УДК 517.95 (09)

Гюгонио и разрывы решений уравнений математической физики

Косолапов Ю.Ф., Фролофф Г.Н.
Донецкий национальный технический университет

В статті висвітлюються перші спроби створення теорії розривів розв'язків рівнянь математичної фізики, зокрема в працях французького математика і фізика Гюгоніо

Вопрос о вкладе Гюгонио в теорию разрывов решений уравнений с частными производными еще недостаточно изучен в историко-мате-матической литературе. В частности, мало известно, какое место в его исследованиях занимало волновое уравнение. Между тем основные положения своей теории Гюгонио разрабатывал сначала для волнового (одномерного [1] и трехмерного [2]) уравнения, а затем распространял полученные результаты на более общие случаи - уравнение движения идеального газа [3, 1], систему уравнений движения сжимаемой жидкости [4, 2, 5, 6]. Кроме того, непосредственным толчком к созданию Гюгонио его теории разрывов послужили проводившиеся как им самим, так и другими учеными многолетние исследования смешанных нестационарных задач для одномерного волнового уравнения.

1. Вопрос о возможности разрывов решений уравнений с частными производными, в том числе волнового, ставился еще в XVIII ст. Достаточно вспомнить знаменитый спор о природе произвольных функций, входящих в решения этих уравнений, работы Эйлера по теории звука, исследования Эйлером движения струны, защемленной в одной точке. Однако систематическое рассмотрение разрывных решений началось только во второй половине XIX ст.

В дальнейшем речь будет идти только о разрывах первого рода (скачках) в производных искомых функций. Используя сложившуюся к началу XX ст. терминологию, будем называть скачки в первых, вторых, высших производных разрывами первого, второго, высших порядков соответственно. Основополагающие исследования разрывов первого порядка принадлежат Риману и Кристоффелю, разрывов второго порядка - Гюгонио, разрывов второго и высших порядков - Адамару. В частности, Гюгонио впервые выяснил роль разрывов второго порядка в процессе образования и распространения волн, установил (для одномерного движения стержней, жидкостей или газов) тесную связь этих разрывов с теорией характеристик, ввел в рассмотрение такие важные понятия, как совместимость, поверхность волн и др.

Возникновение теории Гюгонио тесно связано с изучением физических проблем, приводящих к решению смешанных (при заданных начальных и краевых условиях) задач для одномерного волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (1)$$

с неоднородными краевыми условиями (нестационарных задач). Повидимому, впервые такие задачи встретились в работе Пуассона [7] в его исследовании одномерного движения сжимаемой жидкости, содержащейся в круглой цилиндрической трубе постоянного или ступенчато изменяющегося поперечного сечения, а также движения двух жидкостей, находящихся одна над другой в цилиндрической трубе постоянного поперечного сечения. При этом на одном конце трубы задавался определенный граничный режим вида

$$u_x(0,t) = \varphi(t).$$

Как известно, нестационарные задачи для уравнения (1) можно ре-шать как методом, идущим от Даламбера и Эйлера, когда исходят из общего решения уравнения

$$u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at),$$

определяя произвольные функции φ и ψ с помощью начальных и кра-евых условий, так и методом разделения переменных (или методом Фурье)[1]. Пуассон в названной работе шел первым путем. Но вскоре этот метод надолго уступил место более общему методу Фурье. Именно с помощью последнего Навье [9, стр. 622] исследовал проблему продольных и поперечных колебаний цепного моста, нагруженного в одной

[1] Возможны и другие методы решения таких задач. См. по этому вопросу, например [8, гл. V, приложение 2].

точке дополнительной массой, падающей на мост с определенной скоростью. Дюамель [10, 11, 12] решил несколько задач, относящихся к колебаниям струны или стержня с произвольным (в частности, периодическим) режимом на одном или обоих концах, использовав при этом прием, получивший со временем название "принцип Дюамеля".

