УДК 539.3

Вовк Л.П., д.т.н., Кисіль К.С., інж.

АДІ ДВНЗ «ДонНТУ», м. Горлівка

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ КОНЦЕНТРАЦІЇ ТЕРМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ У ДЕТАЛЯХ З НЕРЕГУЛЯРНОЮ ГРАНИЦЕЮ

Розглядається задача термодинамічної деформації деталей автотранспортних засобів, переріз яких має сингулярні точки, що зумовлює концентрацію напружень, яка і визначає міцність деталі в цілому. Проведено аналіз особливостей напружено-деформованого стану в околі нерегулярних точок границі області з урахуванням впливу температурних напружень на локальну концентрацію напружень. Математична модель задачі включає систему диференціальних рівнянь руху, граничні умови на бічній поверхні деталі перерізу. Аналітичний розв'язок задачі будується за допомогою модифікації методу суперпозиції.

Вступ

Інженерні методики міцнісного аналізу деталей машин у своїй більшості не враховують локальної концентрації напружень (ЛКН) у особливих зонах перерізу. Такі питання виникають при розрахунках роз'ємних та нероз'ємних з'єднань деталей автомобілів і розрахунку зубчастих зачеплень та основних видів механічних передач. Між тим, саме в цих областях найчастіше спостерігається виникнення дефектів і їх розвиток. У зв'язку з цим можна стверджувати, що, незалежно від обраного критерію міцності, він обов'язково повинен враховувати саме максимальні напруження, які виникають у зонах ЛКН. Оскільки наявність ЛКН може бути причиною виходу деталі зі строю, то якісне і кількісне визначення міри концентрації є завжди важливим і актуальним питанням.

Розрахунок розподілу напружень у деталях автомобілів пов'язаний зі значними труднощами, які обумовлені складністю форми і внутрішньої структури деталей і умовами їх навантаження. Тому у наближених розрахунках частіше за все застосовують спрощенні моделі з експериментальною оцінкою їх ефективності, що зазвичай призводить до невірних висновків[1,2]. Огріхи критеріїв і розрахунків, що пропонуються, ще більше зростають, якщо необхідно розглянути динамічне деформування деталей, оскільки інтенсивність ЛКН у динамічних задачах суттєво зростає. Такі випадки виникають, наприклад, при розрахунках кривошипно-шатунних механізмів, міцності поршневих пальців двигунів внутрішнього згоряння (ДВЗ), шатунних шийок колінчатого валу і т.д. Окрім того, з'являється необхідність врахування можливості проявлення резонансних ефектів.

Важлива особливість геометрії деталей, які піддані ЛКН, обумовлена існуванням на границі їх перетину деяких сингулярних кутових точок, напружено-деформований стан (НДС) у околу яких і визначає міцність усієї деталі в цілому [3]. Тут також має місце поява нових хвильових ефектів, пов'язаних з концентрацією динамічних напружень. Аналіз наукових публікацій, присвячених даній проблемі [4-6], дозволяє стверджувати, що під час дослідження ЛКН у деталях ДВЗ, по-перше, не введено параметрів інтенсивності ЛКН, аналогічних широко відомим коефіцієнтам концентрації напружень і, по-друге, немає аналізу особливостей НДС у сингулярних зонах перетину деталей з урахуванням впливу температурних напружень на ЛКН.

Мета роботи

На цей час розроблено два підходи до рішення граничних задач динамічної теорії пружності для тіл кінцевих розмірів. Один з них, метод однорідних рішень [3], знайшов застосування при рішенні двовимірної задачі теорії пружності, в теорії тонких і товстих плит. У другому підході, розвиненому в [3, 4], рішення задачі представляється у вигляді суперпозиції декількох послідовних частинних рішень, які мають конкретні властивості симетрії. При цьому передбачається, що поверхня пружного тіла утворена частинами координатних поверхонь різних сімейств в ортогональних системах координат.

Метою даної роботи служить розповсюдження алгоритму методу суперпозиції для розрахунку термопружних деталей автомобілів з визначенням характеру динамічного НДС у околу сингулярних кутових точок перерізу деталей, застосування розробленої схеми для чисельно-аналітичного розрахунку параметрів локальної особливості (ПЛО) по напруженням і аналіз впливу температурних ефектів на ПЛО. При цьому, якщо враховувати локальний характер концентрації напружень і ПЛО, можливо розповсюдити отримані нижче результати на відмінні від розгляданих у даній роботі конфігурації границь перерізу деталей.

Основна частина

Розглядаються сталі симетричні коливання однорідної термопружної деталі, переріз якої представляється у вигляді прямокутної області D. Зовнішня поверхня деталі має вільний теплообмін з зовнішнім середовищем і знаходиться під навантаженням, яке діє у площині D. У роботі пропонується метод визначення термомеханічних характеристик хвильового поля [7] в кінцевій прямокутній області, що враховує особливості компонент тензора напруги і температури в околу нерегулярних точок границі, у ролі яких виступають кутові точки прямокутника. Специфіка НДС поблизу кутових точок області практично не залежить від значення кута, тому аналіз ПЛО можна проводити за методикою роботи [8], не розв'язуючи у загальному вигляді початкову крайову задачу термопружності. Таким чином, отримані нижче результати розрахунку ПЛО будуть справедливі для довільних перетинів деталей, які вміщують кутові точки.

Постановка задачі

Нехай переріз деталі — деяка прямокутна область, яка займає в системі координат x_1Ox_2 область $D=\{(x_1,x_2):|x_1|\le a;|x_2|\le b\}$, де x_1,x_2 – декартові координати.

На границі області $x_1=\pm a;\ x_2=\pm b$ задано нормальне навантаження інтенсивності $Q_1(x_1),\ Q_2(x_2)$ відповідно, що гармонійно змінюється в часі з частотою ω. Передбачається, що дана область має вільний теплообмін з навколишнім середовищем.

