УДК 534.38

О новых решениях системы Матье-Дуффинга

Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю.
Донецкий национальный технический университет,
belovodskiy@cs.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Belovodskiy V.N., Suhorukov M.I. "On new solutions of the Mathieu-Duffing system" *It is described some of new stationary solutions of the Mathieu-Duffing equation in the first principal zone of unstability. The analytic results are verified by numerical simulation.*
Key words: dynamical system, Mathieu-Duffing equation, stationary solution, numerical analysis.

Введение

Поведение нелинейных динамических систем своим многообразием постоянно привлекает внимание исследователей. Открытие сложных (суб- и супергармонических) резонансов в 30-е годы XX века [1] и последовавшее их изучение, сменилось открытием хаотических движений в 60-е годы [2] и интенсивным исследованием их проявлений во вполне детерминированных системах. Обычно, новые явления в нелинейной динамике вскрываются, а затем изучаются, на базе простых характерных моделей, — парадигм. К числу таковых относится и уравнение Матье с полиномиальной нелинейностью, — уравнение Матье-Дуффинга. Пожалуй, не будет большим преувеличением сказать, что редкий номер авторитетного журнала «Nonlinear Dynamics» обходится без публикаций, посвященных различным модификациям этого уравнения. И целью данной работы является изложение результатов исследования вопросов существования некоторых его новых решений.

Изучаемое уравнение

Ниже рассматривается уравнение вида

$$\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega_0^2(1-2\mu\cos 2\omega t)x+\delta x^3=0. \qquad (1)$$

Оно относится к классу динамических систем с гармоническим параметрическим возбуждением и кубической характеристикой восстанавливающей силы. Уравнение (1), очевидно, имеет тривиальное решение, однако при определенных соотношениях между коэффициентами возбуждения μ и сопротивления β в определенных частотных диапазонах положение покоя становится неустойчивым и происходит возбуждение параметрических резонансов. В плоскости $\mu, \frac{\omega_0}{\omega}$ зоны неустойчивости представляют собой клиновидные области. Наиболее широкая из них, главная, при $\beta=0$ примыкает к точке $\frac{\omega_0}{\omega}=1$. Одной из особенностей этих колебаний является то обстоятельство, что при $\delta=0$ их амплитуды нарастают экспоненциально и даже наличия линейного сопротивления недостаточно для их ограничения. По этой причине возбуждение параметрических колебаний в реальных конструкциях может оказаться крайне опасным для их прочности. Так, например, ряд исследователей [3] результаты знаменитой катастрофы Такомского моста в 1940 году в США объясняют именно эффектом возбуждения изгибно-крутильных параметрических колебаний в его конструкции при периодических изменениях боковой ветровой нагрузки. Однако при наличии плавной нелинейности, в данном случае $\delta \neq 0$, параметрические колебания имеют ограниченную амплитуду.

Пожалуй, с работ В.В. Болотина [4], который при анализе колебаний внутри зон неустойчивости исходил из характера этих колебаний на их границах, традиционно считается, что при главном параметрическом резонансе происходит деление частоты возбуждения в два раза и период стационарных колебаний в два раза превышает период возбуждения. И, даже, более поздние открытия хаотических движений в таких системах сохранили прежние представления для малых значений параметров системы. Однако проведенные еще в 80-е годы экспериментальные исследования показали, что это не всегда так [5]. По этим соображениям нами и была предпринята попытка комбинированного численно-аналитического исследования данного вопроса [6].

Изучаемые решения, порядок исследования, результаты

В качестве аналитических методов исследования были приняты методы усреднения и гармонического баланса и получены, по существу, идентичные результаты. Так, рассматривая колебания в главной зоне неустойчивости и ориентируясь на её середину, т.е. полагая $\omega_0^2 = 1$, $\omega = 1$, а также предполагая моногармонический характер колебаний, решение описывалось в виде

$$x_{an}(t) = A_0 + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t, \qquad (2)$$

где в случае гармонического баланса коэффициенты разложения (2) являются постоянными. Заметим, что характер предполагаемого решения отличается от традиционных представлений и его период равен периоду параметрического возбуждения. После подстановки (2) в (1) и выполнения обычных тригонометрических преобразований для определения A_0, A, B была получена система уравнений:

$$\begin{cases} A_0 - \mu A_1 + \delta\left(A_0^3 + \frac{3}{2} A_0 A_1^2 + \frac{3}{2} A_0 B_1^2\right) = 0, \\ -3 A_1 + 2\beta B_1 - 2\mu A_0 + \delta\left(3 A_0^2 A_1 + \frac{3}{4} A_1^3 + \frac{3}{4} A_1 B_1^2\right) = 0, \\ -3 B_1 - 2\beta A_1 + \delta\left(3 A_0^2 B_1 + \frac{3}{4} A_1^2 B_1 + \frac{3}{4} B_1^3\right) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Её решение проводилось в программной системе Matlab с использованием процедуры solve и при $\beta = 0{,}001$, $\mu = 0{,}3$, $\delta = 1/3$ были получены следующие решения:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm(0{,}1478 + 3{,}4556\cos 2t + 0{,}2710\sin 2t), \\ x_{3,4} &= \pm(0{,}0116 + 0{,}2703\cos 2t + 3{,}4536\sin 2t). \end{aligned} \qquad (4)$$

