



## СПІЛЬНІ І РІЗНІ ВЛАСТИВОСТІ БАЛОК І ФЕРМ

**Ф. Л. Шевченко, С. М. Царенко**

*Донецький національний технічний університет,  
вул. Артема, 58, м. Донецьк, Україна, 83001.*

*E-mail: tzarenko@rambler.ru*

*Отримана 7 вересня 2011; прийнята 25 листопада 2011.*

**Анотація.** У роботі проведено аналіз точності наближеного розрахунку кризних стержньових систем у вигляді ферм і башт шляхом заміни їх еквівалентними стержнями зведеної жорсткості. Розглянуті основи методу визначення переміщень у фермі як балочної системи, тобто від згинального моменту, з врахуванням додаткового прогону від поперечної сили, який залежить від схеми ґрат ферми та їх перерізів. Запропоновано спрощений розрахунок переміщень в балочній системі із застосуванням його до еквівалентної балки, що замінює ферму, який полягає у використанні формули Мора з врахуванням поперечної сили. Наведені приклади використання спрощеного методу заміни ферми на еквівалентну балку для розрахунку металевої вежі на жорсткість, динамічного розрахунку ферм на власні та вимушені коливання. У динамічних розрахунках одержані еквівалентні балки з розподіленими параметрами замінюються стержнями з однією зведеною масою за умови рівності частоти основного тону коливань системи з розподіленими параметрами та частоти еквівалентної балки з однією зведеною масою.

**Ключові слова:** наближений розрахунок, кризні стержньові системи, ферми, башти, еквівалентна система, система з розподіленими параметрами, стержні з однією зосередженою масою, рівність частот.

## ОБЩИЕ И РАЗЛИЧНЫЕ СВОЙСТВА БАЛОК И ФЕРМ

**Ф. Л. Шевченко, С. Н. Царенко**

*Донецкий национальный технический университет,  
ул. Артема, 58, г. Донецк, Украина, 83001.*

*E-mail: tzarenko@rambler.ru*

*Получена 7 сентября 2011; принята 25 ноября 2011.*

**Аннотация.** В работе приводятся исследования точности приближенного расчета сквозных стержневых систем в виде ферм и башен путем замены их эквивалентными стержнями приведенной жесткости. Рассмотрены основы метода определения перемещений в ферме как балочной системы, т. е. от изгибающего момента, с учетом дополнительного прогиба от поперечной силы, который зависит от схемы решетки фермы и ее сечений. Предложен упрощенный расчет перемещений в балочной системе с применением его к эквивалентной балке, заменяющей ферму, который заключается в использовании формулы Мора с учетом поперечной силы. Приведены примеры использования упрощенного метода замены фермы на эквивалентную балку для расчета металлической башни на жесткость, динамического расчета ферм на собственные и вынужденные колебания. В динамических расчетах полученные эквивалентные балки с распределенными параметрами заменяются стержнями с одной приведенной массой при условии равенства частоты основного тона колебаний системы с распределенными параметрами и частоты эквивалентной балки с одной приведенной массой.

**Ключевые слова:** приближенный расчет, сквозные стержневые системы, фермы, башни, эквивалентная система, системы с распределенными параметрами, стержни с одной сосредоточенной массой, равенство частот.

## COMMON AND DIFFERENT PROPERTIES OF BEAMS AND TRUSSES

Feofan Shevchenko, Sergiy Tsarenko

Donetsk National Technical University,  
58, Artema Str., Donetsk, Ukraine, 83000.  
E-mail: tzarenko@rambler.ru

Received 7 September 2011; accepted 25 November 2011.

**Abstract.** The paper cites the investigations of the approximate analysis accuracy of through bar structures in the form of trusses and towers by means of replacement with their equivalent bars of adduced rigidity. The principle methods of movement determination in a truss as a beam system, i.e. from a bending moment with regard to an additional deflection from a transverse force depending on the truss lettuce diagram and its sections have been considered. The simplified analysis of the movement in a beam system with its application to an equivalent beam changing a truss contained in application of the More formula with regard of the transverse force has been offered. The examples of the simplified method application of change of a truss to an equivalent beam for analysis of a metal tower on to rigidity, dynamic analysis of trusses to the natural and forced oscillations have been given. At dynamic analyses, the gained equivalent beams with distributed parameters have been changed by bars with a reduced mass under conditions of frequency equality of the basic tone of oscillations of the system with distributed parameters and frequencies of an equivalent beam with a reduced mass.

