МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Косолапов Ю.Ф.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для изучения разделов

курса высшей математики первого семестра

Рассмотрено на заседании
кафедры высшей математики
Протокол № 2 от 08 октября 2008 г.

Утверждено на заседании
учебно-издательского
совета ДонНТУ
протокол № 1 от 11 марта 2009 г.

Донецк 2009

УДК 512+514+517(071)

Косолапов Ю.Ф. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие для изучения разделов курса высшей математики первого семестра / - Донецк: РВА ДонНТУ, 2009. – 113 с.

Содержат указания к выполнению индивидуальных заданий по темам: "Определители", "Матрицы", "Системы линейных уравнений", "Векторная алгебра", "Аналитическая геометрия на плоскости", "Аналитическая геометрия в пространстве". Тщательно рассматриваются примеры решения типичных задач. Приведены вопросы для самопроверки, теоретические упражнения, дополнительные задачи повышенной трудности.

Для студентов и преподавателей технических вузов.

СОСТАВИТЕЛЬ: Косолапов Ю.Ф.

РЕЦЕНЗЕНТ: кандидат физико-математичних наук, доцент Косилова Е.Ф.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ ЗА ВЫПУСК:
зав. кафедрой высшей математики ДонНТУ,
доктор технических наук, профессор Улитин Г.М.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИНДИВИДУАЛЬНОМУ ЗАДАНИЮ: ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Как известно, **определитель второго порядка** определяется следующим равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 10 + 12 = 22.$$

Определитель третьего порядка определяется следующим равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \qquad (2)$$

Существует несколько способов запомнить правую часть этого равенства. Один из них дается следующей схемой:

«+» «-»

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Хорошо известен другой способ – так называемое правило Сайрюса.

Пример. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Theta=\begin{vmatrix}-1&0&3\\2&1&0\\0&4&-2\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}-1&0&3&-1&0\\2&1&0&2&1\\0&4&-2&0&4\end{matrix}\right\}=(-1)\cdot1\cdot(-2)+0\cdot0\cdot0+3\cdot2\cdot4-$$

$$-3\cdot1\cdot0-(-1)\cdot0\cdot4-0\cdot2\cdot(-2)=2+0+24-0-0-0=26\,.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, получающийся из данного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Пример. Миноры всех элементов вычисленного выше определителя Θ

$$M_{11}=\begin{vmatrix}1&0\\4&-2\end{vmatrix}=-2\quad M_{12}=\begin{vmatrix}2&0\\0&-2\end{vmatrix}=-4\quad M_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\0&4\end{vmatrix}=8$$
$$M_{21}=\begin{vmatrix}0&3\\4&-2\end{vmatrix}=-12\quad M_{22}=\begin{vmatrix}-1&3\\0&-2\end{vmatrix}=2\quad M_{23}=\begin{vmatrix}-1&0\\0&4\end{vmatrix}=-4$$
$$M_{31}=\begin{vmatrix}0&3\\1&0\end{vmatrix}=-3\quad M_{32}=\begin{vmatrix}-1&3\\2&0\end{vmatrix}=-6\quad M_{33}=\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}=-1$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть с тем же самым знаком, если сумма $i+j$ является четным числом, и с противоположным знаком в противном случае:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{cases}+M_{ij}\ \text{если}\ i+j\ \text{- четное число,}\\-M_{ij}\ \text{если}\ i+j\ \text{- нечетное число.}\end{cases}$$

Пример. Алгебраические дополнения всех элементов уже рассмотренного определителя Θ суть

$$A_{11}=M_{11}=-2\quad A_{12}=-M_{12}=4\quad A_{13}=M_{13}=8$$
$$A_{21}=-M_{21}=12\quad A_{22}=M_{22}=2\quad A_{23}=-M_{23}=4$$
$$A_{31}=M_{31}=-3\quad A_{32}=-M_{32}=6\quad A_{33}=M_{33}=-1$$

Студент должен знать **свойства определителей,** которые можно найти в любом пособии по линейной алгебре.

Вычисление определителей четвертого, пятого, … порядков сводится к вычислению определителей соответственно третьего, четвертого, … порядков с помощью свойства о **разложении определителя по элементам строки или**

столбца (определитель равен сумме произведений всех элементов любой его строки или любого его столбца на алгебраические дополнения этих же элементов). Полезным вспомогательным средством является следующее свойство определителя (так называемое **свойство - создатель нулей**): определитель не изменится, если к элементам любой его строки (любого его столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (соответственно другого столбца), предварительно умноженные на какое-либо число. С помощью последнего свойства в каком-нибудь ряде (строке или столбце) определителя создают максимально возможное количество нулей, а затем раскладывают определитель по этому ряду (строке или столбцу).

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Первый шаг. Первая строка определителя уже содержит один нуль. Образуем в ней еще два нуля. Например, прибавим элементы четвертого столбца, предварительно умноженные на -2, к соответственным элементам первого столбца, а предварительно умноженные на 2, - к соответственным элементам второго столбца. Так как данный определитель при этом не изменяется, то мы получаем

$$D=\begin{vmatrix} 2+(-2)\cdot 1 & -2+2\cdot 1 & 0 & 1 \\ 2+(-2)\cdot(-3) & 3+2\cdot(-3) & 1 & -3 \\ 3+(-2)\cdot 2 & 4+2\cdot 2 & -1 & 2 \\ 1+(-2)\cdot(-1) & 3+2\cdot(-1) & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & 8 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Второй шаг. Разложим полученный определитель по элементам первой строки, а именно:

$$D=0\cdot A_{11}+0\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}+1\cdot A_{14}=A_{14}=-M_{14}=$$

$$= -\begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 \\ -1 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -53.$$

Вычислим тот же самый определитель, образовывая нули в его третьем столбце и раскладывая полученный определитель по этому столбцу. Например, к элементам второй строки прибавим соответствующие элементы четвертой, предварительно умноженные на -1, а к элементам третьей – элементы той же четвертой строки (можно сказать – предварительно умноженные на 1). Получим

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 1 \cdot A_{43} = A_{43} =$$

$$= -M_{43} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -53.$$

Пример. Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ 9 & x+3 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \frac{150}{59}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \le 0.$$

1-й шаг – вычисление определителей. Достаточно вычислить определители второго и третьего порядков, так как определитель четвертого порядка уже был вычислен в предыдущем примере (он равен –53). Имеем

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ 9 & x+3 \end{vmatrix} = (x-3)(x+3) - 9 \cdot (-1) = x^2 - 9 + 9 = x^2;$$

на основании свойств определителей

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+4\cdot(-1) & -1 & 2+2\cdot(-1) \\ 1+4\cdot 4 & 4 & -1+2\cdot 4 \\ 3+4\cdot 2 & 2 & 4+2\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 17 & 4 & 7 \\ 11 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)\cdot A_{12}=(-1)\cdot(-M_{12})=M_{12}=\begin{vmatrix}17 & 7\\ 11 & 8\end{vmatrix}=136-77=59.$$

2-й шаг – решение неравенства $x^2-53x+150\le 0$.

Так как корни квадратного трехчлена равны 3 и 50, сразу получаем

$$3\le x\le 150.$$

Вопросы для самопроверки по теме "Определители"

1. Сформулировать определение определителя 2-го порядка.
2. Сформулировать определение определителя 3-го порядка
3. Дать определение минора элемента определителя.
4. Записать произвольно по одному определителю второго и третьего порядков и вычислить миноры всех их элементов.
5. Дать определение алгебраического дополнения элемента определителя.
6. Записать произвольно по одному определителю второго и третьего порядков и вычислить алгебраические дополнения всех их элементов.
7. Сформулировать свойство "Создатель нулей" определителя.
8. Сформулировать свойство о разложении определителя по элементам его строки или столбца.
9. Как можно вычислить определитель четвертого порядка, умея вычислять определители третьего порядка?
10. Как можно вычислить определитель пятого порядка, умея вычислять определители четвертого порядка?
11. Сформулировать свойство определителя – теорему Лагранжа.
12. Перечислить все свойства определителей.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Рассмотрим систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь a_{ij} $\left(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3\right)$ - известные коэффициенты, b_1, b_2, b_3 - также известные свободные члены, а x_1, x_2, x_3 - неизвестные, которые требуется найти.

Решением системы (3) называется упорядоченная тройка чисел, которая удовлетворяет каждому ее уравнению.

Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной** в противном случае.

Имеется много способов решения системы (3). Сейчас мы рассмотрим так называемое правило Крамера.

Правило Крамера[1]

Введем в рассмотрение главный определитель системы (3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и три вспомогательных определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Главный определитель образован из коэффициентов при неизвестных, а первый (второй, третий) вспомогательный определитель получается из главного определителя заменой его первого (соответственно второго, третьего) столбца стол-

---

[1] Габриэль Крамер (1704 - 1752) - швейцарский математик.

бцом свободных членов.

Теорема (правило) Крамера. Если главный определитель системы (3) отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по следующему правилу:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta, \quad x_2 = \Delta_2/\Delta, \quad x_3 = \Delta_3/\Delta. \qquad (4)$$

Аналогичное правило справедливо для системы произвольного количества n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Главный и вспомогательный определители системы равны

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -65$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 48; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -84; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 37.$$

Следовательно, на основании правила Крамера (4) получаем единственное решение системы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{48}{65}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{84}{65}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{37}{65}.$$

Ответ: $(-48/65; \quad 84/65; \quad -37/65)$.

Пример. При каких значениях параметров a и b система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$$

а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесконечное множество решений.

Решение. Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 11(a-4),$$

и система имеет единственное решение при $a \neq 4$.

Пусть теперь $a = 4$. Система уравнений принимает следующий вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

Ее главный определитель равен нулю, а вспомогательные определители равны

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 11 & -1 & 4 \\ b & 3 & 3 \end{vmatrix} = 15(b-8), \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & 11 & 4 \\ 5 & b & 3 \end{vmatrix} = 14(b-8),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 11 \\ 5 & 3 & b \end{vmatrix} = 11(8-b).$$

Так как $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1, \Delta \cdot x_2 = \Delta_2, \Delta \cdot x_3 = \Delta_3$ (эти три равенства вытекают из доказательства правила Крамера), то при

$$a = 4 \text{ и } b \neq 8$$

система уравнений не имеет решений. Если же

$$a = 4 \text{ и } b = 8,$$

то из тех же равенств следует, что система имеет бесконечное множество решений.

Метод Гаусса[1]

Сущность метода Гаусса, или метода последовательного исключения неизвестных, мы поясним на примере системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными (3). Как правило, для решения последней системы нужно выпол-

---

[1] Карл Фридрих Гаусс (1777 - 1855) – выдающийся немецкий математик, физик, астроном и геодезист.

нить три шага.

Шаг 1. Пусть один из коэффициентов при неизвестных, например a_{11}, равен 1, то есть система (3) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Прибавляя ко второму уравнению первое, умноженное на $-a_{21}$, и к третьему уравнению – первое же, умноженное на $-a_{31}$, мы исключаем неизвестное x_1 из второго и третьего уравнений. Система (3.1) приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3, \end{cases} \qquad (5)$$

где введены следующие обозначения:

$$a'_{22} = a_{22} - a_{12}a_{21}, a'_{23} = a_{23} - a_{13}a_{21}, b'_2 = b_2 - b_1a_{21},$$

$$a'_{32} = a_{32} - a_{12}a_{31}, a'_{33} = a_{33} - a_{13}a_{31}, \ b'_3 = b_3 - b_1a_{31}.$$

Шаг 2. Пусть далее один из коэффициентов при x_2, x_3 во втором и третьем уравнениях системы (5) равен 1, например $a'_{22} = 1$. Тогда в соответствующей системе

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3, \end{cases}$$

мы прибавляем к третьему уравнению второе, умноженное на $-a'_{32}$. В результате мы исключаем неизвестное x_2 из третьего уравнения и получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \quad a''_{33}x_3 = b''_3, \end{cases} \qquad (6)$$

где $a''_{33} = a'_{33} - a'_{23}a'_{32}, \quad b''_3 = b'_3 - b'_2a'_{32}$.

Шаг 3. Здесь возможны три случая.

а) Если в третьем уравнении системы (6) коэффициент при x_3 отличен от нуля, $a''_{33} \neq 0$, то мы находим из этого уравнения x_3, затем из второго уравнения - x_2, и наконец из первого уравнения - x_1. Исходная система уравнений (3.1) имеет в этом случае единственное решение.

б) Если в том же третьем уравнении системы (6) коэффициент при x_3 равен нулю, $a''_{33} = 0$, но свободный член отличен от нуля, $b''_3 \neq 0$, то мы получаем противоречие, означающее, что система уравнений (3.1) не имеет решений.

в) Если, наконец, $a''_{33} = 0$ и $b''_3 = 0$, то система уравнений (3.1) имеет бесконечное множество решений. Существуют методы для их нахождения, которые изучаются в более полных курсах линейной алгебры.

Замечание 1. Метод Гаусса применим к системам с произвольным количеством *m* уравнений и любым количеством *n* неизвестных, С увеличением числа уравнений и неизвестных количество шагов метода Гаусса соответственно увеличивается.

Замечание 2. На практике в первом шаге метода Гаусса можно исключать любое неизвестное, не обязательно x_1, с помощью любого уравнения, не обязательно первого. Это зависит от того, коэффициент при каком неизвестном и в каком уравнении равен 1 (или, что сводится к тому же, - 1). То же самое справедливо и относительно второго шага.

Замечание 3. Если в системе уравнений (3) нет ни одного коэффициента, равного 1, то такой коэффициент можно создать многими способами.

Например, в первом уравнении можно сделать коэффициент при x_1 равным 1, разделив обе части этого уравнения на a_{11}. Такой путь неудобен тем, что он, как правило, ведет к появлению дробных коэффициентов. Вместо него можно использовать известные еще из школы приемы алгебраического сложения.

Замечание 4. В методе Гаусса все операции производятся не над неизвестными, а над коэффициентами и свободными членами. Поэтому его можно применять в табличной (или матричной) форме, выписывая только коэффициенты и свободные члены.

Например, только что изложенный метод для системы уравнений (3.1) (с коэффициентом $a_{11}=1$) может быть представлен с помощью такой системы таблиц (матриц)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right).$$

Здесь первая матрица соответствует исходной системе уравнений (3.1). Вторая матрица получена из первой прибавлением к ее второй и третьей строкам первой строки, умноженной соответственно на $-a_{21}$ и на $-a_{31}$. Третья матрица получена из второй прибавлением ее второй строки, умноженной на $-a'_{32}$, к третьей строке.

Если теперь $a''_{33} \neq 0$, то получаем последовательно: из третьей строки последней таблицы (матрицы)

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}};$$

из ее второй строки

$$x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \quad x_2 = b'_2 - a'_{23}x_3$$

при уже известном значении x_3; наконец, из первой строки матрицы

$$x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \quad x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$$

при известных x_3, x_2.

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \end{cases}$$

применяя метод Гаусса в его обычной и табличной (матричной) формах.

А. Обычная форма метода Гаусса.

Шаг 1. Исключаем x_2 из второго и третьего уравнений, прибавляя к ним первое, умноженное на 1 и -2 соответственно. Получаем

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 9x_1 \qquad - x_3 = -2, \\ -x_1 \qquad - 3x_3 = 12. \end{cases}$$

Шаг 2. Исключаем x_3 из третьего уравнения, прибавляя к нему второе, умноженное на -3 соответственно. Получаем

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 9x_1 \qquad - x_3 = -2, \\ -28x_1 \qquad\quad = 18. \end{cases}$$

Шаг 3. Из третьего уравнения находим

$$x_1 = -9/14,$$

затем из второго

$$9x_1 - x_3 = -2,\; x_3 = 9x_1 + 2 = 9(-9/14) + 2 = -53/14;$$

наконец, из первого уравнения получаем

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \quad x_2 = 3x_1 + 2x_3 + 4 = 3\cdot(-9/14) + 2\cdot(-53/14) + 4 = -11/2.$$

Б. Табличная (матричная) форма метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -4 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & 12 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -4 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \\ -28 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right).$$

Первая матрица представляет заданную систему уравнений. Прибавляя к ее второй и третьей строкам первую, умноженную соответственно на 1 и -2, мы получаем вторую матрицу. Прибавляя затем вторую строку второй матрицы, умноженную на -3, к ее третьей строке, мы получаем третью матрицу.

Теперь из третьей строки последней третьей матрицы получаем

$$x_1 = -18/28 = -9/14,$$

из второй строки

$$9x_1 - x_3 = -2,\; x_3 = 9x_1 + 2 = 9(-9/14) + 2 = -53/14,$$

и из первой строки

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \quad x_2 = 3x_1 + 2x_3 + 4 = 3\cdot(-9/14) + 2\cdot(-53/14) + 4 = -11/2.$$

Пример. Решить методом Гаусса систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} 2x - 2y \quad + t & = & -3, \\ 2x + 3y + z - 3t & = & -6, \\ 3x + 4y - z + 2t & = & 0, \\ x + 3y + z - t & = & 2. \end{cases}$$

Воспользуется табличной (матричной) формой метода Гаусса.

Первый шаг. Исходная система представлена таблицей 1. Прибавляем элементы четвертой строки, умноженные на -2, к первой и второй строкам, а умноженные на -3 – к третьей строке. Получаем таблицу 2. Прибавим элементы ее второй строки, умноженные на -3, к первой строке, получая таблицу 3.

1.

x	*y*	*z*	*t*	
2	-2	0	1	-3
2	3	1	-3	-6
3	4	-1	2	0
1	3	1	-1	2

2.

x	*y*	*z*	*t*	
0	-8	-2	3	-7
0	-3	-1	-1	-10
0	-5	-4	5	-6
1	3	1	-1	2

3.

x	*y*	*z*	*t*	
0	**1**	1	6	23
0	3	1	1	10
0	-5	-4	5	-6
1	3	1	-1	2

Второй шаг. Прибавляем элементы первой строки таблицы 3, умноженные на -3 и 5, ко второй и третьей строкам соответственно, получая таблицу 4.

Третий шаг. Прибавляем элементы третьей строки таблицы 4, умноженные на 2 ко второй строке. В результате мы получаем таблицу 5, а после деления ее второй строки на 53 – таблицу 6.

4.

x	*y*	*z*	*t*	
0	1	1	6	23
0	0	-2	-17	-59
0	0	**1**	35	109
1	3	1	-1	2

5.

x	*y*	*z*	*t*	
0	1	1	6	23
0	0	0	53	159
0	0	1	35	109
1	3	1	-1	2

6.

x	*y*	*z*	*t*	
0	1	1	6	23
0	0	0	1	3
0	0	1	35	109
1	3	1	-1	2

Окончательная форма системы уравнений

$$\begin{cases} y+z+6t=23, \\ t=3, \\ z+35t=109, \\ x+3y+z-t=2, \end{cases}$$

откуда $t=3,\ z=109-35t=4,\ y=23-z-6t=1,\quad x=2-3y-z+t=-2.$

Существует усовершенствованная форма метода Гаусса – так называемый **метод Жордана[1] - Гаусса**. В методе Гаусса, начиная со второго шага, не исключаются неизвестные в ранее использованных уравнениях. Напротив, в методе Жордана – Гаусса неизвестные исключаются во всех уравнениях, независимо от того, использовались ли они ранее или нет. В результате на завершающем этапе метода нет необходимости выписывать заключительную систему уравнений: мы сразу получаем искомые значения неизвестных.

Пример. Решить систему уравнений предыдущего примера методом Жордана – Гаусса.

Первый шаг, дающий таблицы 1 – 3, - такой же, как и в методе Гаусса.

Второй шаг. Мы производим те же операции с таблицей 3, что и выше, но, кроме того, прибавляем элементы первой строки, умноженные на -3, к четвертой. Получаем таблицу 4 уже другого вида, чем ранее в методе Гаусса.

Третий шаг. Прибавляем элементы третьей строки таблицы 4, умноженные на -1, к первой строке и, умноженные на 2, - ко второй и четвертой строкам. Получаем таблицу 5, а после деления второй ее строки на 53 – таблицу 6.

4

x	*y*	*z*	*t*	
0	1	1	6	23
0	0	-2	-17	-59
0	0	**1**	35	109
1	0	-2	-19	-67

5

x	*y*	*z*	*t*	
0	1	0	-29	-86
0	0	0	53	159
0	0	1	35	109
1	0	0	51	151

6

x	*y*	*z*	*t*	
0	1	0	-29	-86
0	0	0	**1**	3
0	0	1	35	109
1	0	0	51	151

[1] Камиль Мари Эдмон **Жордан** (1838 - 1922) – французский математик

Четвертый шаг. Прибавляя элементы второй строки таблицы 6, умноженные на 29, -35, -51, соответственно к первой, третьей и четвертой строкам, получаем итоговую таблицу

x	y	z	t	
0	1	0	0	1
0	0	0	1	3
0	0	1	0	4
1	0	0	0	-2

Из нее сразу следует, что $x = -2,\ y = 1,\ z = 4,\ t = 3$.

Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, содержащая m строк и n столбцов, а именно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \left(a_{ij}\right),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n} \qquad (7)$$

В случае $m = n$ матрица называется **квадратной** n-го порядка.

Студенту необходимо повторить операции сложения матриц одинакового размера, умножения матрицы на число, умножения матриц, а также свойства этих операций. Здесь мы ограничимся одним примером на умножение матриц.

Пример. Найти произведения $A \cdot B,\ B \cdot A,\ A \cdot C,\ B \cdot C$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Первые две из них являются квадратными матрицами второго порядка, третья представляет собой матрицу-столбец, или матрицу размера 2×1.

Имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+0\cdot 0 & 1\cdot 3+0\cdot(-1) \\ (-2)\cdot(-2)+3\cdot 0 & (-2)\cdot 3+3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -9 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)\cdot 1+3\cdot(-2) & (-2)\cdot 0+3\cdot 3\\ 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot 0+(-1)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 9\\ 2 & -3\end{pmatrix}\neq AB,$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 4+0\cdot(-5)\\ (-2)\cdot 4+3\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -23\end{pmatrix},$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)\cdot 4+3\cdot(-5)\\ 0\cdot 4+(-1)\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23\\ 5\end{pmatrix}.$$

Важное значение для последующего имеет так называемая **обратная матрица**.

Матрица A^{-1} называется **обратной** для матрицы A, если выполняется двойное матричное равенство

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E, \qquad (8)$$

где E единичная матрица (у которой, как известно, все элементы главной диагонали – единицы, а остальные элементы равны нулю).

Обратная матрица данной квадратной матрицы A с отличным от нуля определителем $|A|$, или $\det(A)$, находится с помощью простой формулы. Например, для квадратной матрицы третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \qquad (9)$$

обратная матрица равна

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}, \qquad (10)$$

$$|A|=\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}. \qquad (11)$$

Таким образом, обратная матрица матрицы A находится по следующему правилу:

а) вычисляется определитель $|A|=\det(A)$ данной матрицы;

б) все элементы матрицы A заменяются их алгебраическими дополнениями, и матрица алгебраических дополнений транспонируется;

в) полученная матрица делится на определитель $|A| = \det(A)$ данной матрицы.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

а) Определитель матрицы равен

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60;$$

б) находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 \quad A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -18 \quad A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 \quad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11;$$

следовательно, матрица алгебраических дополнений и ее транспонированная соответственно равны

$$\begin{pmatrix} 12 & -18 & -18 \\ 6 & 11 & 1 \\ 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix};$$

в) искомая обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 & 1/10 \\ -3/10 & 11/60 & 1/60 \\ -3/10 & 1/60 & 11/60 \end{pmatrix}.$$

Полученный результат необходимо проверить, а именно показать, что равенство (8), определяющее обратную матрицу, выполняется. Другими словами нужно доказать, что

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/5 & 1/10 & 1/10\\ -3/10 & 11/60 & 1/60\\ -3/10 & 1/60 & 11/60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E,$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1/5 & 1/10 & 1/10\\ -3/10 & 11/60 & 1/60\\ -3/10 & 1/60 & 11/60\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Докажем первое равенство (второе докажите самостоятельно). Имеем:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60}\\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10} & \frac{2}{10}-\frac{11}{60}-\frac{1}{60} & \frac{2}{10}-\frac{1}{60}-\frac{11}{60}\\ \frac{3}{5}-\frac{12}{10}+\frac{6}{10} & \frac{3}{10}+\frac{44}{60}-\frac{2}{60} & \frac{3}{10}+\frac{4}{60}-\frac{22}{60}\\ \frac{3}{5}+\frac{6}{10}-\frac{12}{10} & \frac{3}{10}-\frac{22}{60}+\frac{4}{60} & \frac{3}{10}-\frac{2}{60}+\frac{44}{60}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E\,.$$

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть задана система *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad (12)$$

и отличным от нуля главным определителем.

