МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие по изучению разделов курса

”Теория вероятностей и математическая статистика”

для студентов ДонНТУ

Рассмотрено на заседании
кафедры высшей математики
протокол № 2 от 08.10.2008 г.

Утверждено на заседании
учебно-издательского
совета ДонНТУ
Протокол № 1 от "11" марта 2009 г.

ДОНЕЦК 2009

УДК 519.2 (075.8)
Косолапов Ю.Ф. Элементы теории вероятностей: Учебное пособие по изучению разделов курса ”Теория вероятностей и математическая статистика” / - Донецк: РВА ДонНТУ, 2009. – 159 с.

Излагаются основные понятия теории вероятностей (событие и вероятность, основные правила вычисления вероятностей, одномерные случайные величины, распределения Бернулли, Пуассона, нормальное, равномерное, показательное, неравенство Чебышёва). Подробно рассматриваются примеры решения типичных задач. Даются задания для самостоятельного решения.

Для студентов и преподавателей технических вузов.

СОСТАВИТЕЛЬ: Косолапов Ю.Ф.

РЕЦЕНЗЕНТ: кандидат физико-математических наук, доцент Косилова Е.Ф.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ ЗА ВЫПУСК:
зав. кафедрой высшей математики ДонНТУ,
доктор технических наук, профессор Улитин Г.М.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВВЕДЕНИЕ

Человек в своей практической ддеятельности на каждом шагу встречается со случайными явлениями. Таковыми являются, например, ошибки измерения, погрешности изготовления различных изделий, отказы всевозможных технических устройств, шумы при приеме радиопередач, "болтанка" при полете на самолете. Изучению поддаются только массовые явления - те, которые можно, по крайней мере принципиально, наблюдать много, практически неограниченное число раз. Теория вероятностей изучает закономерности массовых случайных явлений. Методы теории вероятностей, называемые вероятностными или стохастическими, широко применятся в различных областях естествознания и техники: в экономике, аэродинамике, гидродинамике, радиотехнике, теории управления, динамике полета, теории связи, строительной механике, теории механизмов и машин, в технологии машиностроения, теории надежности, теории массового обслуживания, теории ошибок наблюдения, в горном деле, теории процессов управления, теории современных сложных систем и т.д.Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая, в свою очередь, используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, при оценке качества продукции и для многих других целей.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основными (первичными) понятиями теории вероятностей являются: испытание, событие, вероятность события.

Под **испытанием** (опытом) понимают осуществление некоторого комплекса условий. **Событие** - это результат испытания. Принято обозначать события прописными латинскими буквами *A*, *B*, *C*,... . Различают события **достоверные** - обязательно происходящие при каждом испытании, **невозможные** - не могущие произойти ни при одном испытании, и **случайные**, которые при каждом испытании могут как произойти, так и не произойти. Два события называется **совместными**, если они могут произойти вместе, и **несовместными** - в противном случае. Говорят, что несколько событий образуют **полную группу**, если при каждом испытании происходит по крайней мере одно из них. Два несовместных события, образующих полную группу, называются **противоположными**. Событие, противоположное событию *A*, обозначается $\overline{A}$ (читается "не А", "противоположное для А").

2. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Относительной частотой (частостью, иногда частотой) появления некоторого события A называется отношение числа $N(A)$ появлений этого события к числу N произведенных испытаний, т.е. $N(A)/N$.

А. **Статистическое** определение вероятности события A.

Если при проведении серий из большого количества испытаний относительные частоты события A в каждой серии мало отличается друг от друга, то говорят, что событие A имеет вероятность $P(A)$. За значение вероятности (так называемой статистической вероятности) берут ту постоянную величину, около которой группируются наблюдаемые значения относительной частоты. Иногда в качестве приближенного значения вероятности используют значение одной из относительных частот.

Б. **Классическое** определение вероятности события A.

Пусть при каждом испытании может наступить одно из n попарно несовместных равновозможных событий, образующих полную группу. Такие события называются **элементарными** или **элементарными исходами**, или просто **шансами**. Шанс называется **благоприятствующим** событию A, если событие обязательно происходит при наступлении шанса. Вероятностью события A называется отношение количества m благоприятствующих ему шансов к общему количеству n шансов:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

А. **Основной принцип комбинаторики.** Если первое действие A_1 может быть осуществлено n_1 способами, действие A_2 - n_2 способами, действие A_k - n_k способами, то все эти действия вместе можно осуществить $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Б. Простейшие соединения. Несколько элементов, объединенных в одно множество (или одну группу), образуют соединение. Мы ограничимся простейшими из них - размещениями, перестановками и сочетаниями.

Пусть имеется какое-либо множество M, содержащее n элементов.

Размещением из *n* элементов по *k* (элементов в каждом) называется произвольное *k*-элементное упорядоченное подмножество множества M.

Два размещения из *n* по *k* отличаются друг от друга или хотя бы одним элементом, или порядком расположения элементов.

Количество A_n^k всех размещений из *n* элементов по *k* определяется формулой

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)), \qquad (2)$$

правая часть которой содержит *k* сомножителей.

Например, $A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 7620$.

Перестановкой из *n* элементов называется соединение, которое содержит все *n* элементов множества M, но расположенных в определенном порядке.

Две перестановки из *n* элементов отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Очевидно, перестановку из *n* элементов можно рассматривать как размещение из *n* элементов по *n*.

Количество P_n всех возможных перестановок из *n* элементов равно

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n! \qquad (3)$$

Например, $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Сочетанием из *n* элементов по *k* (элементов в каждом) называется произвольное *k*-элементное (неупорядоченное) подмножество множества M.

Два сочетания из *n* по *k* отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Количество C_n^k всех сочетаний из *n* элементов по *k* дается формулой

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (4)$$

Например, $C_8^5 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = C_8^3 = 56$.

Рассуждая так же, как в предыдущем примере, можно доказать, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Пример 1. Любые 10 выпускников группы, состоящей из 25 выпускников, представляют собой сочетание из 25 элементов по 10. Эти же 10 выпускников, направленных на разные места работы, представляют собой размещение из 25 элементов по 10, а также перестановку из 10 элементов.

Пример 2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет чётное число очков.

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что при одном бросании кости выпадает четное число очков. Общее число шансов $n = 6$, а количество благоприятствующих шансов $m = 3$. На основании классического определения вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5\,.$$

Пример 3. Из 10 карточек с цифрами 0, 1, 2,..., 9 выбираются наудачу три. Найти вероятность того, что из них можно составить число 257.

Решение. Элементарным событием (шансом) является здесь произвольная тройка выбранных карточек, представляющая собой сочетание из 10 элементов по 3. Поэтому общее количество шансов равно $n = C_{10}^{3} = 120$. Количество благоприятствующих шансов равно $m = 1$, так как число 257 может получиться единственным способом. Искомая вероятность равна

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{120} \approx 0.01\,.$$

Пример 4. Пусть в условиях примера 3 не просто выбираются три карточки, но и последовательно кладутся на стол в ряд. Найти вероятность того, что при этом получится то же число 257.

Решение. Элементарным событием (шансом) является здесь произвольная, но упорядоченная тройка выбранных карточек, то есть размещение из 10 элементов по 3. Поэтому количество благоприятствующих шансов остается таким же, как в предыдущей задаче ($m = 1$), но общее количество шансов другое, $n = A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{720} \approx 0.001\,.$$

Пример 5. На каждые 100 деталей, изготавливаемых некоторым заводом, в среднем приходится 3 бракованных. Наудачу выбирается три детали. Найти вероятность того, что среди них будет одна бракованная.

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что среди трех наудачу выбранных деталей окажется одна бракованная (и две стандартных).

а) Элементарным событием (шансом) является здесь произвольная тройка выбранных деталей, а именно сочетание из 100 элементов по 3. Поэтому общее количество шансов равно количеству всех сочетаний из 100 элементов по 3,

$$n = C_{100}^{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161700.$$

б) Чтобы найти число шансов, благоприятствующих событию A, примем во внимание, что две стандартных детали (сочетание из 97 имеющихся стандартных деталей по 2) можно выбрать C_{97}^{2} способами, а одну бракованную - тремя способами. На основании основного принципа комбинаторики две стандартных и одну бракованную деталь можно выбрать $3 \cdot C_{97}^{2}$ способами. Следовательно, количество благоприятствующих шансов равно

$$m = 3 \cdot C_{97}^{2} = 3 \cdot \frac{97 \cdot 96}{1 \cdot 2} = 13968.$$

в) По классическому определению вероятности искомая вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{13968}{161700} = 0.86.$$

Пример 6. В партии имеется 20 деталей, из них 6 бракованных. Наудачу взято 10 деталей. Какова вероятность того, что среди выбранных - 4 бракованных (а следовательно, 6 стандартных)?

Решение. Обозначим буквой A событие, вероятность которой нужно найти (среди 10 взятых наудачу деталей 6 стандартных и 4 бракованных).

а) Каждые 10 наудачу взятых деталей – это сочетание из 20 по 10. Следовательно, 10 деталей из 20 можно взять C_{20}^{10} способами, и общее количество шансов, связанных с событием A, равно

$$n = C_{20}^{10}.$$

б) Каждые 4 бракованные детали – это сочетание из 6 элементов по 4, так как бракованные детали можно выбрать из 6 имеющихся. Следовательно, 4 бракованные детали можно взять C_{6}^{4} способами.

Среди 10 взятых деталей должно быть, кроме 4 бракованных, еще 6 стандартных, представляющих собой сочетание из 14 элементов по 6, так как стандартные детали можно выбрать из 14 имеющихся. Поэтому 6 стандартных деталей можно взять C_{14}^6 способами.

10 деталей, среди которых 4 бракованных и 6 стандартных, на основании основного принципа комбинаторики можно взять $C_6^4 \cdot C_{14}^6$ способами. Следовательно, количество шансов, благоприятствующих событию A, равно

$$m = C_6^4 \cdot C_{14}^6 .$$

в) На основании классического определения вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^4 \cdot C_{14}^6}{C_{20}^{10}} \approx 0.24 .$$

4. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

Суммой $A + B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что произойдет по крайней мере одно из них (или только A, или только B, или оба вместе).

Произведением AB событий A, B называется событие, состоящее в том, что оба события происходят вместе (и A, и B).

Оба определения легко переносятся на случай любого количества событий.

Часто оказывается удобным представлять некоторое событие в виде суммы произведений более простых событий. Например, сумму двух событий можно представить следующим образом:

$$A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB , \qquad (5)$$

причем слагаемые $A\overline{B}, \overline{A}B, AB$ попарно несовместны. Первое из них означает, что происходит событие A, а событие B не происходит, второе – что происходит событие B, но не происходит A, третье – что оба события происходят вместе.

Вероятность суммы двух несовместных или нескольких попарно несовместных событий разна сумме вероятностей этих событий: если *A* и *B* – несовместны, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B); \qquad (6)$$

если события *A*, *B*,…, *C* попарно несовместны, то

$$P(A+B+...+C)=P(A)+P(B)+...+P(C). \qquad (7)$$

Легко показать, что сумма вероятностей попарно несовместных событий, образующих полную группу, равна 1 (так как сумма таких событий - достоверное событие, вероятность которого равна 1). В частности, сумма вероятностей противоположных событий равна 1,

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (8)$$

Последний факт часто используется в теории вероятностей, когда вместо вероятности одного события удобнее найти вероятность противоположного события и вычесть последнюю из единицы,

$$P(A)=1-P(\overline{A}). \qquad (9)$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B). \qquad (10)$$

Здесь $P(B/A)$ - условная вероятность события *B*, то есть вероятность *B* при условии, что произошло событие *A*. Соответственно, $P(A/B)$ - условная вероятность события *A* (при условии, что произошло событие *B*).

Вероятность произведения трех и большего количества событий определяется аналогично. Например,

$$P(ABC)=P(A)P(B/A)P(C/AB), P(ABCD)=P(A)P(B/A)P(C/AB)P(D/ABC). \qquad (11)$$

Два события называются **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от наступления (или ненаступления) другого. Несколько событий называются независимыми (точнее - **независимыми в совокупности**), если вероятность одного из них не зависит от наступления (или ненаступления) любого из остальных и произведения любого количества остальных событий.

Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению их вероятностей. Так, если события А, В или А, В, С независимы, то

$$P(AB) = P(A)P(B), P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \qquad (12)$$

Пример 1. В ящике имеется 10 стандартных и 8 бракованных деталей. Поочередно берут наудачу 3 детали (без возвращения деталей обратно). Найти вероятность того, что все извлеченные детали стандартны.

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что все три извлеченные детали стандартны, B - событие, состоящее в том, что стандартна первая деталь, C - стандартна вторая деталь, D - стандартна третья. События B, C, D - зависимые. Вероятность первого равна $P(B) = 10/18$, вероятность события C при условии, что произошло событие B, равна $P(C/B) = 9/17$, вероятность события D при условии, что произошли события B, C, равна $P(D/BC) = 8/16$. Тогда

$$A = BCD\,,\; P(A) = P(BCD) = P(B)P(C/B)P(D/BC),$$

$$P(A) = \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{8}{16} \approx 0.15\,.$$

Пример 2. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0.40, во вторую - 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что стрелок попадет в первую или вторую область, событие B – что он попадет в первую область, С - во вторую. Тогда $A = B + C$, причем события B и C несовместные, и их вероятности известны: $P(B) = 0.40, P(C) = 0.35$. Следовательно,

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = 0.40 + 0.35 = 0.75\,.$$

Пример 3. В цехе работает независимо друг от друга три станка. Вероятность отказа первого станка равна 0.02, второго – 0.07, третьего – 0.05. Найти вероятности того, что: 1) все три станка работают; 2) все три станка отказали;

3) работает только два станка; 4) работает только один станок; 5) работает хотя бы один станок; 6) хотя бы один станок отказал.

Решение. Пусть A, B, C - события, состоящие в том, что работает первый, второй, третий станки соответственно. Тогда события $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ означают отказы этих станков. Вероятности отказов известны: $P(\overline{A}) = 0.02, P(\overline{B}) = 0.07, P(\overline{C}) =$ 0.05, откуда мы можем найти вероятности противоположных событий A, B, C: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.98$, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0.93, P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 0.95$. Согласно условию задачи все события A, B, C, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ независимы.

1) Пусть D - событие, состоящее в том, что работают все 3 станка. Тогда $D = ABC$, и на основании независимости событий A, B, C

$$P(D) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0.98 \cdot 0.93 \cdot 0.95 \approx 0.87.$$

2) Пусть E - событие, состоящее в отказе всех трех станков. Тогда

$$E = \overline{A}\overline{B}\overline{C}, P(E) = P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0.02 \cdot 0.07 \cdot 0.05 \approx 0.0001.$$

3) Событие F, состоящее в том, что работают только два станка, представляется суммой произведений

$$F = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC.$$

Слагаемые этой суммы попарно несовместны и каждое из них выражает тот факт, что два каких-либо станка работают, а один отказал. Сомножители каждого слагаемого независимы. Поэтому

$$P(F) = P(AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC) = P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC) =$$

$$= P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) =$$

$$= 0.98 \cdot 0.93 \cdot 0.05 + 0.98 \cdot 0.07 \cdot 0.95 + 0.02 \cdot 0.93 \cdot 0.95 \approx 0.13.$$

4) Событие G, состоящее в том, что работает только один станок, представляется, по аналогии со случаем 3) в виде суммы произведений

$$G = A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C,$$

откуда

$$P(G) = P(A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C) = P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) =$$

$$= P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(C) =$$

$$= 0.98 \cdot 0.07 \cdot 0.05 + 0.02 \cdot 0.93 \cdot 0.05 + 0.02 \cdot 0.07 \cdot 0.95 \approx 0.01.$$

5) Событие H, состоящее в том, что работает хотя бы один станок, можно представить в виде следующей суммы произведений

$$H = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C .$$

Однако гораздо удобней воспользоваться противоположным событием для H, состоящим в том, что ни один станок не работает, то есть

$$\overline{H} = E = \overline{A}\overline{B}\overline{C} .$$

Так как (см. случай 2) $P(E) = P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) \approx 0.0001$, то $P(\overline{H}) \approx 0.0001$, а следовательно

$$P(H) = 1 - P(\overline{H}) \approx 1 - 0.0001 = 0.9999 \approx 1.$$

6) Таким же точно образом можно найти вероятность события K, состоящего в том, что хотя бы один станок отказал. Именно,

$$\overline{K} = D = ABC,\ P(\overline{K}) = P(D) = P(ABC) \approx 0.87$$

(см.случай 1), откуда

$$P(K) = 1 - P(\overline{K}) \approx 1 - 0.87 = 0.13 .$$

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 4. Прибор состоит из двух независимо работающих узлов, безусловно необходимых для его работы. При включении прибора могут появиться неисправности как в первом, так и во втором узле с вероятностями p_1, p_2 для каждого, причем неисправности в узлах появляются независимо друг от друга. Для успешного включения прибора нужно, чтобы в каждом узле было не более одной неисправности. Найти вероятность того, что прибор благополучно выдержит включение.

