

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Донецький національний технічний університет

Кафедра "Вища математика"

Збірник науково-методичних робіт

Випуск 7

Донецьк -2011

УДК 5:371.214.114, 621.923, 517.95(09), 531.18, 915.77.54, 531.38, 517.9,
517, 518, 531, 517.8, 539.5, 517.926.

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного технічного
університету
Протокол № 5 від 20.05.2011 р.

Збірник науково-методичних робіт. - Вип. 7. - Донецьк: ДонНТУ, 2011. –353 с.

В збірнику представлено деякі проблеми та аспекти викладання вищої математики у технічному вузі, також різні напрямки застосування математичних методів до розв'язання інженерних задач, а саме, задач механіки твердого тіла, фізики магнітних явищ, статистичної фізики та інших.

Науково-методичні роботи є узагальненням досвіду викладачів кафедри по удосконалюванню математичної підготовки спеціалістів.

Видання розраховано на широке коло наукових робітників, а також аспірантів та студентів старших курсів технічних університетів.

Редакційна колегія: проф. Улітін Г.М. - редактор, проф. Петренко О.Д., проф. Лесіна М.Ю, проф. Косолапов Ю.Ф., проф. Скафа О.І., доц. Евсеєва О.Г. ,
ст. викл. Локтионов И.К.

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96,
ДонНТУ, 3-й учбовий корпус, кафедра "Вища математика", тел. (062) 3010901.

© Донецький Національний технічний університет, 2011 р.

Миرونенко Л.П., Рубцова О.А., Бреус С.
Донецкий национальный технический университет

Розглянуто єдиний підхід до методів зворотної матриці та правила Крамера розв'язання системи лінійних рівнянь. Використовуючи тензорні позначки обидва методи можуть бути розглянуті у єдиний спосіб, що значно скорочує час для отримання бажаного результату. Підхід дозволяє вести розрахунки у стислих формах запису, замість розгорнутих виразів матриць і операцій над матричними рівняннями. Важливим результатом є отримання формул Крамера як слідство метода зворотної матриці, що означає рівноправність обох методів.

При выводе явного вида обратной матрицы обычно привлекается понятие присоединенной (союзной) матрицы $\tilde{A} = (A_{ji})$, которая получается из исходной $A = (a_{ij})$, заменой ее элементов a_{ij} алгебраическими дополнениями A_{ij} с последующим транспонированием [1-3]. Далее вычисляется произведение $A\tilde{A} = \tilde{A}A = E \cdot \det A$, из которого устанавливается явный вид обратной матрицы.

При выводе формул Крамера обычно используется следующий прием. Каждое уравнение квадратной системы линейных уравнений умножается на алгебраические дополнения элементов j -го столбца основной матрицы системы и производится суммирование левой и правой частей уравнений соответственно. После этого применяются свойства определителей, которые приводят к вспомогательным определителям и формулам Крамера [1-3].

В нашем подходе обратная матрица вводится с помощью рассуждений подобных выводу формул Крамера, а сами формулы Крамера следуют непосредственно из метода обратной матрицы.

Таким образом, метод обратной матрицы и правило Крамера можно сформулировать из некоторых общих позиций для обоих методов.

1. Определение обратной матрицы и ее явный вид

Рассмотрим невырожденную матрицу n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det A \neq 0. \quad (1)$$

Определим обратную матрицу равенством

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \quad (2)$$

Применяя к данному равенству теорему умножения определителей

$$\det AB = \det A \cdot \det B,$$

убедимся в том, что, если матрица A невырожденная, то и обратная матрица является невырожденной

$$\det AA^{-1} = \det E \rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0.$$

Запишем равенство (2) согласно правилу умножения матриц через матричные элементы, обозначив элементы обратной матрицы $(A^{-1})_{kj}$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} (A^{-1})_{kj} = \delta_{ij}, \quad (3)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера.