**Keywords:** approximate analysis, through bar structures, trusses, towers, equivalent system, systems with distributed parameters, reduced mass bars, frequency equality.

## Постановка проблемы

Основными грузонесущими конструкциями строительных объектов являются балки, фермы, рамы, колонны, пластины, оболочки, массивы. При проектировании и конструировании этих элементов необходимо производить инженерные расчеты их на прочность, жесткость, устойчивость при статическом и динамическом нагружении. В некоторых случаях в зависимости от рода объекта исследования такие расчеты могут оказаться весьма кропотливыми или затруднительными из-за сложности математической модели расчетной схемы. В таких случаях часто прибегают к упрощенному расчету, заменяя расчетную схему объекта более простой, эквивалентной заданной с некоторыми допущениями [1].

Так, давно известна практика замены фермы эквивалентной балкой в статических расчетах [2]. Известны многочисленные приближенные динамические расчеты систем с распределенными параметрами заменой эквивалентными одномассовыми балками [3]. Однако и в настоящее время здесь остается много вопросов и незавершенных разработок, некоторые из них представлены в работах [4, 5, 6].

Настоящая работа посвящена обоснованию замены сквозной стержневой системы (фермы,

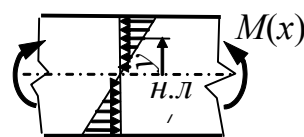
колонны, башни) стержневым балочным элементом.

## Изложение основного материала исследования

Балка представляет собой стержень сплошного поперечного сечения, предназначенный для работы на изгиб. При изгибе стержня возникают, в основном, нормальные напряжения, изменяющиеся по линейному закону, с наибольшими значениями в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах, рис. 1.

$$\sigma = -\frac{M(x)}{J_z} y. \quad (1)$$

Нормальными напряжениями в прилегающих к нейтральной оси волокнах можно пренебречь. Это значит, что толщину балки в окрестности нейтральной оси, т. е. вблизи к центрам тяжести



**Рисунок 1.** Распределение нагрузки по сечению стержня при изгибе.

поперечных сечений, можно сделать небольшой по отношению к волокнам, удаленным от нейтральной линии, рис. 2. Но, выбросить эту тонкую диафрагму полностью нельзя, т. к. на нейтральной оси возникают наибольшие касательные напряжения, вызывающие сдвиг, и диафрагма должна обеспечить работу балки-стержня на сдвиг. Очевидно, сплошное сечение такой диафрагмы целесообразно заменить сквозным, в виде решётки стержней, что образует вместо балки ферму, рис. 3.

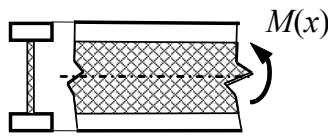


Рисунок 2. Рациональная форма сечения балки.

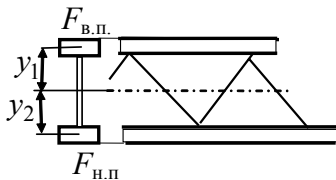


Рисунок 3. Балка со сквозной диафрагмой.

Стержни такой статически определимой конструкции при узловой нагрузке испытывают растяжение или сжатие. Поэтому в расчетной схеме ферма изображается в виде системы прямых стержней, связанных между собою шарнирами, рис. 4.

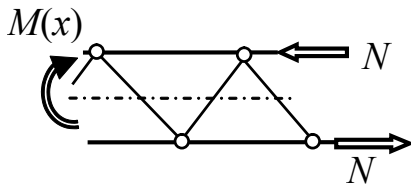


Рисунок 4. Расчетная схема фермы.