Введем в рассмотрение три матрицы

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_n\end{pmatrix}.\qquad (13)$$

Первая из них состоит из коэффициентов при неизвестных и называется **матрицей системы**. Вторая представляет собой **матрицу-столбец неизвестных**, а третья – **матрицу-столбец свободных членов**. Легко проверить, что система (12) может быть представлена в виде матричного уравнения

$$A \cdot X = B. \tag{14}$$

Последнее имеет, как известно, единственное решение

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{15}$$

откуда получается искомое решение системы уравнений (12).

Описанный метод решения системы линейных алгебраических уравнений называется **матричным**.

Пример. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Матрица системы, матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов здесь

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентное матричное уравнение и его решение

$$A \cdot X = B, X = A^{-1} \cdot B.$$

Обратная матрица матрицы A найдена выше,

$$A^{-1} == \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 180 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(3;1;1)$.

Ранг матрицы

Возьмем любые k строк и k столбцов матрицы A. Элементы матрицы, лежащие на пересечениях выделенных строк и столбцов, образуют определитель k-го порядка, который называется **минором *k*-го порядка** матрицы A.

Рангом матрицы, содержащей хотя бы один отличный от нуля элемент, называется наивысший порядок ее ненулевых миноров.

Будем обозначать ранг матрицы A символом $RankA$.

Пример. Ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -6 & -4 \\ -8 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 2 ($RankA = 2$).

В самом деле, данная матрица содержит ненулевые миноры первого и второго порядков, например

$$M_1 = a_{11} = 2 \neq 0, M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 .$$

Все 16 ее миноров третьего порядка, как можно проверить непосредственными вычислениями (затратив на это довольно много времени!), равны нулю, например

$$M_{3_1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -6 & 2 & -2 \end{Bmatrix} = -12 - 6 - 40 - 10 - 4 + 72 = 0 .$$

Единственный ее минор четвертого порядка, совпадающий с ее определителем ($M_4 = |A|$), также равен нулю, так как его можно разложить по любому его ряду (строке или столбцу) с коэффициентами – нулевыми минорами третьего порядка.

Итак, наивысший порядок ненулевых миноров данной матрицы равен 2, и на основании определения ранга матрицы получаем

$$RankA = 2\,.$$

Данный пример показывает, что нахождение ранга матрицы на основании определения представляет собой довольно трудоемкую процедуру. Не спасает положения и тот факт, что количество рассматриваемых миноров матрицы можно уменьшить, ограничиваясь так называемыми окаймляющими минорами.

На практике чаще всего используются **элементарные преобразования** матрицы, не изменяющие ее ранг.

Элементарными называются следующие преобразования матрицы:

1) умножение любого ее ряда (то есть всех элементов любой ее строки или столбца) на произвольное число, отличное от нуля;

2) перемена местами любых двух ее рядов (строк или столбцов);

3) прибавление всех элементов какого-либо ряда, предварительно умноженных на любое число, к соответствующим элементам другого ряда;

4) отбрасывание любого ряда, состоящего только из нулей (короче – отбрасывание нулевого ряда).

Как уже сказано, элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы, но позволяют свести его вычисление к вычислению ранга наиболее простой (в рассматриваемой ситуации) матрицы.

Пример. Найдем ранг матрицы предыдущего примера с помощью элементарных преобразований.

Переходя от одних матриц к более простым, мы будем обозначать неизменность ранга символом $\cong$. Итак,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -6 & -4 \\ -8 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ -8 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -1 & 0\\ -8 & -2 & 2 & 0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

В процессе работы были последовательно использованы следующие элементарные преобразования: а) прибавление первой строки к третьей; б) прибавление элементов второй строки, умноженных на -1, к соответствующим элементам третьей и деление на 4 элементов четвертого столбца; в) отбрасывание нулевой третьей строки; г) прибавление элементов второй строки, умноженных на 2, к соответствующим элементам третьей строки; д) отбрасывание нулевой третьей строки; е) прибавление элементов второго столбца, умноженных на -4 и 1, соответственно к элементам первого и третьего столбцов; ж) отбрасывание нулевых первого и третьего столбцов.

Ранг последней (наипростейшей) матрицы равен 2,

$$Rank\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=2,$$

так как она содержит два ненулевых минора первого порядка (достаточно и одного!), единственный ее минор второго порядка

$$\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-1=-1\neq 0$$

отличен от нуля, а миноров высшего порядка, чем 2, матрица не содержит. Следовательно, ранг данной матрицы A также равен 2,

$$RankA=2.$$

Найдите самостоятельно другие последовательности элементарных преобразований для отыскания ранга той же самой матрицы.

Ранг матрицы и системы линейных алгебраических уравнений

Пусть рассматривается система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (16)$$

Введем в рассмотрение две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Первая образована коэффициентами при неизвестных и называется **матрицей системы.** Вторая отличается от первой дополнительным столбцом свободных членов и называется **расширенной матрицей.**

Очевидно,

$$Rank A \le Rank \widetilde{A}, \qquad (18)$$

то есть ранг матрицы системы A не может быть больше ранга расширенной матрицы $\widetilde{A}$.

Теорема (Кронекера[1]-Капелли[2]). Система линейных алгебраических уравнений (16) совместна тогда и только тогда, если ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы $\widetilde{A}$,

$$Rank A = Rank \widetilde{A}. \qquad (19)$$

Теорема Кронекера – Капелли определяет следующий план исследования системы уравнений (16).

1. Находим ранги матрицы системы A и расширенной матрицы $\widetilde{A}$. Если

$$Rank A < Rank \widetilde{A},$$

система несовместна.

2. Рассмотрим теперь основной случай, когда

$$Rank A = Rank \widetilde{A} = k,$$

[1] Леопольд Кронекер (1823 - 1891) – немецкий математик
[2] Альфред Капелли (1855 - 1910) – итальянский математик

где k – некоторое число. Очевидно, $k \le m, k \le n$, то есть k не превосходит ни числа уравнений, ни числа неизвестных.

На основании определения ранга матрицы матрица A содержит по крайней мере один отличный от нуля минор M_k k-го порядка, а все миноры высших порядков обеих матриц A и $\widetilde{A}$ равны нулю. Такой минор называется **базисным.** Строки, в которых он находится, определяют k **базисных уравнений** данной системы уравнений. Столбцы, в которых он находится, определяют k **базисных неизвестных** системы.

Пусть, для определенности, базисный минор M_k расположен на пересечении первых k строк и столбцов матрицы системы A, то есть

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \ne 0.$$

В этом случае базисными уравнениями и неизвестными являются первые k уравнений и первые k неизвестных.

Если количество m уравнений системы (16) превышает число k, мы можем оставить только k базисных уравнений, а остальные $m-k$ уравнений отбросить, так как они, на основании соответствующей теории, которую мы во втузе не изучаем, являются следствиями базисных уравнений. Таким образом, мы должны рассматривать далее систему только k первых уравнений системы (16) с n неизвестными. Могут представиться два случая.

А) Количество неизвестных n равно k ($n = k$), то есть все неизвестные являются базисными, и мы имеем систему k уравнений с k неизвестными и отличным от нуля главным определителем $\Delta = M_k \ne 0$. Такая система является совместной, имеющей единственное решение, которое мы можем найти одним из трех рассмотренных выше методов (правило Крамера, метод Гаусса или Жордана – Гаусса, матричный метод).

Б) Количество неизвестных n превышает k ($n > k$). В этом случае k базисных неизвестных мы оставляем слева, а остальные $n-k$ неизвестных (так называемых **свободных неизвестных**) переносим направо, считая их произвольными. После этого мы решает полученную систему уравнений относительно базисных неизвестных (одним из только что названных методов), то есть фактически выражаем базисные неизвестные через свободные. Система (16) является в этом случае совместной, имеющей бесконечное множество решений (так как свободные неизвестные могут принимать какие угодно значения), и мы получаем так называемое **общее решение** системы.

Пример. Исследовать на совместность и решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 & = & 6, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 & = & 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 & = & -5, \\ -8x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & -2. \end{cases}$$

1. Матрица системы и расширенная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -6 & -4 \\ -8 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -6 & -4 & -5 \\ -8 & -2 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

имеют один и тот же ранг $k = RankA = Rank\widetilde{A} = 2$. Ранг первой матрицы мы нашли выше, ранг второй найдите самостоятельно. Следовательно, данная система уравнений совместна.

2. Выберем в качестве базисного минора M_2 (второго порядка) минор, расположенный на пересечении первых двух строк и столбцов матрицы системы A,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14 \neq 0.$$

Такой выбор базисного минора определяет первые два уравнения и неизвестные как базисные.

Количество уравнений ($m=4$) превышает число $k = RankA = Rank\widetilde{A} = 2$, поэтому мы оставляем только базисные уравнения данной системы, то есть сводим ее к виду

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 & = & 6, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 & = & 1. \end{cases}$$

Количество неизвестных ($n=4$) превышает число $k = RankA = Rank\widetilde{A} = 2$, поэтому мы оставляем слева только базисные неизвестные x_1, x_2, перенося направо свободные неизвестные x_3, x_4,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = & 6 - 5x_3 - 4x_4, \\ 4x_1 + x_2 & = & 1 + x_3. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений мы решаем относительно x_1, x_2 методом Гаусса. Именно, прибавляя к первому уравнению второе, предварительно умноженное на -3, получаем

$$\begin{cases} -10x_1 & = & 3 - 8x_3 - 4x_4, \\ 4x_1 + x_2 & = & 1 + x_3, \end{cases}$$

откуда

$$x_1 = -0.3 + 0.8x_3 + 0.4x_4,\ x_2 = 1 + x_3 - 4x_1 = 2.2 - 2.2x_3 - 1.6x_4.$$

Ответ: общее решение данной системы уравнений имеет вид

$$(-0.3 + 0.8x_3 + 0.4x_4;\ 2.2 - 2.2x_3 - 1.6x_4;\ x_3;\ x_4),$$

где x_3, x_4 - произвольные числа.

Замечание. Можно положить $x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta$ и представить общее решение в несколько иной форме, именно

$$(-0.3 + 0.8\alpha + 0.4\beta;\ 2.2 - 2.2\alpha - 1.6\beta;\ \alpha;\ \beta),$$

где α, β - произвольные числа.

Подчеркнем, что базисных миноров может быть несколько, и каждый из них определяет свои наборы базисных уравнений и неизвестных. Выбор базисного минора осуществляется самим студентом, решающим систему уравнений.

Пример. Исследовать на совместность уже рассматривавшуюся выше систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

Матрица системы и расширенная матрица здесь

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & a & 11 \\ 5 & 3 & 3 & b \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет отличный от нуля минор второго порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 .$$

Ее единственный минор третьего порядка (он же – и главный определитель данной системы уравнений)

$$M_3 = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 11(a-4).$$

Если $a \neq 4$, то $M_3 = \Delta \neq 0$, следовательно $Rank A = Rank \widetilde{A} = 3$, и система имеет единственное решение, то есть она является совместной определенной.

При $a = 4$ обе матрицы принимают вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 5 & 3 & 3 & b \end{pmatrix},$$

ранг матрицы A равен 2, и нужно исследовать расширенную матрицу на ее ранг. Воспользуемся элементарными преобразованиями

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 5 & 3 & 3 & b \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 14 & 15 & 4 & -1 \\ 14 & 15 & 3 & b-9 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & b-9 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-8 \end{pmatrix}.$$

Вот три первых из этих преобразований: а) третий столбец, умноженный на 3, 4 и -3, прибавляется соответственно к первому, второму и четвертому столбцам; б) первый столбец делится на 14, а второй – на 15; в) вторая строка, умноженная на -1, прибавляется к третьей. Далее подумайте самостоятельно.

Для последней из полученных выше матриц (неизменного ранга!) рассматриваем миноры второго и третьего порядков, а именно:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-8 \end{vmatrix} = 8 - b = \begin{cases} 0 & \text{if } b = 8, \\ 8 - b \neq 0 & \text{if } b \neq 8. \end{cases}$$

Таким образом, если $b \neq 8 \left(\text{и } a = 4\right)$, то $Rank\widetilde{A} = 3 > RankA$, и система несовместна. Она является совместной (и неопределенной) для $a = 4, b = 8$, так как в этом случае $Rank\widetilde{A} = RankA = 2$.

Системы линейных однородных уравнений

Если в системе линейных алгебраических уравнений все свободные члены равны нулю,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (20)$$

она называется **системой линейных однородных уравнений**, или **однородной системой линейных уравнений.**

Матрица системы и расширенная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

системы линейных однородных уравнений (20) имеют одинаковые ранги (почему?). Следовательно, такая система всегда совместна, например, она имеет нулевое (очевидное, или тривиальное) решение

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Отсюда возникает основной вопрос: при каких условиях система (20) имеет ненулевые решения.

Пусть $RankA = k$, и M_k - базисный минор матрицы A (напомним, что таких миноров может быть несколько, и мы можем взять любой из них). Оставляя только базисные уравнения и отбрасывая небазисные, мы получаем систему k уравнений с n неизвестными.

Если количество неизвестных $n = k$, система имеет только тривиальное решение, так как ее главный определитель $\Delta = M_k$ отличен от нуля, а все вспомогательные определители равны нулю.

Если $n > k$, система имеет $n-k$ свободных неизвестных, а следовательно - бесконечное множество решений. Можно получить ее общее решение уже изложенным выше методом. Но факт однородности системы позволяет пойти немного дальше, основываясь на свойствах ее решений. Именно,

а) если $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ - решение системы (20), то его произведение на любое число λ, то есть $(\lambda x_{10}, \lambda x_{20}, \ldots, \lambda x_{n0})$, также является решением;

б) если $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$ - два решения системы (20), то их сумма, то есть $(x_{11} + x_{12}, x_{21} + x_{22}, \ldots, x_{n1} + x_{n2})$, также является решением.

Попробуйте доказать эти два свойства самостоятелььно.

Названные свойства решений лежат в основе теоремы, согласно которой все решения системы линейных однородных уравнений (20) могут быть получены из так называемой **фундаментальной системы решений.** Последнюю можно создать, последовательно приписывая значения

$$(1; 0; 0; \ldots; 0), (0; 1; 0; \ldots; 0), (0; 0; 1; \ldots; 0), \ldots, (0; 0; 0; \ldots; 1)$$

свободным неизвестным, входящим в общее решение системы.

Пример. Найти фундаментальную систему решений следующей системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 & = & 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 & = & 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Матрица системы

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет ранг $k = 2$ (проверьте!), в качестве базисного минора мы можем выбрать следующий

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -17 \neq 0,$$

так что базисными уравнениями и неизвестными являются первые два. Мы отбрасываем третье и четвертое уравнения и переносим свободные неизвестные x_3, x_4 направо,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 & = & 5x_3 - 7x_4, \\ 2x_1 - 3x_2 & = & -3x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид (проверьте!)

$$\left(3/17\, x_3 - 13/17\, x_4;\, 19/17\, x_3 - 20/17\, x_4;\, x_3;\, x_4\right).$$

Полагая последовательно $x_3 = 1, x_4 = 0; x_3 = 0, x_4 = 1$ в общем решении, мы получаем фундаментальную систему решений, а именно:

$$\left(3/17;\, 19/17;\, 1;\, 0\right), \quad \left(-13/17;\, -20/17;\, 0;\, 1\right),$$

или (умножая оба ее решения на 17)

$$\left(3;\, 19;\, 17;\, 0\right), \quad \left(-13;\, -20;\, 0;\, 17\right).$$

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Пусть M – множество всех n-мерных векторов-столбцов, а именно множество всех матриц-столбцов размера $n \times 1$, и отображение f множества M в себя, определенное квадратной матрицей n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Это означает что каждому вектору

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in M$$

матрица A ставит в соответствие единственный вектор

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in M$$

такой, что

$$Y = f(X) = AX \,. \qquad (21)$$

Во многих приложениях, в том числе экономических, часто возникает следующий вопрос: существует ли ненулевой вектор X (**собственный вектор**), для которого

$$AX = \lambda X \,, \qquad (22)$$

где λ - некоторое число (**собственное значение**)?

1. Известно, что собственные значения находятся как корни следующего уравнения

$$|A - \lambda E| = Det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \,. \qquad (23)$$

Последнее (после раскрытия определителя) является алгебраическим уравнением *n*-ой степени относительно λ.

2. Для каждого корня уравнения (23) (то есть для каждого собственного значения) $\lambda = \lambda_0$ один или несколько соответствующих собственных векторов находят, решая следующее матричное уравнение

$$(A - \lambda_0 E)X = 0,$$

или (в развернутом виде)

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_0)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_0)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_0)x_n & = & 0, \end{cases} \tag{24}$$

- систему линейных однородных уравнений относительно $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. На основании (23) ранг ее матрицы меньше *n*.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Находим собственные значения матрицы *A*. На основании формулы (23) мы должны решить уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, имеем

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 5-\lambda & -3 & 2 & 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda & 4 & 6 & -4-\lambda \\ 4 & -4 & 5-\lambda & 4 & -4 \end{matrix} \right\} =$$

$$= (5-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) - 48 - 48 + 8(4+\lambda) + 16(5-\lambda) + 18(5-\lambda) =$$

$$= (\lambda^2 - \lambda - 20)(5-\lambda) + 106 - 26\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda - 100 + 106 - 26\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6), \quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Полученное кубическое уравнение имеет три различных корня

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Шаг 2.1. Для $\lambda_1 = 1$ мы на основании (24) должны решить следующую систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (5-1)x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 0, \\ 6x_1 + (-4-1)x_2 + 4x_3 & = & 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + (5-1)x_3 & = & 0; \end{cases} \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 0, \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 & = & 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2, так как ее определитель (он же единственный минор 3-го порядка) равен нулю, а, например, минор 2-го порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 12 = -4 \neq 0$$

отличен от нуля. Взяв этот минор в качестве базисного, мы определяем первое и третье уравнения, первые два неизвестных как базисные, а третье неизвестное как свободное, откуда

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 0; \end{cases} \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 & = & -2x_3, \\ x_1 - x_2 & = & -x_3. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 1$, мы находим значения $x_1 = 1, x_2 = 2$ и собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 1$, а именно

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.2. Для $\lambda_2 = 2$ мы аналогично имеем

$$\begin{cases} (5-2)x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 0, \\ 6x_1 + (-4-2)x_2 + 4x_3 & = & 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + (5-2)x_3 & = & 0; \end{cases} \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 0, \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 & = & 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 & = & 0. \end{cases}$$

Базисными уравнениями и неизвестными здесь являются первые и третьи, а свободным неизвестным - x_2. Следовательно,

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0; \end{cases} \begin{cases} 3x_1 + 2x_3 &= 3x_2, \\ 4x_1 + 3x_3 &= 4x_2. \end{cases}$$

Полагая $x_2 = 1$, получаем $x_1 = 1, x_3 = 0$ и второй собственный вектор

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2.3. Наконец, для $\lambda_3 = 3$ мы таким же образом получаем третий собственный вектор

$$\begin{cases} (5-3)x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 + (-4-3)x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + (5-3)x_3 = 0; \end{cases} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -2x_3, \\ 6x_1 - 7x_2 = -4x_3; \end{cases} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, соответственно равны

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вопросы для самопроверки
по темам "Системы линейных уравнений" и "Матрицы"

1. Что называется решением системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными?

2. Дать определения совместной и несовместной систем уравнений.

3. Сформулировать правило Крамера для решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

4. При каких условиях система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесконечное множество решений?

4. В чем состоит сущность метода Гаусса для решения системы линейных алгебраических уравнений? Чем отличается от него метод Жордана – Гаусса?

5. Дать определение обратной матрицы.

6. Сформулировать правило нахождения обратной матрицы для данной квадратной матрицы с отличным от нуля определителем.

7. В чем состоит суть матричного метода для решения системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными?

8. Дать определение ранга матрицы.

9. Что такое элементарные преобразования матрицы? В чем состоит их польза?

10. Сформулировать теорему Кронекера – Капелли об условии совместности системы линейных алгебраических уравнений.

11. Что такое базисный минор, базисные уравнения и базисные неизвестные и как они используются для решения систем линейных алгебраических уравнений?

12. Что такое общее решение системы линейных алгебраических уравнений и в каком случае оно возникает?

13. Что такое система линейных однородных алгебраических уравнений?

14. Сформулировать свойства решений системы линейных однородных алгебраических уравнений.

15. В каком случае система линейных однородных алгебраических уравнений может иметь только тривиальное (нулевое) решение?

16. Указать случай, когда такая система имеет бесконечное множество решений. Как получить фундаментальную систему решений системы в этом случае?

17. Что такое собственное значение и собственный вектор матрицы?

18. Как ищутся собственные значения матрицы?

19. Как искать собственный вектор, соответствующий данному собственному значению?

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ПРЯМАЯ И ОКРУЖНОСТЬ

Уравнение линии. Окружность

Аналитическая геометрия – ветвь математики, где геометрические задачи решаются аналитическими методами. В основе всех этих методов лежит концепция системы координат (метод координат). Основы аналитической геометрии были заложены Виетом[6], Ферма[7] и Декартом[8].

Пусть на плоскости xOy задана так называемая декартова прямоугольная система координат, образованная двумя взаимно перпендикулярными осями Ox, Oy с одинаковыми единицами измерения на них (рис. 1). Приведем сначала примеры применения координатного метода к двум простым задачам.

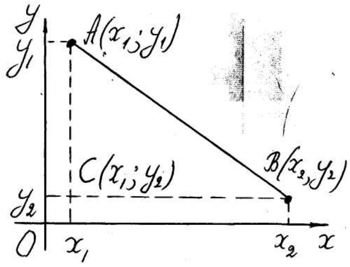


Рис. 1

Пример. Найти расстояние между двумя данными точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, которые заданы своими координатами (рис. 1).