Умножим обе части равенства на алгебраические дополнения A_{im} и суммируем по i

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} (A^{-1})_{kj} A_{im} = \sum_{k=1}^n \delta_{ij} A_{im}$$

В правой части равенства за счет δ -символа Кронекера остается из всей суммы только член A_{jm} . В левой части равенства воспользуемся известным равенством

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} A_{im} = \Delta \delta_{km}, \quad \Delta = \det A \text{ [3-5].}$$

В результате получим равенство

$$\Delta \sum_{k=1}^n \delta_{km} (A^{-1})_{kj} = A_{jm}.$$

В сумме остается только слагаемое с индексом $k = m$, т.е. $(A^{-1})_{mj}$. В результате получим явное выражение для обратной матрицы

$$(A^{-1})_{mj} = \frac{A_{jm}}{\Delta}, \quad (4)$$

или более подробно

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Как видно, обратная матрица получается заменой элементов исходной матрицы на соответствующие алгебраические дополнения с последующим транспонированием и делением каждого элемента на детерминант основной матрицы.

2. Метод обратной матрицы

Рассмотрим квадратную систему n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (6)$$

с невырожденной основной матрицей A .

Введя матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

Запишем систему (6) в виде матричного уравнения

$$AX = B. \quad (7)$$

Умножим это уравнение слева на обратную матрицу и используем определение обратной матрицы (2), получим решение уравнения (7)

$$X = A^{-1}B. \quad (8)$$

В развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Отсюда ясно видно требование условия $\det A \neq 0$.

На этом этапе метод обратной матрицы завершен. Остается подставить в равенство (9) конкретные значения входящих в равенство величин.

Однако изложение только начинается для вывода правила Крамера.

3. Правило Крамера как следствие метода обратной матрицы

Вернемся к квадратной системе n линейных уравнений с невырожденной основной матрицей A . Перемножим матрицы в равенстве (9)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \dots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим j -ю строку данной матрицы Δ_j , $j = 1, 2, \dots, n$ и заметим, что каждая из величин представляет собой разложение определителя основной матрицы A системы по элементам j -го столбца, у которого вместо j -столбца матрицы A стоит столбец свободных членов

$$b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_j.$$

Величины Δ_j называются вспомогательными определителями системы (6).

В результате получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 / \Delta \\ \Delta_2 / \Delta \\ \dots \\ \Delta_n / \Delta \end{pmatrix}$$

или, хорошо известные формулы Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Заключение

Предложенный подход к изучению обратной матрицы и правила Крамера является оригинальным и значительно упрощает общепринятый вывод формул как для обратной матрицы, так и формул Крамера. Следует отметить, что появление вспомогательных определителей метода является естественным и происходит из произведения обратной матрицы и матрицы свободных членов. Удалось объединить оба метода – метод обратной матрицы и правило Крамера, что значительно сокращает лекционное время изложения, чем упрощает понимание методов с точки зрения их возможностей и ограничений.

Как видно из изложения, можно провести рассуждения в обратном порядке, исходя из формул Крамера (11). Тем самым будет доказана эквивалентность методов в рамках сформулированных для обоих методов требований.