Апробация результатов (4) проводилась путем непосредственного численного интегрирования уравнения (1). Наличие первой пары решений подтвердилось и при численном моделировании, однако решения $x_{3,4}$ такого подтверждения не получили. Попытка объяснить данное обстоятельство неустойчивостью этой пары решений и, в силу этого, отсутствием численной наблюдаемости, своего подтверждения также не получила. Выполненный расчет мультипликаторов системы в вариациях, построенной для решений $x_{3,4}$, наоборот, показал устойчивость полученных решений, т.к. соответствующий набор мультипликаторов оказался равным $\rho_{1,2} = 0{,}8167 \pm 0{,}5759 i$, т.е. $|\rho_{1,2}| = 0{,}9987 < 1$. Напомним, что согласно теории Флоке-Ляпунова [3] именно отрицательный знак $\ln|\rho_{3,4}|$ и определяет устойчивость тривиального решения системы с периодическими коэффициентами. Таким образом, сложилось явное противоречие между численным и аналитическими результатами. Перебор процедур решения (решателей ОДУ) из имеющихся в арсенале MATLAB и варьирование их управляющих параметров указанного противоречия не разрешил.

Дополнительные гипотезы, исследования, результаты

После тщательного анализа полученных результатов удалось сформулировать, на наш взгляд, пожалуй, единственную правдоподобную гипотезу, объясняющую полученное противоречие. Она состояла в следующем: колебания типа $x_{3,4}$ всё-таки существуют, однако несмотря на практически моногармонический их характер система уравнений (3) для определения коэффициентов A_0, A_1, B_1, составленная исходя из моногармонических представлений, оказывается слишком грубой, в результате чего коэффициенты A_0, A_1, B_1 определяются недостаточно точно и, в силу этого, неадекватным оказывается уравнение в вариациях и, как следствие, — расчет его мультипликаторов.

Если это предположение справедливо, то тогда уточнения и более согласованных результатов можно ожидать при большем учете гармонических составляющих в искомых решениях. Для проверки этой гипотезы была использована комплексная форма рядов Фурье. Искомое решение в этом случае имело вид

$$x_{an}(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i 2 n t}, \qquad (5)$$

где параметр N регулирует число гармоник, учитываемых в решении. После подстановки (5) в (1), проведения очевидных преобразований и приведения подобных получаем следующую систему уравнений для определения коэффициентов c_n и c_{-n}

$$\begin{cases} \left(1 - 4N^2 - i 2\beta N\right) c_{-N} - \mu c_{-N+1} + \delta f_{-N} = 0, \\ \left(1 - 4n^2 + i 2\beta n\right) c_n - \mu c_{n-1} - \mu c_{n+1} + \delta f_n = 0, \\ \qquad n = \overline{-N+1, \quad N-1}, \\ \left(1 - 4N^2 + i 2\beta N\right) c_N - \mu c_{N-1} + \delta f_N = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

где

$$f_n = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{\substack{m=-N \\ n-k-m \in [-N;\, N]}}^{N} c_k c_m c_{n-k-m}.$$

Решение системы (6) при различных значениях N было выполнено уже при помощи системы Maple, которая, в отличие от Matlab, позволила получить весь спектр решений.

При изменении параметра N от 1 до 10 динамика в получаемых решениях оказалась следующей. Действительно, первоначально произошло существенное, до 40%, уточнение младших коэффициентов A_0, A_1, B_1 разложения и последующая их стабилизация при дальнейшем изменении N. Характер колебаний, по-прежнему, остался практически моногармоническим. Приведем для иллюстрации уточненные решения $x_{3,4}$, полученные при $N = 10$, коэффициенты разложения указаны с точностью до пяти знаков после запятой:

$$\begin{aligned} x_{an}(t) = \pm(&0{,}00884 + 0{,}19389\cos 2t + 3{,}39108\sin 2t - \\ &- 0{,}01156\cos 4t - 0{,}10594\sin 4t - \\ &- 0{,}01887\cos 6t - 0{,}10917\sin 6t + \\ &+ 0{,}00142\cos 8t + 0{,}00612\sin 8t + \\ &+ 0{,}00096\cos 10t + 0{,}00327\sin 10t - \\ &- 0{,}00010\cos 12t - 0{,}00028\sin 12t - \\ &- 0{,}00004\cos 14t - 0{,}00009\sin 14t + \\ &+ 0{,}00001\cos 16t + 0{,}00001\sin 16t). \end{aligned}$$

Достигнутые уточнения в решениях $x_{3,4}$ повлекли соответствующие уточнения и в значениях мультипликаторов. Их повторный расчет для уточненного уравнения в вариациях при $N = 10$ показал, что $\rho_1 = 1{,}3510$, $\rho_2 = 0{,}7394$. Таким образом, в силу $|\rho_1| > 1$ решения $x_{3,4}$ являются всё-таки неустойчивыми и отсутствие их численной наблюдаемости теперь становится вполне естественным.

