

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Донецький національний технічний університет

Кафедра "Вища математика"

**Збірник науково-методичних робіт**

Випуск 7

Донецьк -2011

УДК 5:371.214.114, 621.923, 517.95(09), 531.18, 915.77.54, 531.38, 517.9, 517, 518, 531, 517.8, 539.5, 517.926.

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного технічного університету  
Протокол № 5 від 20.05.2011 р.

**Збірник науково-методичних робіт.** - Вип. 7. - Донецьк: ДонНТУ, 2011. –353 с.

В збірнику представлено деякі проблеми та аспекти викладання вищої математики у технічному вузі, також різні напрямки застосування математичних методів до розв'язання інженерних задач, а саме, задач механіки твердого тіла, фізики магнітних явищ, статистичної фізики та інших.

Науково-методичні роботи є узагальненням досвіду викладачів кафедри по удосконалюванню математичної підготовки спеціалістів.

Видання розраховано на широке коло наукових робітників, а також аспірантів та студентів старших курсів технічних університетів.

**Редакційна колегія:** проф. Улітін Г.М. - редактор, проф. Петренко О.Д., проф. Лесіна М.Ю, проф. Косолапов Ю.Ф., проф. Скафа О.І., доц. Евсеєва О.Г. , ст. викл. Локтионов И.К.

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учбовий корпус, кафедра "Вища математика", тел. (062) 3010901.

© Донецький Національний технічний університет, 2011 р.

ПРИМЕНЕНИЕ ТРЁХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПОТЕЦИАЛА  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЖИДКОГО  
СОСТОЯНИЯ

**Локтионов И.К., Гусар Г.А., Шевченко Т.С.**  
*Донецкий национальный технический университет*

*Показано, що для парного трьохпараметричного потенціалу взаємодії виконується закон відповідних станів, а знайдені термодинамічні властивості системи не залежать явно від параметрів потенціалу, але є функціями від деякої їх комбінації. Проведено порівняння отриманих результатів з відомими експериментальними даними.*

В работе [1] рассмотрены некоторые термодинамические свойства систем с простейшими парными, в том числе, отталкивательными потенциалами взаимодействия и получены, по нашему мнению, обнадеживающие результаты. Это обстоятельство стимулировало дальнейшие исследования однокомпонентных систем в направлении поиска и использования «реальных» потенциалов в рамках подхода предложенного в [2]. При изучении термодинамики системы желательно получить теоретически обоснованное аналитическое уравнение состояния в замкнутой, удобной для последующих применений форме. В нашем подходе получение такого уравнения связано с определёнными существенными ограничениями при выборе модельного потенциала взаимодействия. Потенциал должен быть устойчивым, обладать свойствами «реальных» потенциалов, иметь фурье-образ, интегрирование с которым, как будет видно ниже, может быть выполнено до конца, т.е. не прибегая к каким-либо приближениям. Среди всех модельных аппроксимаций потенциалов мы остановимся на следующем потенциале

$$v(r) = \frac{\exp(-ar)}{4\pi} \left( \frac{A}{r} - \frac{B}{2a} \right), \quad (1)$$

который при определенном выборе неотрицательных параметров  $a$ ,  $A$ ,  $B$  имеют потенциальную яму, отталкивательный характер на малых расстояниях и притягивающий на «больших» (предложенный нами потенциал не является, конечно, дальнедействующим, а его отталкивание не достаточно интенсивно). Для потенциала (1) наличие указанных свойств, а также положительность его фурье-образа

$$\tilde{v}(k) = \frac{A}{k^2 + a^2} - \frac{B}{(k^2 + a^2)^2}, \quad \tilde{v}_0 = \tilde{v}(0) = \frac{A}{a^2} - \frac{B}{a^4} = wd, \quad (2)$$

обеспечивается выполнением неравенства  $0 \leq \varepsilon = B/Aa^2 < 1$ , ( $A > 0, B \geq 0, a > 0$ ),  $w = A/a^2$ ,  $d = 1 - \varepsilon$ .

Потенциал (1) будет приводить к правильному термодинамическому поведению системы (плотность числа частиц  $n = N/V = const$ , при  $N, V \rightarrow \infty$ ), если взаимодействие удовлетворяет условиям быстрого убывания и устойчивости [3,4]. Оба условия для потенциала (1) выполняются.