Литература

1. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра - М.: Наука, 1999, 296 с.
2. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol 1. – John Wilay and Sons, Inc., 1966, 667 с.
3. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра ФМЛ, 2003 - 157 с.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры - М.: Наука, 1979, 512 с.
5. Мироненко Л.П. Соглашение о суммировании в линейной алгебре. - Сб. Науково-методичних робіт - Донецьк: ДонНТУ. 2009, вип. 6, с. 85-92.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Улитин Г.М., Лесина М.Е., Косолапов Ю.Ф. История кафедры высшей математики им. В.В.Пака	3
2. Азарова Н.В., Азарова А.Э. Применение симплексного метода для решения оптимизационных задач строительства и архитектуры	13
3. Азарова Н.В., Маленко А.Н. Применение непараметрической статистики к исследованию рабочей поверхности шлифовального круга	18
4. Азарова Н.В., Маленко Андреас. Применение методов линейного программирования для оптимизации севооборотов.....	24
5. Азарова Н.В., Муравская А.В. Применение дифференциального и интегрального исчисления к решению задач электротехники.....	29
6. Александрова О. В. Применение группового анализа к вычислению первых интегралов стохастических систем	34
7. Алексеева І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Досвід створення і використання навчально-методичних комплексів з вищої математики.....	40
8. Берьозкіна І. А. Шляхи удосконалення математичної підготовки майбутніх студентів технічних спеціальностей	46
9. Буркина Н.В. Реализация межпредметных связей как важный фактор повышения эффективности обучения математике студентов	53
10. Власенко К. В. Характеристика складових навчально-методичного комплексу з вищої математики для майбутніх інженерів	60
11. Гененко Ю.А., Лупаску Д. К. Математическое моделирование деградации в сегнетоэлектриках по механизму дрейфа заряженных дефектов в локальных деполаризационных полях	66
12. Герасимчук В.С. Професійно спрямоване викладання математики та методи його реалізації	72

13. Греб'юнкiна О. С. Дiлова гра як форма активного навчання	77
14. Гусак Л.П. Формування навичок самостiйної роботи студентiв в процесi вивчення вищої математики	84
15. Данильчук О.М. Самостiйна робота студентiв як умова їх професiйного становлення	89
16. Дем'яненко А.Г. Стан, проблеми, деякi концепцiї та заходи пiдвищення якостi iнженерної освiти в Україні	93
17. Дремов В.В., Минакова О.А. Аналитический расчет нестационарных температур в жидкой и твердой фазах металла с определением скорости движения фронта затвердевания	99
18. Євсєєва О.Г. Поетапне освоєння предметних дiй при навчаннi математики у ВТНЗ	107
19. Євсєєва О.Г., Прокопенко Н.А. Знання та вмiння з векторної алгебри, необхiднi для розв'язання задач з аналітичної геометрiї у просторi.....	114
20. Емельянова Т. В., Ярхо Т.А., Полтавская О.С., Гавриш И.П. Высшая математика в примерах и задачах для инженеров-экологов. Системы дифференциальных уравнений	121
21. Ехилевский С.Г., Гурьева Н.А., Голубева О.В. Группы и подгруппы в курсе геометрии и алгебры	129
22. Косолапов Ю.Ф. К практике условного экстремума	141
23. Косолапов Ю.Ф., Шупанова Е. К методике условного экстремума	134
24. Кухарева О.С. Програма-тест для перевiрки знань учнiв з початкiв аналізу в старшiй школі в умовах модульного навчання	148
25. Лаврик І. В., Фортуна В. В. Дослiдження залежностi цiни за квадратний метр квартир мiста Донецька вiд центру	155
26. Лебедева И.А., Гуржий Д. Доказательство числовых неравенств с помощью классических неравенств.....	160
27. Лебедева И.А., Рубцова О.А. Особенности преподавания курса высшей математики студентам технических специальностей	164
28. Левiн В.М. Математичнi спецкурси у iнженернiй освiтi	170
29. Лесина М.Е, Зиновьева Я.В. Уравнения годографов в опорном базисе для задачи о движении по инерции системы двух гироскопов Лагранжа	179
30. Локтионов И.К., Гусар Г.А., Шевченко Т.С. Применение трёхпараметрического потенциала взаимодействия в статистической модели жидкого состояния	195
31. Локтионов И.К., Шевченко Т.С. Статистическая модель металлической жидкости с двухпараметрическими осциллирующими потенциалами взаимодействия	206