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{CB^2 + CA^2}\,;\ CB = |x_2 - x_1|,\ CB^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2;\ CA^2 = (y_2 - y_1)^2,$$

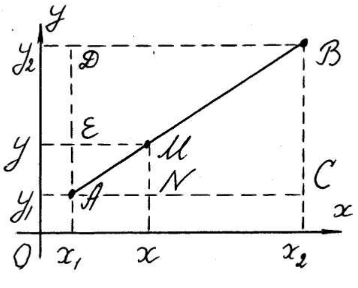


Рис. 2

откуда

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (1)$$

Пример. Найти координаты точки $M(x; y)$ которая делит отрезок к концами $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ в данном отношении λ, то есть (рис. 2)

---

[6] Франсуа Виет (*или* Вьет) (1540 - 1603) - французский математик
[7] Пьер Ферма (1601 - 1665) - знаменитый французский математик
[8] Рене Декарт (1596 - 1650) - знаменитый французский математик и философ

$$\frac{AM}{MB} = \lambda .$$

На основании соответствующей геометрической теоремы

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \frac{AM}{MB} = \frac{AE}{ED} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \Rightarrow y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Таким образом,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (2)$$

Если, в частности, точка $M_0(x_0; y_0)$ делит отрезок $A(x_1; y_1)B(x_2; y_2)$ пополам, то λ = 1, и соответствующие координаты точки $M_0(x_0; y_0)$ будут равны

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

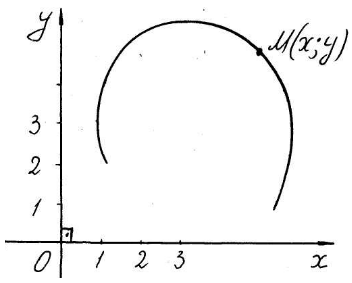


Рис. 3

Определение. Уравнение вида

$$F(x, y) = 0 \qquad (3)$$

называется уравнением линии *L* на плоскости xOy, (см. рис. 3), если координаты любой точки $M(x; y)$ линии, и только координаты таких точек, удовлетворяют ему.

Например, точка $M(1; 1)$ принадлежит, а точка $N(2; -3)$ не принадлежит линии, заданной уравнением

$$2x + y = 3,$$

так как $2 \cdot 1 + 1 = 3$, а $2 \cdot 2 + (-3) = 1 \neq 3$.

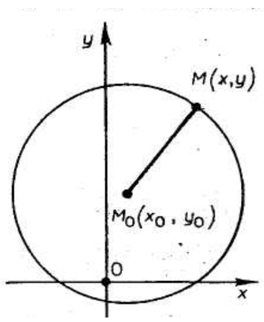


Рис. 4

Точка $M(x; y)$ - произвольная [*или* текущая] точка линии *L*, и ее координаты также называются текущими. Уравнение любой линии должно содержать хотя бы одну текущую координату.

Пример. Окружность радиуса *R* с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 4) задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \qquad (4)$$

которое обычно называется ее **каноническим** уравнением.

В частности, уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (5)$$

является уравнением окружности радиуса R с центром в начале координат. Разрешая его относительно y, а затем относительно x, получаем

a) уравнение нижней полуокружности $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$;

b) уравнение верхней полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$;

c) уравнение левой полуокружности $x = -\sqrt{R^2 - y^2}$;

d) уравнение правой полуокружности $x = \sqrt{R^2 - y^2}$.

Пример. Выяснить, какую линию задает уравнение

$$x^2 - 4x + y^2 + 10y + 5 = 0.$$

Дополняя до полных квадратов,

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 - 4 - 25 + 5 = 0, (x-2)^2 + (y+5)^2 = 24,$$

$$(x-2)^2 + (y-(-5))^2 = 24,$$

Получаем уравнение окружности радиуса $R = 2\sqrt{6}$ с центром $M(2; -5)$.

Чтобы найти **точки пересечения** двух линий l_1, l_2, представленных уравнениями

$$l_1 : F_1(x, y) = 0, \quad l_2 : F_2(x, y) = 0,$$

достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Прямая

Определение. Угловым коэффициентом k прямой l называется тангенс угла α, который она образует с положительным направлением оси Ox (рис. 5),

$$k = tan\alpha. \qquad (7)$$

Следует знать и четко различать несколько основных видов уравнений прямой.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

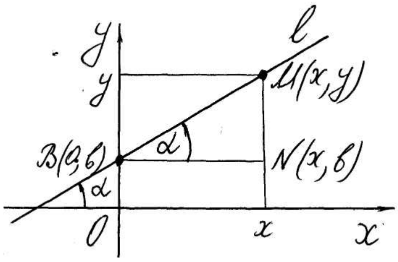


Рис. 5

$$y = kx + b, \qquad (8)$$

где b - ордината точки пересечения $B(0; b)$ прямой l с осью Ox (рис. 5).

■Действительно, для произвольной (текущей) точки $M(x; y)$ прямой имеем (см. рис. 5)

$$k = tan\,\alpha = \frac{NM}{BN} = \frac{y-b}{x} \Rightarrow kx = y - b,\ y = kx + b.$$

Пример. Уравнение прямой, проходящей через точку $B(0; -7) \in Oy$ под углом $\alpha = \pi/3$ к (положительному направлению) оси *Ox*, суть

$$y = \sqrt{3}x - 7,$$

так как здесь $k = \tan \pi/3 = \sqrt{3}, b = -7$.

Пример. Ось *Ox* (ввиду того, что для нее $k = b = 0$), задается уравнением

$$y = 0.$$

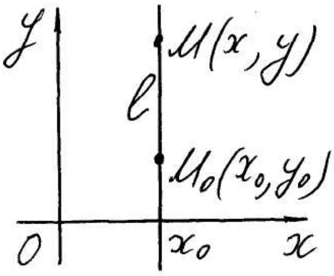


Рис. 6

Уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox и проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 6)

$$x = x_0 \qquad (9)$$

Пример. Уравнение оси *Oy* (для которой $x_0 = 0$)

$$x = 0.$$

Общее уравнение прямой

$$ax + by + c = 0, \qquad (10)$$

где по крайней мере один из коэффициентов a, b отличен от нуля $(a^2 + b^2 \neq 0)$. из уравнения (10) немедленно следует формула для нахождения углового коэффициента прямой,

$$k = -\frac{b}{a}. \qquad (11)$$

Пример. Угловой коэффициент прямой $5x + 6y = 30$ равен $k = -5/6$, так как $6y = 30 - 5x$, $y = -5/6\,x + 5 \Rightarrow k = -5/6$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая *l* проходит через некоторую известную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет заданный угловой коэффициент $k = tan\,\alpha$ (рис. 7). В этом случае ее уравнение может быть записано в виде

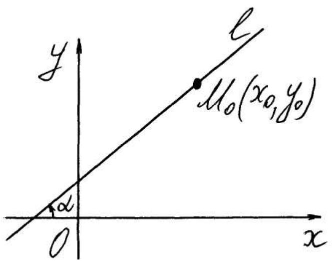


Рис. 7

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (12)$$

Пример. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3)$ и образующей угол $3/4\pi$ с положительным направлением оси *Ox*. На основании уравнения (12) (при $x_0 = 2$, $y_0 = -3$ и угловом коэффициенте $k = \tan 3/4\pi = -1$) имеем

$y - (-3) = \tan 3/4\pi \cdot (x - 2)$, $y + 3 = -(x - 2)$, и окончательно $x + y + 1 = 0$.

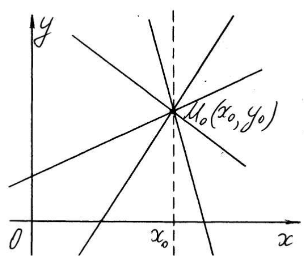


Рис. 8

Определение. Множество прямых, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 8) называется **пучком** прямых с центром $M_0(x_0, y_0)$.

Уравнение (12) дает все прямые пучка, за исключением прямой $x = x_0$, которая перпендикулярна к оси *Ox* и не имеет углового коэффициента (иногда говорят, что ее угловой коэффициент бесконечен). По этой причине уравнение (12) часто называют **уравнением пучка прямых** с центом $M_0(x_0, y_0)$.

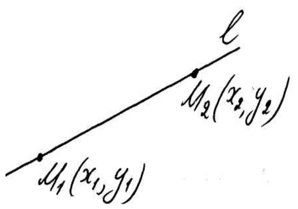


Рис. 9

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 9).

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \qquad (13)$$

или в более употребительной форме

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (14)$$

Координаты точек $M_1(x_1;\, y_1)$, $M_2(x_2;\, y_2)$ позволяют найти угловой коэффициент прямой без предварительного составления ее уравнения,

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (15)$$

Пример. Найти центр тяжести треугольника с известными вершинами $A(3;-4)$, $B(5;6)$, $C(7;-8)$.

Центр тяжести треугольника – это точка пересечения его медиан. Координаты середины D стороны BC треугольника

$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{5+7}{2}=6;\; y_D=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{6+(-8)}{2}=-1;\; D(6;-1),$$

откуда, применяя уравнение (14), получаем уравнение медианы AD,

$$\frac{x-x_A}{x_D-x_A}=\frac{y-y_A}{y_D-y_A},\; \frac{x-3}{6-3}=\frac{y-(-4)}{-1-(-4)},\; \frac{x-3}{3}=\frac{y+4}{3},\; x-y-7=0.$$

Таким же образом мы находим середину $E(5;-6)$ стороны AC и уравнение медианы BE,

$$\frac{x-x_B}{x_E-x_B}=\frac{y-y_B}{y_E-y_B},\; \frac{x-5}{5-5}=\frac{y-6}{-6-(-6)},\; \frac{x-5}{0}=\frac{y-6}{-12},\; x-5=0.$$

Для нахождения точки M пересечения медиан AD и BE решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x-y-7=0, \\ x-5=0, \end{cases}$$

откуда $x=5$, $y=-2$. Центром тяжести треугольника является точка $M(5;-2)$.

Пример. Составить приближенное уравнение биссектрисы внутреннего угла при вершине A треугольника с вершинами $A(-1;5)$, $B(-2;-2)$, $C(5;5)$.

Решение задачи состоит из трех шагов.

1. Искомая биссектриса пересекает противоположную сторону BC тре-

угольника в некоторой точке D, которая делит BC в отношении $BD{:}DC$, равном $\lambda = AB : AC$ (по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника). По формуле (1)

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (5-(-2))^2} = \sqrt{50},\ AC = 6,$$

$$\lambda = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{50}}{6} \approx 1.2.$$

2. На основании формулы (2) находим координаты точки D,

$$x_D = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} \approx \frac{-2+1.2\cdot 5}{1+1.2} \approx 1.8,\ y_D = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} \approx \frac{-2+1.2\cdot 5}{1+1.2} \approx 1.8;\ D(1.8; 1.8).$$

3. Теперь мы находим приближенное уравнение биссектрисы AD как прямой, проходящей через две данные точки $A(-1;\,5)$, $D(1.8;\,1.8)$; на основании уравнения (14)

$$\frac{x-x_A}{x_D-x_A} = \frac{y-y_A}{y_D-y_A},\ \frac{x-(-1)}{1.8-(-1)} = \frac{y-5}{1.8-5},\ \frac{x+1}{2.8} = \frac{y-5}{-3.2},\ \begin{array}{c} 3.2x + 2.8y - 10.8 = 0, \\ 8x + 7y - 27 = 0. \end{array}$$

Уравнение прямой в отрезках, отсекаемых ею на координатных осях

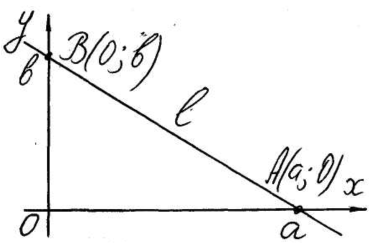


Рис. 10

Пусть прямая l отсекает отрезки OA, OB на осях Ox, Oy (соответственно) и $A(a;\,0) \in Ox, B(0;\,b) \in Oy$ (см. рис. 10). В таком случае уравнение прямой может быть записано в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (16)$$

Пример. Найти площадь треугольника, ограниченного координатными осями и прямой $3x + 5y + 30 = 0$.

Сведем уравнение прямой к виду (16),

$$3x + 5y = -30,\ \frac{3}{-30}x + \frac{5}{-30}y = 1,\ \frac{x}{-10} + \frac{y}{-6} = 1 \quad (a = -10,\, b = -6).$$

Тогда искомая площадь будет равна

$$S=\frac{1}{2}|a||b|=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 6=30 \text{ (квадратных единиц).}$$

Взаимное расположение двух прямых

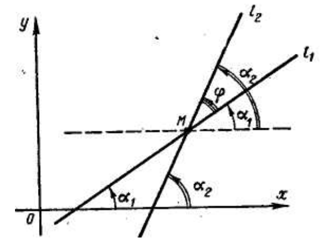


Рис. 11

Угол между двумя прямыми

Пусть даны две прямые l_1, l_2 с известными угловыми коэффициентами $k_1 = tan\,\alpha_1, k_2 = tan\,\alpha_2$ (рис. 11). Угол $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ между ними определяется по формуле

$$tan\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (17)$$

Пример. Найти угол между двумя прямыми линиями, заданными их общими уравнениями: $(l_1): 3x - 4y - 12 = 0; \quad (l_2): 2x + 5y - 20 = 0$.

Находя угловые коэффициенты прямых, применяем формулу (17).

$$(l_1): y = \frac{3}{4}x - 3 \ \ (k_1 = 0.75); (l_2): y = -\frac{2}{5}x + 4 \ \ (k_2 = -0.4);$$
$$\tan\varphi = \frac{(-0.4) - 0.75}{1 + (-0.4)\cdot 0.75} \approx -1.6 \Rightarrow \varphi \approx -\arctan 1.6.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Формула (17) позволяет установить необходимое и достаточное условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Две прямые параллельны тогда и только тогда, если равны их угловые коэффициенты,

$$k_1 = k_2. \qquad (18)$$

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, если их угловые коэффициенты удовлетворяю условию

$$k_1 k_2 = -1. \qquad (19)$$

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину A треугольника $A(-1; 5)B(-2; -2)C(5; 5)$ параллельно его стороне BC.

Угловой коэффициент k искомой прямой равен $k = k_{BC}$. Формума (15) дает

$$k = k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5-(-2)}{5-(-2)} = \frac{7}{7} = 1,$$

и на основании формулы (12) имеем

$$y - y_A = k(x - x_A),\ y - 5 = 1\cdot(x-(-1)),\ y - 5 = x + 1,\ x - y + 6 = 0.$$

Пример. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A того же треугольника ABC.

Если мы обозначим k_{alt} угловой коэффициент искомой высоты, то на основании условия (19) перпендикулярности двух прямых будем иметь

$$k_{alt}\cdot k_{BC} = -1,$$

откуда найдем

$$k_{alt} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Теперь записываем уравнение высоты, применяя уравнение (12),

$$y - y_A = k_{alt}(x - x_A),\ y - 5 = -1\cdot(x-(-1)),\ y - 5 = -x - 1,\ x + y - 4 = 0.$$

Дальнейшие примеры

Пример. Найти точку Q, которая симметрична точке $P(-8;12)$ относительно прямой, проходящей через две данные точки $A(2;-3)$, $B(-5;1)$ (рис. 12). Найти расстояние точки $P(-8;12)$ от прямой AB.

1. Составляем уравнение прямой AB (на основании формулы (14))

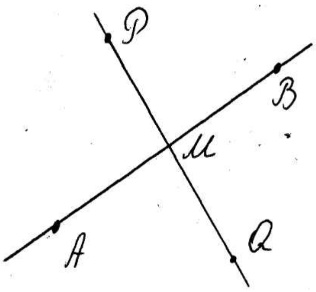


Fig. 12

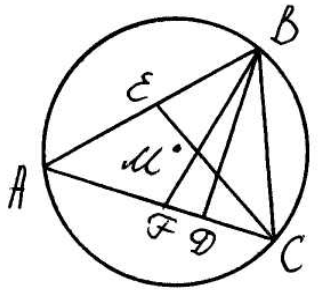


Fig. 13

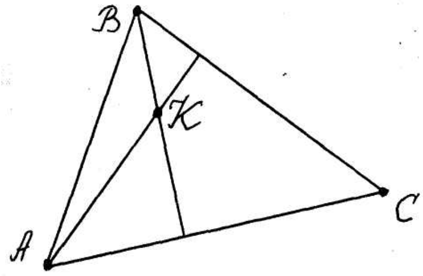


Fig. 14

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A},\ \frac{x-2}{(-5)-2}=\frac{y-(-3)}{1-(-3)},\ \frac{x-2}{-7}=\frac{y+3}{4}\Rightarrow 4x+7y+13=0,\ k_{AB}=-\frac{4}{7}.$$

2. Составим уравнение прямой *PQ*, которая перпендикулярна прямой *AB* и проходим через точку $P(-8;12)$. На основании условия перпендикулярности прямых

$$k_{PQ}\cdot k_{AB}=-1,\ k_{PQ}=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{7}{4}.$$

Теперь на основании уравнения (12) получаем

$$y-y_P=k_{PQ}(x-x_P),\ y-12=\frac{7}{4}(x-(-8)),\ 4y-48=7x+56,\ 7x-4y+104=0.$$

3. Находим точку M пересечения прямых *PQ* и *AB*. Решая соответствующую систему уравнений

$$\begin{cases} 4x+7y+13=0, \\ 7x-4y+104=0, \end{cases}$$

получаем $x=x_M=-12,\ y=y_M=5\Rightarrow M(-12;5)$.

4. Для нахождения искомой точки *Q* примем во внимание, что найденная точка $M(-12;5)$ является серединой отрезка *PQ*, а следовательно

$$x_M=\frac{x_P+x_Q}{2}\Rightarrow x_Q=2x_M-x_P=-24-(-8)=-16,\ y_Q=2y_M-y_P=10-12=-2.$$

Таким образом, мы нашли искомую точку $Q(-16;-2)$.

5. Для нахождения расстояния точки $P(-8;12)$ от прямой *AB* достаточно найти расстояние между точками $P(-8;12)$ и $M(-12;5)$,

$$d_{P,AB}=PM=\sqrt{(x_P-x_M)^2+(y_P-y_M)^2}=\sqrt{((-8)-(-12))^2+(12-5)^2}=$$
$$=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}\approx 8.06.$$

Пример. Даны вершины $A(4;-5),\ B(7;1),\ C(-2;6)$ треугольника *ABC* (см. рис. 13). Составьте самостоятельно уравнения его высоты *BD*, медианы *CE* и биссектрисы *BF*. Составить далее уравнение окружности, описанной около треугольника.

Пусть точка $M(a;b)$ является центром описанной окружности. Это значит, что

$$\begin{cases} MA = MB, \\ MA = MC; \end{cases} \begin{cases} MA^2 = MB^2, \\ MA^2 = MC^2; \end{cases} \begin{cases} (a-4)^2 + (b+5)^2 = (a-7)^2 + (b-1)^2, \\ (a-4)^2 + (b+5)^2 = (a+2)^2 + (b-6)^2. \end{cases}$$

Мы получили систему уравнений относительно координат точки $M(a;b)$. Возводя в квадрат и приводя подобные члены, сводим систему к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2a + 4b = 3, \\ 12a - 22b = 1; \end{cases} a = \frac{35}{46} \approx 0.76, b = \frac{17}{46} \approx 0.37.$$

Квадрат радиуса окружности равен

$$R^2 = MA^2 \approx (0.76-4)^2 + (0.37+5)^2 \approx 39.33,$$

Откуда получаем приближенное уравнение описанной окружности

$$(x-0.76)^2 + (y-0.37)^2 = 39.33.$$

Пример. Даны две вершины $A(3;\,6), B(-4;-3)$ и точка пересечения $K(4;1)$ высот треугольника ABC (рис. 14). Найти координаты вершины C.

Решение.

1. Имея точки A, K, по формуле (15) находим угловой коэффициент k_{AK} высоты AK:

$$k_{AK} = \frac{y_K - y_A}{x_K - x_A} = \frac{1-6}{4-3} = -5.$$

2. Используя условие перпендикулярности $k_{AK} \cdot k_{BC} = -1$ прямых AK, BC, находим угловой коэффициент k_{BC} стороны BC,

$$k_{BC} = -\frac{1}{k_{AK}} = \frac{1}{5}.$$

3. С помощью уравнения (12) составляем уравнение прямой BC:

$$y = y_B + \frac{1}{5}(x - x_B), \quad y = -3 + \frac{1}{5}(x+4), \quad x - 5y - 11 = 0 \quad (BC).$$

4. Таким же путем составляем уравнение прямой AC:

$$k_{BK}=\frac{y_K-y_B}{x_K-x_B}=\frac{1+3}{4+4}=\frac{1}{2};\quad k_{AC}=-\frac{1}{k_{BK}}=-2;$$

$$y=y_A-2(x-x_A),\quad y=6-2(x-3),\quad 2x+y-12=0\quad (AC).$$

5. Находим точку C пересечения прямых $BC,\ AC$, решая систему уравнений этих прямых.

$$\begin{cases}x-5y-11=0,\\ 2x+y-12=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x-5y-11=0,\\ 11y+10=0;\end{cases}\quad y=-\frac{10}{11}\Rightarrow x=11+5x=\frac{71}{11}\Rightarrow C\left(\frac{71}{11};-\frac{10}{11}\right).$$

Замечание. Расстояние точки $M_0(x_0;\,y_0)$ от прямой l, заданной общим уравнением

$$ax+by+c=0,$$

может быть найдено с помощью следующей формулы:

$$d=d_{M_0,l}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\qquad (20)$$

Пример. Составить уравнение окружности с центром $A(-4;\,7)$, которая касается прямой $5x-9y+3=0$.

Радиус окружности равен расстоянию точки $A(-4;\,7)$ от данной прямой. Находим его с помощью формулы (20),

$$R=\frac{|5\cdot(-4)-9\cdot 7+3|}{\sqrt{5^2+(-9)^2}}=\frac{|-80|}{\sqrt{106}}=\frac{80}{\sqrt{106}};\ R^2=\frac{6400}{106}=\frac{3200}{53}.$$

Теперь составляем искомое уравнение окружности,

$$(x-(-4))^2+(y-7)^2=\frac{3200}{53},\quad (x+4)^2+(y-7)^2=\frac{3200}{53}.$$

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение

$$ax+by+c=0,$$

которое при условии $a^2+b^2\neq 0$ является общим уравнением прямой, называется **общим уравнением линии первого порядка**.

Уравнение второго порядка с переменными x и y

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

называется **общим уравнением кривой второго порядка**.

Пример. Пусть $A = C = 1$ и $B = 0$,

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (2)$$

Дополняя до полных квадратов, имеем

$$x^2 + 2Dx + D^2 + y^2 + 2Ey + E^2 = D^2 + E^2 - F,$$

$$(x + D)^2 + (y + E)^2 = D^2 + E^2 - F. \qquad (3)$$

Уравнение (3) является уравнением окружности при $D^2 + E^2 - F > 0$. Оно определяет только одну точку $(-D; -E)$ при $D^2 + E^2 - F = 0$. Уравнение не определяет никакой линии в случае $D^2 + E^2 - F < 0$ (иногда говорят, что оно определяет в этом случае так называемую мнимую окружность).

Пример. Определить вид кривой второго порядка

$$x^2 + y^2 - 8x + 12y + 1 = 0.$$

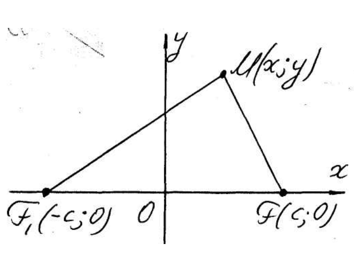
Дополняя до полных квадратов, получаем

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 12y + 36 + 1 = 52 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 51.$$

Следовательно, данное уравнение определяет окружность с центром в точке $M_0(4; -6)$ и радиусом $R = \sqrt{51}$.

Мы кратко рассмотрим другие важные примеры кривых второго порядка – эллипс, гиперболу и параболу.

Эллипс



Определение. Эллипсом называется плоская кривая, обладающая следующим свойством: сумма расстояний любой ее точки $M(x; y)$ от двух данных точек F_1, F_2 (так называемых фокусов) является постоянной величи-

Рис. 1 ной.

Предположим, что расстояние между фокусами (фокусное расстояние) эллипса равно $2c$, а сами фокусы расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат,

$$F_1(-c;0), F_2(c;0).$$

Если положить, что

$$MF_1 + MF_2 = const = 2a$$

(см. рис. 1; очевидно, что $a > c$), то после некоторых преобразований мы получим следующее уравнение эллипса (так называемое **каноническое уравнение эллипса**)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4)$$

где b - положительное число, определяемое из соотношения

$$a^2 = b^2 + c^2. \qquad (5)$$

Очевидно, что $b < a$.