При изгибе фермы стержни верхнего и нижнего поясов испытывают растяжение-сжатие и усилия в них уравнивают момент внешней нагрузки, а растянуто-сжатые стержни решётки фермы уравнивают поперечную силу, которая с изгибающим моментом связана дифференциальной зависимостью

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}. \quad (2)$$

Из вышеприведенных суждений следует, что балку можно заменить эквивалентной по прочности фермой и это окажется экономически целесообразным. Следует и обратное утверждение, что ферму можно заменить равнопрочной балкой.

В балках расчет на прочность определяется главным образом построением эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, а в расчетах на жесткость, кроме основополагающего приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси, используются и другие эффективные методы: метод начальных параметров, правило Верещагина, использование дельта-функции Дирака и др.

Расчет фермы на прочность сводится к вычислению внутренних усилий во всех стержнях методом вырезания узлов или методом моментных точек, и эта работа хоть и очень простая, но трудоемкая. Перемещения узлов фермы вычисляются по формуле Мора

$$\delta_i = \sum \frac{N_{ip} N_{i1} l_i}{EF_i}, \quad (3)$$

что представляет трудоемкость еще более существенную.

Особенно чрезвычайно большой трудоемкостью характеризуется динамический расчет ферм. Даже в упрощенном динамическом расчете фермы нужно составлять удвоенное количество (по числу узлов фермы) дифференциальных уравнений движения условной инерционной нагрузки. Такой расчет весьма трудоемкий и мало эффективный для инженерной практики.

Необходимо разработать упрощенный расчет перемещений в балочной системе с применением его к эквивалентной балке, заменяющей ферму.

### Основы замены сквозного стержня эквивалентной балкой

Известно, что перемещения в балке зависят от изгибающего момента и поперечной силы. Так, например, в формуле Мора для вычисления перемещения (прогиба или угла поворота) содержится три слагаемых [7, 8]

$$\begin{aligned} \delta = & \sum \int \frac{M_p(x) M_1(x)}{EJ} dx + \\ & + \sum K \int \frac{Q_p(x) Q_1(x)}{GF} dx + \\ & + \sum \int \frac{N_p(x) N_1(x)}{EF} dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Легко показать, что влиянием поперечной силы  $Q$  по сравнению с влиянием изгибающего момента  $M$  в балках можно пренебрегать, а влияние продольного усилия еще меньше, чем поперечной силы. Тем не менее, следует заметить, что  $y(x) = y(M) + y(Q)$ .

Рассмотрим элемент балки под действием поперечной силы, рис. 5. Дополнительное перемещение по вертикали правого сечения по отношению к левому равно  $dy(Q) = -\gamma Q(x) dx$  (при положительной поперечной силе угол поворота сечения отрицательный – по ходу часовой стрелки). Здесь  $\gamma$  – относительный сдвиг, т. е. угол сдвига от единичной поперечной силы.

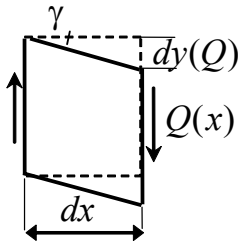


Рисунок 5. Деформация сдвига в элементе балки.

Интегрируя представленную зависимость, находим дополнительный прогиб от поперечной силы

$$y(Q) = -\gamma \int Q(x) dx + C. \quad (5)$$

Постоянная интегрирования зависит от выбора начала координат. При выборе начала координат на опоре балки  $C = 0$ .

Таким образом, суммарное перемещение в балке при изгибе состоит из двух слагаемых

$$y(x) = -y(M) - \gamma M(x). \quad (6)$$

Первое слагаемое учитывает воздействие изгибающего момента, второе – поперечной силы.

Распространяя это суждение на ферму, следует заметить, что первое слагаемое (6) можно вычислять по расчетным формулам (или уравнениям) балки, т. е. в приложении к ферме в балочных формулах нужно учитывать момент инерции площади поперечного сечения поясов фермы относительно нейтральной оси, т. е. относительно центральной оси сечений поясов фермы, рис. 3

$$J = F_{в.п.} y_1^2 + F_{н.п.} y_2^2. \quad (7)$$

Для учета влияния поперечной силы нужно знать угол сдвига  $\gamma$  в зависимости от схемы решетки фермы и ее сечений. Наиболее просто этот угол находится для решетки с параллельными раскосами, рис. 6.