Безрозмірні амплітудні характеристики переміщень $U_i(x,y), i=1,2$ і приросту температури $\Theta(x,y)$ визначаються системою рівнянь зв'язаної термопружності в безрозмірних координатах[7]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}-\frac{\rho a^2\omega^2}{\mu}U_1;\\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\frac{\rho a^2\omega^2}{\mu}U_2;\\
\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}-\frac{a^2\omega i}{\chi}\Theta-\frac{\delta a^2 i\omega}{T_0}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)=0.
\end{gathered}\tag{1}$$

Тут були використані наступні позначення: $x=\frac{\tilde{x}_1}{a};\ y=\frac{\tilde{x}_2}{a};\ U_1=\frac{\tilde{U}_1}{a};\ U_2=\frac{\tilde{U}_2}{a};\ \Theta=\frac{\tilde{\Theta}}{T_0};$

$\sigma_{ij}=\frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\mu};\ \tilde{\Theta}=T-T_0,$

$\tilde{U}_i, (i = 1, 2)$ — компоненти вектора переміщень; $\tilde{\Theta}$ — приріст температури;

T — абсолютна температура точок тіла; T_0 — температура тіла у недеформованому і ненапруженому стані; ρ — щільність; λ, μ — параметри Ляме,

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t;\ \delta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0};\ \chi = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon},$$

де α_t — коефіцієнт лінійного термічного розширення; λ_0 — коефіцієнт теплопровідності; c_ε — питома теплоємність при постійній деформації.

Граничні умови запишуться в наступному безрозмірному вигляді.

Якщо $x = \pm 1$:

$$2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}a\Theta\right) = \frac{1}{\mu}\sigma_{11} = q_1(y);$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\sigma_{12} = 0;$$
$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} + a\frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta = 0.$$

Якщо $y = \pm\eta$:

$$2\left(\frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}a\Theta\right) = \frac{1}{\mu}\sigma_{22} = q_2(x);$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\sigma_{12} = 0;$$
$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} + a\frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta = 0,$$

де λ_1 — приведений коефіцієнт теплопровідності; α — коефіцієнт тепловіддачі.

Реалізація методу суперпозиції

Шукаємо розв'язок системи рівнянь (1) у вигляді (p, q, α, β – параметри)

$$\begin{aligned} U_1(x,y) &= Ash(px)\cos\alpha(y-\eta) + D\sin\beta(x-1)ch(qy); \\ U_2(x,y) &= Bch(px)\sin\alpha(y-\eta) + E\cos\beta(x-1)sh(qy); \\ \Theta(x,y) &= Cch(px)\cos\alpha(y-\eta) + F\cos\beta(x-1)ch(qy). \end{aligned} \tag{2}$$

Підставляємо вирази (2) до системи рівнянь руху і теплопровідності (1). Отримаємо дві системи однорідних рівнянь відносно довільних сталих *A*, *B*, *C* і *D, E*, *F* відповідно:

$$\begin{cases} A\left(p^2(1+E_1) - \alpha^2 + \Omega^2\right) + B\alpha pE_1 - Cp\Theta_1 = 0 \\ -Ap\alpha E_1 + B\left(p^2 - \alpha^2(1+E_1) + \Omega^2\right) + C\alpha\Theta_1 = 0 \\ -Ap\Omega_1 - B\alpha\Omega_1 + C\left(p^2 - \alpha^2 - \Omega_2\right) = 0 \end{cases}$$ та

$$\begin{cases} D\left(-\beta^2\left(1+E_1\right)+q^2+\Omega^2\right)-E\beta q E_1-F\beta\Theta_1=0 \\ Dq\beta E_1+E\left(-\beta^2+q^2\left(1+E_1\right)+\Omega^2\right)-Fq\Theta_1=0 \\ -D\beta\Omega_1-Eq\Omega_1+F\left(q^2-\beta^2-\Omega_2\right)=0, \end{cases}$$

де $E_1=1+\dfrac{\lambda}{\mu}$; $\Theta_1=\dfrac{\gamma T_0}{\mu}$; $\Omega_1=\dfrac{\eta a^2 i\omega}{T_0}$; $\Omega_2=\dfrac{a^2 i\omega}{\chi}$; $i^2=-1$.

Означимо через p_α і q_α – корені характеристичних рівнянь $\left(\alpha=1,2,3\right)$, отримані за умови існування нетривіального розв’язку двох виписаних однорідних систем рівнянь:

$$p_1^2=\frac{E_1\Omega_2-\Omega^2+2\alpha^2+\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+2\alpha^2E_1+R}{2\left(E_1+1\right)};\quad p_2^2=\alpha^2-\Omega^2;$$

$$p_3^2=\frac{E_1\Omega_2-\Omega^2+2\alpha^2+\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+2\alpha^2E_1-R}{2\left(E_1+1\right)};$$

$$q_1^2=\frac{E_1\Omega_2-\Omega^2+2\beta^2+\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+2\beta^2E_1+R}{2\left(E_1+1\right)};\quad q_2^2=\beta^2-\Omega^2;$$

$$q_3^2=\frac{E_1\Omega_2-\Omega^2+2\beta^2+\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+2\beta^2E_1-R}{2\left(E_1+1\right)},$$

де

$$R^2=\Omega^4+\Omega^2\left(2\Omega_2+2E_1\Omega_2-2\Theta_1\Omega_1\right)+\Theta_1^2\Omega_1^2+2E_1\Omega_2\Theta_1\Omega_1+2\Omega_2\Theta_1\Omega_1+E_1^2\Omega_2^2+2E_1\Omega_2^2+\Omega_2^2.$$

Через симетрію задачі α_k і β_j повинні бути вибрані у вигляді [3, 4]

$$\alpha_k=\frac{k\pi}{\eta};\ \beta_j=j\pi\ \left(k,j=1,2...\right).$$

З аналізу систем однорідних рівнянь виходить, що постійні *A, B, C,* а також *D, E, F* зв'язані співвідношеннями:

$$A_{k\alpha}=B_{k\alpha}M_{\alpha k};\ C_{k\alpha}=B_{k\alpha}N_{\alpha k};\ D_{j\alpha}=E_{j\alpha}L_{\alpha j};\ F_{j\alpha}=E_{j\alpha}P_{\alpha j},$$