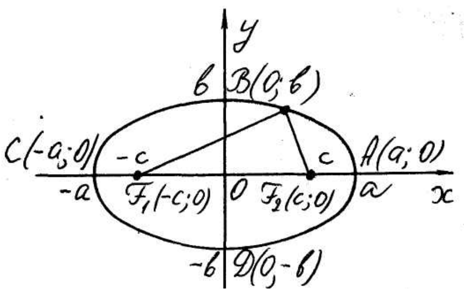


Рис. 2

Эллипс **симметричен** относительно координатных осей и, следовательно, относительно начала координат. Он пересекает координатные оси в точках

$$A(a;0), B(0;b), C(-a;0), D(0;-b),$$

которые называются его **вершинами** (см. рис. 2).

Число a называется **большой полуосью**, а число b – **малой полуосью** эллипса.

Определение. Эксцентриситетом эллипса называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \qquad (6)$$

Очевидно,

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Если (при фиксированном a) $b \to a$, то есть если эллипс приближается по форме к окружности, то $\varepsilon \to 0$. Если же $b \to 0$, то есть эллипс сжимается к отрезку AC, то $\varepsilon \to 1$. Таким образом, эксцентриситет эллипса является мерой его сплющенности.

Замечание. Уравнение (4) определяет эллипс не только при условии $b < a$, но и при противоположном условии $b > a$. Достаточно положить

$$MF_1 + MF_2 = const = 2b \quad (b > c)$$

и заменить формулы (5), (6) следующими:

$$b^2 = a^2 + c^2 \quad (b > a), \tag{7}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}. \tag{8}$$

Для случая $b > a$ большой полуосью эллипса является число b, малой – число a, а фокусы $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$ располагаются на оси ординат.

Пример. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через две данные точки $M_1(4; -\sqrt{3})$, $M_2(2\sqrt{2}; 3)$.

Точки $M_1(4; -\sqrt{3})$, $M_2(2\sqrt{2}; 3)$ должны удовлетворять уравнение (4), поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{4^2}{a^2} + \dfrac{(-\sqrt{3})^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{(2\sqrt{2})^2}{a^2} + \dfrac{3^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 1, \\ \dfrac{8}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1. \end{cases} \quad \text{Пусть } \begin{array}{l} \dfrac{1}{a^2} = m, \\ \dfrac{1}{b^2} = n, \end{array} \text{ тогда } \begin{cases} 16m + 3n = 1, \\ 8m + 9n = 1, \end{cases} \begin{array}{l} m = \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{20}, \\ n = \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{15}. \end{array}$$

Искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1.$$

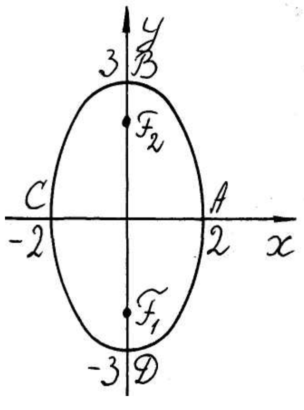


Рис. 3

Пример. Доказать, что уравнение $9x^2 + 4y^2 = 36$ является уравнением эллипса. Изобразить его в плоскости xOy, найти его фокус, вершины и эксцентриситет.

Разделив обе части уравнения на 36, получаем

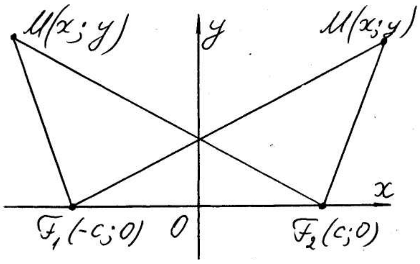
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

то есть уравнение эллипса с полуосями $a = 2, b = 3$. Большая полуось эллипса здесь $b = 3$, малая - $a = 2$. По формуле (7) $b^2 - a^2 = c^2$, $c^2 = 9 - 4 = 5, c = \sqrt{5}$, и фокусы эллипса $F_1\left(0; -\sqrt{5}\right), F_2\left(0; \sqrt{5}\right)$ лежат на оси Oy (рис. 3). На основании формулы (8) эксцентриситет эллипса равен

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.75$$

Гипербола

Определение. Гиперболой называется плоская кривая, обладающая следующим свойством: разность расстояний любой ее точки $M(x; y)$ от двух дан-ных точек F_1, F_2 (так называемых фокусов) является постоянной величиной.



Как и в случае эллипса, обозначим фокусное расстояние $2c$, и расположим фокусы таким же точно образом, $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$.

Полагая на основании определения гиперболы

Рис. 4

$$|MF_1 - MF_2| = const = 2a$$

(рис. 4, где теперь $a < c$), получаем уравнение - **каноническое уравнение гиперболы**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (9)$$

где число b определяется по формуле

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (10)$$

Гипербола симметрична относительно координатных осей и начала координат. Она пересекает ось Ox в двух точках $A(c; 0)$, $C(-c; 0)$, то есть обладает только двумя вершинами. С осью Oy гипербола не пересекается и, следовательно, состоит из двух ветвей (рис. 5).

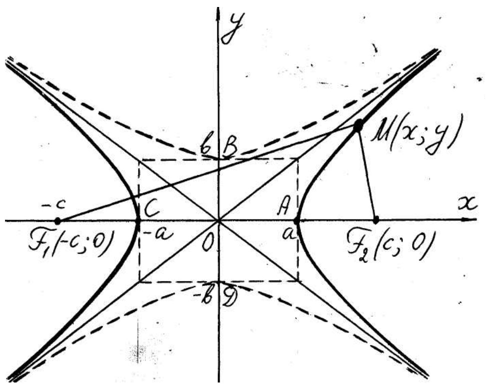


Рис. 5

Число a называется **вещественной** полуосью, а b – **мнимой** полуосью гиперболы.

Прямые $x = a, x = -a, y = b, y = -b$ образуют так называемый **основной прямоугольник** гиперболы, диагонали которого, то есть прямые

$$y = \pm \frac{b}{a} x, \qquad (11)$$

называются **асимптотами** гиперболы. Смысл этого термина состоит в следующем. Если точка гиперболы уходит в бесконечность, она неограниченно приближается к одной из асимптот.

■Пусть, например, точка $M(x; y)$ находится в первой четверти и уходит в бесконечность. Выразив y через x с помощью уравнения (9),

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2}, \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}, y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right), y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \ (\text{for } y > 0),$$

мы убеждаемся в том, что при $x \to +\infty$ разность

$$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

стремится к нулю. А это значит, что точка $M(x; y)$ неограниченно приближается к асимптоте

$$y = \frac{b}{a} x \ ■$$

Определение. Эксцентриситет гиперболы определяется аналогичной формулой, что и для эллипса, а именно:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \qquad (12)$$

причем, в отличие от эллипса, $\varepsilon > 1$.

Для построения гиперболы следует сначала построить ее основной прямоугольник и асимптоты, а затем уже заняться непосредственно самой кривой.

Замечание. Кривая, заданная уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad (13)$$

также является гиперболой (см. пунктирную линию на рис. 5). Она называется **сопряженной гиперболой** для гиперболы, заданной уравнением (9). Основной прямоугольник и асимптоты обеих гипербол совпадают, но числа a и b меняются ролями: для сопряженной гиперболы b является вещественной, а a – мнимой полуосями. Эксцентриситет сопряженной гиперболы дается формулой

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}. \qquad (14)$$

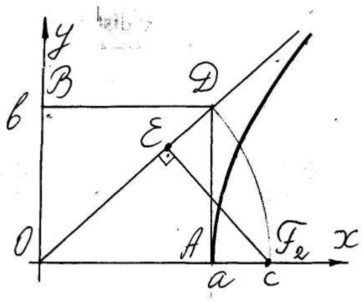


Рис. 6

Пример. Найти расстояние от фокуса $F_2(c;0)$ гиперболы (9) до ее асимптот (11).

Найдем, например, расстояние F_2E от асимптоты $y=\frac{b}{a}x$ (рис. 6).

Прямоугольные треугольники $0F_2E, OAD$ равны по гипотенузе

$$OF_2 = c, OD = \sqrt{a^2+b^2} = c$$

и общему острому углу $\angle AOD$. Следовательно, $F_2E = AD = b.$

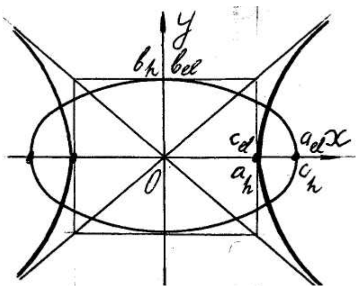


Рис. 7

Пример. Составить каноническое уравнение эллипса, вершины которого находятся в фокусах гиперболы

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

а фокусы – в ее вершинах (рис. 7).

Представим канонические уравнения гиперболы и эллипса в следующем виде:

$$\frac{x^2}{a_h^2} - \frac{y^2}{b_h^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a_{el}^2} + \frac{y^2}{b_{el}^2} = 1, \quad \begin{array}{l} a_h = \sqrt{5}, b_h = 2, \\ c_h = \sqrt{a_h^2 + b_h^2} = 3. \end{array}.$$

Из Рис. 7 и формул (5), (10) видим, что

$$a_{el} = c_h = 3, c_{el} = a_h = \sqrt{5}, b_{el} = \sqrt{a_{el}^2 - c_{el}^2} = \sqrt{c_h^2 - a_h^2} = b_h = 2,$$

откуда получаем искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Парабола

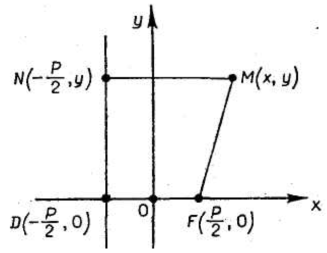


Рис. 8

Определение. Параболой называется плоская кривая, каждая точка $M(x;\, y)$ которой равноудалена от данной точки F (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Выберем координатные оси таким образом, чтобы фокус располагался на оси Ox на расстоянии $p/2$ от начала координат, $F(p/2\,;\,0)$, а директриса задавалась уравнением

$$x=-\,p/2,$$

(см. рис. 8). Здесь p (так называемый **параметр** параболы) – положительное число, равное расстоянию от фокуса до директрисы.

Для произвольной точки $M(x;\, y)$ параболы равенство $MF=MN$ (рис. 8) приводит к уравнению (**каноническому уравнению параболы)**

$$y^2=2px. \qquad (15)$$

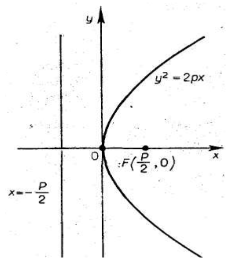


Рис. 9

Парабола симметрична относительно оси Ox и пересекается с ней в начале координат. Точка $O(0;\,0)$ является единственной вершиной параболы (см. рис. 9).

Мы могли бы выбрать фокус и директрису параболы иначе, а именно следующим образом:

$$F\left(-\frac{p}{2};\,0\right), \quad x=\frac{p}{2}.$$

В этом случае каноническое уравнение параболы имело бы несколько иной вид,

$$y^2=-2px, \qquad (16)$$

а сама она располагалась в левой полуплоскости, симметрично параболе (15) относительно оси Oy. Изобразите ее самостоятельно.

Пример. Найти параметр, фокус и директрису параболы $y=-6x^2$.

Ответ. $y = -2 \cdot 3x^2$, $p = 3$, $F\left(0; -\dfrac{3}{2}\right)$, $y = \dfrac{3}{2}$.

Пример. Составить канонические уравнения парабол, фокусы которых располагаются на оси Ox, а (один и тот же) параметр равен расстоянию от фокуса гиперболы

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

до ее асимптоты.

На основании рассмотренного выше примера $p = b = 2$, откуда

$$y^2 = \pm 2px,\ y^2 = \pm 4x.$$

Изобразите самостоятельно эти параболы.

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Положение точки M на плоскости полностью определяется ее декартовыми координатами (абсциссой и ординатой). Но оно может полностью определяться так называемыми полярными координатами точки со следующими элементами: полюс, полярная ось, полярный радиус и полярный угол.

Пусть на плоскости заданы точка O и выходящий из нее луч $O\rho$, которые соответственно называются полюсом и полярной осью (рис. 10). Расстояние $\rho = OM$ точки M от полюса O называется полярным радиусом точки, а угол φ между полярным радиусом и полярной осью – ее полярным углом. Теперь мы можем изобразить эту точку с ее полярными координатами, именно $M(\rho; \varphi)$ (см. рис. 10).

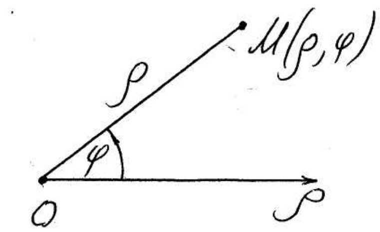


Рис. 10

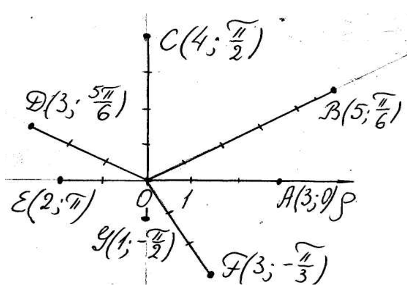


Рис. 11

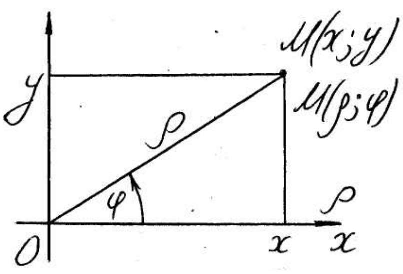


Рис. 12

Чтобы построить точку $M_0(\rho_0;\varphi_0)$ по ее полярным координатам ρ_0, φ_0, нужно провести из полюса луч под углом $\varphi = \varphi_0$ к полярной оси и отложить на нем полярный радиус $OM_0 = \rho_0$ точки.

Пример. На рис. 11 построены точки

$A(3;0),\ B(5;\pi/6),\ C(4;\pi/2),\ D(3;5\pi/6), E(2;\pi), F(3;-\pi/3), G(1;-\pi/2)$

по их полярным координатам.

Переход от декартовых прямоугольных координат к полярным и наоборот

Совместим полюс O с началом декартовой системы координат, а полярную ось $O\rho$ - с положительной полуосью Ox (рис. 12). Если x, y и ρ, φ - декартовы и полярные координаты точки M соответственно $(M(x;y), M(\rho,\varphi))$, то

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(формулы перехода от декартовых координат к полярным) и

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \\ tg\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(формулы перехода от полярных координат к декартовым).

Уравнения некоторых линий в полярных координатах

1. Луч, исходящий из полюса под углом φ_0 к полярной оси (рис. 13).

Для любой точки $M(\rho,\varphi)$ луча мы имеем

$$\varphi = \varphi_0. \tag{19}$$

2. Окружность радиуса R с центром в полюсе (рис. 14).

Для любой точки $M(\rho,\varphi)$ окружности имеем

$$\rho = R. \tag{20}$$

3. Окружность $\rho = 2a\cos\varphi$ (рис. 15).

φ	0	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/3$	$\pm\pi/2$
$cos\,\varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0
ρ	$2a$	$a\,\sqrt{3}$	a	0
Point	A	B_1, B_2	C_1, C_2	O

Приписывая значения 0, $\pm\pi/6$, $\pm\pi/3$, $\pm\pi/2$ полярному углу φ, мы находим соответствующие значения полярного радиуса ρ и соответствующие точки кривой. Затем мы соединяем их плавной линией.

Запишем уравнение линии в декартовых координатах. С этой целью ум-

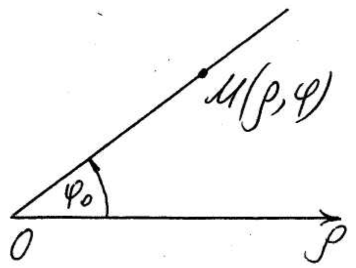


Рис. 13

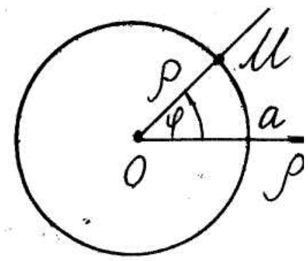


Рис . 14

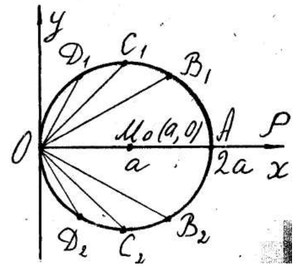


Рис . 15

ножим обе его части на ρ,

$$\rho^2 = 2a\rho\, cos\,\varphi,$$

и примем во внимание формулы (17), (18),

$$x^2 + y^2 = 2ax,\ x^2 - 2ax + y^2 = 0,\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2,\ (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Получили уравнение окружности радиуса a с центром $M_0(a;\,0)$.

4. Кардиоида $\rho = a(1+\cos\varphi)$. С помощью таблицы мы изображаем сначала несколько точек линии, а затем и саму линию (см. рис. 16).

	0^0	$\pm 60^0$	$\pm 90^0$	$\pm 120^0$	$\pm 180^0$
φ	0	$\pm\pi/3$	$\pm\pi/2$	$\pm 2\pi/3$	$\pm\pi$
$cos\,\varphi$	1	½	0	-1/2	-1
$+\ cos\,\varphi$	2	3/2	1	½	0
ρ	$2a$	3/2 a	a	1/2 a	0
Точка	A	B_1, B_2	C_1, C_2	D_1, D_2	O

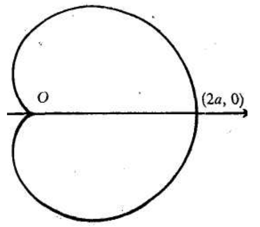


Рис. 16

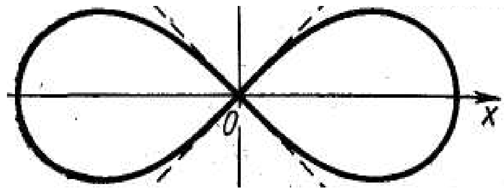


Рис. 17

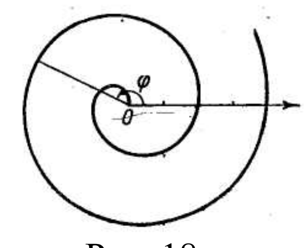


Рис. 18

5. Лемниската Бернулли[9]

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 4a^2\left(x^2-y^2\right).$$

Линия симметрична относительно осей *Ox, Oy*, поэтому мы изучим ее в первом квадранте. Очевидно, что $x^2-y^2 \geq 0,\ x^2 \geq y^2,\ y \leq x$. Переходя к полярным координатам, имеем

$$\left(\rho^2\right)^2 = 4a^2\left((\rho\,cos\,\varphi)^2-(\rho\,sin\,\varphi)^2\right),\ \rho^2 = 4a^2\left(cos^2\varphi - sin^2\varphi\right),\ \rho^2 = 4a^2 cos\,2\varphi,$$

$$\rho = 2a\sqrt{cos\,2\varphi}\,.$$

Давая значения 0, $\pi/12$, $\pi/8$, $\pi/4$ полярному углу φ, составим следующую таблицу и построим лемнискату (рис. 17).

φ°	0^0	15^0	$22{,}5^0$	45^0
φ	0	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/4$
2φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
$cos\,2\varphi$	1	0.9	0.7	0
$\sqrt{cos\,2\varphi}$	1	0.94	0.8	0
ρ	$2a$	1.9 a	1.6 a	0
Точка	*A*	*B*	*C*	*O*

6. Постройте самостоятельно спираль Архимеда[10] $\rho = a\varphi$ (рис. 18).

7. Конические сечения в полярных координатах. Если мы поместим полюс в левом фокусе эллипса, правом фокусе гиперболы, в фокусе параболы соответственно и направим полярную ось от левого до правого фокусов эллипса и гиперболы и от вершины до фокуса параболы (см. рис. 19, 20, 21), то все три

[9] Бернулли, Якоб (1654 - 1705), известный швейцарский математик
[10] Архимед ($\approx$287 В.С. - $\approx$212 В.С.), выдающийся древнегреческий математик, физик и механик

кривые будут иметь то же самое полярное уравнение.

■Пусть, во-первых, $M(\rho,\varphi)$ - произвольная точка эллипса. Тогда

$$F_1M=\rho,\ F_2M=2a-\rho,$$

и на основании теоремы косинусов

$$F_2M^2=F_1M^2+F_1F_2^2-2F_1M\cdot F_1F_2\cos\varphi,\ (2a-\rho)^2=\rho^2+(2c)^2-4c\rho\cos\varphi,$$
$$4a^2-4a\rho+\rho^2=\rho^2+4c^2-4c\rho\cos\varphi,\ 4\left(a^2-c^2\right)=4a\rho\left(1-\frac{c}{a}\cos\varphi\right),$$
$$b^2=a\rho(1-\varepsilon\cos\varphi),\ \rho=\frac{b^2}{a(1-\varepsilon\cos\varphi)}.$$

Введем следующую величину (так называемый параметр эллипса)

$$p=\frac{b^2}{a}.$$

Полярное уравнение эллипса принимает вид

$$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi},$$

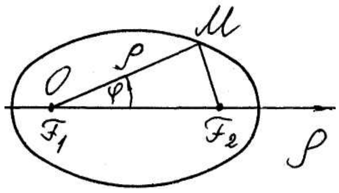


Рис. 19

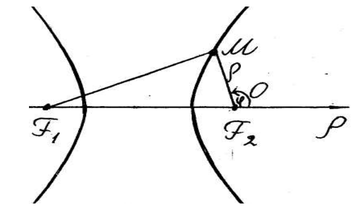


Рис. 20

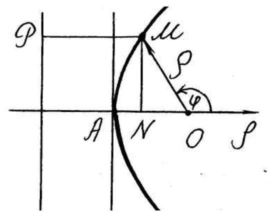


Рис. 21

где эксцентриситет ε удовлетворяет неравенству $0<\varepsilon<1$.

Для гиперболы мы тем же путем выводим такое же самое уравнение, но в предположении, что эксцентриситет $\varepsilon>1$ (сделайте это самостоятельно).

Наконец, для параболы мы имеем (fig. 21)

$$\rho=OM=MP=\frac{p}{2}+AN=\frac{p}{2}+(AO-NO)=\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}-\rho\cos(\pi-\varphi)\right)=p+\rho\cos\varphi,$$
$$\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi},$$

то есть то же самое уравнение с эксцентриситетом $\varepsilon=1$.■

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Общее уравнение кривой второго порядка (1) может быть приведено к каноническому виду с помощью преобразования координат.

Рассматриваются два типа преобразований координат: 1) параллельный перенос координатных осей, когда новое начало координат O' помещается в точку с координатами x_0, y_0 в старой системе координат, а новые оси $O'x', O'y'$ параллельны старым осям *Ox, Oy* соответственно (рис. 22); 2) поворот координатных осей на угол α около начала координат *O* с появлением новых координатных осей Ox', Oy' (рис. 23).

Пусть *x*, *y* – координаты точки *M* в системе координат *xOy* (старые координаты), а x', y' - координаты той же самой точки *M* в новой системе координат (новые координаты). Необходимо установить связь между старыми и новыми координатами.