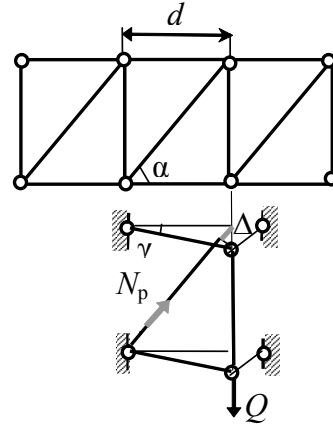


Рисунок 6. Схема определения деформации сдвига в ферме.

Для произвольной панели с неподвижными узлами в левом сечении и подвижными в вертикальном направлении (перпендикулярном направлению поясов) правыми узлами усилие в раскосе от поперечной силы  $N_p = Q / \sin \alpha$ . От этого усилия возникает продольная деформация раскоса

$$\Delta l = \frac{N_p l_p}{EF_p} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{d}{\cos \alpha} \frac{1}{EF_p}.$$

Перпендикуляр к направлению раскоса конца сжатого раскоса на стойку  $\Delta = \Delta l / \sin \alpha$  определяет катет угла  $\gamma$ , т. е.

$$\gamma = \frac{1}{EF_p} \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}. \quad (8)$$

Такая же формула угла сдвига будет и в ферме с треугольной решеткой [5].

Для оценки точности этой формулы рассмотрим чисто академическую задачу в виде консольной вертикальной фермы с квадратными панелями и треугольной решеткой, рис. 7. Площади поперечных сечений примем одинаковыми. Вычислим перемещение узла загрузки по формуле Мора (3). Весь расчет представлен в таблице.

Из таблицы находим перемещение верхнего узла, загруженного силой  $P$

$$\delta_{11} = 55,313 \frac{d}{EF}.$$

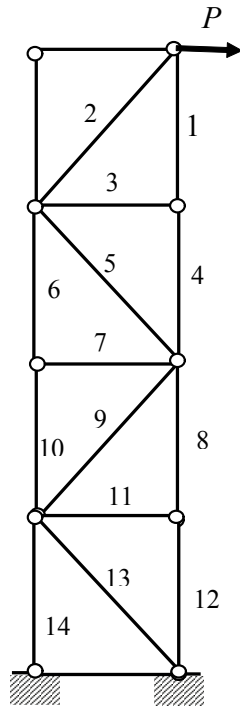


Рисунок 7. Вертикальная консольная ферма.

В эквивалентной балке от сдвига

$$\gamma = -\frac{1}{EF_p \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} = -\frac{1}{EF} 0,3535,$$

а соответствующий прогиб

$$\delta(Q) = -\gamma M(l) = -\frac{4d}{0,3535EF} = -11,315 \frac{d}{EF}.$$

Прогиб от изгибающего момента с учетом момента инерции площади поперечного сечения поясов (одной фермы)

$$J = 2F \left( \frac{d}{2} \right)^2 = \frac{Fd^2}{2}$$

вычисляется по известной формуле для консоли

$$f(M) = \frac{Pl^3}{3EJ}, \text{ т. е.}$$

$$\delta(M) = -\frac{l^3}{3EJ} = -\frac{(4d)^3 \cdot 2}{3EF \cdot d^2} = -42,66 \frac{d}{EF}.$$

Суммарный прогиб от единичной нагрузки

$$\delta_{11} = -53,98 \frac{d}{EF},$$

что отличается от расчета по формуле Мора на 2,4 %.

Заметим, что формула Мора с учетом поперечной силы (4) приводит к окончательному результату с большей точностью практически при одном вычислении

$$\begin{aligned} y(Q) &= \int_0^l k \frac{Q(P) \cdot Q(1)}{GF} dx = k \int_0^{4d} \frac{P dx}{EF} \frac{E}{G} = \\ &= 1,2 \frac{P4d}{EF} 2,5 = 12 \frac{Pd}{EF}. \end{aligned}$$

Суммарное перемещение

$$\gamma = 54,66 \frac{d}{EF}$$

с отклонением от точного значения на 1,18 %.