Однако в 1864 г. Филлипс [13] при рассмотрении ряда технических проблем, сводящихся к изучению колебаний цилиндрических стержней, снова возвратился к первому методу решения нестационарных задач для уравнения (1). Позднее тем же путем исследовал проблему продольного удара двух цилиндрических стержней Сен-Венан [14 и др. работы]. Уравнение (1) при этом записывалось им для каждого стержня в отдельности. Независимо от Филлипса некоторые его ре-зультаты в несколько иной форме, но посредством аналогичного метода получили в 1882 г. Гюгонио и Себер [15, 16]. Они же рассмотрели проблему, яв-ляющуюся обобщением вышеупомянутой проблемы Навье [15, 17].

Во всех названных исследованиях основной целью было найти решение той или иной смешанной задачи для уравнения (1), установить закон движения произвольной точки рассматриваемого физического объекта. Вопрос о том, каким образом в этом объекте происходит процесс распространения движения, изучался в гораздо меньшей степени. Разрывный характер решения смешанной задачи вообще оставался незамеченным.

Вместе с тем эти исследования и особенно те, в которых смешанные задачи для уравнения (1) решались путем предварительного построения общего решения этого уравнения, явились (по крайней мере по отношению к волновому уравнению) тем фундаментом, на котором возникла теория Гюгонио. Впервые в наиболее полном и четком виде она была развита (для одномерного пространства) в "Мемуаре о распространении движения в телах и, в частности, в идеальных газах" [1], представленном 26 октября I885 г.

2. Гюгонио рассматривает заключенные в цилиндрический сосуд сжимаемую жидкость или идеальный газ, а также упругий цилиндрический стержень, которые движутся в направлении оси цилиндра. Предполагается, что точки, находящиеся в одном поперечном сечении, имеют одинаковые скорости. Пусть $u(x,t)$ - смещение в момент t поперечного сечения с абсциссой x (ось x Гюгонио направляет паралле-льно образующей цилиндра, а начало координат помещает на одном из его оснований.). В случае малых колебаний стержня или жидкости функция $u(x,t)$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению (1). Движения газа описываются более сложным уравнением, получающимся из (1) заменой постоянного коэффициента a^2 некоторой функцией от скорости смещения поперечных сечений. Как уравнение (1), так и уравнение движения газа являются частными случаями квазилинейного уравнения

$$Lu_{tt} + 2Ku_{xt} + Hu_{xx} + M = 0, \qquad (2)$$

где *L, K, H, M* - функции от x, t, u, u_x, u_y.

Построение общей теории Гюгонио начинает с рассмотрения примера. Он изучает движение (исходя из положения равновесия) конечного стержня длины l, один конец которого ($x = 0$) закреплен, а на другом ($x = l$) действует равноускоренная сила. Это приводит к смешанной (нестационарной) задаче для уравнения (1) при нулевых начальных условиях и краевых условиях

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = \frac{\alpha t^2}{2}. \qquad (3)$$

Рассуждения Гюгонио (слегка усовершенствованные) сводятся к следующему. В первоначальный момент стержень находится в покое, и его положение представляется решением

$$u_0(x,t) = 0 \qquad (4)$$

уравнения (1). Условие (3) на конце $x = l$ вызывает движение, представляемое решением

$$u_1(x,t) = \frac{\alpha}{2a^2}(x + at - l)^2 \qquad (5)$$

этого уравнения. В результате стержень делится на две части: более близкая к концу $x = 0$ остается в покое (движется согласно закону (4)), в то время как другая часть движется согласно закону (5). Поперечное сечение, соединяющее эти части ($x = l - at$), движется к концу $x = 0$ со скоростью a, или, как выражается Гюгонио, движение, представленное решением (5) (будем говорить кратко: движение (5)) распространяется в движении (4).