В случае параллельного переноса координатных осей такая связь очевидна (см. рис. 22):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x', \\ y &= y_0 + y'. \end{aligned} \qquad (21)$$

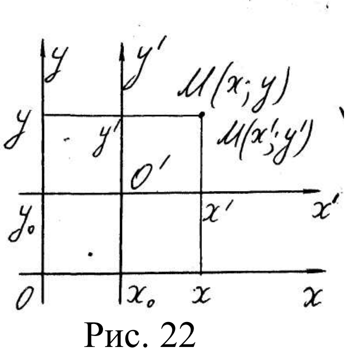


Рис. 22

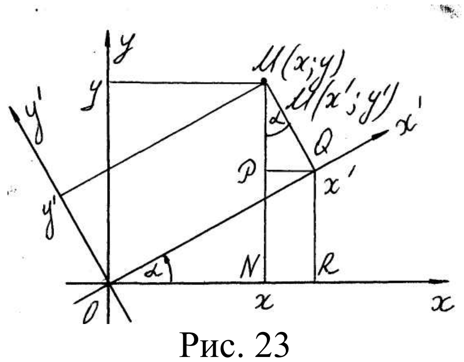


Рис. 23

В случае поворота координатных осей мы поступаем следующим образом (рис. 23):

$$x = ON = OR - NR = OR - PQ = OQ\cos\alpha - QM\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha;$$
$$y = NM = NP + PM = RQ + PM = OQ\sin\alpha + QM\cos\alpha = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha;$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \qquad (22)$$

Формулы (24) представляют собой линейное преобразование неизвестных с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

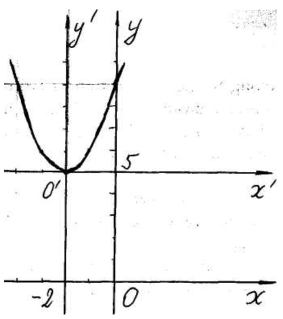


Рис. 24

Так что мы можем написать

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Пример. Установить вид линии $y = x^2 + 4x + 9$.

Осуществим параллельный перенос (21) координатных осей с пока неизвестными координатами x_0, y_0 нового начала O'. Заменяя x и y на $x_0 + x', y_0 + y'$ получим

$$y' = x'^2 + (2x_0 + 4)x' + (x_0^2 + 4x_0 + 9 - y_0).$$

Выберем значения x_0, y_0 таким образом, чтобы аннулировать коэффициент при x' и свободный член,

$$2x_0 + 4 = 0, x_0^2 + 4x_0 + 9 - y_0 = 0 \Rightarrow x_0 = -2, y_0 = 5.$$

Следовательно, формулы параллельного переноса координатных осей суть

$$x = -2 + x',$$
$$y = 5 + y',$$

и данное уравнение в новой системе координат преобразуется в уравнение параболы

$$y' = x'^2$$

(рис. 24).

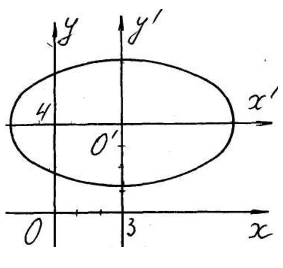


Рис. 25

Пример. Полагая

$$x - 3 = x', y - 4 = y'$$

в уравнении

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1,$$

то есть производя параллельный перенос координатных осей

$$x=3+x',\ y=4+y',$$

мы узнаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{9}=1$$

в системе координат $x'O'y'$ (рис. 25).

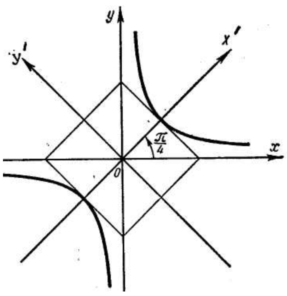


Рис. 26

Пример. Рассмотрим известное из школы уравнение гиперболы

$$xy=2a^2$$

и произведем поворот (22) координатных осей на пока неизвестный угол α,

$$(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)=2a^2,$$

$$x'^2\sin\alpha\cos\alpha+\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)x'y'-y'^2\sin\alpha\cos\alpha=2a^2.$$

Выберем угол поворота α так, чтобы аннулировать выражение в скобках, а именно $\alpha=\pi/4$. Следовательно,

$$x'^2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-y'^2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=2a^2,\ x'^2-y'^2=4a^2,\ \frac{x'^2}{(2a)^2}-\frac{y'^2}{(2a)^2}=1.$$

В системе координат $x'Oy'$ наша гипербола имеет каноническое уравнение. Оси *Ox, Oy* являются ее асимптотами.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ КРИВЫХ

Кривая может быть задана в декартовых или полярных координатах.

1. В декартовых координатах она может быть представлена:

а) явным уравнением, разрешенным относительно *y* или *x* (например, параболы

$$y = ax^2 + bx + c,\ x = \frac{1}{2p}y^2$$

или полуокружности

$$y = \sqrt{2Rx - x^2},\ x = -\sqrt{2Ry - y^2}\ );$$

b) неявным уравнением, не разрешенным относительно y или x (например, канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы);

c) параметрически, уравнениями (параметрическими уравнениями) вида

$$x = \varphi(t),\ y = \phi(t),$$

где t – некоторая вспомогательная переменная, так называемый параметр.

2. О задании кривых в полярных координатах мы подробно говорили выше.

Приведем несколько примеров кривых, заданных параметрически.

Пример. Параметрические уравнения окружности

$$x^2 + y^2 = r^2$$

радиуса r с центром в начале координат (см. рис. 27) суть

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t, \tag{23}$$

где t – угол между радиусом OM и осью Ox, а $M(x;\ y)$ - произвольная точка окружности.

Пример. Параметрические уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

суть следующие

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t. \tag{24}$$

■Пусть $a > b$. Рассмотрим две окружности радиусов a, b с центром в начале координат $O(0;\ 0)$ (рис. 28). Для любой точки $M(x;\ y)$ эллипса (для простоты мы берем ее в первом квадранте)

$$x = OP = OB\cos t = a\cos t,\ y = PM = QC = OC\sin t = b\sin t.■$$

Проверьте сами, что вершины эллипса $A(a;\,0)$, $B(0;b)$, $C(-a;\,0)$, $D(0;\,-b)$ соответствуют значениям $0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3/2\,\pi$ параметра *t*.

Пример. Астроидой называется траектория точки окружности радиуса *r*, вращающейся вдоль внутренней стороны окружности радиуса $a=4r$ (рис. 30). Параметрические уравнения астроиды

$$x=a\,cos^3 t,\ y=a\,sin^3 t\,. \qquad (25)$$

Она имеет также неявное уравнение

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\,. \qquad (26)$$

На рис. 29 мы показали построение первой части астроиды с помощью таблицы

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	a	$0.65a$	$0.35a$	$0.13a$	0
y	0	$0.13a$	$0.35a$	$0.65a$	a
Точка	A	B	C	D	E

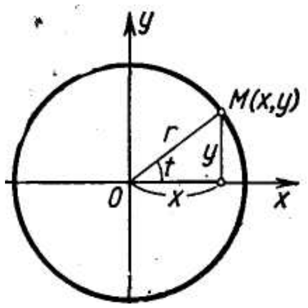


Рис. 27

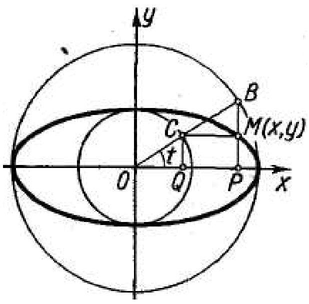


Рис. 28

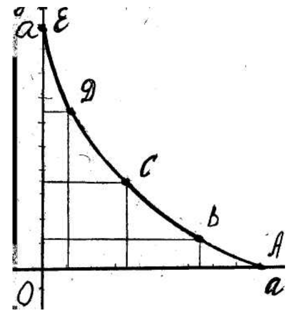


Рис. 29

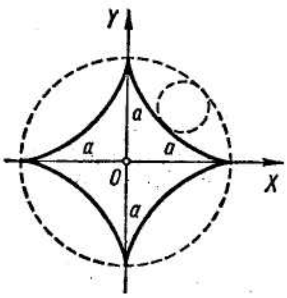


Рис. 30

Пример. Циклоидой называется траектория точки окружности, вращающейся вдоль прямой без скольжения (рис. 31). Если *a* – радиус окружности, то параметрические уравнения циклоиды

$$x=a(t-sin\,t),\ y=a(1-cos\,t), \qquad (27)$$

где *t* – угол поворота радиуса *MC* вращающейся окружности.

■Из рис. 31 мы видим, что для произвольной точки $M(x;\,y)$ циклоиды

$$x=OP=OB-PB=at-MK=at-a\sin t=a(t-\sin t),$$

$$y=PM=BK=BC-KC=a-a\cos t=a(1-\cos t).\blacksquare$$

Пример. Параметрические уравнения так называемой эвольвенты окружности радиуса *a* с центром в начале координат (рис. 32)

$$x=a(cos\,t+t\,sin\,t),\ y=a(sin\,t-t\,cos\,t) \qquad (28)$$

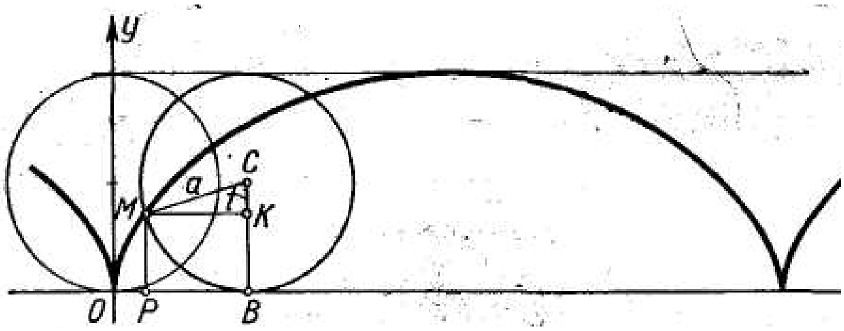


Рис. 31

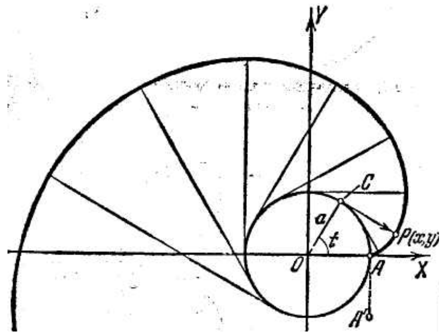


Рис. 32

Вопросы для самопроверки по теме "Аналитическая геометрия на плоскости"

1. Сформулировать определение уравнения линии.
2. Что такое текущие координаты?
3. Как найти точки пересечения двух линий?
4. Записать уравнение окружности данного радиуса с центром: а) в начале координат; б) в произвольной точке.
5. Как, имея уравнение окружности, написать уравнения ее левой, правой, нижней и верхней полуокружностей?
6. Что такое угловой коэффициент прямой?
7. Перечислить и записать основные уравнения прямой (на плоскости).
8. Как найти угловой коэффициент прямой, заданной: а) двумя известными ее точками; б) ее общим уравнением.
9. Сформулировать необходимое и достаточное условие параллельности двух прямых.
10. Сформулировать необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых.
11. Сформулировать определение эллипса, написать его каноническое уравнение, указать координаты фокусов и вершин, написать формулу для нахождения эксцентриситета. Изобразить эллипс.
12. Тот же вопрос для гиперболы
13. Дать определение параболы, написать ее каноническое уравнение

ВЕКТОРЫ

Приступая к изучению темы, студент должен четко усвоить ее первичные понятия: вектор (*или* геометрический вектор), модуль (*или* длина) вектора, нулевой и единичный векторы, орт данного вектора[1], равные и противоположные векторы, коллинеарные[2] (в том числе сонаправленные и противоположно направленные) и компланарные[3] векторы, угол между векторами, линейные операции над векторами и их свойства, проекция вектора на ось, свойства проекций.

Проекция вектора на ось

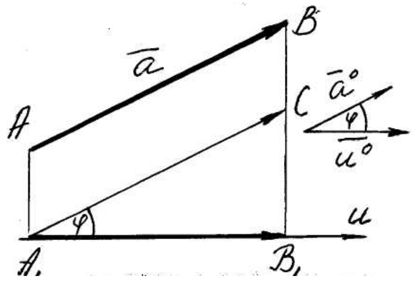


Рис. 1

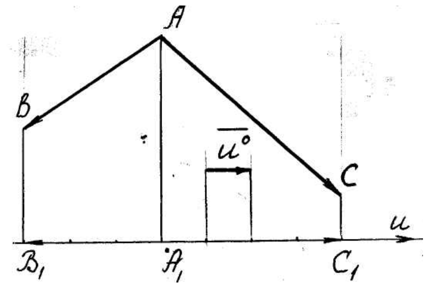


Рис. 2

Пусть дана некоторая ось *u*, направление которой определяется ортом (единичным вектором того же направления) $\overline{u^0}$, и вектор $\overline{a} = \overline{AB}$ (см. рис. 1).

Вектор $\overline{A_1B_1}$, образованный проекциями A_1, B_1 точек A, B на ось, называется, как известно, **составляющей** вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ вдоль оси. Составляющая может быть направлена вдоль оси, а может иметь противоположное направление.

Проекцией вектора на ось ($\mathrm{Pr}_u\, \overline{a} = \mathrm{Pr}_u\, \overline{AB}$) в первом случае называется длина его составляющей вдоль оси, а во втором случае – та же длина, взятая с противоположным знаком.

---

[1] Единичный вектор того же направления.
[2] Лежащие на одной прямой или на различных, но параллельных прямых.
[3] Лежащие в одной плоскости или в различных, но параллельных плоскостях.

Пример. Для векторов $\overline{AC}, \overline{AB}$, представленных на 2,

$$\Pr_u \overline{AC} = \left|\overline{A_1C_1}\right| = 4, \Pr_u \overline{AB} = -\left|\overline{A_1B_1}\right| = -3,$$

так как составляющая $\overline{A_1C_1}$ вектора $\overline{AC}$ имеет длину 4 и направлена вдоль оси, а составляющая $\overline{A_1B_1}$ вектора $\overline{AB}$ имеет длину 3 и направлена противоположно оси.

Если φ - угол между вектором $\overline{a}$ и осью u (то есть угол между ортами вектора и оси), то проекция вектора на ось может быть найдена по формуле

$$\Pr_u \overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos\varphi \qquad (1)$$

(проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью).

Пример. Вектор $\overline{a}$ длины 16 образует угол $120°$ с осью *u*. Его проекция на ось на основании формулы (1) равна

$$\Pr_u \overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos\varphi = 16\cos 120° = 16 \cdot (-0.5) = -8.$$

Необходимо знать основные свойства проекций: 1) проекция суммы векторов равна сумме их проекций; 2) числовой (и вообще скалярный) множитель можно вынести за знак проекции.

Разложение вектора по базису

Как известно, базисом на плоскости (в пространстве) называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов (*соотв.* упорядоченная тройка некомпланарных векторов), приведенных к общему началу.

Теорема 1. Любой вектор на плоскости (*соотв.* в пространстве) может быть единственным способом **разложен по базису**.

Пусть, например,

$$\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3} \qquad (2)$$

- базис в пространстве. Теорема означает, что для любого пространственного вектора $\overline{a}$ существует единственная тройка чисел a_1, a_2, a_3 (**координат вектора в данном базисе**) такая, что имеет место следующее разложение

$$\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}. \qquad (3)$$

Из теоремы 1 вытекает, что два вектора равны тогда и только тогда, если они имеют одинаковые координаты.

Два вектора **коллинеарны** тогда и только тогда, если их соответствующие координаты пропорциональны.

Пример. Найти значения параметров m и n, при которых два данных вектора $\overline{a} = \{4; m; 5\}, \overline{b} = \{2; 6; n\}$ коллинеарны.

Из условия пропорциональности соответствующих координат коллинеарных векторов имеем

$$\frac{4}{2} = \frac{m}{6} = \frac{5}{n} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{m}{6}, \frac{4}{2} = \frac{5}{n} \Rightarrow 2m = 24,\ 4n = 10 \Rightarrow m = 12,\ n = 10/4 = 5/2 = 2.5.$$

Ответ: векторы коллинеарны при $m = 12, n = 2.5$.

Теорема 2. Линейным операциям над векторами соответствуют такие же операции над их координатами.

Например, произведением вектора $\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}$ на число (скаляр) λ является вектор

$$\lambda\overline{a} = (\lambda a_1)\overline{e_1} + (\lambda a_2)\overline{e_2} + (\lambda a_3)\overline{e_3},$$

то есть вектор с координатами $\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3$. Суммой векторов

$$\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}, \quad \overline{b} = b_1\overline{e_1} + b_2\overline{e_2} + b_3\overline{e_3}$$

является вектор

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1)\overline{e_1} + (a_2 + b_2)\overline{e_2} + (a_3 + b_3)\overline{e_3},$$

с координатами $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$.

На основании теоремы 2 мы можем отождествлять любой вектор со строкой его координат в данном базисе и писать, например,

$$\overline{a} = \{a_1; a_2; a_3\}, \overline{b} = \{b_1; b_2; b_3\}, \lambda\overline{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}, \overline{a} + \overline{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\}.$$

Вместо фигурных скобок часто используются круглые. Координаты векторов можно разделять и запятыми, если это не приводит к недоразумениям.

Пример. Найти вектор $\overline{d} = 2\overline{a} - 5\overline{b} + 3\overline{c}$, если известны векторы

$$\overline{a} = \{4; -3; 6\}, \overline{b} = \{-1; 2; -4\}, \overline{c} = \{2; 1; 3\}.$$

На основании теоремы 2 имеем

$$\overline{d} = 2\overline{a} - 5\overline{b} + 3\overline{c} = 2 \cdot \{4; -3; 6\} - 5 \cdot \{-1; 2; -4\} + 3 \cdot \{2; 1; 3\} =$$

$$= \{8; -6; 12\} + \{5; -10; 20\} + \{6; 3; 9\} = \{19; -13; 41\}; \quad \overline{d} = \{19; -13; 41\}.$$

Базис (2) определяет **систему координат в пространстве**. **Началом координат** является общее начало O базисных векторов, **координатные оси** Ox, Oy, Oz направлены вдоль векторов $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$, **единица масштаба** на каждой оси равна модулю (длине) $|\overline{e_1}|$, $|\overline{e_2}|$, $|\overline{e_3}|$ соответствующего базисного вектора.

Для любой точки $M(x; y; z)$ пространства вектор $\overline{OM}$ называется **радиус-вектором** этой точки, причем координаты радиус-вектора совпадают с координатами этой точки,

$$\overline{OM} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3}, \text{ или просто } \overline{OM} = \{x_1; x_2; x_3\}. \qquad (4)$$

Пример. Найти вектор, зная координаты его начала A и конца B.

Пусть, например, $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$. Тогда вектор $\overline{AB}$ равен разности радиус-векторов точек A, B,

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}, \quad \overline{OB} = \{x_2; y_2; z_2\}, \overline{OA} = \{x_1; y_1; z_1\},$$

и по теореме 2

$$\overline{AB} = \{x_2; y_2; z_2\} - \{x_1; y_1; z_1\} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \qquad (5)$$

Таким образом, координатами вектора $\overline{AB}$ являются разности соответствующих координат его конца и начала.

Например, $\overline{A(2; -3; 6)B(5; 4; 3)} = \{5 - 2; 4 - (-3); 3 - 6\} = \{3; 7; -3\}$.

Пример. Разложить вектор $\overline{m} = \{0; 6; 3\}$ по векторам $\overline{a} = \{4; 1; 3\}, \overline{b} = \{-1; 4; 2\}$, $\overline{c} = \{2; -1; 4\}$. Могут ли векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образовывать базис в пространстве?

Мы должны найти такие три числа x, y, z, чтобы выполнялось равенство

$$\overline{m} = x \cdot \overline{a} + y \cdot \overline{b} + z \cdot \overline{c}.$$

Но

$$x \cdot \overline{a} + y \cdot \overline{b} + z \cdot \overline{c} = x \cdot \{4; 1; 3\} + y \cdot \{-1; 4; 2\} + z \cdot \{2; -1; 4\} =$$
$$= \{4x - y + 2z; x + 4y - z; 3x + 2y + 4z\}; \overline{m} = \{0; 6; 3\}.$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов $x \cdot \overline{a} + y \cdot \overline{b} + z \cdot \overline{c}$ и $\overline{m}$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно x, y, z

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0, \\ x + 4y - z = 6, \\ 3x + 2y + 4z = 3. \end{cases}$$

Главный определитель системы отличен от нуля,

$$\varDelta = 59 \neq 0,$$

следовательно, она имеет единственное решение. Вспомогательные определители системы равны

$$\Delta_1 = 27, \Delta_2 = 78, \Delta_3 = -15,$$

откуда на основании правила Крамера

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{27}{59}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{78}{59}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{15}{59},$$

и искомое разложение вектора $\overline{m}$ есть

$$\overline{m} = \frac{27}{59} \cdot \overline{a} + \frac{78}{59} \cdot \overline{b} - \frac{15}{59} \cdot \overline{c}.$$

Анализ решения показывает, что по векторам $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ может быть разложен любой другой пространственный вектор, так как решение соответствующей задачи приводит к системе уравнений с той же левой частью и тем же самым главным определителем, что и в только что решенном примере, и с правыми частями - координатами названного вектора. Следовательно, векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ могут образовывать базис в пространстве, и только что найденные числа $x = 27/59, y = 78/59, z = -15/59$ являются координатами вектора $\overline{m}$ в этом базисе.

В общем случае мы можем сказать, что три пространственных вектора

$$\bar{a} = \{a_1; a_2; a_3\}, \bar{b} = \{b_1; b_2; b_3\}, \ \bar{c} = \{c_1; c_2; c_3\} \qquad (6)$$

могут образовывать базис в пространстве тогда и только тогда, если определитель третьего порядка, образованный координатами векторов, отличен он нуля,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (7)$$

Равенство (7) является также необходимым и достаточным условием некомпланарности трех пространственных векторов (6).

Пример. Могут ли образовывать базис в пространстве три данных вектора

$$\bar{a} = \{4; -3; 2\}, \bar{b} = \{6; -5; 4\}, \bar{c} = \{1; -1; 1\}\ ?$$

Решение. Определитель, составленный из координат векторов,

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 & -3 & 2 & 4 & -3 \\ 6 & -5 & 4 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{Bmatrix} = -20 - 12 - 12 + 10 + 16 + 18 = 0,$$

равен нулю. Следовательно, векторы не являются некомпланарными и не могут образовывать базис в пространстве.

Декартов ортонормированный базис

В приложениях наиболее часто используется так называемый **декартов ортонормированный базис**. В пространстве - это тройка единичных (или нормированных) взаимно перпендикулярных (ортогональных) векторов, обычно обозначаемых $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, а в плоскости - аналогичная пара векторов $\bar{i}, \bar{j}$. Система координат, определяемая декартовым ортонормированным базисом, называется декартовой прямоугольной.

Координаты вектора, разложенного по декартовому ортонормированному базису, представляют собой проекции этого вектора на соответствующие координатные оси и соответствующим образом обозначаются. Так, если для пространственного вектора $\bar{a}$ имеем следующее разложение по $\bar{i},\ \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \quad или \quad \bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \qquad (8)$$

то

$$a_x = \mathrm{Pr}_{Ox}\,\bar{a}, \quad a_y = \mathrm{Pr}_{Oy}\,\bar{a}, \quad a_z = \mathrm{Pr}_{Oz}\,\bar{a}.$$

Используя формулу (1) для нахождения проекции вектора на ось, имеем

$$a_x = |\bar{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\bar{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\bar{a}|\cos\gamma, \qquad (9)$$

где α, β, γ - углы, образованные вектором $\bar{a}$ соответственно с осями Ox, Oy, Oz.