После замены сквозной пространственной конструкции эквивалентной балкой легко решаются задачи на собственные колебания от гармонической нагрузки и даже на удар.

Вычислим частоту основного тона колебаний сквозной квадратной стойки (рис. 7), масса которой 181,55 кг, изготовленной из уголков 5,0×5,0×0,5. Погонная масса  $m_0 = 3,77$  кг/м, радиус инерции уголков  $i = 1,55$  см. Изгибная жесткость поясов

$$J = 4F \left( \frac{d}{2} \right)^2 = Fd^2 = 4,8 \cdot 57,6^2 = 15\,925 \text{ см}^4,$$

$$EJ = 31,25 \text{ МНм}^2.$$

В консольной стойке с погонной массой  $m = 181,55 / 2,40 = 75,65$  кг/м спектр частот собственных колебаний определяется собственными числами частотного уравнения  $\text{ch} \lambda \cdot \text{cosp} = -1$  (первый корень этого уравнения  $\lambda = \text{KL} = 1,875$ ). Частота первого тона

$$\omega = \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{1,875^2}{2,4^2} \sqrt{\frac{31,25 \cdot 10^6}{75,65}} = 392,26 \text{ 1/с.}$$

Таблица. Вычисления перемещения в ферме

№ ст.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
$l_i/d$	1	$\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	1	1	1	$\sqrt{2}$	1	1	1	$\sqrt{2}$	1	
$N_{i1}/P$	-1	$\sqrt{2}$	0	-1	$-\sqrt{2}$	2	0	-3	$\sqrt{2}$	2	0	2	$-\sqrt{2}$	4	
$N_{i1}$	-1	$\sqrt{2}$	0	-1	$-\sqrt{2}$	2	0	-3	$\sqrt{2}$	2	0	2	$-\sqrt{2}$	4	
$N_{ip}N_{i1}l_i$	1	$2\sqrt{2}$	0	1	$2\sqrt{2}$	4	0	9	$2\sqrt{2}$	4	0	4	$2\sqrt{2}$	16	55,3

Чтобы вычислить частоту основного тона колебаний сквозной стойки, нужно заменить ее эквивалентным сплошным стержнем с приведенной массой в торцевом сечении. Коэффициент приведения массы стержня находится по известной формуле [4]

$$\xi = \frac{l^3}{\lambda^4 EJ \delta_{11}} = \frac{2,4 \cdot 4 \cdot 4,8 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}}{1,875^4 \cdot 31,25 \cdot 10^6 \cdot 53,93 \cdot 0,6} = 0,4247.$$

Приведенная масса эквивалентного стержня

$$M_{np} = m l \xi = 181,55 \cdot 0,4247 = 77,11 \text{ кг.}$$

Частота основного тона собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} M_{np}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,8 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}}{53,743 \cdot 37,11}} = 392,23 \text{ 1/с.}$$

Таким же путем сквозную стойку с сосредоточенной массой, нагруженной гармонической силой  $P(t) = P \sin \theta t$ , можно заменить эквивалентным сквозным стержнем, а затем для невесомого стержня с приведенной массой найти собственную частоту и коэффициент нарастания колебаний  $\nu$ .

Пусть к вышерассмотренной квадратной стойке приложена сосредоточенная масса 150 кг и гармоническая сила  $P(t) = P \sin 200t$  (с частотой возмущения  $\theta = 200 \text{ 1/с}$ ).