32. Лукашук Т.І., Москаленко А.С., Проценко Б.В. Особливості математичної підготовки випускників технікумів у вищих навчальних закладах.....	214
33. Маевская С.И., Журба В.В., Абдулин Р.Н. Сопровождающий трёхгранный локсодромы кругового цилиндра (винтовой линии)	223
34. Малашенко В.В. Использование теории возмущений для исследования специфических особенностей скольжения винтовых дислокаций в примесных кристаллах.....	227
35. Малашенко В.В., Малашенко Т.И. Математическое моделирование процессов дислокационной динамики в наноматериалах и тонких пленках.....	233
36. Малашенко В.В., Малашенко Т.И. Применение метода функций Грина при анализе динамического взаимодействия краевых дислокаций с дислокационными петлями	238
37. Мартиненко М.А., Мартиненко В.П., Ткачук А.М. Роль фундаментальных наук в сучасній інженерній освіті України.....	242
38. Мироненко Л.П., Кайда С.В. Теорема умножения определителей и правило Крамера	247
39. Мироненко Л.П., Рубцова О.А., Бреус С. Единый подход к методу обратной матрицы и правилу Крамера.....	251
40. Николайчук Т.И., Улицкая Н.Ю. Методические аспекты изучения темы «Неопределенный интеграл» в техническом ВУЗ.....	255
41. Николайчук Т. И., Улицкая Н.Ю., Ларина А. Использование математических моделей в биологических исследованиях	261
42. Паниотов Ю.Н. Приложение операционного исчисления в математической физике	267
43. Пелашенко А.В. Решение задач управления запасами при случайном спросе.....	271
44. Перегуда Ю. М. Організація контролю результатів навчальної діяльності студентів в умовах кредитно-модульної системи навчання	275
45. Перетолчина Г. Б., Глянецв П. Пример реализации профессиональной направленности курса «Теории вероятностей и математическая статистика».....	281
46. Петренко А.Д., Петренко Е.А. Экономико-математическая модель ценовой конкуренции монополий	287
47. Петренко А.Д., Петренко Е.А. Компетентностный подход в подготовке квалифицированных специалистов.....	294
48. Пуханова Л.С. Сучасні підходи до вдосконалення системи педагогічного контролю	298

49. Румянцев Н.В. Проблемы повышения качества преподавания математики для современного инженера	304
50. Торбіна Т.В. Взаємоз'язок спеціальних і математичних дисциплін в професійній підготовці фахівців електротехнічних систем.....	308
51. Улитин Г.М. Некоторые приёмы приведения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к известным уравнениям.....	314
52. Улитин Г.М., Савин А.И. Опыт проведения вузовских олимпиад по высшей математике в ДонНТУ	319

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

1. Абдулин Р.Н. Об одном примере стабилизации движения неголономной системы	324
2. Александрова О. В., Гордеев Г. Г., Ковалев И. Н. Моделирование движения системы связанных твердых тел – носителя и носимого тела	326
3. Александрова О. В., Ковалев И.Н. О методике организации самостоятельно работы студентов на занятиях по высшей математике	327
4. Вилкова И.В. Формула Ньютона-Лейбница и одно из условий ее применимости	329
5. Гончаров А.Н. О применении рядов в теории вероятностей	331
6. Гордеев Г.Г. Алгоритмы решения диофантовых уравнений и упаковка индексов степеней полиномов	334
7. Дегтярев В.С. О применении передаточной функции при решении линейных дифференциальных уравнений операционным способом	335
8. Кононыхин Г.А. Об условия существования прецессионных движений в задачах динамики твердых тел	337
9. Мироненко Л.П., Улитин Г.М. Формула Эйлера и некоторые следствия из неё	339
10. Паниотов Ю.Н., Перетолчина Г.Б. К изложению темы выпуклость и вогнутость кривой.....	341
11. Руссиян С.А. Математическая модель одного из известных случаев в истории	343
12. Чудина Е.Ю., Деханова В.В. Игры с точки зрения теории вероятностей...	346
13. V. Kochergin, L. Neely, I.N. Krivorotov, E.V. Kochergin, K.L. Wang Плазмонное усиление сверхбыстрого оптического перемагничивания	348