УДК 517.2

К МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Косолапов Ю.Ф., Шупанова К.

Кафедра высшей математики, группа ВЭД 09 ДонНТУ

Статтю присвячено задачам про умовний екстремум функцій багатьох змінних та деяким складнощам, які постають перед студентами при їх розв'язанні.

Условный экстремум функций многих переменных не обойден вниманием в имеющейся учебно-методической литературе. Если получение необходимого условия существования экстремума основано на использовании функции Лагранжа, то по части достаточных условий имеются разные подходы. Во-первых, это использование дифференциала второго порядка функции Лагранжа с учетом наложенных связей [1, 2, 3, 4]. Во-вторых, - применение главных (диагональных) миноров значения матрицы Гессе в стационарной точке функции Лагранжа [4, 5, 6, 7]. Авторы статьи [4], основываясь на книге [8], сформулировали и доказали достаточное условие в общем случае. В [6, 7] формулируется и применяется несколько иная форма достаточного условия. В [5] рассматривается только случай простейшей задачи на условный экстремум. Наконец, несомненный интерес представляют подходы к проблеме условного экстремума, основанные на учете определенной специфики наложенных связей.

Если с теоретической точки зрения многое в вопросах условного экстремума можно считать достаточно выясненным, то в области методики остается немало достаточно тонких моментов. На некоторые из них мы хотели бы обратить внимание. В качестве примера того, почему это может оказаться полезным, отметим, что в книге [5, стр.50] достаточное условие сформулировано только для одного случая и нет ни слова о том, что этот случай может оказаться невозможным, и как тогда студенту следует поступать.

Не останавливаясь специально на простейшей задаче условного экстремума (найти екстремум функции *двух* переменных при наличии *одного* условия, заданного с помощью функции также двух переменных), начнем сразу с общей задачи:

Найти экстремум функции n переменных

$$u = f(x), \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

при условии что переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ связаны следующими k уравнениями (условиями, ограничениями, связями):

$$\varphi_j(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad j = \overline{1,k}, \quad k < n. \qquad \textbf{(*)}$$

Функция Лагранжа задачи имеет вид

$$L = L(\lambda, x) = L(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, x_1, x_2, ..., x_n) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_k\varphi_k .$$

Теорема 1 (необходимое условие существования условного экстремума). Если функция $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ достигает условного экстремума в точке $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, то ее координаты удовлетворяют системе уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, x_1, x_2, ..., x_n$

$$\begin{cases} L'_{x_i} = 0, i = \overline{1,n}; \\ \varphi_j = 0, j = \overline{1,k}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} L'_{x_i} = 0, i = \overline{1,n}; \\ L'_{\lambda_j} = 0, j = \overline{1,k}, \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Каждое решение

$$(\lambda_o, x_0) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, ..., \lambda_{k0}, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$$

системы (1) называется стационарной точкой функции Лагранжа.

Пусть $(\lambda_o, x_0) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, ..., \lambda_{k0}, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ - стационарная точка функции Лагранжа. Чтобы сформулировать достаточное условие существования условного экстремума в соответствующей геометрической точке $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_n)$ введем две матрицы:

1. Матрицу частных производных функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$:

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i} \right), i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,k} , \qquad \textbf{(2)}$$

размера $k \times n.$ Предполагается, что значение матрицы (2) в точке x_0 имеет ранг k , т.е. содержит по крайней мере один ненулевой минор k-го порядка. Мы остановимся на случае, когда отличным от нуля является следующий минор (якобиан):

$$\frac{D(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), ..., \varphi_k(x_0))}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}. \qquad \textbf{(3)}$$

2. Матрицу Гессе для функции Лагранжа

$$(L,\lambda,x)=H(L,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k,x_1,x_2,...,x_n)=$$