Пусть событие A означает, что прибор выдержит включение, а событие B_i - что включение выдержит i-ый узел $(i = 1, 2)$, так что

$$A = B_1 B_2$$

с независимыми, по условию, сомножителями. Необходимо найти вероятности событий B_1 и B_2.

Обозначим

$$D_i = C_{i0} + C_{i1} + C_{i2} + \ldots + C_{ij} + \ldots$$

количество всех возможных неисправностей в i-ом узле, где C_{ij} означает j неисправностей, а события C_{ij} попарно несовместны и образуют полную группу. Поэтому

$$P(D_i) = P(C_{i0} + C_{i1} + C_{i2} + \ldots + C_{ij} + \ldots) = P(C_{i0}) + P(C_{i1}) + P(C_{i2}) + \ldots = 1,$$

причем, начиная с $j = 1$,

$$P(C_{ij}) = p_i^j \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

(неисправности в узле возникают независимо друг от друга). Так как очевидно, что

$$B_i = C_{i0} + C_{i1}$$

(i-ый узел выдержит включение, если в нем возникнет не более одной неисправности), то, используя свойство суммы вероятностей противоположных событий и формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем p_i, получим

$$P(B_i) = 1 - P(\overline{B}_i) = 1 - P(C_{i2} + C_{i3} + \ldots) = 1 - (P(C_{i2}) + P(C_{i3}) + \ldots) = 1 - (p_i^2 + p_i^3 + \ldots) =$$

$$= 1 - \frac{p_i^2}{1 - p_i} = \frac{1 - p_i - p_i^2}{1 - p_i}.$$

Теперь мы можем найти искомую вероятность, а именно:

$$P(A) = P(B_1 B_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{1 - p_1 - p_1^2}{1 - p_1} \cdot \frac{1 - p_2 - p_2^2}{1 - p_2} = \frac{(1 - p_1 - p_1^2)(1 - p_2 - p_2^2)}{(1 - p_1)(1 - p_2)}.$$

5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть событие A может произойти с одним и только одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу (такие события как правило называют **гипотезами**). В этом случае вероятность события A находится в соответствии с так называемая **формулой полной вероятности**

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \qquad (13)$$

Согласно этой формуле вероятность события A равна сумме произведений вероятностей гипотез на соответствующие этим гипотезам условные вероятности события A.

Пример 1. В первом ящике находится 40 деталей, из них 20 окрашенных, во втором - 50 деталей, из них 10 окрашенных, в третьем - 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь из наудачу взятого ящика является окрашенной.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что наудачу взятая деталь из наудачу взятого ящика является окрашенной. Оно может произойти только в том случае, если произойдет одна и только одна из следующих трех гипотез: H_1 - деталь взята из первого ящика, H_2 - деталь взята из второго ящика, H_3 - деталь взята из третьего ящика. Вероятности всех этих гипотез, вычисленные в соответствии с классическим определением вероятности, равны

$$P(H_1) = P(H_1) = P(H_1) = 1/3.$$

Соответствующие условные вероятности события A, также вычисленные с помощью классического определения вероятности, равны

$$P(A/H_1) = 20/40 = 0.5, P(A/H_2) = 10/50 = 0.2, P(A/H_3) = 15/30 = 0.5.$$

На основании формулы полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= 1/3 \cdot 0.5 + 1/3 \cdot 0.2 + 1/3 \cdot 0.5 \approx 0.4.$$

Пример 2. Техническое устройство содержит три блока, работающих независимо. Надежность первого блока, то есть вероятность безотказной его работы в течение определенного промежутка времени t, равна 0.6, второго – 0.5, третьего – 0.3. Для выхода из строя технического устройства достаточно отказа всех трех блоков. При отказе одного из блоков устройство выходит из строя с вероятностью 0.2, а при отказе двух блоков – с вероятностью 0.6. Найти вероятность отказа технического устройства в течение промежутка времени t.

Решение. Обозначим буквой A событие, вероятность которого требуется найти: отказ технического устройства в течение промежутка времени t. Введем следующие гипотезы: H_1 - отказ одного блока, H_2 - отказ двух блоков, H_3 - отказ трех блоков, H_0 - бесперебойная работа всех трех блоков в течение этого промежутка. Соответствующие условные вероятности события A равны

$$P(A/H_1) = 0.2,\ P(A/H_2) = 0.6,\ P(A/H_3) = 1,\ P(A/H_0) = 0.$$

Равенство нулю условной вероятности $P(A/H_0)$ позволяет нам при вычислениях не принимать гипотезу H_0 во внимание. Однако необходимо проверить, образуют ли все четыре гипотезы полную группу событий.

Для нахождения вероятностей гипотез введем события B, C, D, означающие отказ первого, второго, третьего блока соответственно. Тогда события $\overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ состоят в отсутствии отказов этих блоков. События $B, C, D, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ независимые. По условию

$$P(\overline{B}) = 0.6,\ P(\overline{C}) = 0.5,\ P(\overline{D}) = 0.3,$$

откуда

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.6 = 0.4,\ P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0.5 = 0.5,\ P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 0.7.$$

Далее,

$$H_1 = B\overline{C}\overline{D} + \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}\overline{C}D,\ H_2 = BC\overline{D} + B\overline{C}D + \overline{B}CD,\ H_3 = BCD,\ H_0 = \overline{B}\overline{C}\overline{D},$$

и поэтому

$$P(H_1) = P\left(B\overline{C}\overline{D} + \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}\overline{C}D\right) = P\left(B\overline{C}\overline{D}\right) + P\left(\overline{B}C\overline{D}\right) + P\left(\overline{B}\overline{C}D\right) =$$

$$= P(B)P(\overline{C})P(\overline{D}) + P(\overline{B})P(C)P(\overline{D}) + P(\overline{B})P(\overline{C})P(D) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.7 \approx 0.36,$$

$$P(H_2) = P\left(BC\overline{D} + B\overline{C}D + \overline{B}CD\right) = P\left(BC\overline{D}\right) + P\left(B\overline{C}D\right) + P\left(\overline{B}CD\right) =$$

$$= P(B)P(C)P(\overline{D}) + P(B)P(\overline{C})P(D) + P(\overline{B})P(C)P(D) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.7 \approx 0.41,$$

$$P(H_3)=P(BCD)=P(B)P(C)P(D)=0.4\cdot 0.5\cdot 0.7\approx 0.14,$$

$$P(H_0)=P(\overline{B}\overline{C}\overline{D})=P(\overline{B})P(\overline{C})P(\overline{D})=0.6\cdot 0.5\cdot 0.3=0.09.$$

Так как сумма вероятностей гипотез равна единице, то они образуют полную группу событий.

По формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)\approx$$
$$\approx 0.36\cdot 0.2+0.41\cdot 0.6+0.14\cdot 1\approx 0.46.$$

Пример 3. В каждой из трех урн находятся по 4 белых и 6 черных шаров. Наудачу перекладывают один шар сначала из первой урны во вторую, затем из второй в третью и, наконец, из третьей урны извлекают один шар. Найти вероятность того, что он белый.

Пусть A – событие, вероятность которого нужно определить (из третьей урны извлекли белый шар). Введем следующие четыре гипотезы (обозначения понятны):

$H_1=B_1^б B_2^б$ (из первой и второй урн переложили по белому шару)

$H_2=B_1^б B_2^ч$ (из первой урны переложили белый, а из второй – черный шары)

$H_3=B_1^ч B_2^б$ (из первой урны переложили черный, а из второй – белый шары)

$H_4=B_1^ч B_2^ч$ (из первой и второй урн переложили по черному шару).

Вероятности гипотез находим, применяя аксиому 5 теории вероятностей:

$$P(H_1)=P(B_1^б)P(B_2^б/B_1^б)=\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{11}=\frac{20}{110},\ P(H_2)=P(B_1^б)P(B_2^ч/B_1^б)=\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{11}=\frac{24}{110},$$
$$P(H_3)=P(B_1^ч)P(B_2^б/B_1^ч)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{11}=\frac{24}{110},\ P(H_4)=P(B_1^ч)P(B_2^ч/B_1^ч)=\frac{6}{10}\cdot\frac{7}{11}=\frac{42}{110}.$$

Соответствующие условные вероятности события A равны

$$P(A/H_1)=\frac{5}{11},\ P(A/H_1)=\frac{4}{11},\ P(A/H_1)=\frac{5}{11},\ P(A/H_1)=\frac{4}{11}.$$

Теперь по формуле полной вероятности находим вероятность события A:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)+P(H_4)P(A/H_4)=$$

$$=\frac{20}{110}\cdot\frac{5}{11}+\frac{24}{110}\cdot\frac{4}{11}+\frac{24}{110}\cdot\frac{5}{11}+\frac{42}{110}\cdot\frac{4}{11}=\frac{1}{110\cdot 11}(100+96+120+168)=0.4.$$

6. ФОРМУЛЫ БЕЙЕСА (ВЕРОЯТНОСТИ ГИПОТЕЗ)

На практике часто приходится иметь дело с такой ситуацией. Имеется полная группа попарно несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями. Сами эти события (гипотезы) непосредственно не наблюдаемы, но можно наблюдать некоторое связанное с ними событие *A*, для которого известны условные вероятности

$$P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n).$$

В таком случае вероятность того, что событие *A* произошло вместе с гипотезой H_i, то есть вероятность $P(H_i/A)$, можно найти по известным формулам Бейеса

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (14)$$

Что касается вероятности события *A*, то во многих задачах она находится по формуле полной вероятности.

Пример 1. Из 18 стрелков пятеро попадают в мишень с вероятностью 0.8, семеро - с вероятностью 0.7, четверо - с вероятностью 0.6, двое - с вероятностью 0.5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой группе вероятнее всего относится этот стрелок?

Решение. Пусть *A* - событие, состоящее в том, что наудачу выбранный стрелок из наудачу взятой группы не попал в мишень. Введем четыре гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4, означающие, что этот стрелок принадлежит к первой, второй, третьей и четвертой группам соответственно. Вероятности гипотез находятся по классическому определению вероятности,

$$P(H_1) = 5/18, P(H_2) = 7/18, P(H_3) = 4/18, P(H_4) = 2/18,$$

причем сумма этих вероятностей равна 1. Соответствующие условные вероятности события *A*, то есть вероятности промаха стрелком первой, второй, третьей, четвертой групп, по условию равны

$$P(A/H_1) = 1 - 0.8 = 0.2, P(A/H_2) = 1 - 0.7 = 0.3,$$
$$P(A/H_3) = 1 - 0.6 = 0.4, P(A/H_4) = 1 - 0.5 = 0.5$$

По формуле полной вероятности вероятность того, что наудачу выбранный стрелок из наудачу взятой группы не попал в мишень, равна

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) + P(H_4)P(A/H_4) =$$
$$= 5/18 \cdot 0.2 + 7/18 \cdot 0.3 + 4/18 \cdot 0.4 + 2/18 \cdot 0.5 \approx 0.32\,.$$

Теперь по формулам Бейеса найдем условные вероятности гипотез относительно события A, то есть вероятности того, что промах допустил стрелок первой, второй, третьей или четвертой группы соответственно.

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{5/18 \cdot 0.2}{0.32} \approx 0.17,$$
$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{7/18 \cdot 0.3}{0.32} \approx 0.36,$$
$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{4/18 \cdot 0.4}{0.32} \approx 0.28,$$
$$P(H_4/A) = \frac{P(H_4)P(A/H_4)}{P(A)} = \frac{2/18 \cdot 0.5}{0.32} \approx 0.17.$$

Отсюда видно, что не попавший в мишень стрелок вероятнее всего принадлежит ко второй группе, то есть группе, стрелки которой попадают в мишень с вероятностью 0.7.

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 наудачу выбранный стрелок из наудачу взятой группы снова делает один выстрел. Найти вероятность промаха.

Здесь мы снова имеем четыре гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4 о принадлежности стрелявшего к одной из четырех групп, однако в качестве вероятностей гипотез мы можем принять уточненные вероятности, полученные в результате применения формул Бейеса: $P(H_1) = 0.17, P(H_2) = 0.36, P(H_3) = 0.28, P(H_4) = 0.17$. Так как соответствующие условные вероятности события A при этом не изменяются, по формуле полной вероятности мы получаем новое, уточненное значение вероятности события A, именно:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) + P(H_4)P(A/H_4) =$$
$$= 0.17 \cdot 0.2 + 0.36 \cdot 0.3 + 0.28 \cdot 0.4 + 0.17 \cdot 0.5 \approx 0.34\,.$$

Таким образом, формулы Бейеса позволяют **уточнить вероятности гипотез** на основании результата проведенного испытания.

Пример 3. Три стрелка одновременно выстрелили в мишень с вероятностями попадания 0.6, 0.8, 0.7 соответственно. В результате в мишени появилась одна пробоина. Найти вероятности «принадлежности» пробоины каждому из стрелков.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что в результате одновременного выстрела тремя стрелками по одной и той же мишени в ней появилась одна пробоина. Пусть, далее, B, C, D - события, состоящие в попадании в мишень, а $\overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ - в промахе первым, вторым, третьим стрелком соответственно. Все шесть событий $B, C, D, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ независимы. По условию

$$P(B) = 0.6,\, P(C) = 0.8,\, P(D) = 0.7,\, P(\overline{B}) = 0.4,\, P(\overline{C}) = 0.2,\, P(\overline{D}) = 0.3.$$

Очевидно, $A = B\overline{C}\overline{D} + \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}\overline{C}D$, а поэтому

$$P(A) = P\left(B\overline{C}\overline{D} + \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}\overline{C}D\right) = P\left(B\overline{C}\overline{D}\right) + P\left(\overline{B}C\overline{D}\right) + P\left(\overline{B}\overline{C}D\right) =$$

$$= P(B)P(\overline{C})P(\overline{D}) + P(\overline{B})P(C)P(\overline{D}) + P(\overline{B})P(\overline{C})P(D) =$$

$$= 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.7 \approx 0.188.$$

Дальнейшие рассуждения можно провести двумя способами, второй из которых является более простым, но не так просто находимым.

Первый способ. Гипотезами, учитываемыми при вычислениях, можно считать события

$$H_1 = B\overline{C}\overline{D},\, H_2 = \overline{B}C\overline{D},\, H_3 = \overline{B}\overline{C}D$$

с вероятностями

$$P(H_1) = P\left(B\overline{C}\overline{D}\right) = 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.036,\, P(H_2) = P\left(\overline{B}C\overline{D}\right) = 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = 0.096,$$

$$P(H_3) = P\left(\overline{B}\overline{C}D\right) = 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.7 = 0.056$$

и соответствующими условными вероятностями события A

$$P(A/H_1) = P(A/H_2) = P(A/H_3) = 1.$$

Остальными пятью гипотезами, которые соответствуют другим возможным результатам трех выстрелов ($\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ - три промаха, BCD - три попадания, $BC\overline{D}$, $B\overline{C}D$, $\overline{B}CD$ - попадание какими-либо двумя стрелками), можно пренебречь, так как соответствующие им условные вероятности события A равны нулю. Важно только, чтобы сумма вероятностей всех восьми гипотез была равна 1 (проверьте!), то есть чтобы гипотезы образовывали полную группу событий.