Помимо перечисленных качеств потенциал (1) интересен ещё и тем, что для него можно найти аналитические зависимости глубины потенциальной ямы, точки минимума и нуля потенциала от его параметров: нуль, точка минимума и минимум потенциала соответственно равны

$$R_0 = 2/a\varepsilon, \quad R_m = (1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon})/a\varepsilon, \quad (3)$$

минимум потенциала

$$V_m = V(R_m) = -\frac{Aa}{8\pi} (1 + \varepsilon - \sqrt{1 + 2\varepsilon}) \exp\left(-\frac{1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon}}{\varepsilon}\right). \quad (4)$$

Теоретические предпосылки, на которых основаны дальнейшие расчёты, подробно изложены в работе [2]. Было показано, что конфигурационный интеграл системы  $N$  частиц, размещенных в объёме  $V$  и взаимодействующих посредством парного центрального потенциала  $v(|\vec{r}|)$  с фурье-образом  $\tilde{v}(k)$ , преобразуется к интегралу типа Лапласа. Оценка полученного интеграла с учётом квадратичных членов разложения была выполнена методом перевала. В результате для свободной энергии Гельмгольца получено выражение

$$F = F_{id} + \frac{n^2 V}{2} \tilde{v}(0) + \frac{V}{2\beta} \int_{\Omega} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [\ln(1 + n\beta\tilde{v}(k)) - n\beta\tilde{v}(k)], \quad (5)$$

где  $\beta = 1/k_B T$  — обратная температура,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $\Omega$  — область определения функции  $\tilde{v}(k)$ ,  $F_{id} = k_B T N \ln(n \cdot \lambda^3)$ ,  $\lambda = h/\sqrt{2\pi m_0 k_B T}$  — тепловая длина волны де Бройля,  $h$  — постоянная Планка,  $m_0$  — масса частицы.

Заметим, что при больших  $k$  подынтегральная функция в (5)  $\ln(1 + n\beta\tilde{v}(k)) - n\beta\tilde{v}(k) \approx -(1/2)(n\beta\tilde{v}(k))^2$ , поэтому сходимость интеграла

обеспечивается, если  $\tilde{v}(k) \propto 1/k^{3/2}$ , т.е. показатель степени  $k$  должен быть не менее  $3/2$ . Этому условию удовлетворяют модельный потенциал (1).

Проинтегрируем (5) с фурье-образом (2),

$$F = F_{id} + \frac{n^2 V}{2} w d + \frac{n V}{8\pi} A a \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{V a^2}{12\pi\beta} \left[2 - (Q^3 - 3qQ)\right], \quad (6)$$

где  $Q = Q(x) = \sqrt{2 + x + 2q(x)}$ ,  $q = q(x) = \sqrt{1 + x d}$ ,  $x = n\beta w$ .

Уравнение состояния имеет вид

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{n}{\beta} + \frac{n^2 w}{2} d - \frac{a^3}{12\pi\beta} J(x), \quad (7)$$

где  $J(x) = 2 - (Q^3(x) - 3q(x)Q(x)) -$

$$- 3x(q(x)Q_1(x) + Q(x)q_1(x) - Q^2(x)Q_1(x)),$$

величины  $q_1(x) = d/2q(x)$ ,  $Q_1(x) = (1 + 2q_1(x))/2Q(x)$  связаны с производными  $q(x)$ ,  $Q(x)$  по  $n$ .

Параметры потенциала (1) можно установить, принимая во внимание определение критического состояния  $\left\{(\partial P/\partial n)_c = 0, (\partial^2 P/\partial n^2)_c = 0\right\}$ . Индекс «с» указывает на то, что производные от давления (7) вычисляются в критической точке (КТ).

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_c &= \frac{1}{\beta_c} \left(q^2(x_c) + \frac{a^3 x_c^2}{4\pi n_c} J_1(x_c)\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)_c &= w \left(d + \frac{a^3 x_c}{4\pi n_c} J_1(x_c) + \frac{a^3 x_c^2}{4\pi n_c} J_2(x_c)\right) = 0, \end{aligned}\right. \quad (8)$$

где  $J_1(x) = q(x)Q_2(x) + 2q_1(x)Q_1(x) + Q(x)q_2(x) -$   
 $- (2Q(x)Q_1^2(x) + Q^2(x)Q_2(x)),$

$$J_2(x) = q(x)Q_3(x) + 3q_1(x)Q_2(x) + 3q_2(x)Q_1(x) + Q(x)q_3(x) -$$

$$- (2Q_1^3(x) + 6Q(x)Q_1(x)Q_2(x) + Q^2(x)Q_3(x)),$$

$$q_2(x) = -\frac{d^2}{4q^3(x)}, \quad Q_2(x) = \frac{q_2(x) - Q_1^2(x)}{Q(x)}, \quad q_3(x) = \frac{3d^3}{8q^5(x)},$$

$$Q_3(x) = \frac{q_3(x) - 3Q_1(x)Q_2(x)}{Q(x)}$$

определяются соответственно вторыми и

третьими производными от  $q(x)$ ,  $Q(x)$  по  $n$ .