де

$$M_{\alpha k}=\alpha p_{\alpha k}\frac{-p_{\alpha k}^2E_1+\alpha^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1}{\left(1+E_1\right)p_{\alpha k}^4+\left(-\alpha^2E_1+\Omega^2-E_1\Omega_2-\Omega_2-2\alpha^2-\Theta_1\Omega_1\right)p_{\alpha k}^2+\alpha^4-\alpha^2\Omega^2+\Omega_2\alpha^2-\Omega_2\Omega^2},$$

$$N_{\alpha k}=\frac{\Omega_1\left(-p_{\alpha k}^2+\alpha^2-\Omega^2\right)}{\alpha\left(-p_{\alpha k}^2E_1+\alpha^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)},$$

$$L_{\alpha j}=\frac{\begin{array}{c}2q_{\alpha j}^2\beta^2-q_{\alpha j}^4+q_{\alpha j}^2\Omega_2+q_{\alpha j}^2E_1\beta^2-q_{\alpha j}^4E_1+q_{\alpha j}^2E_1\Omega_2-\beta^4-\beta^2\Omega_2+ \\ +\Omega^2\beta^2-\Omega^2q_{\alpha j}^2+\Omega^2\Omega_2+\Theta_1q_{\alpha j}^2\Omega_1\end{array}}{-q_{\alpha j}\beta\left(\beta^2E_1-E_1q_{\alpha j}^2+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)},$$

$$P_{\alpha j}=\frac{\Omega_1\left(q_{\alpha j}^2-\beta^2+\Omega^2\right)}{q_{\alpha j}\left(\beta^2E_1-q_{\alpha j}^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}.$$

Зважаючи на те, що розв'язок для даної області повинен містити повні і ортогональні системи функцій на відрізках, $|x| \le 1$, $|y| \le \eta$ і застосовуючи метод Неймана-Шварца [4], загальний розв'язок крайової задачі конструюємо у вигляді:

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\alpha=1}^{3} B_{k\alpha} M_{\alpha k} sh\left(p_{\alpha k} x\right)\right)\cos\alpha_k\left(y-\eta\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{\beta=1}^{3} E_{j\beta} L_{\beta j} ch\left(q_{\beta j} y\right)\right)\sin\beta_j\left(x-1\right)+A_0\sin\left(k_1 x\right);$$

$$U_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\alpha=1}^{3} B_{k\alpha} ch\left(p_{\alpha k} x\right)\right)\sin\alpha_k\left(y-\eta\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{\beta=1}^{3} E_{j\beta} sh\left(q_{\beta j} y\right)\right)\cos\beta_j\left(x-1\right)+B_0\sin\left(k_1 y\right);$$

$$\Theta = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\alpha=1}^{3} B_{k\alpha} N_{\alpha k} ch\left(p_{\alpha k} x\right)\right)\cos\alpha_k\left(y-\eta\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{\beta=1}^{3} E_{j\beta} P_{\beta j} ch\left(q_{\beta j} y\right)\right)\cos\beta_j\left(x-1\right)+C_0\cos\left(k_1 x\right)+$$
$$+D_0\cos\left(k_1 y\right),$$

де $B_{k\alpha}, E_{j\alpha}, A_0, B_0, C_0, D_0$ — довільні постійні, такі, що підлягають визначенню з граничних умов (2) і (3).

Формулювання і рішення допоміжних крайових задач

Реалізуючи основний алгоритм модифікованого для випадку термопружної області методу суперпозиції для отримання визначальної системи інтегральних рівнянь (СІР), розглянемо допоміжну крайову задачу, що характеризується наступними умовами в околі границь прямокутного перерізу деталі:

$$\begin{gathered} U_1\left(\pm1, y\right)=\pm f_1\left(y\right); \quad U_2\left(x, \pm\eta\right)=\pm f_2\left(x\right); \\ \sigma_{12}\left(\pm1, y\right)=0; \quad \sigma_{12}\left(x, \pm\eta\right)=0; \\ \frac{\partial\Theta}{\partial x}=f_3\left(y\right), \text{ якщо } x=\pm1; \quad \frac{\partial\Theta}{\partial y}=f_4\left(x\right), \text{ якщо } y=\pm\eta. \end{gathered} \tag{3}$$

Враховуємо, що $f_1\left(y\right), f_2\left(x\right), f_3\left(y\right), f_4\left(x\right)$ — невідомі функції, причому $f_1\left(y\right)=f_1\left(-y\right)$, $f_2\left(x\right)=f_2\left(-x\right)$, $f_3\left(y\right)=f_3\left(-y\right)$, $f_4\left(x\right)=f_4\left(-x\right)$, що виходить з характеру граничних умов (3). Допоміжна крайова задача (1),(3) не відповідає, звичайно початковій граничній задачі, але припускає аналітичне рішення і дозволяє, по-перше, задовольнити частину початкових граничних умов і, по-друге, виразити усі характеристики початкової задачі через коефіцієнти Фур'є невідомих функцій $f_1\left(y\right), f_2\left(x\right), f_3\left(y\right), f_4\left(x\right)$.