По формулам Бейеса

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{P(H_1)}{P(A)}=\frac{0.036}{0.188}\approx 0.19,$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{P(H_2)}{P(A)}=\frac{0.096}{0.188}\approx 0.51,$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{P(H_3)}{P(A)}=\frac{0.056}{0.188}\approx 0.30.$$

Второй способ – более простой. Чтобы найти вероятность, что единственная пробоина в мишени принадлежит первому стрелку, введем только две гипотезы: событие $B\overline{C}\overline{D}$, означающее попадание первым стрелком при промахе остальных двух, и противоположное ему событие,

$$H_1 = B\overline{C}\overline{D},\ \overline{H_1}.$$

Вероятность первой гипотезы, которая нам только и нужна, равна

$$P(H_1)=P(B\overline{C}\overline{D})=P(B)P(\overline{C})P(\overline{D})=0.6\cdot 0.2\cdot 0.3=0.036,$$

а соответствующая условная вероятность события A, как и в первом способе, равна 1. Следовательно, по формуле Бейеса мы получаем

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{P(H_1)\cdot 1}{P(A)}=\frac{0.036}{0.188}\approx 0.19,$$

то есть тот же самый результат, что и при первом способе. Произведя такие же рассуждения сначала для второго (гипотезы $H_2=\overline{B}C\overline{D}, \overline{H_2}$), а затем для третьего стрелков (гипотезы $H_3=\overline{B}\overline{C}D, \overline{H_3}$), мы получим аналогичные результаты

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{P(H_2)\cdot 1}{P(A)}=\frac{0.096\cdot 1}{0.188}\approx 0.51,$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{P(H_2)\cdot 1}{P(A)} = \frac{0.056}{0.188} \approx 0.30\,.$$

7. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЗАКОН ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Случайной величиной называется величина, которая в каждом испытании принимает то или иное возможное значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Мы будем обозначать случайные величины большими греческими буквами $\xi, \eta, \zeta, ...$ (часто встречаются обозначения $X, Y, Z, ...$), а их возможные значения – строчными латинскими буквами ($x, y, z, \ldots$).

В теории вероятностей рассматриваются дискретные и непрерывные случайные величины. Возможные значения дискретной случайной величины образуют некоторую (конечную или бесконечную) последовательность чисел с известными, как правило, вероятностями. Точное определение непрерывной случайной величины будет дано ниже, сейчас же отметим, что возможные ее значения сплошь заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал.

Законом распределения (или просто распределением) случайной величины называется правило, которое устанавливает соответствие между ее возможными значениями и соответствующими вероятностями.

Первичной формой задания закона распределения дискретной случайной величины является так называемая таблица распределения, в первой строке которой указываются возможные значения величины, а во второй – вероятности этих значений. Так, для конечнозначной (а именно n – значной) дискретной случайной величины ξ таблица распределения имеет вид

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

причем сумма вероятностей всех возможных значений ξ равна 1,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1\,.$$

Таблица распределения дискретной случайной величины может быть геометрически изображена многоугольником распределения – ломаной линией, последовательно соединяющей точки

$A_1(x_1;p_1), A_2(x_2;p_2),..., A_n(x_n;p_n)$ (рис. 1)

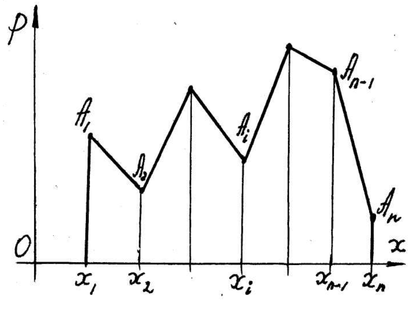

Рис. 1

Пример 1. Урна содержит 6 белых и 4 черных шара. Наудачу берут 4 шара. Пусть ξ - случайная величина, означающая количество извлеченных белых шаров. Составить закон ее распределения.

Возможные значения случайной величины – 0, 1, 2, 3, 4. Вероятности этих значений

$$p_1 = P(\xi = 0),\ p_2 = P(\xi = 1),\ p_3 = P(\xi = 2),\ p_4 = P(\xi = 3),\ p_5 = P(\xi = 4)$$

находятся с помощью классического определения вероятности.

Элементарными событиями (шансами) являются здесь сочетания из 10 элементов по 4, а поэтому общее их количество равно

$$C_{10}^4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210.$$

Количества благоприятствующих шансов представлены в таблице

Событие	Количество благопроятст-вующих шансов	Пояснение
$\xi = 0$	$m_1 = 1$	4 черных шара (и ни одного белого) можно взять единственным способом
$\xi = 1$	$m_2 = 6\cdot C_4^3 = 6\cdot C_4^1 = 6\cdot 4 = 24$	Один белый шар можно взять 6 способами, а 3 черных - C_4^3 способами
$\xi = 2$	$m_3 = C_6^2\cdot C_4^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 90$	2 белых шара можно взять C_6^2 и 2 черных - C_4^2 способами
$\xi = 3$	$m_4 = C_6^3\cdot 4 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4 = 80$	3 белых шара можно взять C_6^3 и 1 черных - 4 способами
$\xi = 4$	$m_5 = C_6^4 = C_6^2 = 15$	4 белых шара (и ни одного черного) можно взять C_6^4 способами

Числа m_2, m_3, m_4 найдены с помощью основного принципа комбинаторики.

Таким образом,

$$p_1=\frac{m_1}{n}=\frac{1}{210},p_2=\frac{m_2}{n}=\frac{24}{210},p_3=\frac{m_3}{n}=\frac{90}{210},p_4=\frac{m_4}{n}=\frac{80}{210},p_5=\frac{m_5}{n}=\frac{15}{210},$$

и таблица распределения случайной величины ξ суть

ξ	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{210}\approx 0.005$	$\frac{24}{210}\approx 0.114$	$\frac{90}{210}\approx 0.429$	$\frac{80}{210}\approx 0.381$	$\frac{15}{210}\approx 0.071$

Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=\frac{1}{210}+\frac{24}{210}+\frac{90}{210}+\frac{80}{210}+\frac{15}{210}=1,$$

а сумма приближенных значений этих вероятностей, здесь равная (с точностью до 0.01)

$$0.015 + 0.114 + 0.429 + 0.381 + 0.071 \approx 1.010,$$

на практике может оказаться немного меньшей или большей 1.

Многоугольником распределения является здесь ломаная, последовательно соединяющая точки

$$A_1(0;\,0.01),\ A_2(1;\,0.11),\ A_3(2;\,0.43),\ A_4(3;\,0.38),\ A_5(5;\,0.07).$$

Постройте его самостоятельно.

Пример 2 (испытания до первого успеха при ограниченном количестве испытаний и постоянной вероятности успеха). Из той же урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, последовательно извлекают по одному шару до первого появления белого шара. Найти закон распределения случайной величины η - количества излеченных шаров.

Возможные значения случайной величины – 1, 2, 3, 4, 5. Для нахождения соответствующих вероятностей введем следующие вспомогательные события: A_i, B_i - появление белого (соответственно черного) шара при извлечении $i-$го по счету шара. Тогда

$$(\eta=1)=A_1,\ (\eta=2)=B_1A_2,\ (\eta=3)=B_1B_2A_3,\ (\eta=4)=B_1B_2B_3A_4,\ (\eta=5)=B_1B_2B_3B_4,$$

и на основании классического определения вероятности

$$p_1 = P(\eta = 1) = P(A_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$p_2 = P(\eta = 2) = P(B_1 A_2) = P(B_1)P(A_2/B_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15},$$

$$p_3 = P(\eta = 3) = P(B_1 B_2 A_3) = P(B_1)P(B_2/B_1)P(A_3/B_1 B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{10},$$

и аналогично

$$p_4 = P(\eta = 4) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{35},\ p_5 = P(\eta = 5) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{210},$$

причем сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины η равна 1,

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{3}{5} + \frac{4}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{35} + \frac{1}{210} = 1.$$

Таблица распределения случайной величины

η	1	2	3	4	5
p_i	$3/5$	$4/15$	$1/10$	$1/35$	$1/210$

Постройте самостоятельно многоугольник распределения случайной величины.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Я.БЕРНУЛЛИ (БИНОМИАЛЬНОЕ)

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых с одной и той же вероятностью p может произойти некоторое событие A (обычно называемое **успехом**), $p = P(A) = const$. Количество ξ успехов (или количество наступлений события A), которые могут наступить во всех n испытаниях, является случайной величиной, о которой говорят, что она имеет **биномиальное распределение**, или **распределение Якоба Бернулли**.

Аналитически распределение Бернулли выражается так называемой формулой Бернулли, дающей вероятность наступления k успехов ($0 \le k \le n$). Именно

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (15)$$

где $q = 1 - p = 1 - P(A) = P(\overline{A})$ - вероятность ненаступления успеха A. Вероятность $P(\xi = k)$ часто обозначается символом $P_n(k)$.

С помощью формулы Бернулли можно найти многие другие важные вероятности.

а) Вероятность того, что успех наступит не более m раз, равна

$$P(0 \le \xi \le m) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + \ldots + P(\xi = m) = \sum_{k=0}^{m} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

б) Вероятность того, что успех наступит не менее m раз, равна

$$P(m \le \xi \le n) = P(\xi = m) + P(\xi = m+1) + \ldots + P(\xi = n) = \sum_{k=m}^{n} P(\xi = k) = \sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

в) Обе предыдущие формулы являются частными случаями следующей: вероятность $P(k_1 \le \xi \le k_2)$ того, что успех наступит не менее k_1 и не более k_2 раз (часто обозначается $P_n(k_1, k_2)$), равна

$$P(k_1 \le \xi \le k_2) = P(\xi = k_1) + P(\xi = k_1 + 1) + \ldots + P(\xi = k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (16)$$

Все три формулы доказываются аналогично. Во всех речь идет о нахождении вероятности суммы попарно несовместных событий $B_k = (\xi = k)$ с вероятностями, определяющимися формулой Бернулли (15).

Вероятность $P(\xi = k)$ с ростом k сначала возрастает, а затем убывает. Следовательно, должно существовать по крайней мере одно значение $k = k_0$, которому соответствует наибольшее значение вероятности. Такое значение называется **наивероятнейшим числом** успехов и определяется двойным неравенством

$$np - q \le k_0 < np + p. \qquad (17)$$

В зависимости от того, является ли число $np - q$ дробным или целым, существует одно или два наивероятнейших числа. Отметим еще, что если np - целое число, то $k_0 = np$.

Пример 1. Опытом установлено, что в среднем 75% массовой продукции, выпускаемой заводом, являются первосортными. Какова вероятность того, что из шести взятых наудачу изделий этого завода четыре окажутся первосортными?

Решение. Будем считать испытанием взятие наудачу одного изделия. Тогда мы имеем $n = 6$ независимых испытаний. Пусть успех (событие) A состоит в том, что взятое наудачу изделие – первосортное. Вероятность успеха A постоянна и равна $p = P(A) = const = 0.75$, вероятность неуспеха $q = 1 - p = 0.25$.

Введем далее случайную величину ξ - количество первосортных изделий, то есть количество успехов в 6 независимых испытаниях. Нам нужно найти вероятность $P(\xi = 4)$. Но, очевидно, ξ имеет распределение Бернулли, и поэтому мы можем найти эту вероятность по формуле Бернулли (15)

$$P(\xi = 4) = C_6^4 p^4 q^{6-4} = C_6^2 (0.75)^4 (0.25)^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot (0.75)^4 (0.25)^2 \approx 0.297 \approx 0.30..$$

Пример 2. В условиях примера 1 найти вероятность того, что из 10 взятых наудачу изделий: а) более 5, б) не более 5 изделий окажутся первосортными.

Решение. Здесь производится $n = 10$ независимых испытаний с постоянной вероятностью $p = P(A) = const = 0.75$ успеха A (наудачу взятое изделие - первосортно).

Пусть ξ - случайная величина, означающая количество первосортных изделий (из взятых десяти). Как и в предыдущем примере, ξ имеет распределение Бернулли, и нужно найти вероятности $P(\xi > 5)$, $P(\xi \le 5)$. Первую найдем, используя 5 раз формулу Бернулли (15), а именно:

$$P(\xi > 5) = P(6 \le \xi \le 10) = P(\xi = 6) + P(\xi = 7) + P(\xi = 8) + P(\xi = 9) + P(\xi = 10) =$$
$$= C_{10}^6 p^6 q^4 + C_{10}^7 p^7 q^3 + C_{10}^8 p^8 q^2 + C_{10}^9 p^9 q^1 + C_{10}^{10} p^{10} q^0 =$$
$$\approx 0.0162 + 0.0031 + 0.0004 + 0.0000 + 0.0000 \approx 0.020.$$

Далее, события $(\xi > 5)$ и $(\xi \le 5)$ являются противоположными, а поэтому вторая из искомых вероятностей равна

$$P(\xi \le 5) = 1 - P\left(\overline{\xi \le 5}\right) = 1 - P(6 \le \xi \le 10) \approx 1 - 0.020 = 0.980.$$

Пример 3. Найти вероятность хотя бы одного успеха в n независимых испытаниях с постоянной вероятностью успеха.

Пусть случайная величина ξ означает количество успехов в n испытаниях, и нужно найти вероятность события $(\xi \geq 1) \equiv (\xi > 0)$. Так как $P(\xi = 0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot q^n = q^n$, то

$$P(\xi \geq 1) = P(\xi > 0) = 1 - P(\overline{\xi > 0}) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - q^n..$$

Пример 4. Вероятность рождения мальчика равна 0.51. Сколько детей должна иметь семья, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.99, иметь по крайней мере одного мальчика?

В задаче испытанием является рождение ребенка, успехом A – рождение мальчика, вероятность успеха $p = P(A) = const = 0.51$, вероятность «неуспеха», то есть рождения девочки $q = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = 0.49$. Вероятность хотя бы одного успеха на основании предыдущего примера равна $1 - q^n = 1 - 0.49^n$. По условию задачи эта вероятность должна быть не меньшей 0.99, то есть нам нужно рассмотреть неравенство относительно n

$$1 - 0.49^n \geq 0.99$$

и найти его наименьшее целое решение. Имеем

$$0.49^n < 1 - 0.99 = 0.01, \lg 0.49^n < \lg 0.01, n \lg 0.49 < -2 \Rightarrow n > \frac{-2}{\lg 0.49} = 6.45.$$

Таким образом, чтобы удовлетворить условию задачи, семья должна иметь по крайней мере семерых детей.

Замечание. Задача примера 4 относится к числу так называемых **обратных**, в отличие от прямых задач, где количество испытаний изначально задано.

9. ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА

Пусть случайная величина ξ имеет распределение Бернулли (количество успехов в n независимых испытаниях с постоянной вероятностью $p = P(A)$ успеха A в каждом испытании). Как сказано выше, вероятность $P(\xi = k)$ наступления k успехов подсчитывается с помощью формулы Я. Бернулли (15). Однако при больших n, то есть при большом количестве испытаний, использование формулы становится крайне затруднительным. Поэтому вместо нее применяются некоторые другие приближенные формулы.

А) Приближенное значение вероятности $P(\xi = k)$ наступления k успехов при большом количестве n независимых испытаниях находится с помощью так называемой **локальной теоремы Лапласа**. Суть теоремы состоит в следующем:

$$P(\xi = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_0), \qquad (18)$$

где

$$x_0 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (19)$$

а $\varphi(x)$ - так называемая малая функция Лапласа, определяемая формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (20)$$

Значения функции $\varphi(x)$ для положительных значений аргумента находятся из таблицы. Для отрицательных значений x используется свойство четности функции $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Отметим также, что при $|x| > 4$ можно считать $\varphi(x) = 0$.

