Математические модели устойчивого развития сложных эколого-экономических и социальных систем

Термодинамический подход и принятый метод исследования

При исследовании физических систем широко используется термодинамический подход, в основу которого положена особая форма уравнений, которые отличаются полным единообразием структуры всех входящих в состав уравнений слагаемых, относящихся к явлениям различной физической природы. Предполагается что сложная термодинамическая система – это упорядоченное множество структурно взаимосвязанных и функционально взаимодействующих макроскопических тел и полей физической природы, которые могут представлять собой целостный объект и обмениваться энергией как между собой так и с внешней средой. Под элементом подразумевается простейшая часть системы. Состояние системы – это мгновенная оценка совокупности значений, характерных для данной системы величин, называемых термодинамическими параметрами состояния системы. Переходы из одного состояния системы в другое определяют поведение системы и характеризуются процессами. Развитие термодинамического метода или аналогичных ему подходов системодинамики в других областях знаний является актуальной задачей при изучении сложных систем[].

Если принять в качестве методологии изучения сложных эколого-экономических и социальных объектов системный подход, то суть анализа будет заключаться в построении особой формы математических уравнений для описания макроскопических свойств и параметров состояний исследуемой системы на основе базовых законов сохранения или функциональных закономерностей.

С точки зрения термодинамики любую систему можно охарактеризовать с помощью использования следующих определений: пространство состояний, координаты состояния, потенциалы взаимодействия, количество степеней свободы, равновесные и неравновесные состояния, ограничительные условия и т.д. То есть изначально принимается определенная система обозначений и определений в области предмета изучения термодинамики.

Координатами состояния (x_i) являются некоторые параметры системы, чаще всего обладающие свойством адитивности. Координатами обычно являются характеристики, входящие в уравнение сохранения и превращения энергии. Считается, что для целей анализа достаточно использовать только те координаты, изменение которых возможно в конкретных условиях исследуемой системы. Если существенные координаты выбраны правильно, то заданным значениям координат соответствует только одно возможное состояние системы. Задание значений всех координат является высшей достижимой степенью определенности системы. Факт включения координаты в число «существенных» означает, что изменение ее значения возможно, поэтому считается, что каждой координате отвечает одна степень свободы, присущая системе. Число и вид степеней свободы определяются физической структурой системы. Каждому равновесному состоянию системы отвечает определенная совокупность значений координат, которые могут оставаться неизменными сколь угодно долго. В неравновесных состояниях координаты являются явно выраженными функциями от времени.

Потенциалами взаимодействия являются функции, зависящие от координат состояния

$$P_k = P_k(x_1, x_2, ..., x_n), k = 1,2,...,m \qquad (1)$$

где P_k - функция (потенциал), вид которой зависит от свойств системы; $x_1, x_2, ..., x_n$ - значения координат состояния системы; m - количество потенциалов, соответствующих состоянию системы. Равенство потенциалов системы и окружающей среды является необходимым и достаточным условием для равновесного состояния системы. Взаимодействие системы с окружающей средой возникает только при наличии разности потенциалов. Соответствующие координаты и потенциалы в виде уравнения $dE_k = P_k dx_k$ определяют конкретный вид переносимой энергии и входят в закон превращения и сохранения энергии в качестве параметров. Основное уравнение для изменения внутренней энергии (U) системы в качестве фундаментального закона через потенциалы и координаты представляется в виде

$$dU = \sum_{k=1}^{n} P_k dx_k \qquad (2)$$

Внутренняя энергия в термодинамике имеет глубокий физический и математический смысл. Следствием этого является факт того, что существует однозначная функция координат состояния, дифференциал которой равен сумме всех элементарных количеств воздействий разного рода. Если внутренняя энергия известна как функция координат состояния, т.е. определен вид зависимости $U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$, то потенциалы могут быть выражены через уравнения состояния

$$P_k = P_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)_{x_i} \qquad (3)$$

Уравнения вида (2)-(3) являются фундаментальными при построении математического аппарата термодинамики.