Приведенная масса

$$M_{np} = m l \xi = 150 + 181,55 \cdot 0,4247 = 227,5 \text{ кг.}$$

Частота основного тона собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,8 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}}{53,66 \cdot 0,6 \cdot 227,5}} = 228,9 \text{ 1/с.}$$

Коэффициент нарастания колебаний

$$\nu = \frac{1}{1 - \left(\frac{200}{227,5}\right)^2} = 4,2.$$

Сквозные стержневые системы башенного типа переменного поперечного сечения можно решать на основании приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси. От ветровой нагрузки, вычислим приближенно прогиб верхнего сечения сквозной башни высотой 40 м, изготовленной из уголков: пояса ферм L125/10, площадь поперечного сечения  $F = 24,5 \text{ см}^2$ , погонная масса 19,1 кг/м; раскосы L50/5, площадь поперечного сечения 4,8 см<sup>2</sup>, с погонной массой 3,77 кг/м. Размеры нижнего сечения башни  $a = 444,7 \text{ см}$ , верхнего сечения  $b = 81,4 \text{ см}$ , рис. 8.

Момент инерции площади поперечного сечения нижнего основания поперечного сечения плоской фермы башни (с учетом расстояния между центрами тяжести уголков)

$$J = 2F \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 = \frac{24,5}{2} \cdot 441,9^2 = 2,39 \cdot 10^6 \text{ см}^4 = 2,39 \cdot 10^{-2} \text{ м}^4.$$

Жесткость при изгибе нижнего поперечного сечения башни

$$EJ(l) = 2 \cdot 2,39 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{11} = 9,56 \cdot 10^9 \text{ Нм}^2.$$

Погонная жесткость произвольного поперечного сечения

$$EJ(x) = 5,975 \cdot 10^6 \cdot x^2 \text{ Нм}^2/\text{м.}$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси башни от воздействия ветровой нагрузки интенсивностью  $q = 2 \cdot 913 \text{ Н/м}$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{qx^2}{2EJ(x)} = \frac{q}{11,95 \cdot 10^6} = \frac{q}{EJ}.$$

Отсюда дифференцированием находим:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{qx}{EJ} + C, \quad y(x) = \frac{qx^2}{2EJ} + Cx + D,$$

а из граничных условий  $y'(l) = 0$ ,  $y(l) = 0$  получаем прогиб верхнего сечения башни

$$D = y(0) = \frac{ql^2}{2EJ} = \frac{913 \cdot 40^2}{11,95 \cdot 10^6} = 0,1222 \text{ м.}$$

К этому перемещению от изгиба поясов ферм следует добавить прогиб от сдвига решетки, т. е. нужно учесть влияние поперечной силы в формуле (4)

$$\begin{aligned} \delta(Q) &= k \int \frac{Q_p(x) Q_1(x)}{GF\xi} dx = \\ &= k \int \frac{qx}{GF\xi} dx = k \frac{ql^2}{2GF\xi}. \end{aligned}$$

Здесь коэффициент  $\xi$  учитывает, что на сдвиг работает решетка фермы с 27 раскосами по высоте башни, т. е.  $27/40 = 0,675F$ , а коэффициент  $k = 1,2$  для прямоугольных элементов учитывает неравномерность распределения касательных напряжений сдвига.

Так получаем дополнительный прогиб от поперечных сил

$$\begin{aligned} \delta(Q) &= k \frac{ql^2}{2GF\xi} = k \frac{ql^2}{2EF\xi} \cdot \frac{E}{G} = \\ &= 1,2 \frac{2 \cdot 913 \cdot 40^2 \cdot 2,5}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 4,8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,675} = 33,8 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \end{aligned}$$

Суммарное значение прогиба  $y(q) = 156$  мм, что совпадает с результатами, полученными по формуле Мора [9].

Аналогично найдем прогиб верхнего сечения башни от единичной горизонтальной силы в этом сечении

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{Px}{EJ(x)} = \frac{P}{5,975 \cdot 10^6 x}$$

Отсюда дифференцированием находим:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{P \cdot \ln x}{EJ} + C,$$

$$y(x) = \frac{Px(\ln x - 1)}{EJ} + Cx + D,$$

а из граничных условий  $y'(l) = 0$ ,  $y(l) = 0$  получаем прогиб верхнего сечения башни

$$D = y(0) = \frac{l}{EJ} = \frac{l^3}{EJ(l)} = \frac{40}{5,975 \cdot 10^6} = 6,695 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н.}$$