Б) Приближенное значение вероятности $P(k_1 \le \xi \le k_2)$ наступления не менее k_1 и не более k_2 успехов при большом количестве n независимых испытаниях находится с помощью так называемой **интегральной теоремы Лапласа:**

$$P_n(k_1, k_2) = P(k_1 \le \xi \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (21)$$

где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (22)$$

а $\Phi(x)$ - функция (или нормированная функция) Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt . \qquad (23)$$

Значения функции Лапласа для положительных значений аргумента находятся из таблицы. Для отрицательных значений x используется свойство ее нечетности $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. При $|x| > 5$ можно считать $\Phi(x) = 0.5$.

Пример 1. Найти вероятность того, что среди 100 изделий 55 окажутся отполированными, если в общей массе изделий имеется поровну отполированных и неотполированных.

Решение. Здесь производится $n = 100$ независимых испытаний (проверка каждого из 100 изделий на отполированность). Вероятность успеха A (изделие отполировано) $p = P(A) = const = 0.5$, вероятность противоположного события (изделие не отполировано) $q = 1 - p = 0.5$.

Если ввести случайную величину ξ - количество отполированных изделий из 100 имеющихся, то ξ имеет распределение Бернулли, и требуется найти вероятность $P(\xi = 55)$. На основании локальной теоремы Лапласа (18) – (20)

$$P(\xi = 55) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_0) = \left| \begin{matrix} np = 50, \\ \sqrt{npq} = 5, \end{matrix} \; x_0 = \frac{55-50}{5} = 1 \right| = \frac{1}{5} \cdot 0.2420 = 0.0484 \approx 0.05 .$$

Пример 2. 96 % деталей, выпускаемых заводом, стандартны. Найти вероятность, того, что в партии из 15 000 деталей этого завода нестандартных не менее 560 и не более 630.

Решение. Если считать испытанием выпуск одной детали, то мы имеем дело с $n = 15000$ независимых испытаний. Пусть событие («успех») A означает, что наудачу взятая деталь бракованная. Вероятность «успеха» $p = P(A) = 0.04$ постоянна, вероятность "неуспеха" $q = 1 - p = 0.96$. Требуется определить вероятность того, что количество выпущенных заводом нестандартных деталей не менее, чем $k_1 = 560$, и не более, чем $k_2 = 630$. Имеем

$$np = 15000 \cdot 0.04 = 600, \sqrt{npq} = \sqrt{15000 \cdot 0.04 \cdot 0.96} = 24 ,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{560 - 600}{24} = -1.67,\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{630 - 600}{24} = 1.25.$$

Первый способ. На основании интегральной теоремы Лапласа (21) - (23)

$$P_{15000}(560, 630) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1.25) - \Phi(-1.67) =$$
$$= 0.3962 + \Phi(1.67) = 0.3962 + 0.4525 = 0.8487.$$

Случайная величина ξ - количество нестандартных деталей из 15 000 имеющихся – имеет распределение Бернулли. Имеем

$$np = 15000 \cdot 0.04 = 600,\ \sqrt{npq} = \sqrt{15000 \cdot 0.04 \cdot 0.96} = 24,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{560 - 600}{24} = -1.67,\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{630 - 600}{24} = 1.25,$$

и на основании интегральной теоремы Лапласа получаем

$$P(560 \le \xi \le 630) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1.25) - \Phi(-1.67) =$$
$$= \Phi(1.25) + \Phi(1.67) = 0.3962 + 0.4525 = 0.8487.$$

Пример 3. Вероятность успеха A в независимых испытаниях $p = 0.05$. Сколько испытаний необходимо провести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.8, иметь не менее пяти успехов?

Задача сводится к нахождению наименьшего целого значения n из следующего неравенства:

$$P_n(5, n) \ge 0.8, \text{ или } P(5 \le \xi \le n) \ge 0.8,$$

где случайная величина ξ означает количество успехов.

Используя интегральную теорему Лапласа, имеем

$$0.8 \le P_n(5, n) = P(5 \le \xi \le n) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{5 - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{np - 5}{\sqrt{npq}} = -\frac{0.05n - 5}{0.22\sqrt{n}},\ \ x_2 = \frac{n - 0.05n}{\sqrt{0.05 \cdot 0.95n}} = 4.3\sqrt{n}.$$

Число n можно считать настолько большим, чтобы иметь $\Phi(x_2) = 0.5$. Например, если предположить, что $4.3\sqrt{n} \ge 5$, то достаточно (проверьте!) считать, что

$n \geq 2$. По условию же мы должны иметь $n \geq 5$, так что заведомо $\Phi(x_2) = 0.5$. Следовательно, мы можем рассмотреть более простое неравенство

$$0.8 \geq 0.5 + \Phi\left(\frac{0.05n - 5}{0.22\sqrt{n}}\right), \Phi\left(\frac{0.05n - 5}{0.22\sqrt{n}}\right) \geq 0.3.$$

На основании таблицы значений функции Лапласа заключаем, что

$$\frac{0.05n - 5}{0.22\sqrt{n}} \geq 0.84,$$

и остается приближенно решить неравенство относительно $\sqrt{n}$. Полагая $t = \sqrt{n}$, имеем

$$\frac{0.05t^2 - 5}{0.22t} \geq 0.84, 0.05t^2 - 5 \geq 0.84 \cdot 0.22t, 0.05t^2 - 0.18t - 5 \geq 0, \left[\begin{aligned} & t \geq 11.96, \\ & t \leq -8.36. \end{aligned}\right.$$

Можно считать, что $\sqrt{n} \geq 12, n \geq 144$.

Итак, для удовлетворения требований задачи необходимо провести как минимум 144 испытания.

Замечание. Задача этого примера также относится к числу обратных.

10. ОТКЛОНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ СОБЫТИЯ ОТ ЕГО ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть, как и в предыдущих двух разделах, производится *n* независимых испытаний с постоянной вероятностью $p = P(A) = const$ события *A* в каждом испытании. Если обозначить $n(A)$ (или ξ) количество наступлений события *A*, то отношение $n(A)/n$ (или ξ / n) является, как известно, относительной частотой события *A*. Пользуясь интегральной теоремой Лапласа, несложно получить следующую формулу

$$P\left(\left|\frac{n(A)}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (24)$$

Она дает вероятность того, что относительная частота $n(A)/n$ (или ξ / n) события A отклоняется по абсолютной величине от его вероятности $p = P(A)$ не более, чем на некоторое положительное число ε.

Пример 1. Проводится $n = 100$ независимых испытаний с постоянной вероятностью 0.03 успеха. Найти вероятность того, что относительная частота успеха отклонится от его вероятности не более, чем на 0.02.

Решение. Если A – успех, то $P(A) = p = 0.03,\ q = 1 - p = 0.97$. По формуле (24), в которой следует положить $\varepsilon = 0.02$, получаем

$$P\left(\left|\frac{n(A)}{n} - p\right| \le 0.02\right) = 2\Phi\left(0.02 \cdot \sqrt{\frac{100}{0.03 \cdot 0.97}}\right) = 2\Phi(1.17) = 2 \cdot 0.3790 \approx 0.76\,.$$

Пример 2. Вероятность того, что изделие повреждено, равна 0.03. Сколько поврежденных изделий может содержать партия из 100 изделий с вероятностью 0.9?

Пусть A – событие, состоящее в том, что наудачу взятое изделие повреждено. По условию, $p = P(A) = const = 0.03,\ q = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = 0.97$. Если m – количество поврежденных изделий в партии, то относительная частота события A есть $m/100$. По формуле (24)

$$P\left(\left|\frac{m}{100} - 0.03\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{100}{0.03 \cdot 0.97}}\right). \qquad (*)$$

а) Из условия и формулы (*) прежде всего следует, что

$$2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{100}{0.03 \cdot 0.97}}\right) = 0.9,\ \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{100}{0.03 \cdot 0.97}}\right) = 0.45,\ \Phi(58.62\varepsilon) = 0.45,$$

$$58.62\varepsilon = 1.65,\ \varepsilon = 0.028\,.$$

б) Зная $\varepsilon = 0.028$, из той же формулы (*) и условия получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{100} - 0.03\right| \le 0.028\right) = 0.9\,.$$

Следовательно, с вероятностью 0.9 выполняется неравенство

$$\left|\frac{m}{100}-0.03\right| \le 0.028 \Rightarrow |m-3| \le 2.8 \Rightarrow 0.2 \le m \le 5.8\,.$$

Таким образом, с вероятностью 0.9 в партии может быть не менее одного и не более пяти поврежденных изделий.

11. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Пусть, как и ранее, производится n независимых испытаний с постоянной вероятностью $p = P(A)$ успеха A в каждом испытании, а случайная величина ξ (распределение Бернулли) означает количество успехов в этих испытаниях. Как известно, предел вероятности $P(\xi = k)$ наступления k успехов при $n \to \infty$, $p \to 0$ и дополнительном условии $np = const = a$ равен

$$\lim_{n\to\infty,\,p\to 0,\,np=a} P_n(k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}\,.$$

Поэтому при большом количестве n испытаний и малой вероятности p успеха можно найти приближенное значение вероятности $P(\xi = k)$ по следующей формуле (так называемой **формуле Пуассона**)

$$P(\xi = k) \approx \frac{a^k}{k!}e^{-a},\ a = np,\ a \le 10\,. \qquad (25)$$

Значения правой части в зависимости от значений a, k находятся по таблице или подсчитываются непосредственно.

Пример 1. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут: а) 3 поврежденных изделия; б) не более двух поврежденных изделий; в) не менее трех поврежденных изделий.

Решение. По условию, количество независимых испытаний (то есть количество отправленных на базу изделий) $n = 5000$. Вероятность «успеха» (то есть повреждения изделия в пути) $p = P(A) = const = 0.0002$. Количество ξ «успехов» является случайной величиной, имеющей распределение Бернулли, так что для нахождения искомых вероятностей мы имеем право использовать формулу Бернулли (15). Однако по условию количество испытаний велико, вероятность «успеха» мала, $np = 5000 \cdot 0.0002 = 1 < 10$, и мы можем воспользоваться формулой Пуассона (25), полагая в ней $a = np = \; = 5000 \cdot 0.0002 = 1$.

а) Вероятность трех «успехов», то есть вероятность повреждения трех изделий, мы находим, полагая $k = 3$ в формуле (25),

$$P(\xi = 3) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \frac{1^3}{3!} e^{-1} \approx 0.06 .$$

б) Вероятность повреждения не более двух изделий находим, применяя формулу (16) и три раза формулу Пуассона (при $k = 0, k = 1, k = 2$),

$$P(\xi \le 2) = P((\xi = 0) + (\xi = 1) + (\xi = 2)) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) =$$
$$= \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} + \frac{1^2}{2!} e^{-1} \approx 0.92 \approx 0.9.$$

в) Вероятность повреждения не менее трех изделий находим, используя уже найденную вероятность противоположного события,

$$P(\xi \ge 3) = 1 - P\left(\overline{\xi \ge 3}\right) = 1 - P(\xi < 3) = 1 - P(\xi \le 2) \approx 1 - 0.92 = 0.08 .$$

Пример 2. На факультете насчитывается 2000 студентов. Найти вероятность того, что 7 июля является днем рождения 10 студентов (год – не високосный).

Решение. Наличие одного студента можно считать испытанием, так что имеем $n = 2000$ независимых испытаний. Успехом A можно считать событие, состоящее в том, что наудачу взятый студент родился 7 июля. Количество студентов, родившихся в этот день, является случайной величиной, имеющей распределение Бернулли. В задаче число испытаний велико, вероятность успеха, равная $p = P(A) = 1/365$, мала, $np = 2000 \cdot 1/365 \approx 5 < 10.$ Поэтому вместо формулы Бернулли мы можем применить приближенную формулу Пуассона, полагая в ней $a = np = 5, k = 10$. Получаем

$$P(\xi = 10) \approx \frac{a^{10}}{10!} e^{-a} = \frac{5^{10}}{10!} e^{-5} \approx 0.02 .$$

12. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность того, что она принимает значения, меньшие *x*, то есть

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi \in (-\infty, x)). \qquad (26)$$

Вероятность того, что случайная величина ξ принимает значения, лежащие на интервале $[a, b)$ (замкнутом слева и открытом справа), равна разности значений функции распределения в конечной и начальной точках интервала:

$$P(a \le \xi < b) = P(\xi \in [a, b)) = F(b) - F(a). \qquad (27)$$

Как следствие получаем вероятности попадания значений ξ на другие интервалы с теми же концами, а именно $(a, b), [a, b], (a, b]$,

$$P(a < \xi < b) = P(\xi \in (a, b)) = P(a \le \xi < b) - P(\xi = a), \qquad (28)$$

$$P(a \le \xi \le b) = P(\xi \in [a, b]) = P(a \le \xi < b) + P(\xi = b), \qquad (29)$$

$$P(a < \xi \le b) = P(\xi \in (a, b]) = P(a < \xi < b) + P(\xi = b). \qquad (30)$$

Функция распределения $F(x)$ является неотрицательной неубывающей функцией, значения которой заключены между нулем и единицей, $0 \le F(x) \le 1$.

По определению принимается, что

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1. \qquad (31)$$

Вероятность того, что случайная величина ξ принимает **отдельное** (изолированное) значение a, может быть определена как следующий предел:

$$P(\xi = a) = \lim_{b \to a} P(a \le \xi < b) = \lim_{b \to a} P(\xi \in [a, b)) = \lim_{b \to a} F(b) - F(a). \qquad (32)$$

Эта вероятность равна нулю, если $\lim_{b \to a} F(b) = F(a)$, то есть если функция распределения $F(x)$ непрерывна в точке a.

Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если ее функция распределения непрерывна во всех точках множества вещественных чисел.

Для непрерывной случайной величины ξ все вероятности (27) – (30) равны:

$$P(a \le \xi < b) = P(a < \xi < b) = P(a \le \xi \le b) = P(a < \xi \le b) = F(b) - F(a), \quad (33)$$

или

$$P(\xi \in [a, b)) = P(\xi \in (a, b)) = P(\xi \in [a, b]) = P(\xi \in (a, b]) = F(b) - F(a).$$

Эти формулы можно записать короче, если использовать специальное обозначение $< a, b >$, означающее интервал с концами a, b, которые могут как принадлежать, так и не принадлежать самому интервалу. Для любой точки x такого интервала мы можем записать $x \in < a, b >$. Таким образом,

$$P(\xi \in < a, b >) = F(b) - F(a). \quad (34)$$

В случае **дискретной** случайной величины ξ функция распределения в любой точке x равна сумме вероятностей тех значений ξ, которые меньше x:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i . \quad (35)$$

Если дискретная случайная величина задана таблицей, в которой возможные значения величины расположены в возрастающем порядке, то последнюю формулу более удобно записать в развернутом виде, а именно:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ } если \text{ } x \le x_1, \\ p_1, \text{ } если \text{ } x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, \text{ } если \text{ } x_2 < x \le x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, \text{ } если \text{ } x_3 < x \le x_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}, \text{ } если \text{ } x_{n-1} < x \le x_n, \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n = 1, \text{ } если \text{ } x > x_n \end{cases} \quad (36)$$

График функции распределения (36) представляет собой систему отрезков, параллельных оси Ox, с «выколотыми» левыми концами, а именно:

$$y = 0 \ (x \le x_1), \ y = p_1 \ (x_1 < x \le x_2), \ldots, \ y = p_1 + p_2 \ (x_2 < x \le x_3), \ldots, \ y = 1 \ (x > x_n).$$

Пример 1. В урне находятся 5 белых и 3 черных шара. Последовательно извлекают по одному шару до первого появления белого шара (без возвращения шара в урну). Найти закон распределения (таблицу, функцию распределения) случайной величины ξ - количества извлеченных шаров.

