УДК 517.1, 517.2

Косолапов Ю.Ф., Шейка Е. (ДонНТУ)

О параллельном изложении функций одной и многих переменных

Стаття присвячена методиці вивчення розділів "Вступ до аналізу" і "Диференціальне числення" втузівського курсу вищої математики, коли низка питань теорії функцій однієї і багатьох змінних розглядається паралельно.

Вопрос о параллельном изучении отдельных тем программы высшей математики для втузов не нов. Известны схемы параллельного рассмотрения всех типов интегралов по фигуре (по мере). Так, в известном учебном пособии А.Д. Мышкиса параллельно рассматриваются кратные интегралы. В другом пособии, принадлежащем московскому профессору С. Я. Хавинсону [1] параллельно вводятся и изучаются уже все типы интегралов по фигуре (определенный, двойной, тройной). В течение ряда лет все типы интегралов по фигуре параллельно изучались в одном из потоков механического факультета нашего университета [2]. Известны методические идеи, в соответствии с которыми в программу по математике можно в качестве самостоятельной темы не вводить "Ряды", а отдельные вопросы теории рядов рассматривать параллельно с другими темами. Например, понятие сходящегося и расходящегося рядов можно ввести уже при рассмотрении предела числовой последовательности.

В основе попыток параллельного изучения отдельных тем программы по математике лежит ряд соображений. Во-первых, подобная методика позволяет организовать учебный материал более крупными блоками, увидеть определенное единство в вопросах, рассматривавшихся ранее изолированно в различных частях курса. С другой стороны, более компактное изложение лекционного материала позволяет больше времени выделить на упражнения. Немаловажным обстоятельством является также всемерное сокращение времени, выделяемого современными учебными планами на лекционный и, к сожалению, не только лекционный материал по математике.

Цель настоящей статьи – проследить возможность параллельного рассмотрения теорий функций одной и нескольких переменных при изучении ряда вопросов двух тем - "Введение в математический анализ" и "Дифференциальное исчисление".

1. Изучение математического анализа во втузе начинается, как правило, с введения основных понятий теории множеств, повторения сведений об известных еще из средней школы множествах всех натуральных, целых, рациональных, иррациональных, вещественных чисел. Новым элементом здесь служит понятие о взаимно однозначном соответствии между множествами всех вещественных чисел и всех точек числовой (координатной) оси. В силу такого соответствия мы обычно отождествляем произвольное вещественное число и соответствующую ему точку числовой оси и называем его просто точкой. Можно назвать эту точку одномерной, а множество всех вещественных чисел – одномерным пространством $\boldsymbol{R}$ (или $\boldsymbol{R}^1$).

Продолжая, мы здесь же вводим понятия о двумерной и трехмерной точках, их изображении точками плоскости xOy и пространства $Oxyz$, а затем определяем двумерное и трехмерное пространства $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ как соответственно множества всех двумерных и трехмерных точек. Продолжая обобщение, мы определяем n - мерную точку

$$x=\left(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n\right)$$

и n - мерное пространство $\boldsymbol{R}^n$ как множество всех n - мерных точек.

С целью удобного формулирования некоторых последующих определений мы обозначаем двумерную и трехмерную точки соответственно $x=\left(x_1, x_2\right)$ и $x=\left(x_1, x_2, x_3\right)$ и говорим не о плоскости xOy, а о плоскости x_1Ox_2, не о пространстве $Oxyz$, а о пространстве $Ox_1x_2x_3$. Отметим, что у нас уже появился символ x для обозначения точки пространства любой размерности.

Мы подчеркиваем, что если рассмотрение пространств $\boldsymbol{R}^1$, $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ опирается на геометрические представления, то пространство $\boldsymbol{R}^n$ при $n>3$ следует рассматривать как сугубо абстрактное понятие. Такая абстракция оказывается для математики чрезвычайно полезной.

Чтобы сделать понятие n - мерного пространства чуть более близким для студентов, можно ввести здесь формулу расстояния между двумя n - мерными точками $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\rho(x, y)=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2+\ldots+\left(x_n-y_n\right)^2}\ ,$$

полностью аналогичную известным формулам для $n=2, 3$. В потоках, где рассматриваются n - мерные векторы и соответствующие евклидовы пространства, можно, исходя из неравенства Коши-Буняковского, доказать даже неравенство треугольника

$$\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

для произвольных точек x, y, z n-мерного пространства $\boldsymbol{R^n}$.