$$=\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1}\ L''_{\lambda_1\lambda_2}\ ...\ L''_{\lambda_1\lambda_k}\ L''_{\lambda_1 x_1}\ ...\ L''_{\lambda_1 x_n} \\ L''_{\lambda_2\lambda_1}\ L''_{\lambda_2\lambda_2}\ ...\ L''_{\lambda_2\lambda_k}\ L''_{\lambda_2 x_1}\ ...\ L''_{\lambda_2 x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L''_{\lambda_k\lambda_1}\ L''_{\lambda_k\lambda_2}\ ...\ L''_{\lambda_k\lambda_k}\ L''_{\lambda_k x_1}\ ...\ L''_{\lambda_k x_n} \\ L''_{x_1\lambda_1}\ L''_{x_1\lambda_2}\ ...\ L''_{x_1\lambda_k}\ L_{x_1 x_1}\ ...\ L''_{x_1 x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L''_{x_n\lambda_1}\ L''_{x_n\lambda_2}\ ...\ L''_{x_n\lambda_k}\ L''_{x_n x_1}\ ...\ L''_{\lambda_1 x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\ \ ...\ \ 0\ \ L''_{\lambda_1 x_1}\ ...\ L''_{\lambda_1 x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ \ ...\ \ 0\ \ L''_{\lambda_k x_1}\ ...\ L''_{\lambda_k x_n} \\ L''_{x_1\lambda_1}\ ...\ L''_{x_1\lambda_k}\ \ L''_{x_1 x_1}\ ...\ L''_{x_1 x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ L''_{x_n\lambda_1}...\ L''_{x_n\lambda_k}\ L''_{x_n x_1}\ ...\ L''_{x_n x_n} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(4)}$$

Первые k ее главных миноров равны нулю:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_k = 0$$

Теорема 2 (достаточное условие существования условного экстремума). Пусть для стационарной точки (λ_o, x_0) функции Лагранжа:

1. Якобиан (3) отличен от нуля.
2. $\Delta_i\ (i > k)$ - первый ненулевой главный минор значения $H(L,\lambda_0,x_0)$ матрицы Гессе (4) в стационарной точке
3. Знак этого минора $sign\Delta_i = sign(-1)^k$, где, напоминаем, k – количество условий (*)

Тогда:

а) если все следующие главные миноры $\Delta_j, i+1 \le j \le n$, имеют тот же самый знак:

$$sign\Delta_i = sign(-1)^k \ \ \forall j\ \ , i+1 \le j \le n\ ,$$

то геометрическая точка $x_0 = (x_{10}, x_{20},...,x_n)$ является точкой условного минимума;

б) если знаки главных миноров $\Delta_i, \Delta_{i+1}, \Delta_{i+2},...,\Delta_n$ чередуются

$$sign\Delta_i = (-1)^k, sign\Delta_{i+1} = (-1)^{k+1}, sign\Delta_{i+2} = (-1)^{k+2},...,$$

то точка $x_0 = (x_{10}, x_{20},...,x_n)$ является точкой условного максимума;

в) если хотя бы один из главных миноров $\Delta_j, i+1 \le j \le n$, равен нулю, то получаем, так называемый, сомнительный случай, который для своего исследования требует более сложной теории;

г) в остальных случаях условный экстремум не достигается.

Пример. Найти условный экстремум функции $u = xyz$, при двух условиях:

$$x + y + z = 5 \quad (\varphi_1(x, y, z) = x + y + z - 5)$$
$$xy + yz + zx = 8 \quad (\varphi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8)$$

Первый шаг. Введение функции Лагранжа и нахождение ее стационарных точек.

Функция Лагранжа:

$$L = L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8)$$

Ее частные производные первого порядка:

$$L'_{\lambda_1} = \varphi_1 = x + y + z - 5, L'_{\lambda_2} = \varphi_2 = xy + yz + zx - 8, L'_x = yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z),$$
$$L'_y = xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z), L'_z = xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y)$$

Необходимое условие существования условного экстремума дается системой уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_z = 0, \\ L'_{\lambda_1} = \varphi_1 = 0, \\ L'_{\lambda_2} = \varphi_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z) = 0, \\ xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z) = 0, \\ xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y) = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0. \end{cases}$$

Решая ее (а для этого нужно хорошо потрудиться; см., например, [6, 7]), находим стационарные точки функции Лагранжа, именно

$$P_1(4, -2, 2, 2, 1), P_2(16/9, -4/3, 4/3, 4/3, 7/3), \ P_3(4, -2, 1, 2, 2),$$
$$P_4(4, -2, 2, 1, 2), P_5(16/9, -4/3, 7/3, 4/3, 4/3), P_6(16/9, -4/3, 4/3, 7/3, 4/3),$$

и соответствующие геометрические точки

$$M_1(2, 2, 1), M_2(4/3, 4/3, 7/3),$$
$$M_3(1, 2, 2), M_4(2, 1, 2), M_5(7/3, 4/3, 4/3), M_6(4/3, 7/3, 4/3).$$

Второй шаг: исследование стационарных точек на существование условного экстремума. Вводим матрицу Гессе сначала для произвольной, а затем для исследуемых точек.