Решение. Очевидно, случайная величина ξ может принимать только четыре значения, а именно 1, 2, 3, 4. Событие $(\xi = 1)$ означает, что с первого раза извлечен белый шар, $(\xi = 2)$ - сначала извлечен черный шар, а вслед за ним белый, $(\xi = 3)$ сначала извлечено два черных, а затем белый шар, $(\xi = 4)$ первых три извлеченных шара – черные (и автоматически четвертый - белый). Пусть A – событие, состоящее в извлечении белого шара. Тогда события, состоящие в том, что ξ принимает значения 1, 2, 3, 4, можно представить в виде:

$$(\xi = 1) = A, (\xi = 2) = \overline{A}A, (\xi = 3) = \overline{A}\overline{A}A, (\xi = 4) = \overline{A}\overline{A}\overline{A}.$$

Вероятности этих значений находятся по соответствующим правилам (в сочетании с применением классического определения вероятности).

$$p_1 = P(\xi = 1) = P(A) = \frac{5}{8},\ p_2 = P(\xi = 2) = P(\overline{A}A) = P(\overline{A})P(A/\overline{A}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56},$$

$$p_3 = P(\xi = 3) = P(\overline{A}\overline{A}A) = P(\overline{A})P(\overline{A}/\overline{A})P(A / \overline{A}\overline{A}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56},$$

$$p_4 = P(\xi = 4) = P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}) = P(\overline{A})P(\overline{A}/\overline{A})P(\overline{A} / \overline{A}\overline{A}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}.$$

Сумма найденных вероятностей $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Таблица распределения случайной величины ξ имеет вид

ξ	1	2	3	4
p_i	$\frac{5}{8} = 0.625$	$\frac{15}{56} \approx 0.268$	$\frac{5}{56} \approx 0.089$	$\frac{1}{56} \approx 0.018$

Функция распределения случайной величины равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le 1, \\ p_1 = 0.625, \text{если } 1 < x \le 2, \\ p_1 + p_2 = 0.625 + 0.268 = 0.893, \text{если } 2 < x \le 3, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 0.893 + 0.089 = 0.982, \text{если } 3 < x \le 4, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0.982 + 0.018 = 1, \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 1.

Пример 2. В условиях предыдущего примера найти вероятности следующих событий: а) извлечено не менее 2, но менее 4 ша-ров; б) извлечено более 2, но менее 4 шаров; в) извлечено не менее 2 и не более 4 шаров; г) извлечено более 2, но не более 4 шаров.

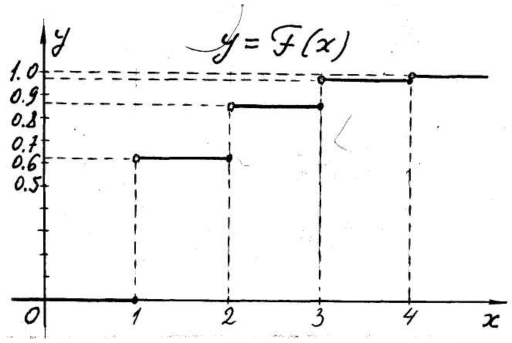

Рис. 1

Решение. Зная функцию распределения случайной величины ξ - количества извлеченных шаров, мы сводим решение задачи к последовательному при-менению формул (27) – (30).

а) $P(2 \le \xi < 4) = F(4) - F(2) = 0.982 - 0.625 = 0.357$;

б) $P(2 < \xi < 4) = P(2 \le \xi < 4) - P(\xi = 2) = 0.357 - 0.268 = 0.089$;

в) $P(2 \le \xi \le 4) = P(2 \le \xi < 4) + P(\xi = 4) = 0.357 + 0.018 = 0.375$;

г) $P(2 < \xi \le 4) = P(2 < \xi < 4) + P(\xi = 4) = 0.089 + 0.018 = 0.107$.

Пример 3. Охотник стреляет по убегающему зайцу, имея в запасе 4 заряда. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.7, при втором - 0.5, при третьем - 0.3, при четвертом - 0.1. Найти закон распределения случайной величины ξ - количества сделанных охотником выстрелов.

Очевидно, ξ может принимать четыре значения, а именно: 1 (попадание при первом выстреле), 2 (промах при первом выстреле и попадание при втором), 3 (промахи при первых двух выстрелах и попадание при третьем), 4 (промахи при первых трех выстрелах). Для нахождения вероятностей этих значений введем следующие события: A – попадание при первом выстреле, B – при втором, C – при третьем, D – при четвертом. По условию $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.3$, $P(D) = 0.1$.

$$P(\xi = 1) = P(A) = 0.7;\ P(\xi = 2) = P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B / \overline{A}) = (1 - 0.7) \cdot 0.5 = 0.15;$$

$$P(\xi = 3) = P(\overline{A}\overline{B}C) = P(\overline{A})P(\overline{B} / \overline{A})P(C / \overline{A}\overline{B}) = (1 - 0.7) \cdot (1 - 0.5) \cdot 0.3 = 0.045;$$

$$P(\xi = 4) = P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B} / \overline{A})P(\overline{C} / \overline{A}\overline{B}) = (1 - 0.7) \cdot (1 - 0.5) \cdot (1 - 0.3) = 0.105.$$

Таблица распределения изучаемой случайной величины

ξ	1	2	3	4
p	0.7	0.15	0.045	0.105

Ее функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 1; \\ 0.7, \text{ если } 1 < x \le 2 \\ 0.7 + 0.15 = 0.85, \text{ если } 2 < x \le 3 \\ 0.85 + 0.045 = 0.895, \text{ если } 3 < x \le 4 \\ 1, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Постройте самостоятельно ее график.

Пример 4. В цехе установлено 6 станков, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что один (безразлично какой) станок не требует в данный момент внимания рабочего (то есть функционирует нормально), равна 0.8. Найти закон распределения случайной величины ξ - количества станков, не требующих в данный момент внимания рабочего (таблицу и функцию распределения). Найти вероятности следующих событий: в данный момент не требуют внимания рабочего а) не менее 2, но менее 5 станков; б) более 2, но менее 5 станков; в) не менее 2 и не более 5 станков; г) более 2, но не более 5 станков.

Решение. Наличие одного (безразлично какого) станка мы можем трактовать как испытание, а успехом считать тот факт, что в данный момент станок не требует внимания рабочего. По условию задачи мы имеем $n = 6$ независимых испытаний с постоянной вероятностью $p = 0.8$ успеха. Следовательно, случайная величина ξ - количество станков, не требующих в данный момент внимания рабочего, имеет распределение Бернулли. Возможными значениями ξ являются числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, а вероятности этих значений находятся по формуле Бернулли (15) ($q = 1 - p = 0.2$). Например,

$$p_1 = P(\xi = 0) = C_6^0 p^0 q^{6-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0.2^6 \approx 0.00006,$$

$$p_2 = P(\xi = 1) = C_6^1 p^1 q^{6-1} = 6 \cdot 0.8 \cdot 0.2^5 \approx 0.00154,$$

$$p_3 = P(\xi = 2) = C_6^2 p^2 q^{6-2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0.8^2 0.2^4 \approx 0.01536 .$$

Произведя остальные вычисления (сделайте это самостоятельно!), получим таблицу распределения случайной величины ξ

ξ	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0.00006	0.00154	0.01536	0.08192	0.24576	0.39321	0.26214

.

Функция распределения случайной величины равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ 0 + 0.00006 = 0.00006, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ 0.00006 + 0.00154 = 0.00160, & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 0.00160 + 0.01536 = 0.01696, & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 0.01696 + 0.08192 = 0.09888, & \text{если} \quad 3 < x \le 4, \\ 0.09888 + 0.24576 = 0.34464, & \text{если} \quad 4 < x \le 5, \\ 0.34464 + 0.39321 = 0.73785, & \text{если} \quad 5 < x \le 6, \\ 0.73785 + 0.26214 = 0.99999 = 1, & \text{если} \quad x > 6. \end{cases}$$

Постройте самостоятельно ее график.

Находим, наконец, искомые вероятности:

а) $P(2 \le \xi < 5) = F(5) - F(2) = 0.34464 - 0.00160 = 0.34304$;

б) $P(2 < \xi < 5) = P(2 \le \xi < 5) - P(\xi = 2) = 0.34304 - 0.01536 = 0.32768$;

в) $P(2 \le \xi \le 5) = P(2 \le \xi < 5) + P(\xi = 5) = 0.34304 + 0.39321 = 0.73625$;

г) $P(2 < \xi \le 5) = P(2 < \xi < 5) + P(\xi = 5) = 0.32768 + 0.39321 = 0.72089$.

Пример 5. Функция распределения непрерывной случайной величины ξ задана формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ a \sin x + b, \text{ если } |x| \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \text{ если } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1) Найти значения параметров a, b. 2) Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $<-\frac{\pi}{6}, \pi>$.

1) В силу непрерывности случайной величины ее функция распределения непрерывна во всех точках, а поэтому имеет равные односторонние пределы в точках $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$,

$$F\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)=F\left(-\frac{\pi}{2}+0\right), F\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=F\left(\frac{\pi}{2}+0\right).$$

Но

$$F\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)=0, F\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)=-a+b, F\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=a+b, F\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=1,$$

и мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -a+b=0, \\ a+b=1 \end{cases}$$

относительно a, b. Очевидно, $a=b=\frac{1}{2}$, и следовательно

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<-\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}, \text{ если } |x|\le\frac{\pi}{2}, \\ 1, \text{ если } x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2) На основании формулы (40)

$$P\left(\xi \in <-\frac{\pi}{6}, \pi>\right)=F(\pi)-F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0.75\,.$$

13. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть функция распределения непрерывной случайной величины ξ имеет производную во всех точках, за исключением, быть может, нескольких.

Плотностью распределения (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины ξ называется производная ее функции распределения,

$$f(x) = F'(x). \qquad (37)$$

Плотность распределения определена во всех точках, в которых функция распределения обладает производной. В свою очередь функция распределения представляет собой **первообразную** плотности распределения.

Плотность распределения является неотрицательной функцией в силу неубывания функции распределения.

При известной плотности распределения вероятность попадания случайной величины ξ на интервал $< a, b >$ с концами a, b может быть записана в виде

$$P(\xi \in < a, b >) = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (38)$$

Зная плотность распределения случайной величины, можно найти ее функцию распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,. \qquad (39)$$

Так как $F(+\infty) = 1$, из последней формулы следует одно из основных свойств плотности распределения, именно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,. \qquad (40)$$

Пример 1. Найти плотность распределения непрерывной случайной величины ξ, которая задана своей функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}, \text{ если } |x| \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \text{ если } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

С помощью плотности распределения найти вероятность $P\left(\xi \in < -\frac{\pi}{6}, \pi >\right)$ (ср. пример 5 предыдущего раздела). Построить графики функции и плотности распределения.

На основании формулы (37), определяющей плотность распределения, имеем

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x, \text{ если } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ если } x < -\frac{\pi}{2} \text{ или } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Теперь по формуле (38) находим искомую вероятность

$$P\left(\xi \in < -\frac{\pi}{6}, \pi >\right) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 dx = \frac{1}{2}\sin x \Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Для построения графиков функций $y = f(x)$, $y = F(x)$ найдем сначала их производные до второго порядка включительно,

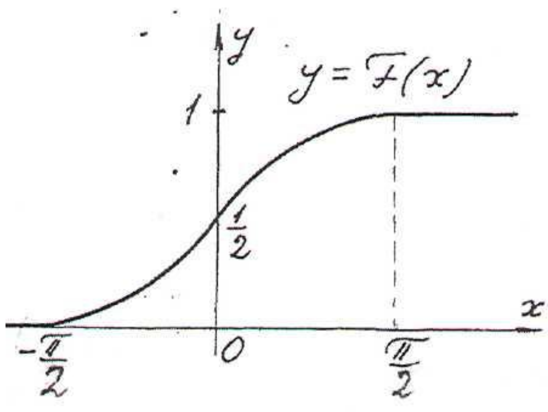

Рис. 1 a

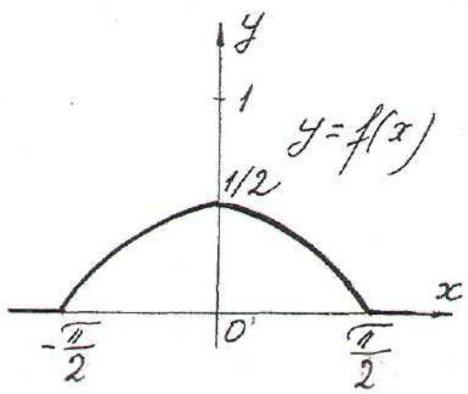

Рис. 1 b

$$f'(x) = F''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sin x \begin{cases} > 0, \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right); \\ < 0, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \end{cases} \\ 0 \quad \text{при } x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cos x < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \\ 0 \quad \text{при } x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

По знакам производных видим, что функция распределения $y = F(x)$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, так как $F'(x) = f(x) > 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ее график является вогнутым на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и выпуклым на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (см. рис. 1 а). В свою очередь плотность распределения $y = f(x)$ возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, убывает на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и имеет на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ выпуклый график (рис. 1 б).

Пример 2. Найти значение параметра a таким образом, чтобы функцию

$$f(x) = ae^{-|x|}$$

можно было считать плотностью распределения некоторой непрерывной случайной величины. Зная плотность распределения, найти функцию распределения этой случайной величины. Изобразить графически функцию и плотность распределения.

На основании формулы (40)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = a\left(\int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx\right) = a\left(e^x\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-x}\Big|_{0.}^{\infty}\right) = 2a,\ 2a = 1,\ a = \frac{1}{2},$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Теперь по формуле (39) находим функцию распределения случайной величины,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^x dx = \frac{1}{2}e^x\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}e^x, \text{ если } x \le 0; \\ \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{x} e^{-x} dx\right) = \frac{1}{2}\left(2 - e^{-x}\right), \text{ если } x > 0; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & \text{если } x \le 0; \\ \frac{1}{2}\left(2 - e^{-x}\right), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Изучение знаков их производных

$$F'(x)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, \text{ при } x<0;\\ \dfrac{1}{2}e^{-x}, \text{ при } x>0;\end{cases}, \quad F''(x)=f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, \text{ при } x<0;\\ -\dfrac{1}{2}e^{-x}, \text{ при } x>0;\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, \text{ при } x<0;\\ \dfrac{1}{2}e^{-x}, \text{ при } x>0\end{cases}$$

и постпроение их графиков произведите самостоятельно.

Пример 3. Покажите, что, решая такую же задачу для функции

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2},$$

получим

$$a=\frac{1}{\pi}, \quad f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad F(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right) \text{ (рис. 4 а, б).}$$

Пример 4. Та же задача для функции

$$f(x)=\begin{cases}a\sin x, \text{ если } 0<x<\pi;\\ 0, \text{ если } x<0 \text{ или } x>\pi.\end{cases}$$

Сначала по формуле (40) имеем

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+a\int_{0}^{\pi}\sin x dx+\int_{\pi}^{\infty}0dx=-a\cos x\Big|_{0}^{\pi}=2a,\ a=\frac{1}{2},$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, \text{ если } 0<x<\pi;\\ 0, \text{ если } x<0 \text{ или } x>\pi.\end{cases}$$

Далее мы используем формулу (39) для трех случаев: $x\le 0$; $0<x<\pi$; $x\ge\pi$.

В первом случае ($x\le 0$)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}0dx=0.$$

Во втором случае ($0<x<\pi$)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}\sin x dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{0}^{x}=\frac{1}{2}(1-\cos x).$$

Наконец, в последнем третьем случае ($x \geq \pi$) по самому смыслу отыскания значения параметра a имеем

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\sin x dx+\int_{0}^{\infty} 0dx=1.$$

Таким образом, искомая функция распределения дается формулой

$$F(x)=\begin{cases} 0, \quad \text{если } x \leq 0; \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), \text{ если } 0 < x < \pi; \\ 1, \quad \text{если } x \geq \pi. \end{cases}$$

Далее

$$F'(x)=f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin x > 0 \text{ при } 0 < x < \pi; \\ 0, \; x < 0 \text{ или } x > \pi; \end{cases} \quad F''(x)=f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\cos x \begin{cases} > 0 \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ < 0 \text{ при } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases} \\ 0, \text{ если } x < 0 \text{ или } x > \pi; \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\sin x > 0 \text{ при } 0 < x < \pi, \\ 0, \text{ если } x < 0 \text{ или } x > \pi. \end{cases}$$

Отсюда получаем интервалы возрастания, убывания, выпуклости и вогнутости обеих функций $y=f(x)$, $y=F(x)$. Их графики постройте самостоятельно.

14. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Функция или плотность распределения случайной величины исчерпывающим образом определяют ее. Однако в теории вероятностей рассматривают также величины (числовые характеристики), которые характеризуют отдельные свойства случайной величины, например, ее среднее значение, разброс ее возможных значений относительно среднего значения, симметричность или несимметричность ее распределения и т.д. Ниже мы рассмотрим некоторые из числовых характеристик случайной величины – математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, начальные и центральные моменты.

Математическое ожидание

Пусть n-значная **дискретная случайная величина** ξ задана таблицей распределения

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_i	...	p_n

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $\quad p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Математическим ожиданием (средним значением, центром распределения) этой случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на вероятности этих значений,

$$M(\xi) = m_\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_i p_i + \ldots + x_n p_n. \tag{41}$$

В случае бесконечнозначной дискретной случайной величины ее математическое ожидание выражается суммой ряда

$$M(\xi) = m_\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_i p_i + \ldots + x_n p_n + \ldots \ . \tag{42}$$

Математическое ожидание **непрерывной случайной величины** ξ с плотностью распределения $f(x)$ выражается определенным интегралом

$$M(\xi) = m_\xi = \int_a^b x f(x) dx, \tag{43}$$

если все возможные значения ξ сосредоточены на интервале $< a, b >$, и несобственным интегралом

$$M(\xi) = m_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \tag{44}$$

если случайная величина может принимать любые вещественные значения.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой самой величине,

$$M(C) = C.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания,

$$M(C \cdot \xi) = C \cdot M(\xi), C - const.$$

3. Математическое ожидание **суммы случайных величин** равно сумме их математических ожиданий,

$$M(\xi + \eta + \ldots + \zeta) = M(\xi) + M(\eta) + \ldots + M(\zeta).$$

4. Математическое ожидание **произведения независимых случайных величин** равно произведению их математических ожиданий,

$$M(\xi \cdot \eta \cdot \ldots \cdot \zeta) = M(\xi) \cdot M(\eta) \cdot \ldots \cdot M(\zeta).$$

5. Математическое ожидание функции $\eta = \varphi(\xi)$ **дискретной** случайной величины ξ равно

$$M(\eta) = M(\varphi(\xi)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i = \varphi(x_1) p_1 + \varphi(x_2) p_2 + \ldots + \varphi(x_i) p_i + \ldots + \varphi(x_n) p_n \quad (45)$$

Математическое ожидание функции $\eta = \varphi(\xi)$ **непрерывной** случайной величины ξ с плотностью распределения $f(x)$ равно

$$M(\eta) = M(\varphi(\xi)) = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx \quad \text{или} \quad M(\eta) = M(\varphi(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \quad (46)$$

в зависимости от множества всех возможных значений случайной величины.

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение

Случайная величина

$$\overset{0}{\xi} = \xi - M(\xi) = \xi - m_\xi \quad (47)$$

называется **отклонением** случайной величины ξ от ее математического ожидания. Математическое ожидание отклонения равно нулю,

$$M\left(\overset{0}{\xi}\right)=M(\xi-M(\xi))=M(\xi)+M(-M(\xi))=M(\xi)-M(\xi)=0,$$

поэтому его часто называют **центрированной случайной величиной**, соответствующей случайной величине ξ.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения ξ от своего математического ожидания,

$$D(\xi)=D_{\xi}=M\left(\overset{0}{\xi}{}^{2}\right)=M\left((\xi-M(\xi))^2\right)=M\left((\xi-m_{\xi})^2\right). \qquad (48\ )$$

Другими словами, дисперсия $D(\xi)$ является математическим ожиданием функции $\eta=\varphi(\xi)=(\xi-M(\xi))^2$ случайной величины ξ, и мы легко получаем вычислительные формулы для дисперсии на основании формул (45), (46).

Для **дискретной** случайной величины ξ формула (45) дает

$$D(\xi)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(\xi))^2 p_i=(x_1-M(\xi))^2 p_1+(x_2-M(\xi))^2 p_2+\ldots+(x_i-M(\xi))^2 p_n.$$

Для **непрерывной** случайной величины ξ по формуле (46) имеем

$$D(\xi)=\int_a^b (x-M(\xi))^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^2 f(x)dx.$$

Однако наиболее удобной **формулой для вычисления дисперсии** является формула, являющаяся непосредственным следствием формулы (48), а именно:

$$D(\xi)=D_{\xi}=M\left(\xi^2\right)-M^2(\xi). \qquad (49\ )$$

В соответствии с ней дисперсия случайной величины ξ равна разности математического ожидания $M\left(\xi^2\right)$ ее квадрата ξ^2 и квадрата $M^2(\xi)$ ее математического ожидания $M(\xi)$.

Среднеквадратическим отклонением $\sigma(\xi)=\sigma_{\xi}$ случайной величины ξ называется квадратный корень из ее дисперсии,

$$\sigma(\xi)=\sigma_{\xi}=\sqrt{D_{\xi}}=\sqrt{D(\xi)}. \qquad (50\ )$$

И дисперсия, и среднеквадратическое отклонение случайной величины характеризуют величину рассеяния (разброса) ее значений относительно ее математического ожидания. При этом размерность среднего квадратического отклонения совпадает с размерностью, а размерность дисперсии равна квадрату размерности самой случайной величины.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю,

$$D(C) = 0, \quad C - const.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат,

$$D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi), C - const.$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий,

$$D(\xi + \eta + ... + \zeta) = D(\xi) + D(\eta) + ... + D(\zeta).$$

В терминах средних квадратических отклонений это свойство можно представить следующим образом:

$$\sigma(\xi + \eta + ... + \zeta) = \sqrt{\sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) + ... + \sigma^2(\zeta)}.$$

Моменты. Асимметрия. Эксцесс

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание ее k-й степени,

$$\alpha_k = \alpha_k(\xi) = M(\xi^k). \tag{51 }$$

Например, математическое ожидание случайной величины является ее начальным моментом первого порядка,

$$M(\xi) = \alpha_1(\xi).$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание k-й степени ее отклонения от своего математического ожидания,

$$\mu_k = \mu_k(\xi) = M\left(\overset{0}{\xi}{}^k\right) = M\left((\xi - M(\xi))^k\right). \tag{52 }$$

Например, дисперсия случайной величины является ее центральным моментом второго порядка,

$$D(\xi) = \mu_2(\xi).$$

На основании формул (51), (52), в которых нужно положить

$$\eta = \varphi(\xi) = (\xi - M(\xi))^k,$$

центральный момент *k*-го порядка вычисляется по формуле

$$\mu_k(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^k p_i \qquad (53)$$

для дискретной случайной величины и

$$\mu_k(\xi) = \int_a^b (x - M(\xi))^k f(x)dx \quad \text{или} \quad \mu_k(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^k f(x)dx \qquad (54)$$

для непрерывной.

В теории вероятностей, наряду с математическим ожиданием и дисперсией (или среднеквадратическим отклонением) случайной величины ξ, наиболее часто используются ее центральные моменты третьего и четвертого порядков $\mu_3(\xi)$, $\mu_4(\xi)$ и производные от них безразмерные величины – асимметрия

$$As = As(\xi) = \frac{\mu_3(\xi)}{\sigma^3(\xi)} \qquad (55)$$

и эксцесс

$$Ex = Ex(\xi) = \frac{\mu_4(\xi)}{\sigma^4(\xi)} - 3. \qquad (56)$$

Если распределение случайной величины симметрично относительно своего математического ожидания, то ее асимметрия равна нулю. О вероятностном смысле эксцесса мы скажем позже, рассматривая так называемое нормальное распределение, эксцесс которого равен нулю.

Пример 1. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины, которая задана таблицей распределения (см. пример 1 раздела 12)

ξ	1	2	3	4
p_i	0.625	0.268	0.089	0.018

ξ^2	1	4	9	16
p_i	0.625	0.268	0.089	0.018

Рядом с таблицей распределения заданной случайной величины мы поместили таблицу распределения ее квадрата.

По формуле (41)

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 1\cdot 0.625 + 2\cdot 0.268 + 3\cdot 0.089 + 4\cdot 0.018 = 1.500 .$$

По формуле (45)

$$M\left(\xi^2\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 1^2\cdot 0.625 + 2^2\cdot 0.268 + 3^2\cdot 0.089 + 4^2\cdot 0.018 = 2.786 .$$

По формуле (49)

$$D(\xi)=M\left(\xi^2\right)-M^2(\xi)=2.786-1.500^2=0.536 .$$

По формуле (50)

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{0.536}=0.732 .$$

По формуле (53)

$$\mu_3(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(\xi)\right)^3 p_i=(1-1.5)^3\cdot 0.625+(2-1.5)^3\cdot 0.268+$$

$$+(3-1.5)^3\cdot 0.089++(4-1.5)^3\cdot 0.018=0.539 .$$

x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$	$y_i = x_i - M(\xi)$	y_i^3	$y_i^3 p_i$	y_i^4	$y_i^4 p_i$
1	0.625	0.625	1	0.625	-0.5	-0.125	-0.078	0.063	0.039
2	0.268	0.536	4	1.072	0.5	0.125	0.036	0.063	0.017
3	0.089	0.267	9	0.801	1.5	3.375	0.300	5.063	0.451
4	0.018	0.072	16	0.288	2.5	15.625	0.281	39.063	0.703
Σ	1.00	1.500 $M(\xi)$		2.786 $M\left(\xi^2\right)$			0.539 $\mu_3(\xi)$		1.21 $\mu_4(\xi)$

По формуле (55)

$$As = As(\xi)=\frac{\mu_3(\xi)}{\sigma^3(\xi)}=\frac{0.539}{0.732^3}=1.375 .$$

По формуле (53)

$$\mu_4(\xi)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(\xi))^4 p_i=(1-1.5)^4\cdot 0.625+(2-1.5)^4\cdot 0.268+$$

$$+(3-1.5)^4\cdot 0.089++(4-1.5)^4\cdot 0.018=1.210.$$

По формуле (56)

$$Ex=Ex(\xi)=\frac{\mu_4(\xi)}{\sigma^4(\xi)}-3=\frac{1.210}{0.732^4}-3=1.216.$$

Для удобства можно свести все вычисления в одну таблицу

Пример 2. Дискретная случайная величина ξ с известными математическим ожиданием $M(\xi)=3.9$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma(\xi)=0.3$ может принимать только два значения x_1, x_2, причем $x_1<x_2$, и вероятность меньшего значения известна, $P(\xi=x_1)=0.1$. Найти закон распределения случайной величины.

Так как $P(\xi=x_1)=0.1, P(\xi=x_2)=1-P(\xi=x_1)=1-0.1=0.9$, то решение задачи сводится к нахождению x_1, x_2.

На основании формул (41), (45), (55), (50) имеем

$$M(\xi)=3.9=0.1x_1+0.9x_2,\ D(\xi)=\sigma^2(\xi)=0.09=M(\xi^2)-M^2(\xi)=$$

$$=0.1x_1^2+0.9x_2^2-3.9^2,\ 0.1x_1^2+0.9x_2^2=0.09+3.9^2=15.3.$$

Следовательно, мы должны решить систему уравнений относительно x_1, x_2,

$$\begin{cases}0.1x_1+0.9x_2=3.9,\\ 0.1x_1^2+0.9x_2^2=15.3;\end{cases}\begin{cases}x_1+9x_2=39,\\ x_1^2+9x_2^2=153;\end{cases}\begin{cases}x_1=39-9x_2,\\ (39-9x_2)^2+9x_2^2=153;\end{cases}\begin{cases}x_1=39-9x_2,\\ 5x_2^2-39x_2+76=0.\end{cases}$$

Квадратное уравнение дает два значения x_2, именно 4 и 19/5, которым соответствуют два значения x_1, а именно 3 и 24/5. Условию задачи удовлетворяют только значения $x_1=3$ и $x_2=4$.

Пример 3. Доказать, что математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение распределения Бернулли соответственно равны

$$M(\xi)=np,\quad D(\xi)=npq,\quad \sigma(\xi)=\sqrt{npq} \qquad (57)$$

■Количество ξ успехов в n независимых испытаниях можно представить в виде суммы n независимых случайных величин

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i + \ldots + \xi_n,$$

где ξ_i - количество успехов в i-м испытании. Распределения ξ_i и ξ_i^2 задаются таблицами распределения

x_i	1	0	x_i^2	1	0
p_i	P	$q = 1 - p$	p_i	p	$q = 1 - p$

Отсюда

$M(\xi_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,\ M(\xi_i^2) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,\ D(\xi_i) = M(\xi_i^2) - M^2(\xi_i) = p - p^2 = pq$

На основании свойств математического ожидания и дисперсии получаем

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n) = np,$$

$$D(\xi) = D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n) = npq. \blacksquare$$

Пример 4. Доказать, что математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона с параметром *a* равны

$$M(\xi) = D(\xi) = a. \qquad (58\ )$$

■Для доказательства достаточно, на основании сказанного в разделе 11, перейти в формулах (57) к пределу при $n \to \infty,\ p \to 0$ при условии, что произведение $np = const = a$. Получим

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\, p\to 0\\ np=a}} M(\xi) = \lim_{\substack{n\to\infty,\, p\to 0\\ np=a}} np = a; \quad \lim_{\substack{n\to\infty,\, p\to 0\\ np=a}} D(\xi) = \lim_{\substack{n\to\infty,\, p\to 0\\ np=a}} npq = \lim_{\substack{n\to\infty,\, p\to 0\\ np=a}} a(1-p) = a. \blacksquare$$

Пример 5. ОТК проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.95. В каждой партии содержится 10 изделий. Сколько партий в среднем содержат по 9 стандартных изделий, если проверке подлежит 100 партий?

Сначала найдем вероятность $p = P_{10}(9)$ того, что наудачу проверенная партия содержит 9 стандартных изделий. По формуле Бернулли (вероятность 9 успехов в 10 независимых испытаниях с постоянной вероятностью 0.95 успеха)

$$p = P_{10}(9) = C_{10}^9 \cdot 0.95^9 \cdot 0.05^1 = C_{10}^1 \cdot 0.95^9 \cdot 0.05^1 \approx 10 \cdot 0.6302 \cdot 0.05 \approx 0.3151.$$

Теперь нужно найти математическое ожидание случайной величины ξ - количества партий с 9 стандартными изделиями из 100 проверяемых партий.

Имеем $n = 100$ независимых испытаний с постоянной вероятностью $p = 0.3151$ успеха (появления партии с 9 стандартными изделиями). Так как случайная величина ξ имеет распределение Бернулли, то ее математическое ожидание по формуле (63) равно

$$M(\xi) = np = 100 \cdot 0.3151 = 31.51 \approx 31.$$

Таким образом, из подлежащих проверке 100 партий в среднем 31 партия содержит 9 стандартных изделий.

Пример 6. Говорят, что непрерывная случайная величина ξ имеет **равномерное распределение** на интервале $< a, b >$, если плотность ее распределения

$$f(x) = \begin{cases} C = const \text{ на} < a, b >, \\ 0 \qquad\qquad \text{вне} < a, b > . \end{cases}$$

Доказать самостоятельно, что $C = \dfrac{1}{b-a}$ и что

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{на} < a, b >, \\ 0 & \text{вне} < a, b >, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x < b, \\ 1 & \text{при } x > a \end{cases} \text{ (см. рис. 1 а, б).}$$

Найти далее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение равномерного распределения.