В частности, $\mathrm{Pr}_{Ox}\,\bar{i} = 1, \mathrm{Pr}_{Oy}\,\bar{i} = 0, a_z = \mathrm{Pr}_{Oz}\,\bar{i} = 0$, а поэтому $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$. Аналогично $\bar{j} = \{0, 1, 0\}, \bar{k} = \{0, 0, 1\}$.

Из формул (9) следует, что если вектор образует с какой-либо осью острый (тупой) угол, то соответствующая координата вектора положительна (соответственно отрицательна).

Например, вектор $\bar{a} = \{-4, 2, 5\}$ образует с осью Ox тупой угол, а с осями Oy, Oz - острые углы.

Длина (модуль) вектора, заданного в декартовом ортонормированном базисе, равна квадратному корню из суммы квадратов его координат. Именно,

$$|\bar{a}| = |\{a_x, a_y, a_z\}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (10)$$

для вектора (8), заданного в базисе $\bar{i},\ \bar{j}, \bar{k}$, и

$$|\bar{a}| = |\{a_x, a_y\}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

для вектора, заданного в базисе $\bar{i},\ \bar{j}$.

Косинусы углов α, β, γ , образованных вектором (8) с координатными осями, называются направляющими. На основании формулы (9) они равны

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}. \qquad (11)$$

Из формул (11) и (10) следует, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (12)$$

а поэтому орт вектора (8) определяется следующей формулой:

$$\overline{a^0} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \left\{\frac{a_x}{|\overline{a}|}, \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \frac{a_z}{|\overline{a}|}\right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}. \qquad (13)$$

В свою очередь вектор может быть представлен с помощью своих длины и орта, а именно:

$$\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a^0} \qquad (14)$$

Пример. Найти расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$.

Достаточно найти длину вектора $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$:

$$AB = |AB| = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (15)$$

Пример. Вектор $\overline{AB}$ задан в декартовом ортонормированном базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ своим началом $A(1; 0; -2)$ и концом $B(3; -4; 4)$. Найти вектор, его длину, орт, направляющие косинусы, расстояние между точками *A* и *B*. Затем найти вектор $\overline{x}$, имеющий длину 12 и направленный противоположно вектору $\overline{AB}$, а также вектор $\overline{y}$ длины 20, сонаправленный с вектором $\overline{AB}$.

По формуле (5)

$$\overline{AB} = \{3-1; -4-0; 4-(-2)\} = \{2; -4; 6\}; \quad \overline{AB} = \{2; -4; 6\}.$$

Пользуясь теперь формулами (10), (15), (11), (13), (14), последовательно получаем

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} = |AB|;$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{2\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \cos\beta = -\frac{4}{2\sqrt{14}} = -\frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \frac{6}{2\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}},$$

$$\overline{AB^0} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{14}}\{1; -2; 3\},$$

$$\overline{x^0} = -\overline{AB^0} = -\frac{1}{\sqrt{14}}\{1; -2; 3\} = \frac{1}{\sqrt{14}}\{-1; 2; -3\},$$

$$\overline{x}=\left|\overline{x}\right|\cdot\overline{x^0}=12\cdot\overline{x^0}=12\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\{-1;2;-3\}=\frac{12}{\sqrt{14}}\{-1;2;-3\}=\left\{-\frac{12}{\sqrt{14}};\frac{24}{\sqrt{14}};-\frac{36}{\sqrt{14}}\right\},$$

$$\overline{y^0}=\overline{AB^0}=\frac{1}{\sqrt{14}}\{1;-2;3\},$$

$$\overline{y}=\left|\overline{y}\right|\cdot\overline{y^0}=20\cdot\overline{y^0}=20\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\{1;-2;3\}=\frac{20}{\sqrt{14}}\{1;-2;3\}=\left\{\frac{20}{\sqrt{14}};-\frac{40}{\sqrt{14}};\frac{60}{\sqrt{14}}\right\}.$$

Скалярное произведение двух векторов

Как известно, **скалярным произведением** двух векторов называется число, равное произведению длин (модулей) этих векторов на косинус угла между ними, то есть (см. рис. 3)

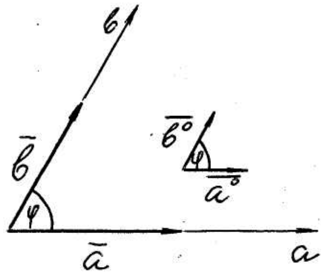


Рис. 3

$$\overline{a}\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{b}=\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi,\quad \varphi=\left(\overline{a}\ \hat{}\ \overline{b}\right). \qquad (16)$$

Пример. Скалярное произведение векторов $\overline{a},\overline{b}$, имеющих длины $\left|\overline{a}\right|=5,\left|\overline{b}\right|=8$ и образующих угол $\varphi=\pi/3$, равно

$$\overline{a}\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}=5\cdot8\cdot\frac{1}{2}=20,$$

Скалярное произведение равно произведению длины одного вектора на проекцию другого на первый (или, точнее, на ось, определяемую первым вектором),

$$\overline{a}\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\mathrm{Pr}_{\overline{a}}\,\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\mathrm{Pr}_a\,\overline{b},\quad \overline{a}\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\mathrm{Pr}_{\overline{b}}\,\overline{a}=\left|\overline{b}\right|\mathrm{Pr}_b\,\overline{a}\,, \qquad (17)$$

где a, b – оси, определенные векторами $\overline{a},\overline{b}$ соответственно. Формула (17) следует из определения (16) и формулы (1) для нахождения проекции вектора на ось.

Пример. Проекции каждого из векторов предыдущего примера на ось другого на основании формулы (17) соответственно равны

$$\mathrm{Pr}_b\,\overline{a}=\frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}=\frac{20}{8}=2.5,\ \mathrm{Pr}_a\,\overline{b}=\frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|}=\frac{20}{5}=4\,.$$

Необходимо хорошо знать свойства скалярного произведения: 1) перестановочность ($\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$), 2) сочетательность относительно скалярного (в том числе числового) множителя ($k(\overline{a}\cdot\overline{b}) = (k\overline{a})\cdot\overline{b} = \overline{a}\cdot(k\overline{b})$), 3) распределительность относительно векторных сомножителей ($(\overline{a}+\overline{b})\overline{c} = \overline{a}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}$). Особо отметим два следующих свойства:

$$4)\ \overline{a}^2 = \overline{a}\cdot\overline{a} = |\overline{a}|^2, \qquad (18)$$

то есть скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины;

5) Два ненулевых вектора перпендикулярны (ортогональны) тогда и только тогда, если их скалярное произведение равно нулю.

Пример. Скалярные произведения векторов декартового ортонормированного базиса $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ равны нулю,

$$\overline{i}\cdot\overline{j} = \overline{i}\cdot\overline{k} = \overline{k}\cdot\overline{j} = 0,$$

так как $cos(\overline{i}\,\hat{,}\,\overline{j}) = cos(\overline{i}\,\hat{,}\,\overline{k}) = cos(\overline{j}\,\hat{,}\,\overline{k}) = cos(\pi/2) = 0$.

Пример. Длины векторов $\overline{a}, \overline{b}$ равны $|\overline{a}| = 5, |\overline{b}| = 8$, угол между ними $2\pi/3$. Найти длину вектора $3\overline{a} - 2\overline{b}$.

На основании свойств скалярного произведения, в том числе формулы (18),

$$|3\overline{a}-2\overline{b}|^2 = (3\overline{a}-2\overline{b})^2 = (3\overline{a}-2\overline{b})(3\overline{a}-2\overline{b}) = 9\overline{a}^2 + 4\overline{b}^2 - 12\overline{a}\overline{b} =$$

$$= 9|\overline{a}|^2 + 4|\overline{b}|^2 - 12|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}) = 9\cdot 25 + 4\cdot 64 - 12\cdot 5\cdot 8\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = 481 - 480\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 721,$$

$$|3\overline{a}-2\overline{b}| = \sqrt{721} \approx 26.9.$$

Если векторы заданы в **декартовом ортонормированном базисе** $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, то их скалярное произведение равно сумме произведений их соответствующих координат, то есть если

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k},\ \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k},$$

или просто

$$\overline{a}=\{a_x, a_y, a_z\}, \overline{b}=\{b_x, b_y, b_z\},$$

то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (19)$$

Пример. Является ли прямоугольным треугольник с данными вершинами $A(2;3;1)$, $B(4;7;-1)$, $C(1;2;0)$? Найти его внутренний и внешний углы при вершине A (рис. 4).

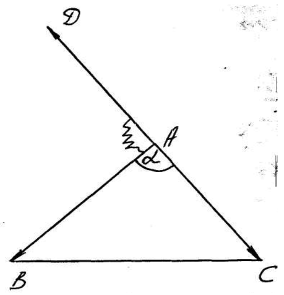


Рис. 4

Стороны треугольника ABC равны

$$AB=\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{24},\ AC=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3},$$

$$BC=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+1^2}=\sqrt{36},$$

причем $BC^2=36;\ AB^2+AC^2=27;\ BC^2\neq AB^2+AC^2$. Поэтому треугольник не является прямоугольным. Для нахождения упомянутых углов введем векторы

$$\overline{AB}=\{2,4,-2\}, \overline{AC}=\{-1,-1,-1\}, \overline{AD}=-\overline{AC}=\{1,1,1\}.$$

Используя формулы (16) и (19), мы получаем

$$\cos\alpha=\cos BAC=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|}=\frac{2\cdot(-1)+4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)}{AB\cdot AC}=\frac{-4}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\approx-0.47;$$

$$\cos BAD=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AD}\right|}=\frac{2\cdot1+4\cdot1+(-2)\cdot1}{AB\cdot AC}=\frac{4}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx0.47;$$

$$\alpha=\angle BAC\approx\arccos(-0.47)\approx118^\circ,\quad \angle BAD\approx\arccos 0.47\approx62^\circ.$$

Пример. Найти вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий условиям

$$\overline{a}\overline{x}=1, \overline{b}\overline{x}=2, \overline{c}\overline{x}=5,$$

где $\overline{a}=\{6,2,-5\}, \overline{b}=\{1,3,2\}, \overline{c}=\{1,4,-1\}$ - данные векторы.

Пусть искомый вектор имеет координаты x_1, x_2, x_3, то есть $\overline{x}=\{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда

$$\overline{a}\overline{x}=6x_1+2x_2-5x_3, \overline{b}\overline{x}=x_1+3x_2+2x_3, \overline{c}\overline{x}=x_1+4x_2-x_3,$$

и решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений относительно x_1, x_2, x_3,

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Эта последняя была решена в первой части настоящего пособия, а именно:

$$x_1 = -\frac{48}{65}; \quad x_2 = \frac{84}{65}; \quad x_3 = -\frac{37}{65}.$$

Ответ: Искомый вектор $\bar{x} = \{-48/65; \quad 84/65; \quad -37/65\}$.

Векторное произведение двух векторов

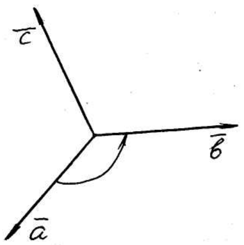


Рис. 5

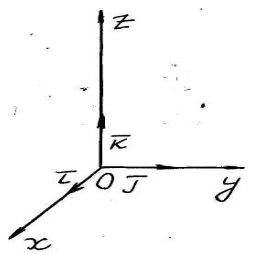


Рис. 6

Упорядоченная тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ с общим началом называется **правой**, если поворот от первого вектора ко второму по кратчайшему пути виден из конца третьего вектора происходящим против часовой стрелки (см. рис. 5).

Направление третьего вектора правой тройки можно определить по правилу правой руки, если считать большой, указательный и средний ее пальцы соответственно первым, вторым и третьим векторами.

В дальнейшем мы будем рассматривать только правый декартовый ортонормированный базис $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и соответствующую правую декартову прямоугольную систему координат (рис. 6). Очевидно, что для правого базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ упорядоченные тройки векторов $\bar{j}, \bar{k}, \bar{i}$ и $\bar{k}, \bar{i}, \bar{j}$ также являются правыми.

Векторным произведением $\bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}]$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор: а) перпендикулярный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$; б) имеющий длину (модуль), равный произведению длин векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на синус угла между ними; в) образующий с векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ правую тройку векторов, а именно $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} \times \bar{b}$.

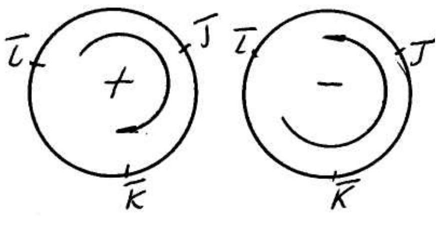


Рис. 7

Пример. Векторные произведения векторов правого декартового ортонормированного базиса (см. схему на рис. 7)

$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\ \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i},\ \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j},\ \bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k},\ \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i},\ \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}. \qquad (20)$$

В самом деле, вектор $\bar{k}$ перпендикулярен векторам $\bar{i}$, $\bar{j}$, его длина действительно равна $|\bar{i}||\bar{j}|\sin 90^\circ = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$, а векторы $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ обра-зуют правую тройку. Поэтому

$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}.$$

Аналогично доказывается справедливость остальных векторных произведений формулы (20).

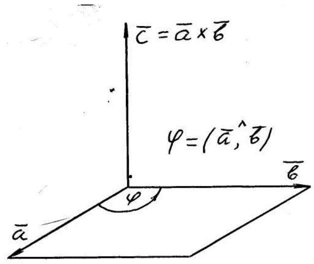


Рис. 8

Длина (модуль) $|\bar{a}\times\bar{b}|$ векторного произведения $\bar{a}\times\bar{b}$ имеет простой **геометрический смысл**: она численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах (рис. 8),

$$S=|\bar{a}||\bar{b}|\,sin\left(\bar{a}\hat{,}\bar{b}\right)=|\bar{a}\times\bar{b}|. \qquad (21)$$

Необходимо запомнить свойства векторного произведения: 1) антиперестановочность ($\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$), 2) сочетательность относительно скалярного (в том числе числового) множителя $\left(k\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\left(k\bar{a}\right)\times\bar{b}=\bar{a}\times\left(k\bar{b}\right)\right)$, 3) распределительность относительно векторных сомножителей $\left(\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c},\right.$ $\left.\bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}\right)$. Отметим еще одно свойство:

4) Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, если их векторное произведение равно нулевому вектору.

Если векторы заданы в **правом декартовом ортонормированном базисе** $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, то есть если

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k},\ \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k},$$

или просто

$$\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\ \bar{b}=\{b_x,b_y,b_z\},$$

то их векторное произведение выражается определителем третьего порядка, в первой строке которого находятся базисные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, во второй - координаты первого сомножителя, в третьей – координаты второго,

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (22)$$

Разложив определитель третьего порядка по элементам первой строки, получим еще одно представление векторного произведения, именно:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{i}A_{11}+\bar{j}A_{12}+\bar{k}A_{13}=\bar{i}M_{11}-\bar{j}M_{12}+\bar{k}M_{13}=\bar{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix},$$

где $A_{11}=M_{11}, A_{12}=-M_{12}, A_{13}=M_{13}$ - алгебраические дополнения элементов первой строки определителя (22) и их выражения через миноры этих же элементов.

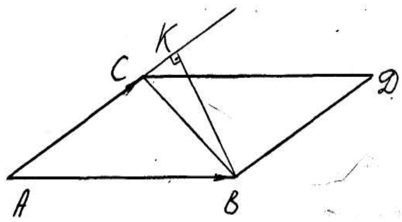


Рис. 9

Пример. Найти площадь и высоту *BK*, проведенную из вершины *B*, треугольника с заданными вершинами *A*(1; 3; 5), *B*(2; -4; 6), *C*(0; -2; 3) (рис. 9).

Пусть $\overline{AB}=\{1,-7,1\}, \overline{AC}=\{-1,-5,-2\}$. Площадь треугольника *ABC* равна половине площади параллелограмма *ABDC*, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$ как на сторонах. Последняя на основании формулы (21) равна

$$S_{ABDC}=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|,$$

и поэтому

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|.$$

Для отыскания высоты *BK* примем во внимание известную из школы формулу площади треугольника. Именно,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|\cdot BK \Rightarrow BK=\frac{2S_{ABC}}{\left|\overline{AC}\right|}.$$

По формуле (22)

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -7 & 1\\ -1 & -5 & -2\end{vmatrix}=\bar{i}A_{11}+\bar{j}A_{12}+\bar{k}A_{13}=\bar{i}M_{11}-\bar{j}M_{12}+\bar{k}M_{13}=$$

$$=\bar{i}\begin{vmatrix}-7 & 1\\ -5 & -2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & -7\\ -1 & -5\end{vmatrix}=19\bar{i}+\bar{j}-12\bar{k},$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{19^2+1^2+(-12)^2}=\sqrt{506}\approx 22.49.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{506}\approx 11.25,\; BK=\frac{2S_{ABC}}{\left|\overline{AC}\right|}=\frac{\sqrt{506}}{\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(-2)^2}}=\sqrt{\frac{506}{30}}\approx 4.11.$$

Пример. Найти вектор длины 14, если он перпендикулярен двум данным векторам $\bar{a}=\{3,2,2\}, \bar{b}=\{18,-22,-5\}$ и образует острый угол с осью Oz.

Искомый вектор $\bar{x}$, будучи перпендикулярным к векторам $\bar{a},\bar{b}$, коллинеарен их векторному произведению

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 2 & 2\\ 18 & -22 & -5\end{vmatrix}=34\bar{i}+51\bar{j}-102\bar{k}=17\left(2\bar{i}+3\bar{j}-6\bar{k}\right),$$

или более простому вектору

$$\bar{m}=(2,3,-6).$$

Последний образует тупой угол с осью Oz (так его z-координата отрицательная), поэтому орты векторов $\bar{x}$ и $\bar{m}$ должны быть противоположными, и

$$\overline{x^\circ}=-\overline{m^\circ}=-\frac{\bar{m}}{|\bar{m}|}=-\frac{(2,3,-6)}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{(-2,-3,6)}{\sqrt{49}}=\left(-\frac{2}{7},-\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right).$$

Окончательно получаем

$$\bar{x}=14\overline{x^\circ}=14\left(-\frac{2}{7},-\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)=(-4,-6,12).$$

Пример. Найти вектор $\bar{x}$, перпендикулярный двум векторам $\bar{a}=\{4,-3,1\}$,

$\bar{b} = \{1, 4, -2\}$, если его проекция на вектор $\bar{c} = \{2, 5, -6\}$ равна $\frac{3}{\sqrt{65}}$.

Аналогично предыдущему примеру искомый вектор $\bar{x}$ должен быть коллинеарным векторному произведению

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 9\bar{j} + 19\bar{k}$$

и поэтому должен иметь вид

$$\bar{x} = \lambda\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \lambda(2, 9, 19) = (2\lambda, 9\lambda, 19\lambda),$$

где λ - некоторое неизвестное число. По условию (см. еще формулу (17))

$$\Pr_{\bar{c}} \bar{x} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{c}}{|\bar{c}|} = \frac{2\lambda \cdot 2 + 9\lambda \cdot 5 + 19\lambda \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-6)^2}} = \frac{-65\lambda}{\sqrt{65}}; \frac{-65\lambda}{\sqrt{65}} = \frac{3}{\sqrt{65}}, -65\lambda = 3, \lambda = -\frac{3}{65},$$

следовательно

$$\bar{x} = -\frac{3}{65}(2, 9, 19) = \left(-\frac{6}{65}, -\frac{27}{65}, -\frac{57}{65}\right).$$

Смешанное произведение трех векторов[1]

Смешанным произведением $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$ трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий.

Если векторы заданы в **декартовом ортонормированном базисе** $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, то есть если

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\},\ \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\},$$

то их смешанное произведение равно определителю третьего порядка, в первой строке которого находятся координаты первого вектора, во второй - координаты второго, в третьей – координаты третьего,

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (23)$$

Пример. Смешанное произведение векторов

[1] Этот пункт студентами экономических специальностей не изучается

$$\bar{a} = (2, -3, 5), \quad \bar{b} = (-1, 4, 3), \quad \bar{c} = (1, 1, 8)$$

на основании формулы (23) равно

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 2 & -3 & 5 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 & 1 & 1 \end{matrix} \right\} = 64 - 9 - 5 - 20 - 6 - 24 = 0 .$$

Из формулы (23) и свойств определителей вытекают два следующих соотношения, касающиеся возможности переставлять местами сомножители смешанного произведения:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}),$$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}).$$

На основании формулы (17) для скалярного произведения мы можем записать следующую формулу для смешанного произведения:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| \cdot \mathrm{Pr}_{\bar{a} \times \bar{b}}\, \bar{c} .$$

Из нее, в частности, вытекает

Геометрический смысл смешанного произведения. Абсолютная величина смешанного произведения векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равна объему V_{abc} параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах,

$$V_{abc} = \left|(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}\right| . \qquad (24)$$

Действительно, площадь основания и высота такого параллелепипеда соответственно равны

$$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|, \quad \left|\mathrm{Pr}_{\bar{a} \times \bar{b}}\, \bar{c}\right|,$$

откуда следует формула (24).

Условие компланарности трех векторов. Три ненулевых вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, если их смешанное произведение равно нулю.

Пример. Векторы $\bar{a} = (2, -3, 5), \bar{b} = (-1, 4, 3), \bar{c} = (1, 1, 8)$ предыдущего примера компланарны, так как их смешанное произведение равно нулю.

Пример. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами

$$M_1(-6; 1; -5),\ M_2(7; -2; -1), M_3(10; -7; 1), M_4(3; -2; -6)$$

и длину ее высоты M_4P, опущенной из вершины M_4 (рис. 10).

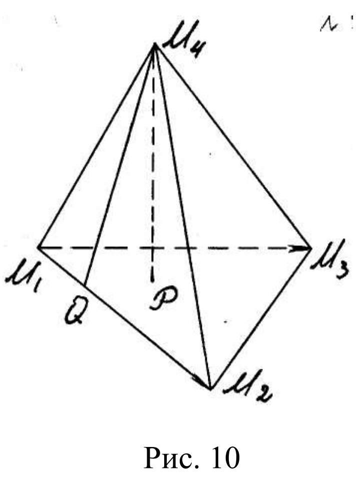


Рис. 10

Введем в рассмотрение векторы

$$\overline{M_1M_2} = (13,-3,4), \overline{M_1M_3} = (16,-8,6), \overline{M_1M_4} = (9,-3,-1).$$

Данная пирамида построена на них как на сторонах. Ее объем равен шестой части объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах как на сторонах. Следовательно, на основании формулы (24)

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right)\cdot\overline{M_1M_4}\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 13 & -3 & 4 \\ 16 & -8 & 6 \\ 9 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{56}{3} \approx 18.67 \text{ куб.единиц}$$

Длину высоты M_4P находим, исходя из известной школьной формулы. Именно:

$$V = \frac{1}{3}S_{M_1M_2M_3}\cdot M_4P \Rightarrow M_4P = \frac{3V}{S_{M_1M_2M_3}} = \frac{56}{\frac{1}{2}\left|\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right|} = \frac{112}{\left|\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right|}.$$

Так как

$$\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 13 & -3 & 4 \\ 16 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 14\bar{i} - 14\bar{j} - 56\bar{k} = 14\left(\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}\right),$$

$$\left|\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right| = 14\left|\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}\right| = 14\sqrt{18} = 42\sqrt{2},$$

получаем

$$M_4P = \frac{112}{42\sqrt{2}} = \frac{56\sqrt{2}}{42} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1.89 \text{ лин.единиц.}$$

Вопросы для самопроверки по теме "Векторы"

1. Что такое вектор и его орт?
2. Дать определение равных векторов; противоположных векторов.
3. Какие векторы называются коллинеарными? компланарными?
4. Как можно определить сумму векторов? разность векторов? произведение вектора на число?
5. Что такое составляющая вектора вдоль оси? проекция вектора на ось?
6. По какой формуле можно найти проекцию вектора на ось?
7. Что такое базис на плоскости? в пространстве?
8. Что такое декартов ортонормированный базис?
9. Сформулировать теорему о разложении вектора по базису.
10. Что такое координаты вектора в данном базисе? что представляют со-

бой координаты вектора в декартовом ортонормированном базисе?