2. Рассматривая понятия окрестности, ε - окрестности, проколотой окрестности одномерной точки, мы тут же даем соответствующие обобщения. Для этого вводим в рассмотрение понятие области (ограничиваясь для простоты 2-мерным случаем). Окрестностью точки любой размерности мы можем назвать теперь произвольную область, содержащую эту точку. Так же просто определяется и проколотая окрестность точки. Под ε-окрестностью n-мерной точки мы понимаем n-мерный шар (круг при $n = 2$) радиуса ε с центром в этой точке, вполне сознательно опуская вопрос о существовании кубической (квадратной при $n = 2$) ε - окрестности точки и о взаимоотношении между кубическими и шаровыми окрестностями.

3. С точки зрения параллельного изложения представляет интерес введение понятия функции одной и нескольких переменных. Функцией (а именно числовой функцией) f с областью определения $D(f)$ и множеством значений $E(f)$ мы называем правило, по которому каждому элементу x из $D(f)$ ставится в соответствие вполне определенное число y из $E(f)$.

В случаях $E(f) \subseteq \boldsymbol{R^1}$, $E(f) \subseteq \boldsymbol{R^2}$, $E(f) \subseteq \boldsymbol{R^3}, \ldots,$ $E(f) \subseteq \boldsymbol{R^n}$ получаем соответственно функцию одной, двух, трех, …, n переменных, которые обозначаем

$$y = f(x),\ y = f(x) = f(x_1, x_2),\ y = f(x) = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Таким образом, мы сразу даем общее определение функции произвольного количества переменных с общим элементом обозначения во всех случаях, именно $y = f(x)$. Этот факт оказывается весьма удобным при последующем изложении.

Традиционный разговор о способах задания функции одной переменной дополняется указанием на геометрическое представление функции двух переменных поверхностью и линиями уровня, а функции трех переменных – поверхностями уровня.

4. Предел функции одной переменной чаще всего определяется во втузе на языке $\varepsilon - \delta$. Для случая функции нескольких переменных основная часть обобщенного определения могла бы звучать, например, так: … для всех точек x из области определения функции $f(x)$, расстояние которых от "предельной" точки x_0 меньше δ, выполняется неравенство … . Мы в своем изложении прибегаем к несколько иной методике, следуя линии известного учебника харьковских математиков М.К. Гребенчи и С.И. Новоселова [3] и беря за основу понятия окрестности (и, добавим от себя, проколотой окрестности) точки. Тогда определение предела функции как одной, так и нескольких переменных звучит совершенно одинаково. Именно, число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти такую окрестность U_{x_0} точки x_0, что для всех x из области определения функции, лежащих в проколотой окрестности U'_{x_0}, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

В определении подразумевается, и это нужно четко подчеркнуть, что точка x должна иметь возможность приближаться к x_0 по любому пути, лежащему в области определения функции и соединяющему точки x и x_0. В случае функции одной переменной это обстоятельство приводит к концепции существования и равенства правого и левого пределов функции в точке x_0. Для функции, например, двух переменных можно просто привести пример, когда приближение произвольной точки x к "предельной" x_0 по двум разным траекториям дает разные результаты, что свидетельствует об отсутствии предела в точке x_0.

Исходя из приведенного определения предела, справедливого для функции любого количества переменных, мы можем доказывать свойства пределов сразу для общего случая (единственность предела, ограниченность функции, имеющей предел, предельный переход в неравенствах, включая "теорему о двух милиционерах", связь между существованием предела в точке и бесконечно малой в этой же точке, свойства бесконечно малых и бесконечно больших и соотношение между ними и пр.). Конечно, в эту схему не укладывается теорема о сходимости монотонной ограниченной числовой последовательности, но ее и формулировать нужно отдельно.