По формуле (43)

$$M(\xi) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(a-b)} = \frac{a+b}{2}.$$

По первой из формул (46)

$$M(\xi^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(a-b)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Поэтому по формулам (49), (50)

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}, \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

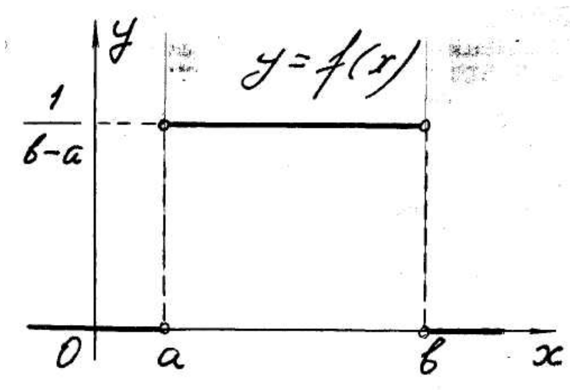

Рис. 1 а

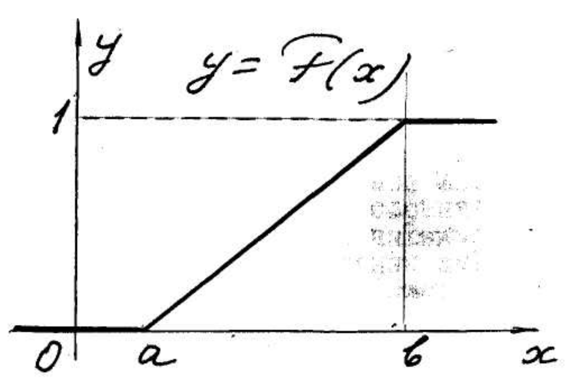

Рис. 1 б

Ответ. Для равномерного распределения ξ на интервале $< a, b >$ имеем

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{59}$$

Пример 7. Говорят, что непрерывная случайная величина ξ имеет **показательное (экспоненциальное) распределение**, если плотность ее распределения дается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x > 0, \\ 0, \quad \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Здесь λ - некоторый положительный параметр. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение показательного распределения.

Доказательство того, что

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \text{ если } x > 0, \\ 0, \quad \text{ если } x \le 0, \end{cases}$$

предоставляем учащимся. Графики функций $y = f(x)$, $y = F(x)$ изображены на рис. 2 а, б. Ограничимся нахождением названных числовых характеристик.

По формуле (44)

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \lambda \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = e^{-\lambda x} dx, \\ du = dx, & v = \int e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\left(xe^{-\lambda x} \right)\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx \right) = \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} xe^{-\lambda x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{\lambda x}} = \\ = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x)'}{\left(e^{\lambda x}\right)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0 \end{array} \right| = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda x} \right)\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} - 1 \right) = \frac{1}{\lambda}; \quad M(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

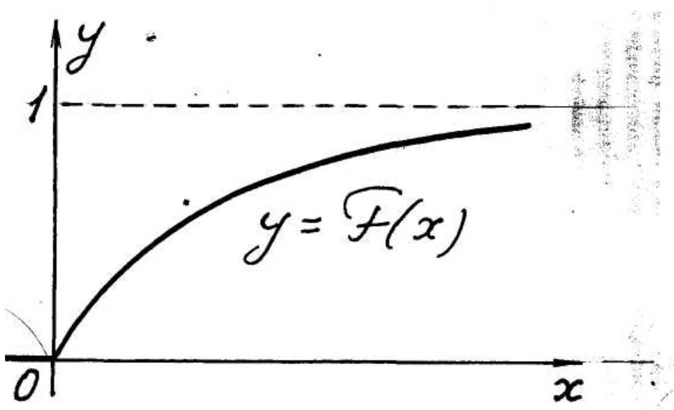

Рис. 2 а

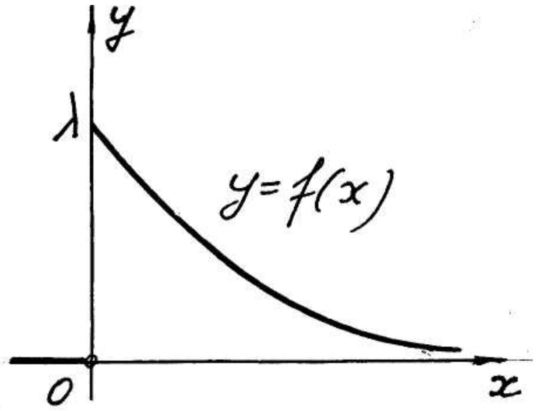

Рис. 2 б

По формуле (46) в результате двух интегрирований по частям (с аналогичным использованием правила Лопиталя во внеинтегральных членах) находим, что

$$M\left(\xi^2\right) = \lambda\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

откуда

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно, для показательного распределения с положительным параметром λ математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение совпадают и равны

$$M(\xi) = \sigma(\xi) = \frac{1}{\lambda}. \qquad (60)$$

15. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина ξ называется нормально распределенной, если плотность ее распределения определяется формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (61\ )$$

Здесь параметр a представляет собой математическое ожидание, а положительный параметр σ - среднеквадратическое отклонение случайной величины.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на интервал $<\alpha,\beta>$ (с концами α,β) дается формулой

$$P(\xi\in<\alpha,\beta>)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \qquad (62\ )$$

где

$$x_1=\frac{\alpha-a}{\sigma},\quad x_2=\frac{\beta-a}{\sigma}, \qquad (63\ )$$

а

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (64\ )$$

уже известная нам функция Лапласа.

Из формул (62) - (64) легко выводится следующая формула

$$P(|\xi-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \qquad (65\ )$$

дающая вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины ξ от ее математического ожидания a меньше положительного числа ε.

Если, в частности, $\varepsilon=3\sigma$, то из формулы (65) следует, что

$$P(|\xi-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=0.9973,\text{ или } P(\xi\in<a-3\sigma,a+3\sigma>)=0.9973.$$

Полученный результат выражает так называемое «**правило трех сигм**»: с вероятностью 0.9973 все значения нормально распределенной случайной величины находятся на интервале $<a-3\sigma,a+3\sigma>$.

Нормальное распределение очень часто встречается на практике. Например, нормально распределены:

1. Ошибки измерения физических величин.

2. Погрешности размеров изготовляемых изделий.

3. Сами размеры изделий при хорошо налаженном процессе производства.

Пример 1. Валик считается стандартным, если погрешность, допущенная при выточке его диаметра, не выходит за пределы -0.03 мм, 0.03 мм. Средний размер и среднеквадратическое отклонение диаметра валика соответственно равны 11.96 мм и 0.015 мм. Найти процент изготавливаемых стандартных валиков.

Пусть случайная величина ξ представляет собой диаметр валика. В силу вышесказанного можно считать ее нормально распределенной с параметрами $a = M(\xi) = 11.96, \sigma = \sigma(\xi) = 0.015$, и требуется найти вероятность того, что

$$|\xi - M(\xi)| = |\xi - a| < 0.03.$$

По формуле (71) имеем (при $\varepsilon = 0.03, \sigma = 0.015$)

$$P(|\xi - a| < 0.03) = 2\Phi\left(\frac{0.03}{0.015}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0.4772 = 0.9544.$$

Таким образом, более 95 процентов изготавливаемых валиков стандартны. Отметим, что заданное значение среднего размера диаметра валика оказалось для решения задачи излишним.

Пример 2. Рост взрослого мужчины ξ является случайной величиной, распределенной нормально с параметрами $a = 170\ см, \sigma = 10\ см$. Вычислить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных 5 мужчин будет иметь рост от 160 см до 175 см.

Сначала найдем вероятность того, что рост наудачу взятого мужчины находится в пределах 160 см до 175 см. По формулам (62), (63) для $a = 170, \sigma = 10$, $\alpha = 160, \beta = 175$ имеем

$$x_1 = \frac{160 - 170}{10} = -1,\ x_2 = \frac{175 - 170}{10} = 0.5,$$

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1) = -\Phi(1) = -0.3413,\ \Phi(x_2) = \Phi(0.5) = 0.1915,$$

$$P(160 < \xi < 175) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0.1915 - (-0.3413) = 0.5328.$$

Пусть, далее, случайная величина ξ - количество мужчин из взятых 5, рост которых находится в пределах 160 см до 175 см. По формуле Бернулли, в которой нужно положить $n = 5,\ p = P(160 < \xi < 175) = 0.5328,\ q = 1 - p = 0.4672$, получаем

$$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - C_5^0 p^0 q^5 = 1 - 0.4672^5 \approx 1 - 0.0223 = 0.9777.$$

Пример 3. Все значения нормально распределенной случайной величины с вероятностью 0.9973 лежат на интервале $(-3, 9)$. Найти ее математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

На основании правила «трех сигм» имеем $a - 3\sigma = -3,\ a + 3\sigma = 9$, откуда $2a = 6,\ a = 3,\ \sigma = 2$.

Пример 4. Результаты ξ измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчиняются нормальному закону с параметрами $a = 20$ км и $\sigma = 500$ м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не менее 19 км и не более 21 км.

По формулам (62), (63)

$$P(19 \leq \xi \leq 21) = \Phi\left(\frac{21-20}{0,5}\right) - \Phi\left(\frac{19-20}{0,5}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 0.9544.$$

16. СУММА И ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пример 1. Две независимые случайные величины ξ, η заданы своими таблицами распределения

ξ	-1	0	2	3
p_{x_i}	0.2	0.3	0.1	0.4

η	-2	1	3	4
p_{y_j}	0.1	0.2	0.4	0.3

Найти таблицу и функцию распределения суммы $\zeta = \xi + \eta$ этих случайных величин. Найти далее математические ожидания, дисперсии и средние квадратические отклонения случайных величин ξ, η и их суммы $\zeta = \xi + \eta$.

Решение. Сумма случайных величин может принимать следующие значения: -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (суммы всех пар возможных значений случайных величин ξ, η). Найдем вероятности значений суммы $\zeta = \xi + \eta$, используя при этом независимость величин ξ, η.

А. $P(\zeta = -3) = P((\xi = -1)(\eta = -2)) = P(\xi = -1)P(\eta = -2) = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$;

аналогично

$$P(\zeta = -2) = P((\xi = 0)(\eta = -2)) = P(\xi = 0)P(\eta = -2) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03,$$

$$P(\zeta = 2) = P((\xi = -1)(\eta = 3)) = P(\xi = -1)P(\eta = 3) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08,$$

$$P(\zeta = 5) = P((\xi = 2)(\eta = 3)) = P(\xi = 2)P(\eta = 3) = 0.1 \cdot 0.4 = 0.04.$$

Б.

$$P(\zeta = 0) = P((\xi = -1)(\eta = 1) + (\xi = 2)(\eta = -2)) = P((\xi = -1)(\eta = 1)) + P((\xi = 2)(\eta = -2)) =$$
$$= P(\xi = -1)P(\eta = 1) + P(\xi = 2)P(\eta = -2) = 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.1 = 0.05;$$

аналогично

$$P(\zeta = 1) = P((\xi = 0)(\eta = 1) + (\xi = 3)(\eta = -2)) = P((\xi = 0)(\eta = 1)) + P((\xi = 3)(\eta = -2)) =$$
$$= P(\xi = 0)P(\eta = 1) + P(\xi = 3)P(\eta = -2) = 0.3 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.1 = 0.10,$$

$$P(\zeta = 4) = P((\xi = 0)(\eta = 4) + (\xi = 3)(\eta = 1)) = P((\xi = 0)(\eta = 4)) + P((\xi = 3)(\eta = 1)) =$$
$$= P(\xi = 0)P(\eta = 4) + P(\xi = 3)P(\eta = 1) = 0.3 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.17,$$
$$P(\zeta = 6) = P((\xi = 2)(\eta = 4) + (\xi = 3)(\eta = 3)) = P((\xi = 2)(\eta = 4)) + P((\xi = 3)(\eta = 3)) =$$
$$= P(\xi = 2)P(\eta = 4) + P(\xi = 3)P(\eta = 3) = 0.1 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.4 = 0.19.$$

В.

$$P(\zeta = 3) = P((\xi = -1)(\eta = 4) + (\xi = 0)(\eta = 3) + (\xi = 2)(\eta = 1)) =$$
$$= P((\xi = -1)(\eta = 4)) + P((\xi = 0)(\eta = 3)) + P((\xi = 2)(\eta = 1)) =$$
$$= P(\xi = -1)P(\eta = 4) + P(\xi = 0)P(\eta = 3) + P(\xi = 2)P(\eta = 1) =$$
$$= 0.2 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.20.$$

Сводя эти результаты в таблицу, для искомой суммы случайных величин получим

ζ	-3	-2	0	1	2	3	4	5	6	7
p_{z_k}	0.02	0.03	0.05	0.10	0.08	0.20	0.17	0.04	0.19	0.12

Функция распределения суммы $\zeta = \xi + \eta$

$$F(z) = P(\zeta < z) = \begin{cases} 0, \text{ если } z \le -3, \\ 0.02, \text{ если } -3 < z \le -2, \\ 0.02 + 0.03 = 0.05, \text{ если } -2 < z \le 0, \\ 0.05 + 0.05 = 0.10, \text{ если } 0 < z \le 1, \\ 0.10 + 0.10 = 0.20, \text{ если } 1 < z \le 2, \\ 0.20 + 0.08 = 0.28, \text{ если } 2 < z \le 3, \\ 0.28 + 0.20 = 0.48, \text{ если } 3 < z \le 4, \\ 0.48 + 0.17 = 0.65, \text{ если } 4 < z \le 5, \\ 0.65 + 0.04 = 0.69, \text{ если } 5 < z \le 6, \\ 0.69 + 0.19 = 0.88, \text{ если } 6 < z \le 7, \\ 0.88 + 0.12 = 1, \text{ если } z > 7. \end{cases}$$

Переходим к нахождению числовых характеристик случайных величин ξ, η и $\zeta = \xi + \eta$.

$$M(\xi) = (-1)\cdot 0.2 + 0\cdot 0.3 + 2\cdot 0.1 + 3\cdot 0.4 = 1.2,$$

$$M(\xi^2) = 1\cdot 0.2 + 0\cdot 0.3 + 4\cdot 0.1 + 9\cdot 0.4 = 4.2,$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 4.2 - (1.2)^2 = 2.76, \quad \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} \approx 1.66;$$

$$M(\eta) = (-2)\cdot 0.1 + 1\cdot 0.2 + 3\cdot 0.4 + 4\cdot 0.3 = 2.4,$$

$$M(\eta^2) = 4\cdot 0.1 + 1\cdot 0.2 + 9\cdot 0.4 + 16\cdot 0.3 = 9.0$$

$$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = 9.0 - (2.4)^2 = 3.24, \quad \sigma(\eta) = \sqrt{D(\eta)} = 1.80.$$

По свойствам математического ожидания и дисперсии сразу получаем

$$M(\zeta) = M(\xi) + M(\eta) = 3.6; \quad D(\zeta) = D(\xi) + D(\eta) = 6.0; \quad \sigma(\zeta) = \sqrt{D(\zeta)} \approx 2.45.$$

Проверим полученный результат непосредственными вычислениями. Прежде всего

$$M(\zeta) = (-3)\cdot 0.02 + (-2)\cdot 0.03 + 0\cdot 0.05 + 1\cdot 0.10 + 2\cdot 0.08 + 3\cdot 0.20 + 4\cdot 0.17 +$$
$$+ 5\cdot 0.04 + 6\cdot 0.19 + 7\cdot 0.12 = 3.6; M(\zeta) = 3.6 = M(\xi) + M(\eta).$$

Далее, закон распределения квадрата случайной величины ζ^2 дается таблицей (см. следующую страницу). Поэтому

$$M(\zeta^2) = 0\cdot 0.05 + 1\cdot 0.10 + 4\cdot 0.11 + 9\cdot 0.22 + 16\cdot 0.17 + 25\cdot 0.04 +$$

$$= 36 \cdot 0.19 + 49 \cdot 0.12 = 18.96,$$

$$D(\zeta) = M(\zeta^2) - M^2(\zeta) = 18.96 - (3.6)^2 = 6.0;\ D(\zeta) = 6.0 = D(\xi) + D(\eta);\ \sigma(\zeta) \approx 2.45$$

ζ^2	0	1	4	9	16	25	36	49
p_i	0.05	0.10	0.11= =0.03+0.08	0.22= =0.02+0.20	0.17	0.04	0.19	0.12

Поэтому

$$M(\zeta^2) = 0 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.10 + 4 \cdot 0.11 + 9 \cdot 0.22 + 16 \cdot 0.17 + 25 \cdot 0.04 +$$

$$= 36 \cdot 0.19 + 49 \cdot 0.12 = 18.96,$$

$$D(\zeta) = M(\zeta^2) - M^2(\zeta) = 18.96 - (3.6)^2 = 6.0;\ D(\zeta) = 6.0 = D(\xi) + D(\eta);\ \sigma(\zeta) \approx 2.45$$

Пример 2. Найти самостоятельно таблицу распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение произведения случайных величин ξ, η, заданных в примере 1.