Після визначення констант $B_{k\alpha}$ і $E_{j\beta}$ через коефіцієнти Фур'є $f_{1k}, f_{2k}, f_{3k}, f_{4k}$ введених функцій $f_1\left(y\right), f_2\left(x\right)$, $f_3\left(y\right), f_4\left(x\right)$, отримуємо компоненти вектора переміщень U_1, U_2 і температуру Θ у наступному вигляді:

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(f_{1k}\frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{\left(\alpha_k^2 E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1-p_{1k}^2 E_1\right)\left(p_{2k}^2-p_{3k}^2\right)\left(p_{2k}^2+\alpha_k^2\right)}{\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2 E_1\right)\left(p_{3k}^2-p_{1k}^2\right)}\frac{sh\left(p_{1k}x\right)}{sh\left(p_{1k}\right)}+2\alpha_k^2\frac{sh\left(p_{2k}x\right)}{sh\left(p_{2k}\right)}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\left(p_{3k}^2 E_1-\alpha_k^2 E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)\left(p_{2k}^2-p_{1k}^2\right)\left(p_{2k}^2+\alpha_k^2\right)}{\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2 E_1\right)\left(p_{3k}^2-p_{1k}^2\right)}\frac{sh\left(p_{3k}x\right)}{sh\left(p_{3k}\right)}\right)+$$

$$+f_{3k}\frac{1}{\Omega_1}\frac{\left(\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1-p_{1k}^2E_1\right)\left(p_{3k}^2E_1-\alpha_k^2E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)}{\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2E_1\right)\left(p_{3k}^2-p_{1k}^2\right)}\left(\frac{sh\left(p_{1k}x\right)}{sh\left(p_{1k}\right)}-\frac{sh\left(p_{3k}x\right)}{sh\left(p_{3k}\right)}\right)\Bigg)$$

$$\times\cos\alpha_k\left(y-\eta\right)\Big)+$$

$$+\sum_{J=1}^{\infty}\Bigg(\Bigg(f_{2j}\frac{\beta_j}{\Omega^2}\Bigg(\frac{\left(\beta_j^2E_1-E_1q_{1j}^2+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(q_{3j}^2-q_{2j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j^2\right)}{q_{1j}\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2E_1\right)\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)}\frac{ch\left(q_{1j}y\right)}{sh\left(q_{1j}\eta\right)}-2q_{2j}\frac{ch\left(q_{2j}y\right)}{sh\left(q_{2j}\eta\right)}+$$

$$+\frac{\left(\beta_j^2E_1-E_1q_{3j}^2+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(q_{2j}^2-q_{1j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j^2\right)}{\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2E_1\right)\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)}\frac{ch\left(q_{3j}y\right)}{sh\left(q_{3j}\eta\right)}\Bigg)+$$

$$+f_{4j}\frac{\beta_j}{\Omega_1}\frac{\left(\beta_j^2E_1-E_1q_{1j}^2+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(\beta_j^2E_1-E_1q_{3j}^2+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}{\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2E_1\right)\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)}\left(\frac{ch\left(q_{1j}y\right)}{q_{1j}sh\left(q_{1j}\eta\right)}-\frac{ch\left(q_{3j}y\right)}{q_{3j}sh\left(q_{3j}\eta\right)}\right)\Bigg)\times$$

$$\times\sin\beta_j\left(x-1\right)\Big)+f_{10}\frac{\sin\left(k_1x\right)}{k_1};$$

$$U_2=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\Bigg(f_{1k}\frac{\alpha_k}{\Omega^2}\Bigg(\frac{\left(\alpha^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1-p_{1k}^2E_1\right)\left(p_{3k}^2-p_{2k}^2\right)\left(p_{2k}^2+\alpha_k^2\right)}{p_{1k}\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2E_1\right)\left(p_{3k}^2-p_{1k}^2\right)}\frac{ch\left(p_{1k}x\right)}{sh\left(p_{1k}\right)}+2p_{2k}\frac{ch\left(p_{2k}x\right)}{sh\left(p_{2k}\right)}+$$

$$+\frac{\left(p_{3k}^2E_1-\alpha^2E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)\left(p_{1k}^2-p_{2k}^2\right)\left(p_{2k}^2+\alpha_k^2\right)}{p_{3k}\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2E_1\right)\left(p_{3k}^2-p_{1k}^2\right)}\frac{ch\left(p_{3k}x\right)}{sh\left(p_{3k}\right)}\Bigg)$$

$$+f_{3k}\frac{\alpha_k}{\Omega_1}\frac{\left(\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1-p_{1k}^2E_1\right)\left(p_{3k}^2E_1-\alpha_k^2E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)}{\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2E_1\right)\left(p_{3k}^2-p_{1k}^2\right)}\left(\frac{ch\left(p_{3k}x\right)}{p_{3k}sh\left(p_{3k}\right)}-\frac{ch\left(p_{1k}x\right)}{p_{1k}sh\left(p_{1k}\right)}\right)\Bigg)\times$$

$$\times\sin\alpha_k\left(y-\eta\right)\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg(\Bigg(f_{2j}\frac{\beta_j}{\Omega^2}\Bigg(\frac{\left(\beta_j^2E_1-E_1q_{1j}^2+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(q_{2j}^2-q_{3j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j^2\right)}{\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2E_1\right)\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)}\frac{sh\left(q_{1j}y\right)}{sh\left(q_{1j}\eta\right)}+2\beta_j^2\frac{sh\left(q_{2j}y\right)}{sh\left(q_{2j}\eta\right)}+$$

$$+\frac{\left(\beta_j^2E_1-E_1q_{3j}^2+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(q_{1j}^2-q_{2j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j^2\right)}{\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2E_1\right)\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)}\frac{sh\left(q_{3j}y\right)}{sh\left(q_{3j}\eta\right)}+$$

$$+f_{4j}\frac{\beta_j}{\Omega_1}\frac{\left(\beta_j^2E_1-E_1q_{1j}^2+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(\beta_j^2E_1-E_1q_{3j}^2+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}{\left(\Theta_1\Omega_1+E_1\Omega_2+\Omega^2E_1\right)\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)}\left(\frac{sh\left(q_{3j}y\right)}{sh\left(q_{3j}\eta\right)}-\frac{sh\left(q_{1j}y\right)}{sh\left(q_{1j}\eta\right)}\right)\Bigg)\Bigg)\times$$

$$\times\cos\beta_j\left(x-1\right)\Big)+f_{20}\frac{\sin\left(k_1y\right)}{k_1\eta};$$