Система (8) приводится к однопараметрическому уравнению относительно безразмерной величины  $x_c = n_c \beta_c w$ :

$$J_1(x_c, \varepsilon) + x_c q^2(x_c, \varepsilon) J_2(x_c, \varepsilon) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) решено численно. Однако, учитывая асимптотики  $x_c$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и при  $\varepsilon \rightarrow 1$  можно построить аппроксимационные выражения для  $x_c$  различной точности. Погрешность формулы  $x_c = (2 - \varepsilon^3)/(1 - \varepsilon)$  относительно численного результата не превышает 3.8%, а  $x_c = (10 - 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4)/5(1 - \varepsilon)$  - не более 1.8% в интервале  $(0; 1)$ . Зависимости корня  $x_c$  от параметра  $\varepsilon$  представлены на рисунке 1.

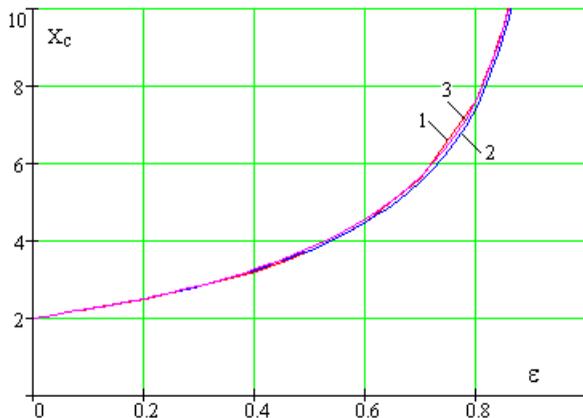


Рис.1. Кривая 1 – численный расчёт по уравнению (9); 2 – аппроксимация по формуле  $x_c = (2 - \varepsilon^3)/(1 - \varepsilon)$ ; 3 — аппроксимация по формуле  $x_c = (10 - 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4)/5(1 - \varepsilon)$ .

Чтобы найти параметры  $a$ ,  $A$ ,  $B$  потенциала (1), во-первых, необходимо задать значение  $\varepsilon_0 \in (0; 1)$  и решив уравнение (9), определить соответствующее

значение  $x_c$ . Во-вторых, используя экспериментальные  $n_c$  и  $T_c$  - определить  $w = x_c/n_c\beta_c = A_0/a_0^2$ . В третьих, разрешив первое уравнение системы (8) относительно параметра  $a$ , вычислить  $a_0$  и  $A_0 = a_0^2 w$ . Наконец, третий параметр устанавливается по заданному  $\varepsilon_0$ :  $B_0 = \varepsilon_0 A_0 a_0^2$ .

Прежде чем приступить к расчётам термодинамических характеристик системы, укажем на некоторые интересные свойства потенциала (1). Из первого уравнения системы (8) выразим параметр экранирования

$$a = \Psi(x_c) \cdot \sqrt[3]{n_c}, \quad (10)$$

где  $\Psi(x_c) = -\left(\frac{4\pi q^2(x_c)}{x_c^2 J_1(x_c)}\right)^{1/3} > 0$ , т.к.  $J_1(x_c) < 0$  и подставим в формулы

(3) для  $R_0$  и  $R_m$ :

$$R_0 = \frac{2}{\varepsilon \Psi(x_c)} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n_c}}, \quad R_m = \frac{1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon}}{\varepsilon \Psi(x_c)} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n_c}}.$$

Увеличение  $R_0$  и  $R_m$  с уменьшением критической плотности характерно для нейтральных жидкостей, в частности, для инертных газов. С помощью (10) найдем произведение  $Aa = \Psi^3(x_c)x_c k_B T_c$ , после подстановки которого в (4), замечаем, что глубина потенциальной ямы при заданном  $\varepsilon$  пропорциональна критической температуре  $T_c$

$$V_m = -\frac{\Psi^3(x_c)x_c}{8\pi} (1 + \varepsilon - \sqrt{1 + 2\varepsilon}) \exp\left(-\frac{1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \cdot k_B T_c = \kappa(\varepsilon) \cdot k_B T_c \quad (11)$$

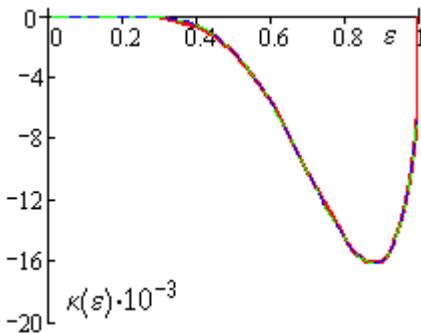


Рис.2. Зависимость  $\kappa(\varepsilon)$

«Фактически величина этого минимума для всех веществ по порядку величины равна  $k_B T_c$  (более точно она близка к  $1.5k_B T_c$ )»[5]. В нашей модели коэффициент при  $k_B T_c$  зависит от  $\varepsilon$  и не превышает минимального значения

$|\kappa_{\min}| = 1.617 \cdot 10^{-2}$ , которое достигается при  $\varepsilon = 0.88$ . Интересно отметить, что одному значению  $V_m$  при фиксированной температуре  $T_c$  соответствуют два различных значения  $\varepsilon$ . Это вытекает из рассмотрения зависимости  $\kappa(\varepsilon)$ , представленной на рисунке 2. Поэтому существуют две системы частиц с потенциалами равной глубины и одинаковыми  $T_c$  и  $n_c$ , но разными  $P_c$  и  $R_0$ ,  $R_m$ .