Этот прогиб можно использовать для определения приближенного значения частоты основного тона колебаний башни, заменив ее сплошным стержнем с приведенной массой на конце консоли. Для вычисления коэффициента приведения массы приравняем частоту первого тона колебаний стержня сплошного сечения с усредненной жесткостью частоте колебаний невесомой консоли с приведенной массой  $ml\xi$

$$\frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ(l)}{2m}} = \sqrt{\frac{EJ(l)}{l^4 ml\xi}}$$

Отсюда находим коэффициент приведения масс

$$\xi = \frac{2}{\lambda^4} = \frac{2}{1,875^2} = 0,1618,$$

где  $\lambda$  – первый корень частотного уравнения консоли с распределенной массой.

Так находим приближенное значение частоты первого тона колебаний сквозной башни

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} ml\xi}} = \sqrt{\frac{EJ(l)}{l^4 m\xi}} = \sqrt{\frac{9,56 \cdot 10^9}{40^4 \cdot 139 \cdot 0,1618}} = 12,88 \text{ с}^{-1} = 2,05 \text{ Гц,}$$

что практически точно совпадает с результатами, приведенными в работе [9].

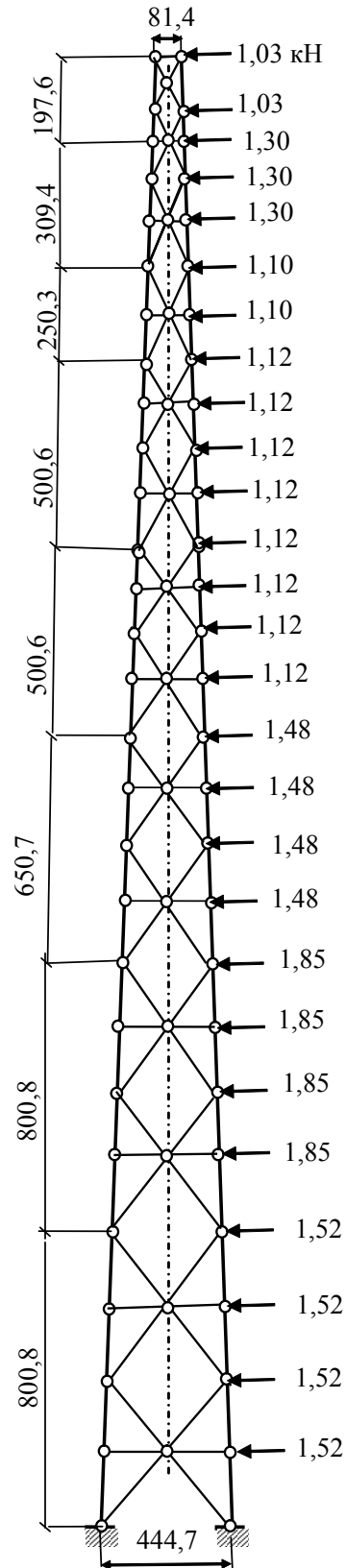


Рисунок 8. Расчетная схема фермовой конструкции бакенного типа на ветровую нагрузку.

## Выводы

В строительной механике стержневых систем для статического и динамического расчета сквозных стержневых систем в виде ферм и сто-

ек можно использовать замену заданной стержневой системы эквивалентной балкой, а в случае колебаний или удара балку с распределенной массой заменить системой с одной приведенной массой [5].