$$\Theta=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\Bigg(f_{1k}\frac{1}{\Omega^2}\frac{\Omega_1\left(p_{2k}^2+\alpha_k\right)\left(p_{1k}^2-p_{2k}^2\right)\left(p_{3k}^2-p_{2k}^2\right)}{\left(p_{1k}^2-p_{3k}^2\right)\left(\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1+E_1\Omega_2\right)}\left(\frac{ch\left(p_{1k}x\right)}{p_{1k}sh\left(p_{1k}\right)}-\frac{ch\left(p_{3k}x\right)}{p_{3k}sh\left(p_{3k}\right)}\right)+$$

$$+\frac{f_{3k}}{p_{1k}p_{3k}\left(p_{1k}^2-p_{3k}^2\right)\left(\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1+E_1\Omega_2\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{ch\left(p_{1k}x\right)}{sh\left(p_{1k}\right)}p_{3k}\left(p_{1k}^2-p_{2k}^2\right)\left(-p_{3k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)+\right.$$

$$+\frac{ch\left(p_{3k}x\right)}{sh\left(p_{3k}\right)}p_{1k}\left(p_{2k}^2-p_{3k}^2\right)\left(-p_{1k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\Bigg)\cos\alpha_k\left(y-\eta\right)+$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left(f_{2j}\frac{1}{\Omega^2}\frac{\Omega_1\left(q_{2j}^2-q_{1j}^2\right)\left(q_{3j}^2-q_{2j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j\right)}{\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)\left(\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1+E_1\Omega_2\right)}\left(\frac{ch\left(q_{1j}y\right)}{q_{1j}sh\left(q_{1j}\eta\right)}-\frac{ch\left(q_{3j}y\right)}{q_{3j}sh\left(q_{3j}\eta\right)}\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{f_{4j}}{q_{1j}q_{3j}\left(q_{1j}^2-q_{3j}^2\right)\left(\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1+E_1\Omega_2\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{ch\left(q_{1j}y\right)}{sh\left(q_{1j}\eta\right)}q_{3j}\left(q_{1j}^2-q_{2j}^2\right)\left(-q_{3j}^2E_1+\beta_j^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{ch\left(q_{3j}y\right)}{sh\left(q_{3j}\eta\right)}q_{1j}\left(q_{2j}^2-q_{3j}^2\right)\left(-q_{1j}^2E_1+\beta_j^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\right)\cos\beta_j\left(x-1\right)+f_{30}\frac{\cos\left(k_3x\right)}{\cos\left(k_3\right)}+f_{40}\frac{\cos\left(k_4y\right)}{\cos\left(k_4\eta\right)}.$$

Виведення визначальної системи інтегральних рівнянь (СІР)

Використовуючи отриманий розв'язок допоміжної задачі, співвідношення узагальненого закону Гука для ізотропного тіла та вирази

$$\widetilde{ch}\left(q_{1j}y\right)=\frac{ch\left(q_{1j}y\right)}{sh\left(q_{1j}\eta\right)},\ \widetilde{ch}\left(q_{2j}y\right)=\frac{ch\left(q_{2j}y\right)}{sh\left(q_{2j}\eta\right)},\ \widetilde{ch}\left(q_{3j}y\right)=\frac{ch\left(q_{3j}y\right)}{sh\left(q_{3j}\eta\right)},$$

$$\widetilde{ch}\left(p_{1k}x\right)=\frac{ch\left(p_{1k}x\right)}{sh\left(p_{1k}\right)},\ \widetilde{ch}\left(p_{2k}x\right)=\frac{ch\left(p_{2k}x\right)}{sh\left(p_{2k}\right)},\ \widetilde{ch}\left(p_{3k}x\right)=\frac{ch\left(p_{3k}x\right)}{sh\left(p_{3k}\right)}$$

запишемо граничні значення для нормальних напружень:

$$\sigma_{11}\left(1,y\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_{1k}}{\Omega^2}\left(cth\left(p_{1k}\right)\frac{\left(p_{1k}^2E_1+p_{1k}^2-\alpha_k^2E_1+\alpha_k^2\right)\left(-p_{1k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}{p_{1k}\left(p_{1k}^2-p_{3k}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\times\right.\right.$$

$$\times\left(p_{3k}^2-p_{2k}^2\right)\left(p_{2k}^2+\alpha_k^2\right)-4p_{2k}\alpha_k^2cth\left(p_{2k}\right)+$$

$$\left.+cth\left(p_{3k}\right)\frac{\left(p_{3k}^2E_1+p_{3k}^2-\alpha_k^2E_1+\alpha_k^2\right)\left(-p_{3k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}{p_{3k}\left(p_{1k}^2-p_{3k}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\left(p_{2k}^2-p_{1k}^2\right)\left(p_{2k}^2+\alpha_k^2\right)\right)+$$

$$+\frac{f_{3k}}{\Omega_1}\frac{\left(-p_{1k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(-p_{3k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}{\left(p_{1k}^2-p_{3k}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\times$$

$$\left.\times\left(cth\left(p_{1k}\right)\frac{\left(p_{1k}^2E_1+p_{1k}^2-\alpha_k^2E_1+\alpha_k^2\right)}{p_{1k}}-cth\left(p_{3k}\right)\frac{\left(p_{3k}^2E_1+p_{3k}^2-\alpha_k^2E_1+\alpha_k^2\right)}{p_{3k}}\right)\right)\cos\alpha_k\left(y-\eta\right)+$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{f_{2j}}{\Omega^2}\left(\widetilde{ch}\left(q_{1j}y\right)\frac{\left(q_{1j}^2E_1-q_{1j}^2-\beta_j^2E_1-\beta_j^2\right)\left(-\beta_j^2E_1+q_{1j}^2E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)}{q_{1j}\left(q_{1j}^2-q_{3j}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\times\right.\right.$$

$$\times\left(q_{2j}^2-q_{3j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j^2\right)-4q_{2j}\beta_j^2\widetilde{ch}\left(q_{2j}y\right)+$$