11. Какая существует связь между линейными операциями над векторами и операциями над их координатами?

12. Сформулировать необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов; (не)компланарности трех векторов.

13. Как найти координаты вектора, зная координаты его начала и конца?

14. Как найти длину, направляющие косинусы и орт вектора, заданного в декартовом ортонормированном базисе?

15. Перечислите основные способы задания векторов.

16. Дать определение скалярного произведения двух векторов.

17. Какая существует связь между скалярным произведением и проекцией вектора на ось?

18. Перечислите свойства скалярного произведения.

19. Как найти скалярное произведение векторов, заданных в декартовом ортонормированном базисе?

20. Как найти угол между двумя векторами с помощью скалярного произведения?

21. Как найти проекцию вектора на ось с помощью скалярного произведения?

22. Дать определение правой тройки векторов.

23. Дать определение векторного произведения двух векторов.

24. В чем состоит геометрический смысл модуля (длины) векторного произведения?

25. Перечислите свойства векторного произведения.

26. Как найти векторное произведение векторов, заданных в правом декартовом ортонормированном базисе?

27. Дать определение смешанного произведения трех векторов.

28. Как найти смешанное произведение векторов, заданных в декартовом ортонормированном базисе?

29. В чем состоит геометрический смысл смешанного произведения?

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Определение. Уравнение вида

$$F(x,\ y,\ z)=0 \qquad (1)$$

называется уравнением поверхности S, если координаты любой точки поверхности (и только такой точки) удовлетворяют ему.

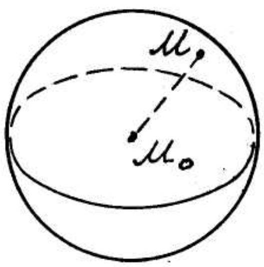


Рис. 1

Пример. **Уравнение сферы** $S(R,\ M_0(x_0;\ y_0;\ z_0))$ радиуса R с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ (рис. 1)

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad (2)$$

Если центр сферы находится в начале координат $O(0;\ 0;\ 0)$, ее уравнение принимает вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \qquad (3)$$

Пример. Определить вид поверхности, заданной уравнением

$$x^2+y^2+z^2-6x+8\text{y}+10z=0.$$

Дополняя до полных квадратов, получим

$$x^2-6x+9+y^2+8y+16+z^2+10z+25=50,$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=\left(\sqrt{50}\right)^2,$$

то есть уравнение сферы $S\left(5\sqrt{2},\ M_0(3;-4;-5)\right)$ радиуса $R=5\sqrt{2}$ с центром в точке $M_0(3;-4;-5)$.

ПЛОСКОСТЬ

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору

Пусть плоскость α (рис. 2) проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и перпендикулярна некоторому ненулевому вектору $\overline{N} = (A, B, C) \neq \bar{0}$ (так называемому **нормальному вектору** плоскости).

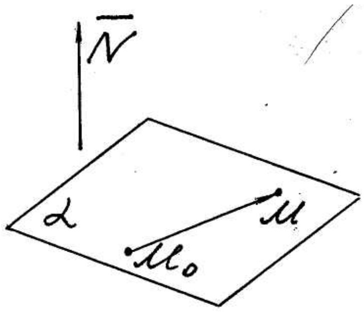


Fig. 2

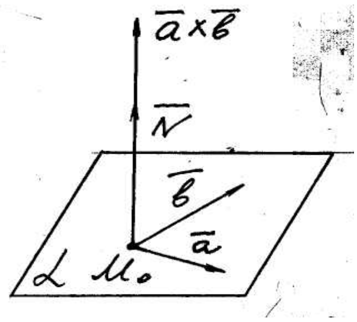


Fig. 3

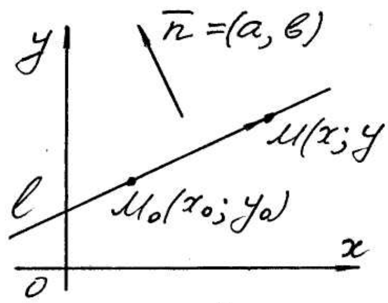


Fig. 4

Так как для произвольной точки $M(x;\ y;\ z)$ плоскости векторы

$$\overline{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0),\ \overline{N} = (A, B, C)$$

перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю,

$$\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0,$$

откуда следует уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \qquad (4)$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(-3;\ 4;\ -2)$ параллельно двум векторам $\bar{a} = (2, -3, 7),\ \bar{b} = (4, -3, -1)$.

Если мы предположим, что векторы $\bar{a},\ \bar{b}$ имеют общее начало M_0 (рис. 3), то увидим, что нормальный вектор плоскости коллинеарен их векторному произведению,

$$\overline{N} \parallel \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 7 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 24\bar{i} + 30\bar{j} + 6\bar{k} = 6(4\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k});\ \overline{N} = (4, 5, 1),$$

и с помощью уравнения (4) получим

$$4(x - (-3)) + 5(y - 4) + 1 \cdot (z - (-2)) = 0, \quad 4x + 5y + z - 6 = 0.$$

Замечание. Аналогичную задачу можно рассмотреть в плоскости xOy: составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору (номальному вектору) $\bar{n} = (a, b),\ a^2 + b^2 \neq 0$ (рис. 4).

Аналогичные рассуждения приводят к следующему уравнению прямой:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (5)$$

Раскрывая скобки, мы получим уравнение вида

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \qquad (6)$$

где $c = -ax_0 - by_0$, то есть общее уравнение прямой

Если в уравнении (5) коэффициент $b \neq 0$, мы получаем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и имеющей данный угловой коэффициент k (или уравнение пучка прямых с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0)$)

$$y - y_0 = k(x - x_0),\ k = -\frac{a}{b}. \qquad (7)$$

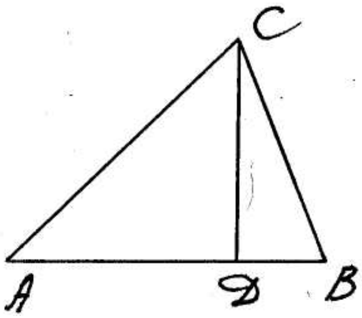


Рис. 5

Пример. Составить уравнение высоты, проведенной из вершины C треугольника ABC с заданными вершинами $A(-4;\ 6), B(1;\ -4), C(3;\ -4)$ (рис. 5).

Нормальный вектор высоты $\bar{n} \parallel \overline{AB} = (5;\ -10), \bar{n} = (1,\ -2)$, и на основании (5) имеем

$$1 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (y - (-4)) = 0,\ x - 2y - 11 = 0.$$

Общее уравнение плоскости

Уравнение (4) после раскрытия скобок может быть записано в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ и $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Обратно, уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \qquad (8)$$

является уравнением плоскости с нормальным вектором $\overline{N} = (A,\ B,\ C) \neq \bar{0}$. Оно называется **общим уравнением плоскости.**

Некоторые частные случаи общего уравнения плоскости

1. Если $D = 0$, то плоскость, уравнение которой принимает вид

$$Ax + By + Cz = 0,$$

проходит через начало координат $O(0;\ 0;\ 0)$.

2. Если $A = 0$, то плоскость с соответствующим уравнением

$$By + Cz + D = 0$$

параллельна оси *Ox*.

3. Если $A = 0$ и $B = 0$, плоскость, уравнение которой

$$Cz + D = 0,$$

параллельна осям *Ox*, *Oy* и, следовательно, **параллельна плоскости *xOy***. Если, кроме того, $D = 0$, получаем уравнение плоскости *xOy*, а именно:

$$z = 0. \qquad (9)$$

Аналогично рассматриваются другие случаи общего уравнения плоскости, в частности (если $A = C = 0$ или $B = C = 0$), мы приходим к уравнениям плоскостей *xOz*, *yOz*

$$y = 0 \ (\text{плоскость } xOz),\ x = 0 \ (yOz) \qquad (10)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

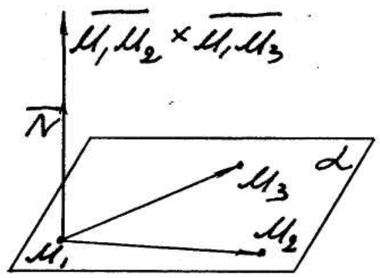


Рис. 6

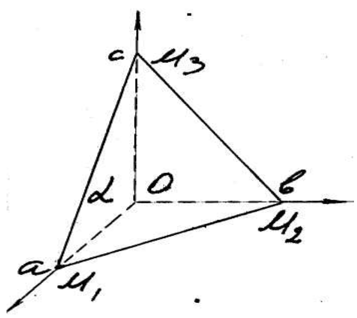


Рис. 7

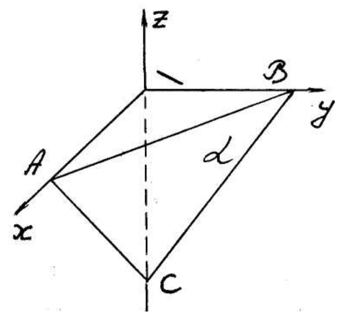


Рис. 8

Если $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1),\ M_2(x_2;\ y_2;\ z_2),\ M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ - три данные точки плоскости (рис. 6), мы можем составить ее уравнение с помощью уравнения (4), определив нормальный вектор из условия

$$\overline{N} \parallel \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} \qquad (12)$$

и использовав одну из данных точек плоскости.

Пример. Составить уравнение плоскости, которая проходит через три точки $M_1(-6; 1; -5)$, $M_2(7; -2; -1)$, $M_3(10; -7; 1)$.

Последовательно имеем

$$\overline{M_1M_2} = (13, -3, 4), \overline{M_1M_3} = (16, -8, 6), \ \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = (14, -14, -56),$$

$$\overline{N} \parallel \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = 14 \cdot (1, -1, -4), \overline{N} = (1, -1, -4).$$

Использовав, например, точку $M_1(-6; 1; -5)$, с помощью уравнения (4) получаем

$$1 \cdot (x - (-6)) + (-1) \cdot (y - 1) + (-4) \cdot (z - (-5)) = 0, (x + 6) - (y - 1) - 4 \cdot (z + 5) = 0;$$

после раскрытия скобок записываем уравнение плоскости в общем виде

$$x - y - 4z - 13 = 0.$$

Замечание. Если студенты владеют теорией смешанного произведения трех векторов, то уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, можно получить из условия компланарности трех векторов

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}, \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\},$$

где $M(x, y, z)$ - произвольная (текущая) точка плоскости. Именно:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость α отсекает отрезки a, b, c на координатных осях (см. рис. 7). Тогда ее уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (13)$$

Пример. Вычислить объем треугольной пирамиды, ограниченной плоскостью

$$6x - 7y + 5z + 210 = 0$$

и координатными плоскостями (рис. 7).

Перепишем сначала уравнение плоскости в форме (13),

$$6x-7y+5z=-210, -\frac{6}{210}x+\frac{7}{210}y-\frac{5}{210}z=1, -\frac{x}{35}+\frac{y}{30}-\frac{z}{42}=1.$$

Плоскость отсекает на координатных осях отрезки OM_1, OM_2, OM_3 (так что $a=-35, b=30, c=-42$). Следовательно, искомый объем равен

$$V=\frac{1}{3}S_{OM_1M_2}\cdot|OM_3|=\frac{1}{3}|a|\cdot|b|\cdot|c|=\frac{1}{3}|-35|\cdot|30|\cdot|-42|=14700 \text{ кубических единиц..}$$

Пример. Найти точки пересечения плоскости $3x+5y-2z-60=0$ с координатными осями и линии ее пересечения с координатными плоскостями. изобразить плоскость.

а) Точки пересечения с координатными осями

Точка пересечения с	Полагаем	Получаем
осью Ox	$y=z=0$	$x=20, \quad A(20;\,0;\,0)$
осью Oy	$x=z=0$	$y=12, \quad B(0;\,15;\,0)$
осью Oz	$x=y=0$	$z=30, \quad C(0;\,0;\,30)$

b) Линии пересечения с координатными плоскостями

Линия пересечения с	Полагаем	Получаем
плоскостью xOy	$z=0$	$AB: 3x+5y-60=0$
плоскостью xOz	y = 0	$AC: 3x-2z-60=0$
плоскостью yOz	$z=0$	$BC: 5y-2z-60=0$

Плоскость изображена на рис. 8

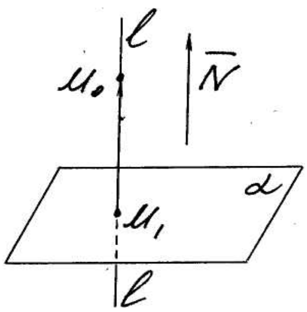


Рис. 9

Расстояние от точки до плоскости

Пусть даны плоскость α, заданная общим уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

и точка $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$. Ее расстояние от плоскости дается формулой

$$d=d_{M_0,\alpha}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|\overline{N}|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (14)$$

В соответствии с формулой мы должны в уравнении плоскости заменить x, y, z координатами точки, найти абсо-лютную величину результата и разделить его на длину нор-мального вектора плоскости.

Пример. Найти уравнение сферы, центр которой находится в точке $M_0(2;\,4;\,-3)$ и которая касается пло-скости $-3x-4y+5z+6=0$.

Радиус сферы равен расстоянию от точки до плоскости. По формуле (14) имеем

$$R=d=d_{M_0,\alpha}=\frac{\left|-3\cdot 2-4\cdot 4+5\cdot(-3)+6\right|}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+5^2}}=\frac{|-31|}{\sqrt{50}}=\frac{31}{5\sqrt{2}},\ R^2=\frac{961}{50},$$

и на основании (2) получаем уравнение искомой сферы

$$(x-2)^2+(y-4)^2+(z+3)^2=\frac{961}{50}.$$

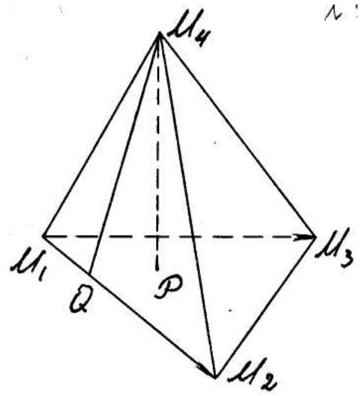


Рис. 10

Пример. Найти объем треугольной пирамиды с известными вершинами $M_1(-6;\,1;\,-5)$, $M_2(7;\,-2;\,-1)$, $M_3(10;\,-7;\,1)$, $M_4(3;\,-2;\,-6)$ (рис. 10).

Если $H=M_4P$ - высота пирамиды, то ее объем равен

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{M_1M_2M_3}\cdot H.$$

Но

$$S_{M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right|,$$

где

$$\overline{M_1M_2}=(13,\,-3,\,4),\ \overline{M_1M_3}=(16,\,-8,\,6),\ \overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}=(14,\,-14,\,-56)$$

$$\left|\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right|=\sqrt{14^2+(-14)^2+(-56)^2}=42\sqrt{2},\ S_{M_1M_2M_3}=21\sqrt{2},$$

а высота $H=M_4P$ равна расстоянию точки M_4 от плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3. Уравнение последней найдено выше,

$$x-y-4z-13=0,$$

откуда

$$H = M_4P = \frac{|3-(-2)-4\cdot(-6)-13|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}} = \frac{16}{\sqrt{18}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Окончательно

$$V = \frac{1}{3}\cdot 21\sqrt{2}\cdot\frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{112}{3} \approx 37.33 \text{ \textit{кубических единиц.}}$$

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности

Пусть плоскости α_1, α_2 заданы своими общими уравнениями

$$\begin{aligned}(\alpha_1)&: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \overline{N_1}=(A_1, B_1, C_1);\\ (\alpha_2)&: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\ \overline{N_2}=(A_2, B_2, C_2).\end{aligned} \tag{15}$$

Углом между плоскостями α_1, α_2 называется угол между их нормальными векторами,

$$\left(\alpha_1 \,\hat{,}\, \alpha_2\right) = \left(\overline{N_1} \,\hat{,}\, \overline{N_2}\right),$$

откуда

$$\cos\left(\alpha_1 \,\hat{,}\, \alpha_2\right) = \cos\left(\overline{N_1} \,\hat{,}\, \overline{N_2}\right) = \frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{|\overline{N_1}||\overline{N_2}|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{16}$$

Две плоскости **параллельны** тогда и только тогда, если их нормальные векторы коллинеарны, именно:

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \left(\overline{N_1} \parallel \overline{N_2},\quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}\right) \tag{17}$$

Две плоскости **перпендикулярны** тогда и только тогда, если их нормальные векторы перпендикулярны, то есть

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \left(\overline{N_1} \perp \overline{N_2},\quad \overline{N_1}\cdot\overline{N_2}=0,\quad A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\right) \tag{18}$$

Пример. Составить уравнение плоскости, если она проходит через точку $A(-4;\,3;\,2)$ перпендикулярно к двум плоскостям

$$x-2y+3z-5=0,\ x+4y-z+3=0\,.$$

Нормальные векторы данных плоскостей $\overline{N_1}=(1,-2,3),\ \overline{N_2}=(1,4,-1)$. Нормальный вектор $\overline{N}$ искомой плоскости перпендикулярен векторам $\overline{N_1},\overline{N_2}$ и, следовательно, коллинеарен их векторному произведению,

$$\overline{N}\parallel\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}=-10\bar{i}+4\bar{j}+6\bar{k},\ \ \overline{N}=(5,-2,-3);$$

на основании уравнения (4) искомое уравнение суть

$$5(x-(-4))-2(y-3)-3(z-2)=0,\quad 5x-2y-3z+32=0\,.$$

Пример. Найти значения параметров m, n, для которых плоскости

$$3x+my-5z+8=0,\ 7x+9y+nz-1=0$$

параллельны.

Нормальные векторы данных плоскостей $\overline{N_1}=(3,m,-5),\ \overline{N_2}=(7,9,n)$, и на основании условия (17) параллельности двух плоскостей должны иметь

$$\frac{3}{7}=\frac{m}{9}=\frac{-5}{n},$$

откуда следует, что

$$\frac{3}{7}=\frac{m}{9},\ \frac{3}{7}=\frac{-5}{n}\Rightarrow 7m=27,\ 3n=-35,\ m=\frac{27}{7},\ n=\frac{-35}{3}\,.$$

Задача о пересечении трех плоскостей

Предположим, что мы ищем точки пересечения трех плоскостей, то есть мы изучаем систему уравнений этих плоскостей

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & \overline{N_1}=(A_1,B_1,C_1),\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & \overline{N_2}=(A_2,B_2,C_2),\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, & \overline{N_3}=(A_3,B_3,C_3).\end{cases} \tag{19}$$

Матрица системы и расширенная матрица суть

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{pmatrix},\quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\end{pmatrix}$$

Случай 1. $RankA = Rank\widetilde{A} = 3$.

Главный определитель системы $\Delta = |A| \neq 0$ отличен от нуля, система имеет единственное решение, и все плоскости пересекаются в единственной точке.

Случай 2. $RankA = 2, Rank\widetilde{A} = 3$.

Система (19) несовместна. На основании того, что $RankA = 2$, матрица A имеет по крайней мере один ненулевой минор второго порядка. В этом случае какие-то из двух плоскостей пересекаются, а третья плоскость параллельна линии их пересечения. Если, например,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеем $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0, A_1/A_2 \neq B_1/B_2$, нормальные векторы $\overline{N_1}, \overline{N_2}$ не коллинеарны, и пересекаются первые две плоскости.

Случай 3. $RankA = Rank\widetilde{A} = 2$. Система (19) имеет бесконечное множество решений, все плоскости имеют общую линия пересечения.

Случай 4. $RankA = 1, Rank\widetilde{A} = 2$.

Система (19) не имеет решений. Все миноры второго порядка матрицы A равны нулю, следовательно, нормальные векторы $\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$, $\overline{N_3}$ плоскостей попарно коллинеарны, плоскости параллельны, но по крайней мере две из них не совпадают.

Случай 5. $RankA = Rank\widetilde{A} = 1$. Все три плоскости совпадают.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ПРЯМАЯ

Уравнения прямой, проходящей через данную точку параллельно заданному вектору

Пусть пространственная прямая l проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и параллельна некоторому вектору $\bar{s} = (m, n, p)$, который называется **направляю-**

Рис. 11

щим вектором прямой (рис. 11).

Для любой точки $M(x;\ y;\ z)$ прямой векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{s}$ коллинеарны, и поэтому их соответствующие коор динаты пропорциональны. Отсюда следует, что

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (20)$$

Формула (20) содержит два независимых уравнения, которые называются **каноническими уравнениями прямой** *l*.

Обозначим *t* равные отношения в (20),

$$\frac{x-x_0}{m}=t,\ \frac{y-y_0}{n}=t,\ \frac{z-z_0}{p}=t.$$

Получим $x-x_0=mt,\ y-y_0=nt,\ z-z_0=pt$, откуда

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \qquad (21)$$

Уравнения (21) называются **параметрическими уравнениями прямой**. здесь *t* – вспомогательная переменная, которая называется параметром. Например, значение параметра *t* = 0 соответствует точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Пример. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(2;\ 6;\ -3)$ и перпендикулярна данной плоскости $4x-5y+z-10=0$.

В качестве направляющего вектора прямой мы берем нормальный вектор плоскости,

$$\bar{s}=\overline{N}=(4,-5,1),$$

и с помощью формул (21) и (20) получаем

$$\begin{matrix} x=2+4t, \\ y=6-5t, \\ z=-3+t; \end{matrix} \quad \frac{x-2}{4}=\frac{y-6}{-5}=\frac{z+3}{1}.$$

Пример. Составьте самостоятельно уравнения высоты M_4P треугольной пирамиды с известными вершинами (см. пример, рассмотренный выше)

$$M_1(-6; 1; -5),\ M_2(7; -2; -1), M_3(10; -7; 1), M_4(3; -2; -6).$$

Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$. Если мы возьмем вектор

$$\bar{s} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

в качестве направляющего вектора прямой, получим параметрические и канонические уравнения прямой в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t; \end{aligned} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (22)$$

На практике иногда бывает лучше взять $\bar{s} \parallel \overline{M_1M_2}$ и применить уравнения (20), (21).

Пример. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки $A(3; -3; 4), B(3; 1; -2)$.

Направляющий вектор прямой

$$\bar{s} \parallel \overline{AB} = (0; 4; -6) \Rightarrow \bar{s} = (0, 2, -3),$$

и на основании уравнений (20), (21)

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-3}; \quad \begin{cases} x = 3 + 0 \cdot t, \\ y = -3 + 2 \cdot t, \\ z = 4 - 3 \cdot t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 4 - 3t. \end{cases}$$

Прямая перпендикулярна оси Ox.

Общие уравнения прямой

Прямая может быть задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей.

Пусть

$$(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \overline{N_1} = (A_1, B_1, C_1),$$

$$(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \overline{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$$

- две непараллельные плоскости, то есть их нормальные векторы $\overline{N_1}, \overline{N_2}$ неколлинеарны. В этом случае система двух линейных уравнеий

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (23)$$

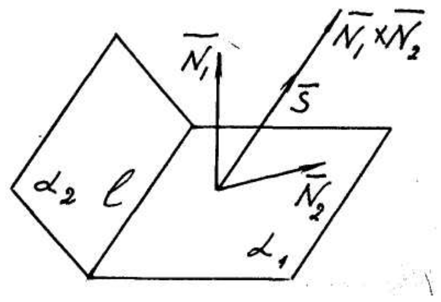


Рис. 12

представляет прямую l как линию пересечения плоскостей α_1, α_2 (рис. 12). Уравнения (23) называются **общими уравнениями прямой**.