Для произвольной точки $(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z)$ имеем

$$L''_{\lambda_1\lambda_1} = L''_{\lambda_1\lambda_2} = L''_{\lambda_2\lambda_1} = L''_{\lambda_2\lambda_2} = 0; L''_{\lambda_1 x} = L''_{x\lambda_1} = L''_{\lambda_1 y} = L''_{y\lambda_1} = L''_{\lambda_1 z} = L''_{z\lambda_1} = 1; L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 0;$$
$$L''_{\lambda_2 x} = L''_{x\lambda_2} = y + z; L''_{\lambda_2 y} = L''_{y\lambda_2} = x = z; L''_{\lambda_2 z} = L''_{z\lambda_2} = x + y; L''_{xy} = L''_{yx} = z + \lambda_2;$$

$$L''_{xz} = L''_{zx} = y + \lambda_2; L''_{yz} = L''_{zy} = x + \lambda_2 ;$$

$$H(L;\lambda_1,\lambda_2,x,y,z) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1\lambda_2} & L''_{\lambda_1 x} & L''_{\lambda_1 y} & L''_{\lambda_1 z} \\ L''_{\lambda_2\lambda_1} & L''_{\lambda_2\lambda_2} & L''_{\lambda_2 x} & L''_{\lambda_2 y} & L''_{\lambda_2 z} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{x\lambda_2} & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{y\lambda_2} & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ L''_{z\lambda_1} & L''_{z\lambda_2} & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y+z & x+z & x+y \\ 1 & y+z & 0 & z+\lambda_2 & y+\lambda_2 \\ 1 & x+z & z+\lambda_2 & 0 & x+\lambda_2 \\ 1 & x+y & y+\lambda_2 & x+\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь мы можем непосредственно исследовать стационарные точки функции Лагранжа на существование в них условных экстремумов. В задаче дано два условия ($k = 2$), поэтому $(-1)^k = (-1)^2 = 1 > 0$, и для применимости Теоремы 1 мы ожидаем, прежде всего, появления положительных первых главных ненулевых миноров в значениях матрицы Гессе для стационарных точек.

Для точек

$$P_3(4;-2,1,2,2), P_4(4;-2,2,1,2)$$

получаем

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0; \Delta_4 = 1 > 0; \Delta_5 = 2 > 0 ,$$

а для точек

$$P_5(16/9,-4/3,7/3,4/3,4/3), P_6(16/9,-4/3,4/3,7/3,4/3):$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0; \Delta_4 = 1 > 0; \Delta_5 = -2 < 0 ,$$

и поэтому функция имеет в точках $M_3(1,2,2), M_4(2,1,2)$ условный минимум 4, а в точках $M_5(7/3,4/3,4/3), M_6(4/3,7/3,4/3)$ - условный максимум 112/27.

Иная картина получается для точек P_1, P_2 . Для них мы имеем

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0; \Delta_5 = 2 > 0 .$$

Мы можем говорить только о том, что условные экстремумы в этих точках достигаются, но ничего - о характере экстремумов.

Почему же точки P_1, P_2 оказались такими "плохими"? Дело в том, что для них якобиан (3) равен нулю. Поэтому мы выбираем другой ненулевой якобиан (это возможно!) и соответственно перестраиваем матрицу Гессе, а именно:

$$H_1(L;\lambda_1,\lambda_2,y,z,x)=\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1\lambda_2} & L''_{\lambda_1 y} & L''_{\lambda_1 z} & L''_{\lambda_1 x} \\ L''_{\lambda_2\lambda_1} & L''_{\lambda_2\lambda_2} & L''_{\lambda_2 y} & L''_{\lambda_2 z} & L''_{\lambda_2 x} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{y\lambda_2} & L''_{yy} & L''_{yz} & L''_{yx} \\ L''_{z\lambda_1} & L''_{z\lambda_2} & L''_{zy} & L''_{zz} & L''_{zx} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{x\lambda_2} & L''_{xy} & L''_{xz} & L''_{xx} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x+z & x+y & y+z \\ 1 & x+z & 0 & x+\lambda_2 & z+\lambda_2 \\ 1 & x+y & x+\lambda_2 & 0 & y+\lambda_2 \\ 1 & y+z & z+\lambda_2 & y+\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда для точки $P_1(4,-2,2,2,1)$ имеем