Переход системы из одного состояния в другое называют процессом. Смена состояний приводит к изменению значений координат и возможна при наличии разности потенциалов. Множество точек, отвечающих возможным состояниям системы, образуют некоторое пространство S_N, которое является пространством n измерений. Если отметить точки, отвечающие предельным реализуемым значениям S_N, то будет построена область фактически осуществимых состояний системы. Ограничительные условия в системе выражаются в виде уравнений $z_k=const$, где под величиной z_k понимается один из взаимно сопряженных параметров (координата или потенциал). Например, при выводе термодинамических уравнений в качестве координат часто используются объем, масса и энтропия, в качестве потенциалов – давление, химический потенциал, температура, а в качестве ограничений – постоянство координат или потенциалов, что характерно для определенных процессов (изохорного, изобарного, изотермического, адиабатного и т.д.). Для различных процессов могут вводиться эмпирические уравнения состояния, связывающие координаты и потенциалы (закон Бойля-Мариотта, Менделеева-Клапейрона и т.д.), вида

$$F(z_1, z_2, ..., z_k) = const \tag{4}$$

Такие ограничительные условия имеют важное значение, так как могут накладывать на систему функциональные связи и закономерности, являющиеся эмпирическим результатом экспериментальных исследований.

Важной составляющей аппарата термодинамики являются статистические методы, при использовании которых для определения различных параметров системы накладываются связи и ограничения на различные вероятностные характеристики системы. В частности, в термодинамике принято, что число микросостояний отвечающих некоторому макросостоянию постулируется и все переходы из одного микросостояния в другое равновероятны.

Базовым понятием в статистической термодинамике является термодинамическая вероятность – число микросостояний, реализующих данное макросостояние. Существуют несколько методов определения количества микросостояний (термодинамической вероятности).

При исследовании комбинаторной статистики (метод Больцмана, Бозе-Энштейна и Ферми-Дирака) при подсчете микросостояний пользуются законами теории вероятности. Например, по методу Больцмана, если в системе N элементов, то число всех возможных перестановок как внутри групп элементов, так и между группами по теории сочетаний равно $N!$. Для определения термодинамической вероятности необходимо исключить все перестановки, которые происходят внутри групп элементов.

$$W = \frac{N!}{\prod_i N_i!}$$

где N – общее число элементов системы; i – количество групп элементов в системе; N_i – количество элементов в i-той группе.

В свою очередь термодинамическая вероятность по методу Бозе-Энштейна рассчитывается как

$$W = \prod_i \frac{(N_i + Y_i - 1)!}{N_i!(Y_i - 1)!}$$

где i – количество участков фазового пространства системы; Y_i – количество ячеек i-го участка фазового пространства; N_i – количество элементов i-ой группы системы.

Качественно иной подход подсчета термодинамической вероятности реализован в методе ансамблей. При использовании метода ансамблей, предложенного Гиббсом, рассматривают одновременно весьма большое число тождественных термодинамических систем, состояния которых отображаются в гиббсовом фазовом пространстве точками, термодинамическую вероятность связывают с элементарным объемом фазового пространства и дифференциалом энергии.

Наряду с изложенными общепринятыми определениями понятия термодинамической вероятности существует другое понимание этой важной величины, предложенное Эйнштейном. По предложению Эйнштейна под термодинамической вероятностью можно понимать отношение длительности осуществления данного макросостояния (τ_i) к общей длительности наблюдения τ, при условии, что общая длительность наблюдения чрезвычайно велика.

$$\omega = \frac{\tau_i}{\tau}$$

Определение Эйнштейна в термодинамике не получило математического развития, т.к. оказалось, что без дополнительных гипотез исходя из обычной механической характеристики системы, невозможно вычислить термодинамическую вероятность по Эйнштейну.

Изучение вероятностных характеристик термодинамических систем позволяет установить связи между статистической физикой и термодинамикой, имеющих единый предмет изучения при разных методологиях.

При описании сложных термодинамических систем и процессов также вводятся такие различные категории и понятия: квазистационарные процессы и неравновесные состояния – для нестационарных систем, гомогенные и гетерогенные системы, фазы и компоненты – для систем со структурными неоднородностями и т.д.

Огромный объем количественных знаний о свойствах и закономерностях поведения физических систем обобщается термодинамикой в форме дифференциальных уравнений, которые устанавливают определенные соответствия между параметрами разного рода. Дифференциальные уравнения термодинамики применяются при условии, что для исследуемой системы дополнительно заданы уравнения состояния (1) или (4), выражающие один параметр через другие. Дополнительные уравнения накладывают функциональные связи и ограничения на исследуемую систему и вносят в процесс термодинамического анализа количественные закономерности о свойствах объекта.