По поводу решений u_0 и u_1 уравнения (1) Гюгонио впервые отмечает важнейший факт: в точке стержня

$x = l - at$ функции u_0 и u_1, а также их частные производные первого порядка совпадают, в то время как вторые производные имеют различные значения. Другими словами, решение этого уравнения

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le x < l - at, \\ \dfrac{\alpha}{2a^2}(x + at - l)^2 & \text{при} \quad l - at < x \le l, \end{cases} \quad t \in \left[x, \frac{l}{a}\right] \qquad (6)$$

на прямой $x = l - at$ испытывает разрыв второго порядка. Гюгонио указывает, что так определенная функция $u(x,t)$ (непосредственно он ее не выписывает) может рассматриваться как "единый интеграл" уравнения (1), но считает такое рассмотрение бесполезным. Между тем из (6) непосредственно видно, что разрыв второго порядка решения уравнения (1) происходит вдоль характеристики этого уравнения (с горизонтальной проекцией $x = l - at$ в данном случае). Факт этот Гюгонио устанавливает ниже из других соображений.

Продолжим рассуждения Гюгонио. В момент $t = l/a$ положение всего стержня определяется уравнением (5). Если бы этим же уравнением определялось движение конца $x = 0$, стержень и дальше двигался бы согласно закону (5). Но так как дело обстоит иначе, или, по выражению Гюгонио, движение (5) "несовместимо" с движением конца $x = = 0$ ($u_0 = 0$), на этом конце возникает новое движение» представленное решением

$$u_2(x,t) = \frac{2\alpha x}{a^2}(at - l) \qquad (7)$$

уравнения (1), которое распространяется в движении (5) со скоростью a в направлении конца стержня $x = l$. В точке $x = at - l$, разделяющей движения (5) и (7), функции u_1, u_2 вместе с их первыми производными совпадают, а вторые производные различны. Так же, как и выше, мы можем сказать, что решение уравнения

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{2\alpha x}{a^2}(at - l), & \text{если} \quad 0 \le x < at - l, \\ \dfrac{\alpha}{2a^2}(x + at - l)^2, & \text{если} \quad at - l < x \le l, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{l}{a}, \frac{2l}{a}\right], \qquad (8)$$

терпит разрыв второго порядка на прямой $x = at - l$.

В момент $t = 2l/a$ положение всего стержня определяется уравнением (7), а на конце $x = l$ возникает новое движение, в силу несовпадения ("несовместимости") движения (7) с заданным на этом конце движением (3), и т.д.

Пусть вообще, заключает Гюгонио, движение стержня (или жидкости, или газа) определяется решением

$$u = U(x,t)$$

уравнения (2). Если на одном из концов, например $x = l$, задано граничное условие

$$u(l,t) = U(l,t),$$

то здесь не возникает никакого нового движения. Если же это не так, т.е. если движение $u = U(x,t)$ "несовместимо" с граничным условием, то новое движение возникает и распространяется в вызвавшем его. Оно зависит только от граничного условия и движения, вызвавшего это новое движение.

3. В качестве второго примера Гюгонио рассматривает движение стержня (также при нулевых начальных условиях), на обоих концах которого задано равноускоренное движение, приходя к смешанной задаче для уравнения (1) с граничными условиями

$$u(0,t) = \frac{\beta t^2}{2}, \quad u(l,t) = \frac{\alpha t^2}{2}. \qquad (9)$$

В этом случае в течение промежутка времени от $t = 0$ до $t = l/(2a)$ стержень делится на три части, каждая из которых движется согласно закону (считая от конца $x = 0$)

$$u_1 = \frac{\beta}{2a^2}(at - x)^2, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{\alpha}{2a^2}(at + x - l)^2.$$

Сечения $x = at$ и $x = l - at$, разделяющие эти движения, движутся навстречу друг другу со скоростью a. Легко и здесь видеть, что решение уравнения

$$u(x,t)=\begin{cases}u_1 & \text{при} \quad 0 \le x < at,\\ u_2 & \text{при} \quad at < x < l-at,\\ u_3 & \text{при} \quad l-at < x \le l,\end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{l}{2a}\right],$$

претерпевает разрывы второго порядка на прямых $x = at$ и $x = l - at$.