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0;\Delta_4=1>0;\Delta_5=2>0\,,$$

а для точки $P_2(16/9,-4/3,4/3,4/3,7/3)$ -

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0;\Delta_4=1>0;\Delta_5=-2<0\,.$$

Следовательно, функция имеет в точке $M_1(2{,}2{,}1)$ условный минимум 4, а в точке $M_2(4/3,4/3,7/3)$ - условный максимум 112/27.

Таким образом, данная функция достигает условного минимума, равного 4, в геометрических точках M_1, M_3, M_4 и условного максимума, равного 112/27, в точках M_2, M_5, M_6.

Скажем теперь несколько слов об ученых, чьи имена назывались выше.

Жозеф Луи́ Лагранж (1736 - 1813) – французский математик и механик итальянского происхождения. Внёс грандиозный вклад в развитие алгебры, математического анализа, математической физики, вариационного исчисления, теории чисел, теории вероятностей, теоретической механики.

Сам Наполеон, называвший Лагранжа «хеопсовой пирамидой математических наук» любил обсуждать с деликатным и ироничным

Лагранжем философские вопросы. Он пожаловал Лагранжу титул графа, должность сенатора и орден Почётного легиона.

Карл Густав Якоб Якоби (1804 - 1851) известный немецкий математик, родной брат российского академика, физика Бориса Семёновича Якоби. Внёс огромный вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики. В частности, ввел в науку функциональные определители («якобианы») и продемонстрировал их роль во многих вопросах математического анализа.

Как педагог Якоби, по общему мнению, не имел себе равных, и расцвет немецкой математической школы в конце XIX века — также и его заслуга. В отличие от многих коллег, он старался стимулировать в студентах творческие наклонности к самостоятельному мышлению.

Несколько подробней поговорим еще об одном из вышеупоминавшихся математиков. Гессе Людвиг Отто (1811 - 1874) - немецкий математик, член Баварской АН (с 1868). Окончил Кенигсбергский университет (1837). В 1840-1856 гг. - профессор Кенигсбергского университета, в 1856-1869 гг. - университетов в Галле и Гейдельберге, в 1869-1874 гг. - в Мюнхенском политехникуме. Известен своими работами по математическому анализу, аналитической, проективной и дифференциальной геометриям, линейной алгебре, вариационному исчислению, теории алгебраических функций областям. Ввел в 1844 г. понятие гессиана - функционального определителя, элементы которого - вторые частные производные двукратно дифференцируемой функции n переменных. Развил теорию инвариантов и детерминантов. Занимался геометрической интерпретацией алгебраических преобразований, дал одну из интерпретаций неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевского.

Завершая, скажем, что мы использовали достаточное условие условного экстремума в терминах матрицы Гессе. В другой статье мы расширим затронутый материал с точек зрения как набора задач, так и различных форм достаточного условия существования, в том числе их сравнительного анализа.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1/ – М.: Наука, 1969. – 608 с.

2. Немыцкий В.В., Слуцкая М.И., Черкасов А.Н. Курс математического анализа. Том 2/ – М.: ГТТИ, 1957. – 499 с.

3. Гребенча М.К., Новоселов С.И. Курс математического анализа. Часть 2/ – М.: Высшая школа, 1961. – 560 с.

4. Беловодский В.Н., Беловодский А.В. Заметки о методе множителей Лагранжа. – Збірник науково-методичних робіт. – Вип.1/ – Донецьк: ДонНТУ, 2003. – с. 53-66.

5. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики. Том 2/- М.: Высшая школа, 1973. – 400 с.

6. Kosolapov J. Introduction in mathematical analysis. Differential calculus/ – Донецк: РВА ДонНТУ, 2006. – 169 с.

7. Косолапов Ю.Ф. Математичний аналіз першого курсу. Електронний навчальний посібник для студентів ДонНТУ/ - Донецьк: РВА ДонНТУ, 2009. – 458 с.

8. Кузьмин П.А. Малые колебания и устойчивость движения/ – М.: Наука, 1973. – 208 с.