$$\left.+\widetilde{ch}\left(q_{3j}y\right)\frac{\left(q_{3j}^2E_1-q_{3j}^2-\beta_j^2E_1-\beta_j^2\right)\left(\beta_j^2E_1-q_{3j}^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}{q_{3j}\left(q_{1j}^2-q_{3j}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\left(q_{2j}^2-q_{1j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j^2\right)\right)+$$

$$+\frac{f_{4j}}{\Omega_1}\frac{\left(\beta_j^2E_1-q_{1j}^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(-\beta_j^2E_1+q_{3j}^2E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)}{\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\times$$

$$\times\left(\widetilde{ch}\left(q_{1j}y\right)\frac{\left(q_{1j}^2E_1-q_{1j}^2-\beta_j^2E_1-\beta_j^2\right)}{q_{1j}}-\widetilde{ch}\left(q_{3j}y\right)\frac{\left(q_{3j}^2E_1-q_{3j}^2-\beta_j^2E_1-\beta_j^2\right)}{q_{3j}}\right)\Bigg)+$$

$$+f_{10}k_1\left(E_1+1\right)ctg\left(k_1\right)+f_{20}k_2\left(E_1-1\right)\frac{\cos\left(k_2y\right)}{\sin\left(k_2\eta\right)}+V\ ;$$

$$\sigma_{22}\left(x,\eta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{f_{1k}}{\Omega^2}\left(\widetilde{ch}\left(p_{1k}x\right)\frac{\left(-p_{1k}^2E_1+p_{1k}^2+\alpha_k^2E_1+\alpha_k^2\right)\left(-p_{1k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}{p_{1k}\left(p_{3k}^2-p_{1k}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\times\right.\right.$$

$$\times\left(p_{3k}^2-p_{2k}^2\right)\left(p_{2k}^2+\alpha_k^2\right)-4p_{2k}\alpha_k^2\widetilde{ch}\left(p_{2k}x\right)+$$

$$\left.+\widetilde{ch}\left(p_{3k}x\right)\frac{\left(-p_{3k}^2E_1+p_{3k}^2+\alpha_k^2E_1+\alpha_k^2\right)\left(p_{3k}^2E_1-\alpha_k^2E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)}{p_{3k}\left(p_{3k}^2-p_{1k}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\left(p_{1k}^2-p_{2k}^2\right)\left(p_{2k}^2+\alpha_k^2\right)\right)+$$

$$+\frac{f_{3k}}{\Omega_1}\frac{\left(-p_{1k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(p_{3k}^2E_1-\alpha_k^2E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)}{\left(p_{3k}^2-p_{1k}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\times$$

$$\left.\times\left(\widetilde{ch}\left(p_{1k}x\right)\frac{\left(p_{1k}^2E_1-p_{1k}^2-\alpha_k^2E_1-\alpha_k^2\right)}{p_{1k}}-\widetilde{ch}\left(p_{3k}x\right)\frac{\left(p_{3k}^2E_1-p_{3k}^2-\alpha_k^2E_1-\alpha_k^2\right)}{p_{3k}}\right)\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{f_{2j}}{\Omega^2}\left(cth\left(q_{1j}\eta\right)\frac{\left(q_{1j}^2E_1+q_{1j}^2-\beta_j^2E_1+\beta_j^2\right)\left(\beta_j^2E_1-q_{1j}^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}{q_{1j}\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\times\right.\right.$$

$$\times\left(q_{2j}^2-q_{3j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j^2\right)+4q_{2j}\beta_j^2cth\left(q_{2j}\eta\right)+$$

$$\left.+cth\left(q_{3j}\eta\right)\frac{\left(q_{3j}^2E_1+q_{3j}^2-\beta_j^2E_1+\beta_j^2\right)\left(-\beta_j^2E_1+q_{3j}^2E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)}{q_{3j}\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\left(q_{2j}^2-q_{1j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j^2\right)\right)+$$

$$+\frac{f_{4j}}{\Omega_1}\frac{\left(\beta_j^2E_1-q_{1j}^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(\beta_j^2E_1-q_{3j}^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}{\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\times$$

$$\left.\times\left(cth\left(q_{1j}\eta\right)\frac{\left(-q_{1j}^2E_1-q_{1j}^2+\beta_j^2E_1-\beta_j^2\right)}{q_{1j}}-cth\left(q_{3j}\eta\right)\frac{\left(-q_{3j}^2E_1-q_{3j}^2+\beta_j^2E_1-\beta_j^2\right)}{q_{3j}}\right)\right)\cos\beta_j\left(1-x\right)+$$

$$+f_{10}k_1\left(E_1-1\right)\frac{\cos\left(k_1x\right)}{\sin\left(k_1\right)}+f_{20}k_2\left(E_1+1\right)ctg\left(k_2\eta\right)+V\ .$$

Використовуючи неврахованi граничні умови для σ_{11} і σ_{22}, а також отримані граничні значення, зведемо досліджувану задачу до вирішення наступної СІР щодо функцій $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(x)$.

$\sum_{\gamma=1}^{4}L_{m\gamma}f_\gamma=Q_\gamma$, $m=1,2,3,4$, де $Q_\alpha=q_\alpha$, $\gamma=\alpha=1,2$ — для перших двох рівнянь системи, та $Q_\beta=-\frac{f_\beta}{T}$, $\gamma=\beta=3,4$, $T=\frac{\alpha}{\lambda_1}a$ — для третього та четвертого рівнянь, відповідно.