УС в приведенных переменных  $\Pi = P/P_c$ ,  $\tau = T/T_c$ ,  $\omega = n/n_c$  имеет вид

$$\Pi(\omega, \tau) = \frac{1}{Z_c} \left[ \omega\tau + \frac{x_c d \omega^2}{2} - \frac{a^3 \tau}{12\pi n_c} J(\omega) \right], \quad (12)$$

где  $J(\omega) = 2 - (Q^3(\omega) - 3q(\omega)Q(\omega)) -$

$$- 3f(\omega)(q(\omega)Q_1(\omega) + Q(\omega)q_1(\omega) - Q^2(\omega)Q_1(\omega)),$$

$$Q(\omega) = \sqrt{2 + f(\omega) + 2q(\omega)}, \quad f(\omega) = x_c \omega / \tau, \quad q(\omega) = \sqrt{1 + f(\omega)d},$$

$$q_1(\omega) = \frac{d}{2q(\omega)}, \quad Q_1(\omega) = \frac{1 + 2q_1(\omega)}{2Q(\omega)}, \quad Z_c = P_c V_c / RT_c.$$

Используя (10), заменим  $a^3/n_c$  в УС (12) на  $\Psi^3(x_c)$

$$\Pi(\omega, \tau) = \frac{1}{Z_c} \left[ \omega\tau + \frac{x_c d \omega^2}{2} - \tau \frac{\Psi^3(x_c)}{12\pi} J(\omega, x_c) \right]. \quad (13)$$

Теперь ясно, что УС будет иметь один и тот же вид для всех веществ при фиксированном  $\varepsilon$ , т.е. принцип соответственных состояний выполняется для трёхпараметрического потенциала (1). При этом следует иметь в виду, что  $x_c = x_c(\varepsilon)$ . Фактор сжимаемости в КТ является функцией только  $\varepsilon$

$$Z_c = \frac{P_c V_c}{RT_c} = 1 + \frac{x_c(\varepsilon)d}{2} - \frac{\Psi^3(x_c(\varepsilon))}{12\pi} J(1, x_c(\varepsilon)). \quad (14)$$

Зависимость фактора сжимаемости от  $\varepsilon$  представлена на рисунке 2. Из (14) следует, что выбор значения  $\varepsilon_0$  для расчетов свойств вещества можно осуществлять на основании экспериментального значения  $Z_c$ . Дальнейшее использование значения  $\varepsilon_0$  описывается в представленной выше процедуре.

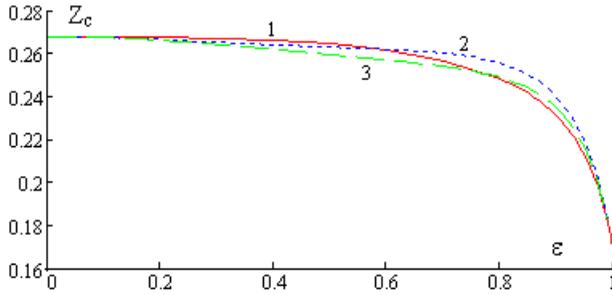


Рис.3. Кривая 1 — результаты численного расчёта по уравнению (9); 2 — аппроксимация по формуле  $x_c = (2 - \varepsilon^3)/(1 - \varepsilon)$ ; 3 — аппроксимация по формуле  $x_c = (10 - 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4)/5(1 - \varepsilon)$ .

Для определения параметров потенциала цезия использованы координаты критической точки [6]  $T_c = 1924 \text{ K}$ ,  $P_c = 92.5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $\rho_c = 379 \text{ кг/м}^3$  ( $n_c = \rho_c N_A / M = 1.717 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$ ), при этом  $Z_c \approx 0.203$ ,  $\varepsilon \approx 0.965$  и  $x_c \approx 32.296$ . Молярная масса цезия  $M = 0.1329 \text{ кг/моль}$ . Получены следующие значения параметров потенциала взаимодействия (1) для цезия  $a = 1.011 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$ ,  $A = 5.105 \cdot 10^{-28} \text{ Дж} \cdot \text{м}$ ,  $B = 5.035 \cdot 10^{-10} \text{ Дж/м}$ .

С помощью (6), используя известные термодинамические соотношения, легко найти выражения для энтропии, энтальпии, теплоёмкости и других экспериментально наблюдаемых величин. Удельные энтропия, энтальпия и теплоёмкость вычислены для пара цезия и сравниваются с соответствующими экспериментальными величинами при  $P = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Удельная величина

$X^{удел.}$  связана с молярной величиной  $X_M$  соотношением  $X^{удел.} = X_M / M$ .

На рисунках 3,4,5,7 представлены две кривые зависимости удельных величин от температуры. Кривая 1 — эксперимент [7], кривая 2 — расчёт.