## Литература

1. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек [Текст] / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
2. Жеданов, С.А. Новый способ расчета сквозных ферм, рам и арок [Текст]: Учебное пособие / С. А. Жеданов. – Донецк: ДПИ, 1974. – 76 с.
3. Киселев, В. А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений [Текст] / В. А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1964. – 332 с.
4. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник. Том 3 [Текст] / под общей редакцией И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.
5. Шевченко, Ф. Л. Упрощенный динамический расчет стержневых систем с распределенными параметрами [Текст] / Ф. Л. Шевченко // Автоматизация виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: Український міжвідомчий науково-технічний збірник. – Львів, 2006. – С. 278–286.
6. Шевченко, Ф. Л. Задачи по сопротивлению материалов [Текст] / Ф. Л. Шевченко, С. Н. Царенко. – Изд. 4-е. – Донецк: ТОВ «Цифрова типографія», 2009. – 354 с.
7. Курс сопротивления материалов [Текст] / Под общей редакцией Г. С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1986. – 776 с.
8. Шевченко, Ф. Л. Механика упругих деформируемых систем. Часть 1. Напряженно-деформированное состояние стержней [Текст] / Ф. Л. Шевченко. – Донецк: ДГТУ, 2006. – 293 с.
9. Отчет по договору ДонЦТБ на экспертизу проекта башен МГ [Текст] / Донбасская нац. академия строительства и архитектуры; В. В. Губанов. – Макеевка: ДонНАБА, 2009. – 35 с.

## References

1. Timoshenko, S. P. Stability of rods, plates and shells. Moscow: Nauka, 1971. 807 p. (in Russian)
2. Zhedanov, S. A. The latest method of design of trussed girders, frames and arches. Textbook. Donetsk: DPI, 1974. 76 p. (in Russian)
3. Kiselyov, V. A. Theory of structures. Specialized course. Dynamics and stability of structures. Moscow: Stroyizdat, 1964. 332 p. (in Russian)
4. Birger, I. A.; Panovko, Ya. G. (eds). Strength. Stability. Vibrations. Reference book, Vol. 3. Moscow: Mashinostroyeniye, 1968. 567 p. (in Russian)
5. Shevchenko, F. L. Simplified dynamic analysis of lattice structures with distributed parameters. In compendium *Automation of production processes in machine and equipment building*. Lviv, 2006, p. 278–286. (in Russian)
6. Shevchenko, F. L.; Tsarenko, S. N. Strength of materials tasks (4<sup>th</sup> edition). Donetsk: Tsyfrova typografiya, 2009. 354 p. (in Russian)
7. Pisarenko, G. S. (eds). Strength of materials. Kyiv: Vyshcha shkola, 1986. 776 p. (in Russian)
8. Shevchenko, F. L. Mechanics of elastic deformable systems. Part I. In the textbook *Stressed and strained state of the rods*. Donetsk: DSTU, 2006. 293 p. (in Russian)
9. Gubanov, V. V. Contract report of examination for design of MG towers. Makiivka: DonNACEA, 2009. 35 p. (in Russian)

**Шевченко Феофан Леонітьович** – доктор технічних наук, завідувач кафедри опору матеріалів Донецького національного технічного університету, заслужений працівник народної освіти України. Наукові інтереси: дослідження напружено-деформованого стану конструкцій та споруд у механіці пружних деформівних систем.

**Царенко Сергій Миколайович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри опору матеріалів Донецького національного технічного університету. Наукові інтереси: дослідження напружено-деформованого стану та розробка інженерних методів розрахунку на міцність, жорсткість та стійкість будівельних металевих конструкцій та споруд гірничої промисловості.



**Шевченко Феофан Леонтьевич** – доктор технических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов Донецкого национального технического университета, заслуженный работник народного образования Украины. Научные интересы: исследования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений в механике упругих деформируемых систем.

**Царенко Сергей Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов Донецкого национального технического университета. Научные интересы: исследование напряженно-деформированного состояния и разработка инженерных методов расчета на прочность, жесткость и устойчивость строительных металлических конструкций и сооружений горной промышленности.

**Feofan Shevchenko** – DSc (Eng), the Chair of the Strength of Materials Department of the Donetsk National Technical University, an Honoured Educationalist of Ukraine. Research interests: investigations of the stressed and strained state of structures and constructions of the mechanics of elastic and strained systems.

**Sergiy Tsarenko** – PhD (Eng), an Associate Professor of the Strength of Materials Department of the Donetsk National Technical University. Research interests: investigations of the stressed and strained state and development of the strength, rigidity and stability analyses of metal structures and mining constructions.