5. Хорошо вписывается в методику параллельного изложения и понятие непрерывности функции. Например, мы называем функцию $y = f(x)$ (одной или нескольких переменных) непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и имеет в точке x_0 предел, равный значению функции в этой точке. Так же просто определяется непрерывность функции на множестве. Приращению аргумента и функции в случае $n = 1$ соответствует при $n > 1$ n-мерное приращение $\Delta x = (x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}, ..., x_n - x_{n0})$ аргумента и полное приращение функции. Полностью сохраняется при любом n соотношение между непрерывностью функции и приращениями аргумента и функции. После рассмотрения этих общих положений можно остановиться на особенностях функций одной переменной: привести примеры непрерывных функций, уточнить определение функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, дать классификацию точек разрыва и пр. Теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций, непрерывности сложной функции формулируются (и могут быть доказаны) для любого числа переменных, а теоремы о непрерывности обратной функции, основных элементарных и элементарных функций – для функций одной переменной. Полезно привести пример функции двух переменных с целой линией (а не одной точкой) разрыва. Теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши (и следствие из нее) формулируются для $n = 1$ и одновременно для $n > 1$ (с заменой отрезка замкнутой ограниченной областью). Наконец, после напоминания сути (и обоснования!) метода интервалов можно дать аналог метода для случая функции двух переменных.

6. Остановимся на некоторых аспектах параллельного изучения материала в разделе "Дифференциальное исчисление". Прежде всего, изложив стандартные сведения о производной функции одной переменной (вводные задачи, определение производной, ее различные смыслы, в том числе геометрический, и пр.) мы уже здесь говорим, что для функций нескольких переменных также рассматриваются производные, но по каждой переменной отдельно, так называемые частные про-

изводные. При нахождении частной производной по одной переменной остальные считаются зафиксированными (проще сказать - постоянными). Можно также рассмотреть частные приращения функции нескольких переменных и пределы этих приращений.

Понятие дифференцируемости функции мы рассматриваем в следующем порядке. Сначала выводим формулу для приращения функции одной переменной, которая обладает производной. После этого записываем известную формулу для полного приращения функции нескольких (для простоты – двух) переменных, определяем понятие дифференцируемости и формулируем его достаточное условие (все это - пока без доказательства). После этого связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции устанавливается для любого количества переменных. Контрпример достаточно привести для функции одной переменной.

Получив известные формулы для производной суммы, разности, произведения и частного функций одной переменной и приведя соответствующие примеры, мы здесь же предлагаем студентам найти частные производные простой функции двух переменных, например

$$z = 5 \cdot e^{x} \sin x \cdot \arctan y \cdot \ln y - 3 \cdot \frac{x^{7} \arcsin y}{5^{y} \cos x}.$$

Формулу дифференцирования сложной функции одной переменной мы выводим с помощью формулы для приращения функции. После этого говорим, что тем же методом можно доказывать аналогичные формулы для функций любого количества переменных и записываем одну-две формулы. Переходя к примерам, после дифференцирования достаточно простых функций одной переменной предлагаем найти частные производные функции двух переменных, например

$$z = 5 \cdot \frac{2^{x \cot 2y}}{\left(y \arcsin 3x\right)^{3}} - 9 \cdot e^{x \cos 4x \cdot \operatorname{arccot} 2y} \cdot \ln 4y$$

(пока с одним промежуточным аргументом).

Работая над техникой дифференцирования, мы все время имеем в виду функции как одной, так и двух переменных. Так, степенно-показательную функцию

$$y = \left(\varphi(x)\right)^{\phi(x)}$$

мы дифференцируем двумя способами – предварительным логарифмированием (без запоминания окончательного результата!) и с применением формулы дифференцирования сложной функции

$$u = \varphi(x),\ v = \phi(x),\ y = u^v,\ y'_x = y'_u u'_x + y'_v v'_x\ .$$

Неявную функцию одной переменной, определенную уравнением вида

$$F(x, y) = 0\ ,$$

мы дифференцируем как с помощью общей формулы (которая легко обобщается на случай, например, неявной функции двух переменных, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$), так и путем прямого дифференцирования равенства по x (в предположении, что y является функцией от x).