Молярная энтропия имеет вид

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = S_{id} - \frac{k_B N_A}{12\pi\omega} \Psi(x_c) J(\omega, x_c).$$

$$S_{id} = k_B N_A \left[ \frac{5}{2} - \ln \left( \frac{\omega}{\tau^{3/2}} n_c \lambda_c \right) \right], \quad \lambda_c = h / \sqrt{2\pi m_0 k_B T_c}, \quad m_0 — \text{масса атома}$$

цезия, функция  $J(\omega, \tau)$  определена после формулы (7). Подчеркнём, что индивидуальность вещества содержится только в идеальной части энтропии.

Результаты вычисления энтропии дублировались расчётами по формуле, получаемой с помощью УС

$$S = S_{id} - R \left( 1 + \frac{d}{2} \frac{x_c \omega}{\tau} - \frac{P \beta_c}{n_c} \frac{1}{\tau \omega} \right), \text{ где } P = const,$$

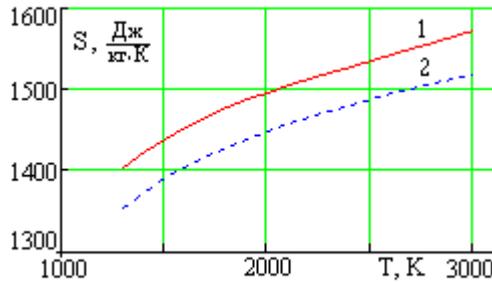


Рис. 4. Зависимость удельной энтропии от температуры.

Молярная изобарная теплоёмкость вычисляется по формуле

$$C_P = C_V - T \frac{(\partial P / \partial T)_V^2}{(\partial P / \partial V)_T},$$

где  $C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = C_V^{id} - \frac{k_b N_A \Psi^3(\varepsilon)}{4\pi\omega} \left( \frac{x_c \omega}{\tau} \right)^2 J_1(\omega), \quad C_V^{id} = \frac{3}{2} k_b N_A.$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = k_B n_c \omega \left( 1 - \frac{\Psi^3(\varepsilon)}{12\pi\omega} \left[ J(\omega) + 3 \left( \frac{x_c \omega}{\tau} \right)^2 J_1(\omega) \right] \right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = - \frac{\tau (n_c \omega)^2}{\beta_c N_A} \left( q^2 + \frac{\Psi^3(\varepsilon)}{4\pi\omega} \left( \frac{x_c \omega}{\tau} \right)^2 J_1(\omega) \right).$$

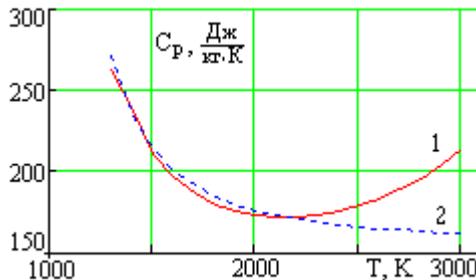


Рис. 5. Зависимость удельной изобарной теплоёмкости от температуры.

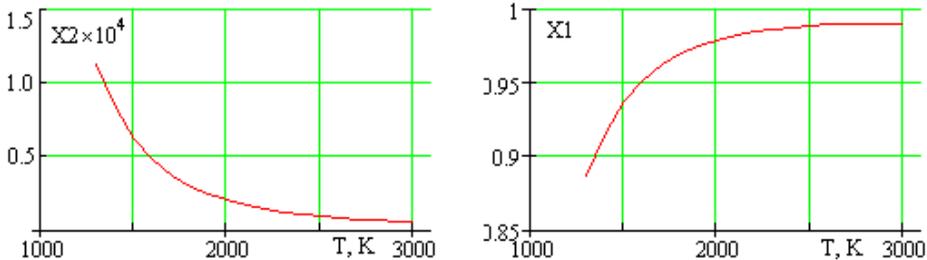


Рис. 5. Температурные зависимости мольных долей  $X_2$ ,  $X_1$  двухатомного и одноатомного компонентов паров цезия по данным [7] при  $P = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

Рассматривая рис.5., заметим, что при  $T < 2000 \text{ K}$  распад двухатомных комплексов (появление дополнительных степеней свободы) происходит более интенсивно, чем при температурах выше  $2000 \text{ K}$ . Об этом можно судить по более крутому наклону кривой  $X_2(T)$  при  $T < 2000 \text{ K}$ . Поэтому можно было бы ожидать, что значительные отклонения от экспериментальной теплоемкости должны наблюдаться при температурах  $T < 2000 \text{ K}$ , а не при  $T > 2000 \text{ K}$ . Однако возникает совершенно противоположная картина, которая к настоящему времени не нашла разумных доводов, её объясняющих.