Легко перейти от общих уравнений прямой к параметрическим и каноническим уравнениям.

Пусть, например,

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

В этом случае мы полагаем $z = t$ в общих уравнениях (23) и получаем систему уравнений относительно x и y

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1t - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2t - D_2 \end{cases}$$

С отличным от нуля главным определителем. Находя из этой системы x, y, мы получаем параметрические уравнения прямой.

Существует иной способ перехода от общих уравнений прямой к параметрическим и каноническим. Мы можем найти направляющий вектор прямой

$$\overline{s} \parallel \overline{N_1} \times \overline{N_2} \text{ (рис. 12)}$$

и затем какую-нибудь ее точку, полагая, например, $z = 0$ в уравнениях (23).

Пример. Перейти к параметрическим и каноническим уравнениям прямой, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 4 = 0, \\ 3x - 2y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

Первый способ. Полагая $z=t$, получаем систему уравнений относительно x, y

$$\begin{cases} 2x+3y=5t-4, \\ 3x-2y=-t+5. \end{cases} \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_1=\begin{vmatrix} 5t-4 & 3 \\ -t+5 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 5t-4 \\ 3 & -t+5 \end{vmatrix},$$

$$\Delta=-13,\ \Delta_1=(5t-4)\cdot(-2)-3\cdot(-t+5)=-7-7t,\ \Delta_2=2\cdot(-t+5)-(5t-4)\cdot 3=22-17t$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-7-7t}{-13}=\frac{7}{13}+\frac{7}{13}t,\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{22-17t}{-13}=-\frac{22}{13}+\frac{17}{13}t,$$

и параметрические уравнения прямой суть

$$\begin{cases} x=7/13+7/13t \\ y=-22/13+17/13t, \\ z=t. \end{cases} \qquad (*)$$

Из уравнений (*) мы получаем точку $M_0\left(\frac{7}{13};\frac{-22}{13};0\right)$ прямой и ее направляющий вектор $\bar{s}=\left(\frac{7}{13},\frac{17}{13},1\right)$.

Мы можем улучшить полученные уравнения (*). Во-первых, мы можем взять направляющий вектор прямой в виде $\overline{s_1}=13\bar{s}=(7,17,13)$ и получить

$$\begin{cases} x=7/13+7t \\ y=-22/13+17t, \\ z=13t. \end{cases}$$

Полагая далее $t=-1/13$, мы получаем точку прямой с целыми координатами $x=0,\ y=-3,\ z=-1$. Наконец, мы записываем усовершенствованные параметрические и канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x=7t \\ y=-3+17t, \\ z=-1+13t; \end{cases} \quad \frac{x}{7}=\frac{y+3}{17}=\frac{z+1}{13}.$$

Второй способ. Направляющий вектор прямой

$$\bar{s} \parallel \overline{N_1} \times \overline{N_2} = (2, 3, -5) \times (3, -2, 1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -7\bar{i} - 17\bar{j} - 13\bar{k},\ \bar{s} = (7, 17, 13).$$

Полагая далее $z = 0$ в общих уравнениях прямой и решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 3x - 2y = 5, \end{cases}$$

получаем точку прямой $M_0(7/13;\ -22/13;\ 0)$ и составляем искомые уравнения

$$\begin{cases} x = 7/13 + 7t \\ y = -22/13 + 17t, \\ z = 13t. \end{cases} \quad \frac{x - 7/13}{7} = \frac{y + 22/13}{17} = \frac{z}{13}.$$

Угол между двумя прямыми
Условия параллельности и перпендикулярности

Угол между двумя прямыми l_1, l_2 определяется как угол между их направляющими векторами,

$$\left(l_1 \hat{,}\ l_2\right) = \left(\overline{s_1} \hat{,}\ \overline{s_2}\right),$$

и, следовательно,

$$cos\left(l_1 \hat{,}\ l_2\right) = cos\left(\overline{s_1} \hat{,}\ \overline{s_2}\right) = \frac{\overline{s_1} \cdot \overline{s_2}}{\left|\overline{s_1}\right|\left|\overline{s_2}\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (24)$$

Две прямые **параллельны** тогда и только тогда, если их направляющие векторы коллинеарны, то есть

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \left(\overline{s_1} \parallel \overline{s_2}, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}\right). \qquad (25)$$

Две прямые **перпендикулярны** тогда и только тогда, если их направляющие векторы перпендикулярны, именно:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \left(\overline{s_1} \perp \overline{s_2}, \quad \overline{s_1} \cdot \overline{s_2} = 0, \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0\right). \qquad (26)$$

Пример. Составить уравнения прямой, проходящей через данную точку

$A(-4;\,3;\,-2)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 2x-3y+z-1=0, \\ x+4y-2z+10=0. \end{cases}$$

В качестве направляющего вектора искомой прямой мы можем взять направляющий вектор данной прямой. Последний коллинеарен векторному произведению нормальных векторов $\overline{N_1}=(2,-3,1)$, $\overline{N_2}=(1,4,-2)$ плоскостей, определяющих данную прямую (рис. 12). Итак,

$$\bar{s}\parallel \overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=2\bar{i}+5\bar{j}+11\bar{k},\ \bar{s}=(2,5,11),$$

на основании чего получаем параметрические и канонические уравнения искомой прямой

$$\begin{cases} x=-4+2t, \\ y=3+5t, \\ z=-2+11t, \end{cases} \quad \frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{11}.$$

Пример. Доказать, что прямые

$$l_1:\begin{cases} x=3+2t, \\ y=-1-3t, \\ z=2-5t, \end{cases} \quad l_2:\frac{x+2}{-3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-3}$$

Не параллельны и лежат в одной плоскости (рис. 13). Составить уравнение этой плоскости. Найти точку пересечения прямых.

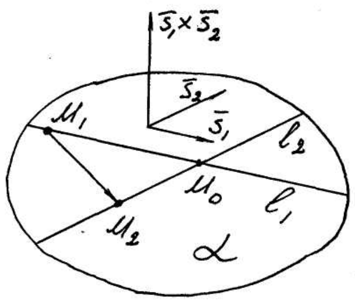


Рис. 13

Уравнения прямых дают нам точку $M_1(3;-1;2)$ и направляющий вектор $\overline{s_1}=(2,-3,-5)$ прямой l_1, точку $M_2(-2;3;4)$ и направляющий вектор $\overline{s_2}=(-3,1,-3)$ прямой l_2.

Векторы $\overline{s_1},\overline{s_2}$ не коллинеарны, и поэтому прямые не параллельны.

Далее, вектор $\overline{M_1M_2}=(-5,4,2)$ и векторное произведение направляющих векторов прямых

$$\overline{s_1}\times\overline{s_2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & -5\\ -3 & 1 & -3\end{vmatrix}=14\bar{i}+21\bar{j}-7\bar{k}=7\left(2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}\right)$$

перпендикулярны ($\overline{M_1M_2}\cdot\left(\overline{s_1}\times\overline{s_2}\right)=(-5)\cdot 14+4\cdot 21+2\cdot(-7)=0$), а это означает, что прямые лежат в одной плоскости α. Ее нормальный вектор и уравнение получаем обычным путем,

$$\overline{N}\parallel\overline{s_1}\times\overline{s_2},\ \overline{N}=(2,3,-1),\ 2\left(x-x_{M_1}\right)+3\left(y-y_{M_1}\right)-\left(z-z_{M_1}\right)=0,$$

$$2(x-3)+3(y+1)-(z-2)=0;\ \alpha: 2x+3y-z-1=0.$$

Чтобы найти точку пересечения прямых, запишем сначала параметрические уравнения второй прямой l_2, используя другой параметр, например, τ,

$$\begin{cases}x=-2-3\tau,\\ y=3+\tau,\\ z=4-3\tau.\end{cases}$$

Приравниваем далее правые части двух первых уравнений обеих прямых

$$\begin{cases}3+2t=-2-3\tau,\\ -1-3t=3+\tau\end{cases}$$

и решаем полученную систему уравнений относительно t и τ

$$\begin{cases}2t+3\tau=-5,\\ 3t+\tau=-4.\end{cases}$$

Получаем $t=\tau=-1$. Подставляя $t=-1$ в уравнения первой прямой или $\tau=-1$ в уравнения второй, мы находим координаты точки пересечения прямых, именно $M_0(1;\,2;\,7)$.

Пример (для самостоятельного решения). Доказать, что прямые

$$l_1:\begin{cases}x=-1+4t,\\ y=3-6t,\\ z=2t,\end{cases}\quad l_2:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-4}{1}$$

параллельны, и составить уравнение плоскости, в которой они обе находятся.

ПЛОСКОСТЬ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ПРЯМАЯ

Пересечение прямой с плоскостью (и поверхностью)

Пусть дана плоскость, заданная общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{27}$$

и прямая, заданная своими параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{28}$$

Для отыскания возможной точки пересечения прямой и плоскости заменим в уравнении (27) значения x, y, z их значениями из уравнений (28), что даст нам уравнение относительно t,

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0,$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (Am + Bn + Cp)t = 0. \tag{29}$$

При рассмотрении последнего уравнения могут представиться три случая.

1) $Am + Bn + Cp \neq 0$.

В этом случае мы решаем уравнение (29) относительно t,

$$t = t' = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp};$$

далее замена t на t' в уравнениях (28) дает координаты искомой точки пересечения.

2) $Am + Bn + Cp = 0$, но $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

В этом случае точка пересечения отсутствует, прямая параллельна плоскости, но не лежит в ней.

3) $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

В этом последнем случае точка лежит в плоскости, так как ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости.

Таким же образом мы можем искать возможные точки пересечения прямой с произвольной поверхностью. Например, если поверхностью является сфера радиуса R с центром в точке $M_1(x_1; y_1; z_1)$,

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2,$$

мы получаем следующее уравнение относительно t:

$$(x_0+mt-x_1)^2+(y_0+nt-y_1)^2+(z_0+pt-z_1)^2=R^2$$

или

$$(m^2+n^2+p^2)t^2+2(m(x_0-x_1)+n(y_0-y_1)+p(z_0-z_1))t+$$
$$+(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2-R^2=0.$$

Последнее уравнение является квадратным относительно t и может иметь два, одно или ни одного решения. Соответственно мы получаем две, одну (случай касания прямой и сферы) или ни одной точки пересечения.

Пример. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-6}{-5}=\frac{z+3}{1}$$

и плоскости $4x-5y+z-10=0$.

Сначала мы записываем параметрические уравнения прямой

$$x=2+4t,$$
$$y=6-5t,$$
$$z=-3+t,$$

а затем действуем следующим образом:

$$4(2+4t)-5(6-5t)+(-3+t)-10=0,\ 42t-35=0,\ t=35/42;$$

$$x=2+4\cdot 35/42=16/3,\ y=6-5\cdot 35/42=77/42,\ z=-3+35/42=-91/42.$$

Ответ. Прямая пересекает плоскость в точке $\left(\frac{16}{3};\frac{11}{6};-\frac{91}{42}\right)$.

Угол между пространственной прямой и плоскостью

Условия параллельности и перпендикулярности

Как известно, углом между прямой l и плоскостью α называется угол между этой прямой и ее (ортогональ-ной) проекцией на плоскость.

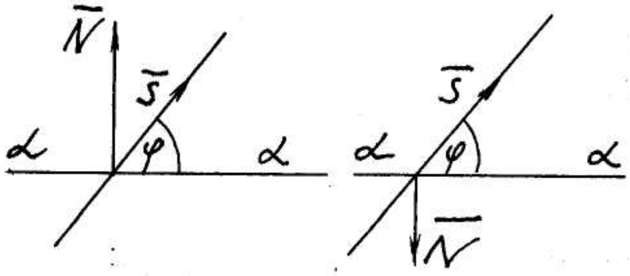


Рис. 14

Пусть $\overline{s}=(m,n,p), \overline{N}=(A,B,C)$ -- соответственно направляющий вектор прямой l и нормальлный вектор плоскости α соответственно (рис. 14). Как видно из рисунка, угол φ между l и α определяется одной из двух формул

$$\varphi=\left(l \,\hat{,}\, \alpha\right)=\frac{\pi}{2}-\left(\overline{s} \,\hat{,}\, \overline{N}\right) \text{ или } \varphi=\left(l \,\hat{,}\, \alpha\right)=\left(\overline{s} \,\hat{,}\, \overline{N}\right)-\frac{\pi}{2},$$

откуда получаем

$$\varphi=\left(l \,\hat{,}\, \alpha\right)=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\left(\overline{s} \,\hat{,}\, \overline{N}\right)\right), sin\,\varphi=\pm sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\overline{s} \,\hat{,}\, \overline{N}\right)\right)=\pm cos\left(\overline{s} \,\hat{,}\, \overline{N}\right),$$

$$\sin\varphi=\sin\left(l \,\hat{,}\, \alpha\right)=\pm\cos\left(\overline{s} \,\hat{,}\, \overline{N}\right)=\pm\frac{\overline{s}\cdot\overline{N}}{\left|\overline{s}\right|\left|\overline{N}\right|}=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad (30)$$

Прямая и плоскость **параллельны** тогда и только тогда, если их направляющий и нормальный векторы $\overline{s}, \overline{N}$ перпендикулярны, то есть

$$l \parallel \alpha \Leftrightarrow \left(\overline{s}\perp\overline{N}, \quad \overline{s}\cdot\overline{N}=0, \quad Am+Bn+Cp=0\right). \quad (31)$$

Прямая и плоскость **перпендикулярны** тогда и только тогда, если их направляющий и нормальный векторы $\overline{s}, \overline{N}$ коллинеарны, то есть

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \left(\overline{s}\parallel\overline{N}, \quad \frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}\right). \quad (32)$$

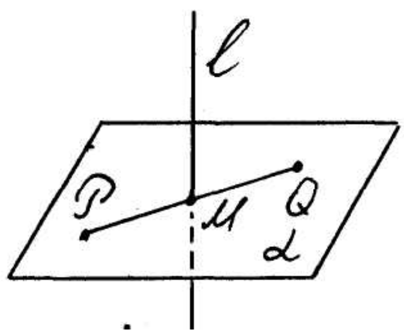


Рис. 15

Пример. Найти точку, симметричную точке $P(1;-1;-2)$ относительно прямой (рис. 15)

$$(l): \frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}.$$

Найти проекцию точки P на прямую и расстояние точки от прямой.

1) В качестве первого шага мы запишем уравнение плоскости α, проходящей через точку P перпендикулярно данной

прямой l. В качестве нормального вектора плоскости возьмем направляющий вектор прямой l : $\overline{N_\alpha} = \overline{s_l} = (3, 2, -2)$, откуда

$$3(x - x_P) + 2(y - y_P) - 2(z - z_P) = 0, \quad 3(x-1) + 2(y+1) - 2(z+2) = 0,$$

$$(\alpha):\ 3x + 2y - 2z - 5 = 0.$$

2) Теперь мы находим точку пересечения M плоскости α и прямой l,

$$(\alpha):\ 3x + 2y - 2z - 5 = 0,$$

$$(l): \begin{cases} x = -3 + 3t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 8 - 2t; \end{cases}$$

$$3(-3 + 3t) + 2(-2 + 2t) - 2(8 - 2t) - 5 = 0,\ 17t - 34 = 0, t = 2,$$

$$x = x_M = -3 + 3 \cdot 2 = 3,\ y = y_M = -2 + 2 \cdot 2 = 2,\ z = z_M = 8 - 2 \cdot 2 = 4,\ M(3; 2; 4)$$

Найденная точка M является проекцией точки P на прямую l. Расстояние между точками M и P является расстоянием от точки P до прямой l (найдите его сами).

3) Наконец, мы находим искомую точку Q, учитывая, что точка M делит отрезок PQ пополам. Получаем

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2},\ x_Q = 2x_M - x_P, \text{ и аналогично } y_Q = 2y_M - y_P,\ z_Q = 2z_M - z_P,$$

$$x_Q = 2 \cdot 3 - 1 = 5,\ y_Q = 2 \cdot 2 + 1 = 5,\ z_Q = 2 \cdot 4 + 2 = 10.$$

Ответ. Искомая точка $Q(5; 5; 10)$.

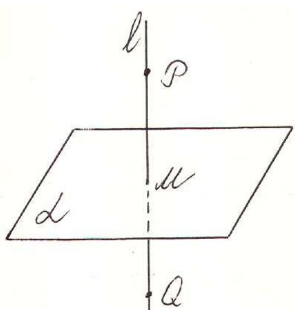


Рис. 16

Пример. Найти точку Q, которая симметрична точке $P(3; -4; -6)$ относительно плоскости $\alpha : x - y - 4z - 13 = 0$ (рис. 16).

План решения задачи.

1) Составляем параметрические уравнения прямой l, проходящей через точку P перпендикулярно данной плоскости α.

2) Находим точку пересечения M прямой l и плоскости α.

3) Находим координаты искомой точки Q, принимая во внимание, что точка M является серединой отрезка PQ.

Осуществление плана.

1) В качестве направляющего вектора $\overline{s_l}$ прямой l возьмем нормальный вектор $\overline{N_\alpha}$ плоскости $\alpha : \overline{s_l} = \overline{N_\alpha} = (1, -1, -4)$, откуда получаем параметрические уравнения прямой l, проходящей через точку $P(3; -4; -6)$ перпендикулярно плоскости α,

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -4 - t, \\ z = -6 - 4t. \end{cases}$$

2) Подставляем правые части полученных уравнений в уравнение плоскости,

$$(3+t) - (-4-t) - 4(-6-4t) - 13 = 0, \quad 18t + 18 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Найденное значение t подставляем в параметрические уравнения прямой, получая координаты точки M,

$$x_M = 3 + (-1) = 2, \quad y_M = -4 - (-1) = -3, \quad z_M = -6 - 4(-1) = -2; \quad M(2; -3; -2).$$

3) Наконец, находим координаты искомой точки Q,

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}, \, x_Q = 2x_M - x_P, \text{ и аналогично } y_Q = 2y_M - y_P, \, z_Q = 2z_M - z_P,$$
$$x_Q = 2 \cdot 2 - 3 = 1, \, y_Q = 2 \cdot (-3) - (-4) = -2, \, z_Q = 2 \cdot (-2) - (-6) = 2 \Rightarrow Q(1; -2; 2).$$

Пример. Составить уравнения высоты DE боковой грани ABD треугольной пирамиды с известными вершинами

$A(2; -5; 6)$, $B(-1; 3; 4)$, $C(-3; 4; -1)$, $D(4; -1; 5)$ (см. рис. 17).

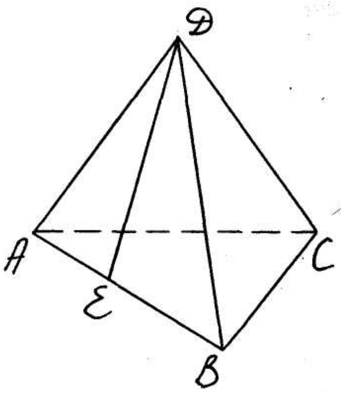


Рис. 17

План решения задачи.

1) Запишем параметрические уравнения прямой AB как прямой, проходящей через две точки, а именно, точки A и B.

2) Составим уравнение плоскости α, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB.

3) Найдем точку пересечения E прямой AB и плос-кости α.

4) Составим уравнения искомой высоты DE как прямой, проходящей через две точки, а именно, точки D и E.

Осуществление плана.

1) $\begin{cases} x &= x_A + (x_B - x_A)t, \\ y &= y_A + (y_B - y_A)t, \\ z &= z_A + (z_B - z_A)t; \end{cases}$ $\begin{cases} x &= 2 + ((-1) - 2)t, \\ y &= -5 + (3 - (-5))t, \\ z &= 6 + (4 - 6)t; \end{cases}$ $\begin{cases} x &= 2 - 3t, \\ y &= -5 + 8t, \\ z &= 6 - 2t. \end{cases}$

2) Чтобы составить уравнение плоскости α, возьмем в качестве ее нормального вектора направляющий вектор прямой AB:

$$\overline{N_\alpha} \| \overline{s_{AB}} = \overline{AB} = (-3, 8, -2); \quad \overline{N_\alpha} = (3, -8, 3)$$
$$(\alpha): 3(x - x_D) - 8(y - y_D) + 2(z - z_D) = 0;$$
$$(\alpha): 3(x - 4) - 8(y - (-1)) + 2(z - 5) = 0;$$
$$(\alpha): 3x - 8y + 2z - 30 = 0.$$

3) Находим точку пересечения прямой l и плоскости α:

$$3(2 - 3t) - 8(-5 + 8t) + 2(6 - 2t) - 30 = 0;$$
$$-77 + 28t = 0, \quad t = 11/4;$$
$$x_E = 2 - 3 \cdot \frac{11}{4} = -\frac{25}{4}; \; y_E = -5 + 8 \cdot \frac{11}{4} = \frac{48}{4} = 12; \; z_E = 6 - 2 \cdot \frac{11}{4} = -\frac{5}{2};$$
$$E\left(-\frac{25}{4}; 12; -\frac{5}{2}\right).$$

4) Составляем, наконец, параметрические и канонические уравнения искомой высоты боковой грани:

$$\overline{s_{DE}} \| \overline{DE} = (-41/4; 13; -15/2); \quad \overline{s_{DE}} = -4\overline{DE} = (41, -52, 30);$$

$\begin{cases} x &= x_D + 41t, \\ y &= y_D + (-52)t, \\ z &= z_D + 30t; \end{cases}$ $\begin{cases} x &= 4 + 41t, \\ y &= -1 - 52t, \\ z &= 5 + 30t; \end{cases}$ $\dfrac{x - 4}{41} = \dfrac{y + 1}{-52} = \dfrac{z - 5}{30}.$

Вопросы для самопроверки
по теме "Аналитическая геометрия в пространстве"

1. Сформулировать определение уравнения поверхности.
2. Записать уравнение сферы данного радиуса с центром: а) в произвольной точке; б) в начале координат.
3. Записать уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору.
4. Что такое нормальный вектор плоскости?
5. Записать общее уравнение плоскости.
6. Как найти нормальный вектор плоскости, проходящей через три данные точки?
7. Что достаточно знать, чтобы составить уравнение плоскости?
8. Как найти расстояние от данной точки до плоскости?
9. Дать определение угла между двумя плоскостями. Как его найти?
10. Сформулировать необходимое и достаточное условие параллельности двух плоскостей.
11. Сформулировать необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей.
12. Записать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через данную точку параллельно заданному вектору.
13. Что такое направляющий вектор прямой?
14. Как найти направляющий вектор прямой, проходящей через две данные точки? Записать параметрические и канонические уравнения такой прямой.
15. Записать общие уравнения прямой. Как перейти от них к параметрическим и каноническим уравнениям?
16. Что достаточно знать, чтобы составить уравнения прямой?
17. Сформулировать определение угла между двумя прямыми. Как его найти?
18. Сформулировать необходимое и достаточное условие параллельности двух прямых.
19. Сформулировать необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых.
20. Что нужно сделать для того, чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости?
21. Сформулировать определение угла между прямой и плоскостью. Как его найти?
22. Сформулировать необходимое и достаточное условие параллельности прямой и плоскости.
23. Сформулировать необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости.

СОДЕРЖАНИЕ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Навчальний посібник по вивченню розділу курсу вищої математики першого семестру (російською мовою)

УКЛАДАЧ: Косолапов Юрій Федорович, кандидат фізико-математичних наук, професор

ФОРМАТ 60×84 $^{1}\!/_{16}$.

Умовних друкарських аркушів

83000, м. Донецьк, вул. Артема, 58, ДонНТУ