$$L_{11}f_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\alpha_k}{\Omega^2}\Delta_{11k}\cos\alpha_k\left(y-\eta\right)\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}f_{1k}\cos\alpha_k\left(\xi-\eta\right)d\xi+\left(E_1+1\right)k_1ctgk_1\frac{1}{2\eta}\int_{-\eta}^{\eta}f_{1k}\left(\xi\right)d\xi;$$

$$L_{12}f_2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\beta_j}{\Omega^2}\Delta_{12j}\int_{-1}^{1}f_{2j}\cos\beta_j\left(\xi-1\right)d\xi+\left(E_1-1\right)k_2\frac{\cos\left(k_2y\right)}{\sin\left(k_2\eta\right)}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f_{2j}\left(\xi\right)d\xi;$$

$$L_{13}f_3=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_{13k}\cos\alpha_k\left(y-\eta\right)\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}f_{3k}\cos\alpha_k\left(\xi-\eta\right)d\xi\ \text{ і т.д.}$$

$$\Delta_{11k}=cth\left(p_{1k}\right)\frac{\left(p_{1k}^2E_1+p_{1k}^2-\alpha_k^2E_1+\alpha_k^2\right)\left(-p_{1k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(p_{3k}^2-p_{2k}^2\right)\left(p_{2k}^2+\alpha_k^2\right)}{2\alpha_kp_{1k}\left(p_{1k}^2-p_{3k}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}+$$
$$+2p_{2k}\alpha_kcth\left(p_{2k}\right)+$$
$$+cth\left(p_{3k}\right)\frac{\left(p_{3k}^2E_1+p_{3k}^2-\alpha_k^2E_1+\alpha_k^2\right)\left(-p_{3k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(p_{2k}^2-p_{1k}^2\right)\left(p_{2k}^2+\alpha_k^2\right)}{2\alpha_kp_{3k}\left(p_{1k}^2-p_{3k}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)},$$

$$\Delta_{12j}=\widetilde{ch}\left(q_{1j}y\right)\frac{\left(q_{1j}^2E_1-q_{1j}^2-\beta_j^2E_1-\beta_j^2\right)\left(-\beta_j^2E_1+q_{1j}^2E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)\left(q_{2j}^2-q_{3j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j^2\right)}{2\beta_jq_{1j}\left(q_{1j}^2-q_{3j}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}-$$
$$-2q_{2j}\beta_j\widetilde{ch}\left(q_{2j}y\right)+$$
$$+\widetilde{ch}\left(q_{3j}y\right)\frac{\left(q_{3j}^2E_1-q_{3j}^2-\beta_j^2E_1-\beta_j^2\right)\left(\beta_j^2E_1-q_{3j}^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(q_{2j}^2-q_{1j}^2\right)\left(q_{2j}^2+\beta_j^2\right)}{2\beta_jq_{3j}\left(q_{1j}^2-q_{3j}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)},$$

$$\Delta_{13k}=\frac{\left(-p_{1k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(-p_{3k}^2E_1+\alpha_k^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)}{\Omega_1\left(p_{1k}^2-p_{3k}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{cth\left(p_{1k}\right)\left(p_{1k}^2E_1+p_{1k}^2-\alpha_k^2E_1+\alpha_k^2\right)}{p_{1k}}-\frac{cth\left(p_{3k}\right)\left(p_{3k}^2E_1+p_{3k}^2-\alpha_k^2E_1+\alpha_k^2\right)}{p_{3k}}\right),$$

$$\Delta_{14j}=\frac{\left(-q_{1j}^2E_1+\beta_j^2E_1+E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1\right)\left(q_{3j}^2E_1-\beta_j^2E_1-E_1\Omega_2-\Theta_1\Omega_1\right)}{\Omega_1\left(q_{3j}^2-q_{1j}^2\right)\left(E_1\Omega_2+\Theta_1\Omega_1+\Omega^2E_1\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{\widetilde{ch}\left(q_{1j}y\right)\left(q_{1j}^2E_1-q_{1j}^2-\beta_j^2E_1-\beta_j^2\right)}{q_{1j}}-\frac{\widetilde{ch}\left(q_{3j}y\right)\left(q_{3j}^2E_1-q_{3j}^2-\beta_j^2E_1-\beta_j^2\right)}{q_{3j}}\right).$$

Асимптотичний аналіз НДС у кутових точках перерізу

Розклавши гіперболічні і тригонометричні функції, що входять у структуру операторів $L_{\alpha\gamma}$ за тригонометричними функціями $\cos\alpha_k\left(y-\eta\right)$, $\sin\alpha_k\left(y-\eta\right)$, $\cos\beta_j\left(x-1\right)$, $\sin\beta_j\left(x-1\right)$, зведемо СІР до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів Фур'є $f_{1k}, f_{2j}, f_{3k}, f_{4j}$. Для ефективного рішення цієї системи досліджуємо поведінку функцій $f_1\left(y\right), f_2\left(x\right), f_3\left(y\right), f_4\left(x\right)$ у кутових точках області D. Їх коефіцієнти Фур'є представимо у вигляді:

$$f_{1k}=\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}f_1\left(\xi\right)\cos\alpha_k\left(\xi-\eta\right)d\xi=\frac{1}{\alpha_k\eta}\int_{-\eta}^{\eta}f_1'\left(\xi\right)\sin\alpha_k\left(\eta-\xi\right)d\xi,\quad f_{3k}=\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}f_3\left(\xi\right)\cos\alpha_k\left(\xi-\eta\right)d\xi$$

$$f_{2j}=\int_{-1}^{1}f_2(\xi)\cos\beta_j(1-\xi)\,d\xi=\frac{1}{\beta_j}\int_{-1}^{1}f_2'(\xi)\sin\beta_j(1-\xi)\,d\xi`,\quad f_{4j}=\int_{-1}^{1}f_4(\xi)\cos\beta_j(1-\xi)\,d\xi.$$

Припустимо, що функції $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ є неперервними в даній області, а їх похідні мають особливість у кутових точках, тобто:

$$f_1'(\xi)\underset{\xi\to\pm\eta}{\longrightarrow}\pm A(\eta\mp\xi)^{\lambda-1},\ f_2'(\xi)\underset{\xi\to\pm1}{\longrightarrow}\pm B(1\mp\xi)^{\lambda-1},$$

функції $f_3(\xi)$, $f_4(\xi)$ мають особливість у кутових точках, тобто:

$$f_3(\xi)\underset{\xi\to\pm\eta}{\longrightarrow}\pm C(\eta\mp\xi)^{\beta-1},\ f_4(\xi)\underset{\xi\to\pm1}{\longrightarrow}\pm D(1\mp\xi)^{\beta-1}.$$

Тут λ,β — ПЛО за напруженнями і температурою, відповідно, що характеризують особливості функцій $f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), f_4(\xi)$, а A, B, C, D — довільні постійні.