Продолжая работать над техникой дифференцирования, мы постепенно усложняем задания, например, предлагаем найти частные производные

$$z = (\cos u)^{\ln v}, \quad \text{где } u = x^3 + 3y^2, v = \sqrt{x^3 y}$$

(применяя данную ранее формулу) или производную

$$u = \left(\sin^3 4t \cdot \sqrt[3]{\arctan 5t}\right)^{\ln^2 8t}\ .$$

В последнем примере подразумевается такая цепочка действий:

$$x = \sin^3 4t,\ y = \sqrt[3]{\arctan 5t},\ z = \ln^2 8t,\ u = (xy)^z,\ u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t\ .$$

Рассмотрев вопрос о дифференциале первого и высших порядков функции одной переменной, мы считаем возможным дать сразу после этого понятие о дифференциалах функций нескольких переменных.

Найдя дифференциал второго порядка функции нескольких переменных, мы можем заметить, что он представляет собой квадратичную форму и представить ее в матричной форме с использованием известной матрицы Гессе. Это обстоятельство можно будет использовать позже - при изложении достаточного условия существования локального экстремума функции нескольких переменных.

После изучения теоремы Лагранжа для дифференцируемой функции одной переменной мы можем вернуться назад и доказать вышеупомянутую формулу для полного приращения функции нескольких переменны.

Отметим, что изложенная студентам процедура дифференцирования сложной функции нескольких переменных позволяет полностью решить вопрос об определении и нахождении производной функции двух или трех переменных по заданному направлению. Другими словами, данный вопрос можно рассмотреть раньше, чем это делается при традиционном изложении материала.

Наконец, получив формулу Тейлора для функции одной переменной с использованием дифференциалов, мы можем записать соответствующую формулу для случая функции нескольких переменных и позже использовать ее в теории локального экстремума.

На этом возможности параллельного изучения функций одной и нескольких переменных исчерпываются, и мы переходим к раздельному исследованию функций одной переменной и построению их графиков и к теории экстремума функций нескольких переменных.

7. Изложенная в самых общих чертах методика параллельного изучения функций одной и нескольких переменных вызывает массу вопросов. На какой контингент студентов она рассчитана? Возможна ли она вообще в практике втуза? Имеется ли опыт работы по такой методике и каковы его результаты? Каким должно быть методическое обеспечение такой формы работы?

Один из авторов имел счастье несколько лет работать со студентами, для которых изложенные выше идеи не были чем-либо недоступным, и получал вполне удовлетворительные результаты. К сожалению, множество таких студентов с каждым годом стремительно сокращается, хотя пока, к счастью, еще далеко не является пустым.

Однако перед преподавателями возникает немало трудных, хотя и очень интересных методических задач. С одной стороны, лектор должен стремиться к значительному повышению насыщенности своих лекций, в том числе и иллюстративным материалом. С другой стороны, ассистент должен работать в теснейшей взаимосвязи с лектором, не уклоняясь от предложенной им методики, а максимальным образом иллюстрируя ее тщательно подобранными, но несложными упражнениями.

Изложенная форма работы требует подготовки соответствующих заданий для самостоятельной работы студентов. И такие задания уже практически готовы и к началу учебного года будут предложены студентам. Сделаны они на базе имеющегося на кафедре богатейшего методического материала с некоторыми изменениями, сделанными на основании собственного опыта работы со студентами и с включением заданий по функциям нескольких переменных.

В соответствии с изложенной методикой на кафедре подготовлено методическое пособие [4], которое имеется (в электронном виде) в библиотеке ДонНТУ и доступно студентам также через Internet.

Мы благодарны коллегам за то внимание, с которым они, как мы надеемся, отнесутся к изложенным здесь методическим соображениям.

Литература

1. Хавинсон С.Я. Лекции по интегральному исчислению.- М.: Высшая школа, 1976. - 198 с.

2. Косолапов Ю.Ф. З досвіду паралельного вивчення усіх видів інтеграла по фігурі (по мірі). – Сучасні проблеми підготовки інженерних кадрів.- Матеріали науково-методичної конференції, 18-20 травня 1993. – Запоріжжя, запорізький машинобудівельний інститут, 1993.- с.96.

3. Гребенча М.К., Новоселов С.И. Курс математического анализа. Том 1. – М.: Высшая школа, 1960. – 543 с.

4. Косолапов Ю.Ф. Математичний аналіз першого семестру. – Донецьк: РВА ДонНТУ, 2009. – 458 с.