Те же результаты по изобарной теплоёмкости можно получить несколько иначе, прибегнув к формуле, получаемой из УС при  $P = const$

$$C_P = R \left( \frac{3}{2} + \frac{d}{2} \frac{x_c \omega}{\tau} - \frac{P \beta_c}{n_c \tau \omega} - \left( \frac{wd}{2k_B} + \frac{P}{k_B (n_c \omega)^2} + \frac{T_c \tau}{n_c \omega} \right) \frac{\partial n}{\partial T} \right),$$

где  $\frac{\partial n}{\partial T} = - \frac{\partial P / \partial T}{\partial P / \partial n}$ . Заметим, что ни энтропия, ни изобарная теплоемкость,

как и следующие две величины не зависят явно от параметров  $a, A, B$ , и кроме того изохорная теплоемкость не зависит от координат КТ.

Молярная энтальпия  $H = U + PV$  вычисляется с помощью внутренней энергии  $U = F - T(\partial F / \partial T)_V$ , выражение для которой в случае потенциала

(1) можно записать в форме

$$U = \frac{N_A}{\beta_c} \left[ \frac{3}{2} \tau + \frac{1}{2} \omega x_c d + \frac{\Psi^3(\varepsilon) x_c}{8\pi} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} + 2[qQ_1 + q_1 Q - Q_1 Q^2] \right) \right].$$

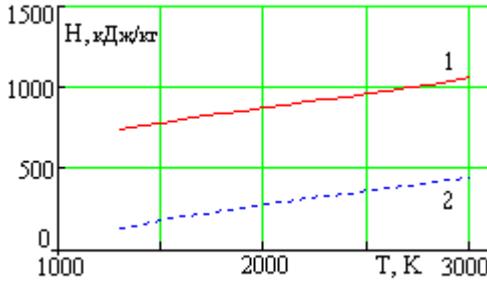


Рис. 6. Зависимость удельной энтальпии от температуры.

Скорость звука  $u = v \sqrt{\frac{T}{C_v} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v^2 - \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_T}$ ,

где  $\left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_T = -\frac{n}{v} \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_T$  — производная по удельному объёму  $v = 1/\rho$ ,

$\rho = m/V = Nm_0/V = n \cdot m_0$  — плотность вещества,  $n = \rho/m_0 = 1/m_0 v$ .

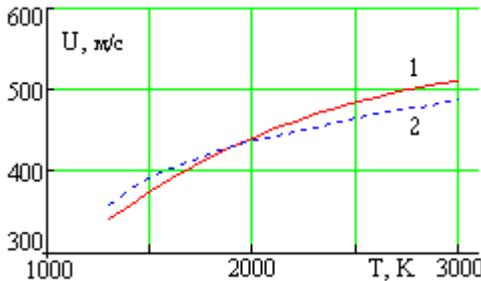


Рис. 7. Зависимость скорости звука от температуры.

Для расчёта всех представленных выше величин требуется знание плотности вещества в некотором термодинамическом состоянии. Плотность  $\omega$  при температуре  $\tau = T/T_c$  и давлении  $\Pi = P/P_c$  определяется решением уравнения  $\Pi(\omega, \tau) - \Pi = 0$ .

Система уравнений, описывающая равновесие сосуществующих фаз и устанавливающая связь их плотностей  $\omega_l$  и  $\omega_g$  с температурой  $\tau$

$$\begin{cases} \Pi(\omega_l, \tau) = \Pi(\omega_g, \tau); \\ \mu(\omega_l, \tau) = \mu(\omega_g, \tau), \end{cases}$$

не содержит явно ни критических параметров, ни параметров потенциала взаимодействия (присутствует только их комбинация в виде безразмерного  $\varepsilon$ ), поэтому её решения  $\omega_l$  и  $\omega_g$  зависит только от  $\varepsilon$  и  $\tau$ . Это означает, что при фиксированном  $\varepsilon$  линии сосуществующих фаз для разных веществ с одинаковыми  $Z_c$  совпадают, как это и должно быть в случае выполнения закона соответственных состояний. Что неудивительно, если принять во внимание выражение для химического потенциала системы

$$\mu = \frac{\beta_c}{\tau} \left( \ln(n_c \omega \lambda^3) + \frac{x_c \omega d}{\tau} + \frac{\Psi^3(\varepsilon) x_c}{8\pi\tau} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{Q^2 - q - d}{Q} \right) \right),$$

где  $q = q(\omega, \tau)$ ,  $q_1 = q_1(\omega, \tau)$ ,  $Q = Q(\omega, \tau)$ ,  $Q_1 = Q_1(\omega, \tau)$ .

Плотности сосуществующих фаз  $\omega_l$  и  $\omega_g$  могут быть использованы для расчета термодинамических свойств на линии насыщения.