Все это в комплексе представляет собой математический аппарат термодинамики, который вместе с основными понятиями, законами и соотношениями при конкретном применении дает термодинамический метод исследования сложных физических систем. Эколого-экономические и социально-экономические системы являются особыми организованными структурами и относятся к классу стационарных или квазистационарных сложных систем. Методология исследования таких систем должна учитывать целый ряд особенностей и закономерностей, которые не всегда присущи сложным термодинамическим системам.

Основное отличительное свойство таких систем – эмерджентность, характеризующее наличие у системного целого особых свойств, не присущих его подсистемам и элементам. Вторым важным свойством является явно выраженная структурная иерархичность систем, где новые свойства за счет системообразующих связей могут возникать на различных уровнях иерархии.

Необходимо обратить внимание на то, что закономерности и особые системные свойства на каждом уровне иерархии системы, скорее всего, не могут быть получены средствами системного анализа при изучении конкретного процесса. Соответствующие знания о свойствах материи, образующей систему, должны привноситься извне. В качестве других свойств сложных систем данного класса следует выделить наличие закономерностей развития и, в частности, направленности, необратимости, упорядоченности, особенностей внутренней самоорганизации систем, устойчивости и автономности и т.д.

Стационарным или квазистационарным состоянием открытых систем является уровень гомеостаза, при котором колебания параметров вокруг средних значений обеспечивают устойчивое динамическое равновесие, а также постоянство состава и свойств системы. Через гомеостаз реализуются механизмы необратимости и непрерывности развития самоорганизующихся систем. Гомеостаз поддерживается за счет неравновесности процессов и поступления свободной энергии в систему на фоне ее диссинации в окружающую среду. Для устойчивости гомеостаз предполагает наличие отрицательной (положительной) обратной связи, что позволяет самоорганизующейся системе реализовывать компенсационные реакции на воздействия окружающей среды. Системы с наличием указанных выше свойств в термодинамике обычно не рассматриваются, они относятся к более высокому уровню сложности для которого аппарат термодинамики неприемлем, так как изначально создавался под сложные физические системы с набором иных, четко определенных свойств. В этой области следует говорить о создании аппарата системодинамики, который в своей основе изначально должен ориентироваться под конкретный вид изучаемой сложной системы, что крайне усложняет системный метод. Поэтому однозначный перевод термодинамического метода на другие сложные системы [] представляет собой ошибочный путь для исследования. Сложность системных подходов для конкретных случаев обусловлена также крайне ограниченной возможностью представления имеющихся вербальных или качественных описаний эколого-экономических или социально-экономических систем в формализованном математическом виде, без чего невозможно получение количественных закономерностей и данных.

В данной работе делается попытка реализации системного метода с использованием принятой в термодинамике структурно-логической схемы исследования для конкретной сложной системы, обладающей экономическими, социальными и экологическими особенностями и закономерностями.

Основные предположения и допущения

В процессе квазистационарной смены состояний сложной системы происходит последовательное изменение ее параметров во времени. При этом практически все системы могут находиться либо в опасном, либо в безопасном состоянии. Опасность состояния системы определяется по значениям ее координат и потенциалов или других показателей, которые могут превышать или не достигать определенных пороговых значений. Из всех состояний системы можно выделить ее опасные состояния, тогда риск системы оказаться в опасном состоянии равен отношению числа опасных состояний к общему числу возможных состояний: т.е. если взять какую-нибудь сложную систему и следить за развитием этой системы во времени, в частности за теми изменениями, которые самопроизвольно вызываются и приводят к изменению макросостояния системы, то система будет последовательно проходить как безопасные состояния, так и опасные состояния различной степени опасности. Предположим, что наблюдение проводится достаточно длительный промежуток времени τ. Промежутки времени, в течение которых будет существовать некоторое i-ое состояние (опасное или безопасное), обозначим τ_1, τ_2, …, τ_n. Под этими промежутками следует понимать общую длительность пребывания системы в данном состоянии. В таком случае под вероятностью состояния системы согласно предложения Эйнштейна, можно понимать отношение длительности осуществления некоторого состояния i к общей длительности наблюдения τ:

$$W_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \tau_j}{\tau}$$

Рассматривая состояние системы как сложное событие, которое формируется под воздействием различных массовых однородных более простых случайных событий, определим вероятность безопасного состояния системы W как вероятность того, что система характеризуется параметрами (координатами, потенциалами или другими показателями), все из которых имеют значения, находящиеся в допустимых интервалах. Таким образом, безопасное состояние системы – множество состояний при которых значения всех параметров, характеризующих каждое состояние, соответствуют определенно заданным требованиям. В свою очередь, опасное состояние системы – множество состояний при которых значение хотя бы одного параметра системы не соответствует заданным требованиям. Исходя из вышесказанного, риск нахождения системы в опасном состоянии R можно определить как вероятность того, что система характеризуется параметрами, среди которых хотя бы один параметр имеет значение, выходящее за определенный допустимый интервал.

Для любого заданного момента времени t система может находиться или в опасном, или в безопасном состоянии, т.е. данные сложные события несовместны и условно можно считать, что они образуют полную группу событий. Тогда сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$W(t) + R(t) = 1$$

В определенный момент времени t система может находиться только в одном из возможных безопасных состояний или же в одном из возможных опасных состояний. Рассматривая все эти состояния как сложные несовместные события, представим уравнение (1) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} W_i(t) + \sum_{i=1}^{n} R_i(t) = 1$$

Для двух категорий событий

$$R = R_1(I_1) + R_2(I_2) - R_1(I_1)R_2(I_2)$$
$$I = I_1 + I_2$$
$$(1-R)\frac{d^2R}{dI^2} + \left(\frac{dR}{dI}\right)^2 = 0$$

Для трех категорий событий

$$R = R_1(I_1) + R_2(I_2) + R_3(I_3) - R_1(I_1)R_2(I_2) - R_1(I_1)R_3(I_3) - R_2(I_2)R_3(I_3) - R_1(I_1)R_2(I_2)R_3(I_3)$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\frac{dR}{dI_1} = \frac{dR}{dI} = \frac{dR(I_1)}{dI_1}(1 - R_2(I_2) - R_3(I_3) + R_2(I_2)R_3(I_3))$$

$$\frac{dR}{dI_2} = \frac{dR}{dI} = \frac{dR(I_2)}{dI_2}(1 - R_1(I_1) - R_3(I_3) + R_1(I_1)R_3(I_3))$$

$$\frac{dR}{dI_3} = \frac{dR}{dI} = \frac{dR(I_3)}{dI_3}(1 - R_1(I_1) - R_2(I_2) + R_1(I_1)R_2(I_2))$$

$$\frac{d^3R}{dI_1 dI_2 dI_3} = \frac{d^3R}{dI^3} = \frac{dR(I_1)}{dI_1} \cdot \frac{dR(I_2)}{dI_2} \cdot \frac{dR(I_3)}{dI_3}$$

$$\frac{d^2R}{dI_1 dI_2} = \frac{d^2R}{dI^2} = \frac{dR(I_1)}{dI_1} \cdot \frac{dR(I_2)}{dI_2}(R_3(I_3) - 1)$$

$$\frac{d^2R}{dI_1 dI_3} = \frac{d^2R}{dI^2} = \frac{dR(I_1)}{dI_1} \cdot \frac{dR(I_3)}{dI_3}(R_2(I_2) - 1)$$

$$\frac{d^2R}{dI_2 dI_3} = \frac{d^2R}{dI^2} = \frac{dR(I_2)}{dI_2} \cdot \frac{dR(I_3)}{dI_3}(R_1(I_1) - 1)$$

$$\left(\frac{d^2R}{dI^2}\right)^3 = -\left(\frac{dR(I_1)}{dI_1} \cdot \frac{dR(I_2)}{dI_2} \cdot \frac{dR(I_3)}{dI_3}\right)^2 (1 - R_1(I_1))(1 - R_2(I_2))(1 - R_3(I_3))$$

$$(1 - R)\left(\frac{d^3R}{dI^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2R}{dI^2}\right)^3 = 0$$

Для n категорий событий

$$(1 - R)\left(\frac{d^nR}{dI^n}\right)^{n-1} + \left(\frac{d^{n-1}R}{dI^{n-1}}\right)^n = 0$$