(0)$  и  $y(2)$ , полученные по методу начальных параметров и по правилу Верещагина.

	$\alpha(0)$	$y(2)$
Метод начальных параметров	$\frac{70,33}{EJ_z}$ (по час. стрелке)	$\frac{170}{EJ_z}$ (вниз)
По правилу Верещагина	$\frac{70,33}{EJ_z}$ (по час. стрелке)	$\frac{170}{EJ_z}$ (вниз)
Расхождение %	0	0

Допускается расхождение до 1%.

Откладывая найденные значения прогибов балки, строим изогнутую ось балки, учитывая дифференциальную зависимость

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z}. \quad (5.17)$$

Это значит, что на участке балки, где  $M(x)$  положительный, изогнутая ось балки  $y(x)$  представляет собой кривую выпуклостью вниз, а на участке, где  $M(x)$  отрицательный,  $y(x)$  - кривая выпуклостью вверх. В сечении балки, где  $M(x)=0$ ,  $y(x)$  имеет перегиб.

Изогнутая ось балки представлена на рис. 5.10, г.

7) Проверим балку на жесткость, считая, что  $[y] = \frac{l}{500} = \frac{6}{500} = 0,012 \text{ м} = 1,2 \text{ см}$ .

Наибольший из вычисленных прогибов балки

$$y_{\max} = y(2) = 8,64 \text{ мм} = 0,864 \text{ см} < [y], \text{ значит, балка жесткая.}$$

В случае, если условие жесткости не выполняется, надо подобрать сечение балки из условия жесткости.

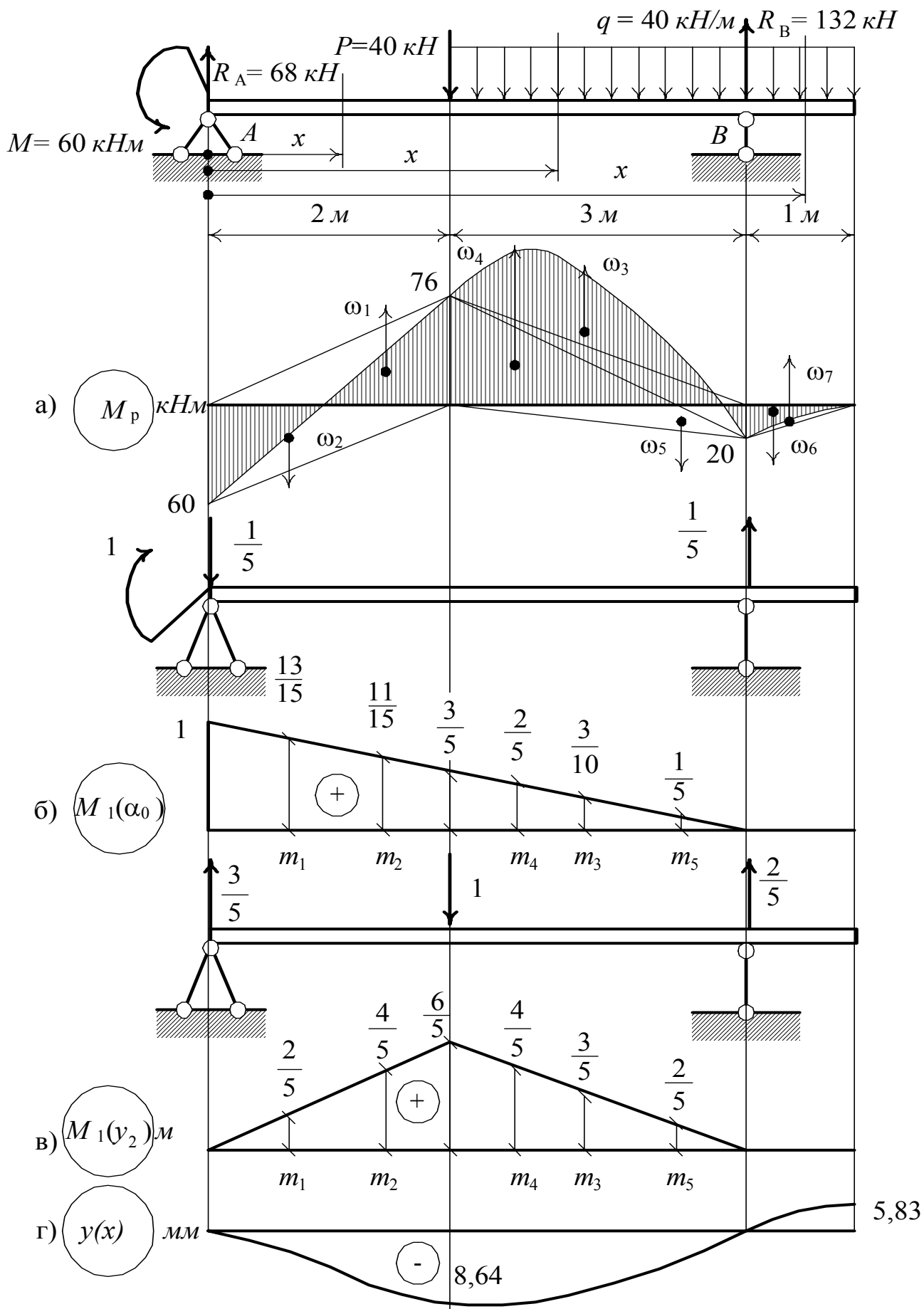


Рис. 5.10

## ЛИТЕРАТУРА

1. Методические указания к оформлению курсовых, дипломных проектов (работ) и отчетов по практикам и НИРС / В.П. Алиферов и др. - Донецк: ДПИ, 1986. - 48 с.
2. Сопротивление материалов. - 5-е изд., перераб. и доп. / Г.С. Писаренко и др. - К.: Вища школа. Головное изд-во, 1986. - 776 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1986. - 512 с.
4. Механика упругих деформируемых систем. Часть 1. Напряженно-деформированное состояние стержней: Учебное пособие / Ф.Л. Шевченко. - Киев: ИСИО, 1993. - 280 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
1. Растяжение - сжатие стержневых систем .....	4
1.1. Расчет статически определимого стержня .....	4
1.2. Расчет на прочность статически неопределимой стержневой системы .....	10
2. Плоское напряженно - деформированное состояние .....	25
2.1. Определение главных напряжений при плоском напряженном со- стоянии .....	25
2.2. Определение напряжений на наклонной площадке при плоском на- пряженном состоянии .....	30
3. Кручение круглых стержней .....	34
3.1. Напряжения и перемещения при кручении статически неопределимо- го вала .....	34
4. Геометрические характеристики плоских сечений .....	42
4.1. Моменты инерции относительно главных центральных осей .....	42
5. Плоский поперечный изгиб .....	50
5.1. Внутренние силовые факторы и подбор сечения балок и рам при из- гибе .....	50
5.2. Расчет балки на прочность и жесткость .....	65
Литература .....	78