Проводимо асимптотичний аналіз лівих частин СІР [4] при наближенні до кутової точки. Маємо:

$$L_{11}f_1+L_{12}f_2+L_{13}f+L_{14}f=\frac{2E_1}{(E_1+1)\eta}A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\,\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\lambda}}+\frac{2E_1}{(E_1+1)}B\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda}}-(\eta-y)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda-1}}\right)+$$
$$+\frac{E_1\Theta_1}{(E_1+1)\eta}C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\,\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\beta+1}}+\frac{\Theta_1}{(E_1+1)}D\left(E_1\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}}+(\eta-y)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta+1}}\right)=0$$

$$L_{21}f_1+L_{22}f_2+L_{23}f_3+L_{24}f_4=\frac{2E_1}{(E_1+1)\eta}A\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda}}-(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda-1}}\right)+\frac{2E_1}{E_1+1}B\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\lambda}}+$$
$$+\frac{\Theta_1}{(E_1+1)\eta}C\left(E_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}}+(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}}\right)+\frac{E_1\Theta_1}{E_1+1}D\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\beta+1}}=0;$$
$$\frac{-\Omega_1T}{(E_1+1)\eta}A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\alpha+1}}+C\frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\beta+1}}(T+1)\right)+$$
$$+\frac{-\Omega_1T}{(E_1+1)}B\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\alpha+1}}+(\eta-y)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}}\right)+TD\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}}=0;$$
$$\frac{-\Omega_1T}{(E_1+1)\eta}A\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\alpha+1}}+(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta}}\right)+T\frac{1}{\eta}C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta}}+$$
$$+\frac{-\Omega_1T}{(E_1+1)}B\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\alpha+1}}+D\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\beta+1}}(T+1)\right)=0,$$

що після сумування рядів дає наступну систему для визначення ПЛО:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\pi\lambda}{2}A+\lambda B=0;\ \lambda A+\sin\dfrac{\pi\lambda}{2}B=0;\\ T_1D\beta=0;\ T_2C\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\pi\lambda/2\,A+\lambda B=0\\ \lambda A+\sin\pi\lambda/2\,B=0\end{cases}.$$

З умови існування нетривіального рішення перших двох рівнянь даної системи отримаємо характеристичне рівняння для визначення параметра λ:

$$\lambda^2 - \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} = 0 . \quad (4)$$

Висновки і перспективи подальших досліджень

Характеристичне рівняння (4) має один дійсний корінь $\lambda_0 = 1$ і безліч комплексних коренів $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [3, 4]. Звичайно, треба врахувати лише ті комплексні корені, для яких Re $\lambda_k > 1$. Раніше у роботі Вільямса [9] для різних граничних умов було досліджено залежність порядку сингулярності поля статичних напружень у вершині клину від його куту розтвору. Рівняння (4) відповідає рівнянню (15) цієї роботи для клину з незакріпленими гранями і кутом розтвору 90^0. Як бачимо, характер особливості механічного поля у кутовій точці не залежить від пружних параметрів області перерізу. Враховуючи механічний зміст функцій $f_1(\xi), f_2(\xi)$ і вимагаючи обмеженості енергії усієї системи, приходимо до висновку, що, при побудуванні асимптотики рішення, треба враховувати тільки один дійсний корінь $\lambda_0 = 1$ і безліч комплексних коренів $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [10] з додатною дійсною частиною.

Два останні рівняння системи дають підставу казати, що температура не має особливості у кутових точках області, оскільки з цих рівнянь витікає, що $D = C = 0$.

Визначення ПЛО у кутових точках перерізу деталей автомобілів дає можливість прогнозувати інтенсивність ЛКН у цих проблемних зонах і застосувати критерії міцності, беручі максимальні напруження саме в цих областях з урахуванням ПЛО.

Важливим напрямком подальшої роботи буде дослідження ПЛО для складених перетинів деталей, що безумовно підвищить рівень практичного застосування запропонованої методики розрахунку. Перспективним має бути і аналіз розподілу внутрішньої енергії по області перерізу з урахуванням ЛКН у околу нерегулярних точок.

Список літератури

1. Пантелеев В.Ф. Расчеты деталей машин: учебное пособие. 3-е изд., доп. / В.Ф. Пантелеев — Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. — 164 с.

2. Иосилевич Г.Б. Концентрация напряжений и деформаций в деталях машин / Г.Б. Иосилевич — М.: Машиностроение, 1981. — 224 с.

3. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.

4. Вовк Л.П. Исследование динамических эффектов, возникающих при вибронагружении стыковых паяных соединений / Л.П. Вовк // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. — 2004. — № 1. — С. 60-64.

5. Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров / А.В. Белоконь // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 233. — №1. — С. 56-59.

6. Локальные резонансы в слоистых средах / А.А. Лямин, М.Г. Селезнев и др. — М.: ГНИЦ ПГК МО РФ, 2000. — 175с.

7. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. — Киев: Наукова думка, 1976. — 312 с.

8. Аксентян О.К. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения / О.К. Аксентян, О.Н. Лущик // Прикл. механика. — 1982. — Т. 18. — № 7. — С. 121-125.

9. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension / M.L. Williams // J. Appl. Mech. — 1952. — Vol. 19. — № 4. — P. 526-528.

10. Вовк Л.П. Об установившихся колебаниях электроупругой пластины переменной толщины / Л.П. Вовк, А.В. Белоконь // Прикладная механика. — 1982. — Т. 18. — № 5. — С. 93-97.

Стаття надійшла до редакції 20.10.08