Отметим, что расчёт теплофизических свойств жидких металлов помимо академического, имеет важное практическое значение, поскольку они используются как теплоносители первого контура реактора на быстрых нейтронах, и как рабочее тело ядерной энергетической установки, выполненной по схеме с бинарным циклом. Преимущества жидких металлов по сравнению с водой составляют высокая температура кипения, низкое давление насыщенных паров, высокая радиационная и термическая стойкость, высокая теплопроводность, обеспечивающая интенсивную теплоотдачу. К недостаткам следует отнести невысокую теплоемкость (кроме лития) и высокую для щелочных металлов химическую активность по отношению к воде и воздуху.

#### *Литература*

1. И.К. Локтионов. Фазовый переход в однокомпонентных системах с парными двухпараметрическими потенциалами взаимодействия // Вестник НовГУ. 2010. Т. №4. С. 18.
2. А.Ю. Захаров, И.К. Локтионов. Классическая статистика одно-компонентных систем с модельными потенциалами // ТМФ. 1999. Т. 119. №1. С. 167.
3. Д. Рюэль. Статистическая механика. Строгие результаты / Под ред. Р.А. Минлоса. Пер. с англ. И.Д. Новикова и В.М. Герцика, М.: Мир, 1971. С. 367.
4. M. Baus, C.F. Tejero. Equilibrium Statistical Physics: Phases of Matter and Phase Transitions. Springer, 2008. 374 p.
5. Г. Уленбек. Фундаментальные проблемы статистической механики. УФН, Т.103, вып.2, С.275-318, 1971.
6. S. Jungst, B. Knuth, F. Hensel, Physical Review Letters. V.55. №20. P.2160, 1985.
7. Н.Б. Варгафтик. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1972. 720 С.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Улитин Г.М., Лесина М.Е., Косолапов Ю.Ф. История кафедры высшей математики им. В.В.Пака .....	3
2. Азарова Н.В., Азарова А.Э. Применение симплексного метода для решения оптимизационных задач строительства и архитектуры .....	13
3. Азарова Н.В., Маленко А.Н. Применение непараметрической статистики к исследованию рабочей поверхности шлифовального круга .....	18
4. Азарова Н.В., Маленко Андреас. Применение методов линейного программирования для оптимизации севооборотов.....	24
5. Азарова Н.В., Муравская А.В. Применение дифференциального и интегрального исчисления к решению задач электротехники.....	29
6. Александрова О. В. Применение группового анализа к вычислению первых интегралов стохастических систем .....	34
7. Алексеева І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Досвід створення і використання навчально-методичних комплексів з вищої математики.....	40
8. Берьозкіна І. А. Шляхи удосконалення математичної підготовки майбутніх студентів технічних спеціальностей .....	46
9. Буркина Н.В. Реализация межпредметных связей как важный фактор повышения эффективности обучения математике студентов .....	53
10. Власенко К. В. Характеристика складових навчально-методичного комплексу з вищої математики для майбутніх інженерів .....	60
11. Гененко Ю.А., Лупаску Д. К. Математическое моделирование деградации в сегнетоэлектриках по механизму дрейфа заряженных дефектов в локальных деполяризованных полях .....	66
12. Герасимчук В.С. Професійно спрямоване викладання математики та методи його реалізації .....	72
13. Гребьонкіна О. С. Ділова гра як форма активного навчання .....	77
14. Гусак Л.П. Формування навичок самостійної роботи студентів в процесі вивчення вищої математики .....	84
15. Данильчук О.М. Самостійна робота студентів як умова їх професійного становлення .....	89
16. Дем'яненко А.Г. Стан, проблеми, деякі концепції та заходи підвищення якості інженерної освіти в Україні .....	93
17. Дремов В.В., Минакова О.А. Аналитический расчет нестационарных температур в жидкой и твердой фазах металла с определением скорости	

движения фронта затвердевания .....	99
18. Євсєєва О.Г. Поетапне освоєння предметних дій при навчанні математики у ВТНЗ .....	107
19. Євсєєва О.Г., Прокопенко Н.А. Знання та вміння з векторної алгебри, необхідні для розв'язання задач з аналітичної геометрії у просторі.....	114
20. Емельянова Т. В., Ярхо Т.А., Полтавская О.С., Гавриш И.П. Высшая математика в примерах и задачах для инженеров-экологов. Системы дифференциальных уравнений .....	121
21. Ехилевский С.Г., Гурьева Н.А., Голубева О.В. Группы и подгруппы в курсе геометрии и алгебры .....	129
22. Косолапов Ю.Ф. К практике условного экстремума .....	141
23. Косолапов Ю.Ф., Шупанова Е. К методике условного экстремума .....	134
24. Кухарева О.С. Програма-тест для перевірки знань учнів з початків аналізу в старшій школі в умовах модульного навчання .....	148
25. Лаврик І. В., Фортуна В. В. Дослідження залежності ціни за квадратний метр квартир міста Донецька від центру .....	155
26. Лебедева И.А., Гуржий Д. Доказательство числовых неравенств с помощью классических неравенств.....	160
27. Лебедева И.А., Рубцова О.А. Особенности преподавания курса высшей математики студентам технических специальностей .....	164
28. Левін В.М. Математичні спецкурси у інженерній освіті .....	170
29. Лесина М.Е, Зиновьева Я.В. Уравнения годографов в опорном базисе для задачи о движении по инерции системы двух гироскопов Лагранжа .....	179
30. Локтионов И.К., Гусар Г.А., Шевченко Т.С. Применение трёхпараметрического потенциала взаимодействия в статистической модели жидкого состояния .....	195
31. Локтионов И.К., Шевченко Т.С. Статистическая модель металлической жидкости с двухпараметрическими осциллирующими потенциалами взаимодействия .....	206
32. Лукашук Т.І., Москаленко А.С., Проценко Б.В. Особливості математичної підготовки випускників технікумів у вищих навчальних закладах.....	214
33. Маевская С.И., Журба В.В., Абдулин Р.Н. Сопровождающий трёхгранник локсодромы кругового цилиндра (винтовой линии) .....	223
34. Малашенко В.В. Использование теории возмущений для исследования специфических особенностей скольжения винтовых дислокаций в примесных кристаллах.....	227
35. Малашенко В.В., Малашенко Т.И. Математическое моделирование процессов дислокационной динамики в наноматериалах и тонких пленках.....	233