На рис. 1 приводится одно из решений $x_{an}(t)$ (знак "+") при различных значениях N, там же, — результаты непосредственного численного интегрирования уравнения (1). Значения мультипликаторов показаны на рис. 2, где они представлены на комплексной плоскости и расположены относительно единичной окружности.

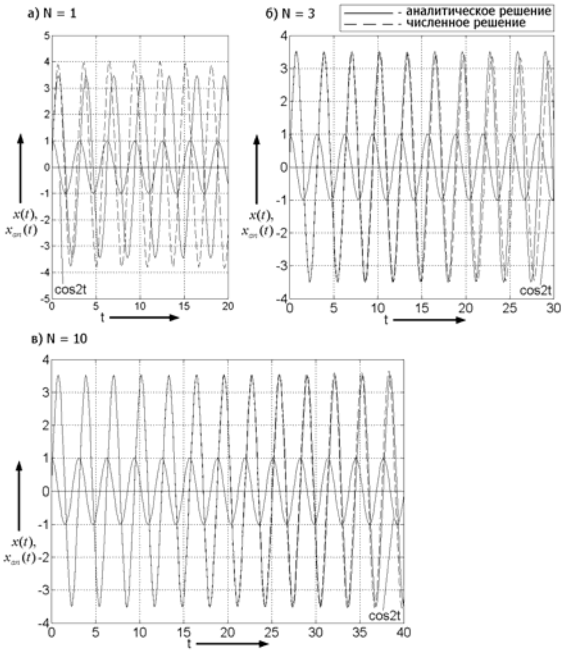

Рисунок 1. – Сравнение численного решения $x(t)$ уравнения (1) и аналитического $x_{an}(t)$ для различных значений N

Таким образом, представленные иллюстрации демонстрируют уже согласованность полученных при $N = 3$, $N = 10$ результатов. С одной стороны, они показывают постепенный уход численного решения от аналитического, с другой, — позволяют данный факт объяснить неустойчивостью этих решений.

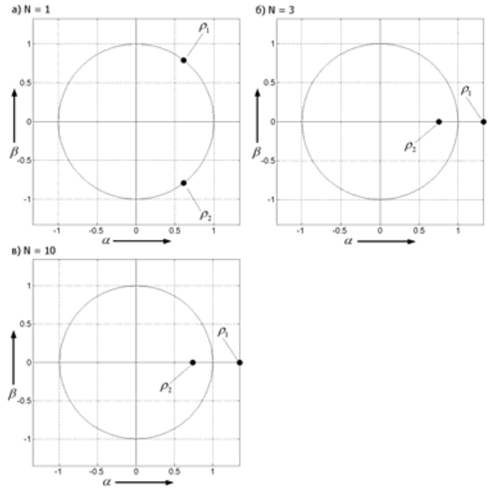

Рисунок 2. – Расчет мультипликаторов $\rho = \alpha + i\beta$

Выводы

Проведённые исследования подтверждают факт существования в системе Матье-Дуффинга в зоне главного параметрического резонанса стационарных движений с частотой равной частоте параметрического возбуждения и, на наш взгляд, демонстрируют эффективность численно-аналитического подхода к анализу нелинейных динамических систем. Это, в свою очередь, ставит задачу разработки специальных инструментальных средств, облегчающих процесс анализа. В частности, такими средствами могут быть программные модули, реализующие отдельные аналитические методы исследования. В целом, это серьезная задача, однако, по крайней мере, для систем с полиномиальными нелинейностями она представляется вполне реальной.

Литература

1. Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д. О явлениях резонанса n-го рода. – Полн. собр. трудов Мандельштама Л.И., М.: АН СССР, 1947. – Т. 2. – С. 13 – 62.
2. Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow. – J. Atmos. Sci. – 1963. – V. 20, № 2. – P. 130 – 141.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
5. Belovodsky V.N., Tsyfansky S.L., Beresnevich V.I. The Dynamics of a Vibromachine with Parametric Excitation. – Journal of Sound and Vibration (2002), 254(5). – P. 897 – 910.
6. Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю. «Нетрадиционные» решения уравнения Матье-Дуффинга: существование и устойчивость. – Труды ИПММ НАН Украины, 2007. Т. 14. – С. 8 – 13.