Движения u_1 и u_3 распространяются в u_2 до полного исчезновения последнего в момент $t = l/(2a)$. Начиная с этого момента и до момента $t = l/a$ в средней части стержня возникает новое движение, представленное уравнением $u_4 = u_1 + u_3$ и распространяющееся в обе стороны в движениях u_1 и u_3. В момент $t = l/a$ стержень движется только согласно закону $u = u_4$, а на концах, вследствие несовпадения краевых условий с u_4, возникают два новых движения, распространяющиеся в u_4 до полного его уничтожения в момент $t = (3l)/(2a)$ и т.д.

Таким образом, на двух простых примерах Гюгонио впервые исчерпывающим образом описывает механизм распространения движения в стержне и показывает, что решения соответствующих смешанных задач испытывают разрывы второго порядка. Распространение движения в стержне обусловлено распространением этих разрывов.

Спустя некоторое время Адамар [18:11], снова обратившись к смешанной нестационарной задаче для уравнения (1), вскрыл причину, и, вообще говоря, неизбежность возникновения разрывов (второго или более высокого порядка) решений этой задачи, в силу произвольности и независимости начальных и граничных условий.

Литература

1. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits. - Journal de l'école polyt., t. 39, cah. 57, Paris, 1887, p. 3-97.

2. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfi-ni (première Partie). - Journal de mathémat. pures et appl., (4)3, Paris, 1887, p. 477 - 492.

3. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits. - Comptes rendus...de l'Acad.d.sc.d. Paris, 101, 1885, p. 794 -796.

4. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfi-ni (première Partie). - ibid., p. 1118 - 1120.

5. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfi-ni (deuxième Partie). – ibid., p. 1229-1232.

6. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfi-ni (deuxième Partie).–Journal de mathémat.pures et appl.,(4)4, Paris, 1888, p. 153 - 167.

7. Poisson S.D. Mémoire sur le mouvement des fluide élastiques dans des tuyaux cylindriques, et sur la théorie des instrumens à vent. - Mémoires de l'Acad.d.sc.d.l'Inst.d.France, Paris, 1819, p. 305 – 402.

8. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: "Мир", 1964. - 830 с.

9. Burkhardt H. Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. - Jahresbericht d.Deutsch.Mathem.Verein, Bd. 10. Leipzig, 1908. -1440 c.

10. Duhamel J.M.C. Mémoire sur les vibrations d'un système quelcon-que de points matériels. - Journal de l'école polyt., t. 14, cah. 23, Paris, 1834, p. 1-36.

11. Duhamel J.M.C. Mémoire sur un phénomène relatif à la communi-cation des mouvements vibratoires. - Journal de mathémat.pur. appl., 8, Paris, 1843, p. 113-131.

12. Duhamel J.M.C. Mémoire sur le mouvement des différents points d'une barre cylindrique dont la température varie. - Journal de l'école po-lyt., t. 21, cah. 36, Paris, 1856, p. 1-33.

13. Phillips Ed. Solution de divers problèmes de Mécanique, dans les-quels les conditions imposées aux extrémités des corps, au lieu d'être inva-riables sont des fonctions données du temps, etc. - Journal de mathémat. pures et appl., (2)9, Paris, 1864, p. 25 - 83.

14. Saint-Venant B. de. Mémoire sur le choc longitudinal de deux bar-res élastiques de grosseurs et de matières semblables ou dirrérentes, etc. - ibid., (2)12, Paris, 1867, p. 237 - 376.

15. Hugoniot H., Sebert H. Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. – Comptes rendus...de l'Acad.d.sc.d.Paris, 95, 1882, p. 213 - 215, 278 - 281,

338 – 340.

16. Hugoniot H., Sebert H. Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques et le mouvement d'une tige portant à son extrémité une masse ad-ditionnelle. - ibid., p. 775 - 777.

17. Hugoniot H., Sebert H. Sur le choc longitudinal d'une tige élastique fixée par l'une de ses extrémités. - ibid., p. 381 - 384.

18. Hadamard J. Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodinamique. Paris, 1903. – 329 c.