36. Малашенко В.В., Малашенко Т.И. Применение метода функций Грина при анализе динамического взаимодействия краевых дислокаций с дислокационными петлями .....	238
37. Мартиненко М.А., Мартиненко В.П., Ткачук А.М. Роль фундаментальных наук в сучасній інженерній освіті України.....	242
38. Мироненко Л.П., Кайда С.В. Теорема умножения определителей и правило Крамера .....	247
39. Мироненко Л.П., Рубцова О.А., Бреус С. Единый подход к методу обратной матрицы и правилу Крамера.....	251
40. Николайчук Т.И., Улицкая Н.Ю. Методические аспекты изучения темы «Неопределенный интеграл» в техническом ВУЗ.....	255
41. Николайчук Т. И., Улицкая Н.Ю., Ларина А. Использование математических моделей в биологических исследованиях .....	261
42. Паниотов Ю.Н. Приложение операционного исчисления в математической физике .....	267
43. Пелашенко А.В. Решение задач управления запасами при случайном спросе.....	271
44. Перегуда Ю. М. Організація контролю результатів навчальної діяльності студентів в умовах кредитно-модульної системи навчання .....	275
45. Перетолчина Г. Б., Глянецв П. Пример реализации профессиональной направленности курса «Теории вероятностей и математическая статистика».....	281
46. Петренко А.Д., Петренко Е.А. Экономико-математическая модель ценовой конкуренции монополий .....	287
47. Петренко А.Д., Петренко Е.А. Компетентностный подход в подготовке квалифицированных специалистов.....	294
48. Пуханова Л.С. Сучасні підходи до вдосконалення системи педагогічного контролю .....	298
49. Румянцев Н.В. Проблемы повышения качества преподавания математики для современного инженера .....	304
50. Торбіна Т.В. Взаємоз'язок спеціальних і математичних дисциплін в професійній підготовці фахівців електротехнічних систем.....	308
51. Улитин Г.М. Некоторые приёмы приведения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к известным уравнениям.....	314
52. Улитин Г.М., Савин А.И. Опыт проведения вузовских олимпиад по высшей математике в ДонНТУ .....	319

1. Абдулин Р.Н. Об одном примере стабилизации движения неголономной системы .....	324
2. Александрова О. В., Гордеев Г. Г., Ковалев И. Н. Моделирование движения системы связанных твердых тел – носителя и носимого тела .....	326
3. Александрова О. В., Ковалев И.Н. О методике организации самостоятельно работы студентов на занятиях по высшей математике .....	327
4. Вилкова И.В. Формула Ньютона-Лейбница и одно из условий ее применимости .....	329
5. Гончаров А.Н. О применении рядов в теории вероятностей .....	331
6. Гордеев Г.Г. Алгоритмы решения диофантовых уравнений и упаковка индексов степеней полиномов .....	334
7. Дегтярев В.С. О применении передаточной функции при решении линейных дифференциальных уравнений операционным способом .....	335
8. Кононыхин Г.А. Об условия существования прецессионных движений в задачах динамики твердых тел .....	337
9. Мироненко Л.П., Улитин Г.М. Формула Эйлера и некоторые следствия из неё .....	339
10. Паниотов Ю.Н., Перетолчина Г.Б. К изложению темы выпуклость и вогнутость кривой.....	341
11. Руссиян С.А. Математическая модель одного из известных случаев в истории .....	343
12. Чудина Е.Ю., Деханова В.В. Игры с точки зрения теории вероятностей... ..	346
13. V. Kochergin, L. Neely, I.N. Krivorotov, E.V. Kochergin, K.L. Wang Плазмонное усиление сверхбыстрого оптического перемагничивания .....	348