Ответ.

$\chi = \xi\eta$	-6	-4	-3	-1	0	2	3	6	8	9	12
p_{z_k}	0.04	0.07	0.08	0.04	0.30	0.04	0.08	0.04	0.03	0.16	0.12

$$M(\chi) = M(\xi\eta) = 2.88 = M(\xi)M(\eta);\ D(\chi) \approx 25.5 \neq D(\xi)D(\eta);\ \sigma(\chi) = \sqrt{D(\chi)} \approx 5.05.$$

17. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЁВА

Как известно, для произвольной случайной величины ξ с математическим ожиданием $M(\xi)$ и дисперсией $D(\xi)$ имеет место неравенство Чебышёва

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}. \qquad (66)$$

Пример 1. Пусть случайная величина ξ - количество успехов в n независимых испытаниях с постоянной вероятностью p успеха A в каждом испытании, то есть распределение Бернулли (или биномиальное распределение). Известно (см. раздел 14, пример 3, формулы (57)), что математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны $M(\xi)=np,\ D(\xi)=npq$, и неравенство Чебышёва имеет для нее такой вид

$$P(|\xi - np| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}. \qquad (67)$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ - последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями $M(\xi_1), M(\xi_2), ..., M(\xi_n), ...$ и дисперсиями $D(\xi_1), D(\xi_2), ..., D(\xi_n), ...$. Среднее арифметическое первых *n* случайных величин

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n}$$

имеет математическое ожидание

$$\frac{M(\xi_1) + M(\xi_2) + ... + M(\xi_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i)}{n}$$

и дисперсию

$$D(\xi_1) + D(\xi_2) + ... + D(\xi_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)}{n^2}.$$

Пользуясь неравенством Чебышёва (66), получаем оценку отклонения среднего арифметического независимых случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий, а именно:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)}{n^2 \varepsilon^2}. \qquad (68)$$

Допустим, что дисперсии всех случайных величин в неравенстве (68) не более одного и то же числа *C*,

$$\forall i : D(\xi_i) \leq C. \qquad (69)$$

Оценка (68) принимает тогда следующий вид:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (70)$$

Предположим далее, что все случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ имеют одно и то же математическое ожидание a. Получаем еще более простое неравенство (при том же условии (69))

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}-a\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (71)$$

Пусть, наконец, случайные величины $\xi_i,\ i=1, 2, ..., n, ...$, - количества наступлений некоторого события *A* в *i*-ом испытании с постоянной вероятностью $P(A)=p$ события. Тогда сумма

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

представляет собой распределение Бернулли (количество наступлений события *A* в *n* независимых испытаниях с $P(A)=p=const$), а отношение

$$\frac{\xi}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}=P_n^*(A)$$

- относительной частотой этого события. Известно, что

$$M(\xi_i)=p=const,\ D(\xi_i)=pq=const,$$

и, следовательно, неравенство (71) переходит в следующее

$$P\left(\left|P_n^*(A)-P(A)\right|<\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{\xi}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}, \qquad (72)$$

дающее оценку вероятности **отклонения относительной частоты события *A* от его вероятности**.

Пример 2. Выведите самостоятельно неравенство (72) с помощью неравенства (67).

Пример 3. Случайная величина ξ имеет математическое ожидание 5 и среднеквадратическое отклонение 0.3. С помощью неравенства Чебышёва найти вероятность попадания значений ξ в интервал $(4.6, 5.4)$.

Имеем

$$P(\xi \in (4.6, 5.4)) = P(4.6 < \xi < 5.4) = P(-0.4 < \xi - 5 < 0.4) = P(|\xi - 5| < 0.4),$$

откуда по неравенству Чебышёва (66) при $\varepsilon = 0.4$, $M(\xi) = 5$, $D(\xi) = \sigma^2(\xi) = 0.09$ имеем

$$P(\xi \in (4.6, 5.4)) = P(|\xi - 5| < 0.4) \geq 1 - \frac{0.09}{(0.4)^2} = 1 - 0.5625 = 0.4375 \approx 0.44 .$$

Пример 4. Вероятность рождения мальчика равна 0.51. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что среди 1000 новорожденных детей мальчиков будет более 470, но менее 550.

Пусть случайная величина ξ означает количество мальчиков среди 1000 новорожденных. ξ представляет собой распределение Бернулли с математическим ожиданием $M(\xi) = np = 1000 \cdot 0.51 = 510$, поэтому

$$P(470 < \xi < 550) = P(40 < \xi - 510 < 40) = P(|\xi - 510| < 40) = P(|\xi - np| < 40),$$

откуда на основании формулы (73) при $n = 1000$, $p = 0.51$, $q = 0.49$, $\varepsilon = 40$ получаем

$$P(470 < \xi < 550) = P(|\xi - 510| < 40) \geq 1 - \frac{1000 \cdot 0.51 \cdot 0.49}{40^2} \approx 1 - 0.016 = 0.984 .$$

Пример 5. Дисперсия каждой из независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ не превышает 10. С помощью неравенства Чебышёва найти наименьшее количество *n*, при котором с вероятностью, не меньшей 0.95, отклонение среднего арифметического случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ от среднего арифметического их математических ожиданий не превышает 0.20.

На основании формулы (70) (при $\varepsilon = 0.2$, $C = 10$) мы должны найти наименьшее значение *n* из следующего соотношения

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i)}{n}\right|<0.2\right)\ge 1-\frac{10}{n(0.2)^2}\ge 0.95.$$

Фактически речь идет о решении неравенства

$$1-\frac{10}{n(0.2)^2}\ge 0.95,$$

которое после очевидных преобразований дает

$$n\ge\frac{10}{0.05\cdot(0.2)^2}=5000.$$

Таким образом, условиям задачи удовлетворяет $n=5000$ случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, то есть величины $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{5000}$.

Пример 6. Игральная кость подбрасывается 5000 раз. Какое отклонение относительной частоты выпадения шестерки от вероятности ее выпадения можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0.9?

Пусть ξ - количество выпадений шестерки при n = 5000 бросаниях игральной кости. Относительная частота и вероятность ее выпадения соответственно равны $P_n^*("6")=\frac{\xi}{n}=\frac{\xi}{5000}$, $P("6")=p=1/6$, и по формуле (72) при $n=5000$, $p=1/6$, $q=5/6$ имеем

$$P\left(\left|P_n^*("6")-P("6")\right|<\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{\xi}{5000}-\frac{1}{6}\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{5000\cdot\varepsilon^2}=0.9.$$

Следовательно, $0.1=\frac{5}{36\cdot 5000\cdot\varepsilon^2}$, $\varepsilon^2=\frac{5}{0.1\cdot 36\cdot 5000}\approx 0.0167^2$, $\varepsilon\approx 0.0167$.

Таким образом, с вероятностью, не меньшей 0.9, абсолютная величина отклонения относительной частоты выпадения шестерки от вероятности ее выпадения приблизительно равна 0.0167.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Вариант 1

1. В пассажирском поезде 14 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам 14 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?

2. Сколькими способами можно выбрать четырех человек на четыре различные должности из девяти кандидатов на эти должности ?

3. В команду по плаванию должны входить 4 юноши и 2 девушки. Сколькими способами можно составить такую команду, если имеются 8 юношей и 5 девушек?

Вариант 2

1. Сколькими способами можно составить список из 10 студентов ?

2. Студенты группы, состоящей из 25 человек, обменялись друг с другом фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек ?

3. На дежурство в ДНД прибыло 30 студентов и 5 преподавателей. Сколько различных маршрутов можно из них составить, если каждый маршрут состоит из 6 студентов и I преподавателя ?

Вариант 3

1. Из цифр 0, I, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел ?

2. Из скольких различных предметов можно составить 210 размещений по два элемента в каждом ?

3. Каким количеством способов можно выбрать 2 карандаша и 3 ручки из имеющихся 5 различных карандашей и 5 различных ручек ?

Вариант 4

1. Из цифр I, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди этих чисел таких, которые начинаются цифрой 3?

2. Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить возможное количество таких расписаний при выборе из 11 дисциплин.

3. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы, состоящей из 20 человек ?

Вариант 5

I. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди этих чисел таких, которые не начинаются с цифры 5 ?

2. Сколько можно составить различных семизначных телефонных номеров, если разрешить использовать любую цифру на любом месте? Какая часть из таких номеров состоит из различных цифр?

3. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга. Определить количество встреч, какое следует провести.

Вариант 6

1. Из цифр I, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди этих чисел таких, которые начинаются с 54 ?

2. Группа из 25 человек выбирает из своего состава старосту, его заместителя и профорга. Сколькими способами можно это сделать ?

3. В вазе стоят 10 красных и 6 розовых гвоздик. Сколькими способами можно составить букет из 5 цветков, если букет состоит из 3 красных и 2 розовых гвоздик ?

Вариант 7

1. Из цифр I, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди этих чисел таких, которые не начинаются с числа 34?

2. Сколькими способами можно составить четырехцветные ленты из семи лент различных цветов ?

3. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии, а всего было сыграно 120 партий ?

Вариант 8

1. Сколько всевозможных пятизначных чисел можно составить **из** цифр O, I, 2, 3, 4, не повторяя цифры в числе ?

2. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколькими способами можно выбрать этих пять человек ?

3. Подмножеством данного множества называется любая часть этого множества. Данное множество состоит из шести элементов. Найти число трехэлементных подмножеств данного множества.

Вариант 9

1. Найти сумму всех трехзначных чисел, которые можно составить из цифр I, 2, 3, не повторяя цифры в числе.

2. Сколькими способами можно разместить три лошади в четырех стойлах?

3. В школе собрались 10 учеников. Каждый приходящий ученик рукопожатием здоровается с уже собравшимися учениками. Определить число рукопожатий.

Вариант 10

1. Найти сумму всех трехзначных чисел, которые можно составить из цифр I, 3, 5, не повторяя цифры в числе.

2. На станции имеются 8 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них три поезда ?

3. Имеются 6 предметов. Сколькими способами **их** можно распределить на две группы так, чтобы в одной группе было 2 предмета, а в другой 4 ?

Вариант 11

1. Найти сумму цифр всех пятизначных чисел, составленных из цифр I, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе не повторяются.

2. Сколько надо взять элементов, чтобы число размещений из них по четыре было в 12 раз больше, чем число размещений из них по 2 ?

3. В шахматном турнире участвуют 8 студентов. Каждый из участников с каждым из остальных должен сыграть две партии. Сколько всего партий должны сыграть участники турнира ?

Вариант 12

1. Среди перестановок цифр числа 1234567 сколько таких, которые начинаются с 123 ?

2. Из скольких элементов можно составить 56 размещений по два элемента в каждом ?

3. Сколько различных диагоналей можно провести в восьмиугольнике ?

Вариант 13

1. Среди перестановок цифр числа 1234567 сколько таких, которые начинаются с 67?

2. Число размещений из n элементов по 2 в 7 раз больше числа размещений из $n - 4$ элементов по 2. Найти n

3. Из 20 кандидатов в счетную комиссию необходимо избрать трех. Сколькими способами можно это сделать ?

Вариант 14

1. Среди перестановок цифр числа 1234567 сколько таких, которые начинаются с цифр I, 2, 3, причем эти цифры расположены в любом порядке и занимают первые три места ?

2 Определить число n из условия: $C_n^2 = 105.$

3. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет так, чтобы в нем были 2 розы и 3 георгина. Сколькими способами можно составить такой букет ?

Вариант 15

1. Среди перестановок цифр числа 1234567 сколько таких, которые начинаются с рядом стоящих цифр I и 2 ?

2. Найти m из условия $C_m^2 = 120.$

3. Из 10 юношей, 8 мальчиков и 5 девушек нужно составить шахматную команду, в которой входили бы 4 юноши, I мальчик и 2 девушки. Сколькими способами это можно сделать ?

Вариант 16

1. На книжной полке помещается 10 томов. Сколькими способами **их** можно расставить, чтобы при этом 1-й и 2-й тома стояли рядом ?

2. Сколькими способами можно выбрать 3 человека на 3 различные должности из 10 кандидатов на эти должности ?

3. В подразделении 60 солдат и 5 офицеров. Сколькими способами можно выделить караул, состоящий из трех солдат и одного офицера ?

Вариант 17

1. Вычислить сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые могут быть записаны с помощью цифр **I,** 4, 2, 5 без повторений.

2. Сколько можно составить различных пятизначных телефонных номеров, если разрешить использовать любую цифру на любом месте? Какая часть из таких номеров состоит из различных цифр?

3. Сколько различных аккордов можно взять на 6 выбранных клавишах - рояля, если каждый аккорд может содержать от 3 до 6 звуков ?

Вариант 18

1. Сколькими способами можно рассадить **за** столом 5 человек ?

2. Сколько можно составить различных шестизначных телефонных номеров, если разрешить использовать любую цифру на любом месте? Какая часть из таких номеров состоит из различных цифр?

3. Из 10 различных цветков нужно составить букет так, чтобы в него входило нечетное количество и не менее трех цветков. Сколько способов существует для составления такого букета ?

Вариант 19

1. Сколько пятизначных чисел, делящихся на 10, можно составить из цифр 0, I, 3, 5, 8, если цифры в числе не повторяются ?

2. Группа из 25 человек выбирает комсорга и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать ?

3. Учащийся имеет по одной монете достоинством в I, 2, 5, 10, 25, 50 копеек. Сколькими способами он может эти монеты разложить в два кармана ?

Вариант 20

1. Сколько пятизначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, I, 3, 5, 7, если цифры в числе не повторяются ?

2. Группа из 25 человек избирает старосту, комсорга, профорга и трех делегатов на конференцию. Сколькими способами это можно сделать, если делегатом конференции может быть любой студент группы ?

3. Сколькими способами можно группу **из** 15 студентов разделить на две группы так, чтобы в одной группе было четыре человека, а в другой одиннадцать ?

Вариант 21

1. Сколько шестизначных чисел, делящихся на 2, можно составить из цифр I, 2, 3, 4, 5, 6 ?

2. Группа из 25 человек избирает старосту, его заместителя, профорга и трех делегатов на конференцию. Сколькими способами это можно сделать, если в число делегатов конференции не избираются староста, комсорг и профорг ?

3. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии, а всего было сыграно 210 партий ?

Вариант 22

I. Найти сумму цифр всех пятизначных чисел, которые могут быть составлены из цифр 0, I, **2,** 3, 4, если цифры в числе не повторяются.

2. Сколько можно составить различных четырехзначных телефонных номеров, если разрешить использовать любую цифру на любом месте? Какая часть из таких номеров состоит из различных цифр?

3. Сколько можно составить из простых делителей числа 3570 составных чисел, каждое из которых содержит только три простых делителя ? (Число называется простым, если оно делится только на единицу и на себя).

Вариант 23.

1. Сколько чисел, начинающихся с цифры 5, можно получить, переставляя всевозможными способами цифры числа 19052 ?

2. Сколько можно составить различных шестизначных телефонных номеров, если разрешить использовать любую цифру на любом месте? Какая часть из таких номеров состоит из различных цифр?

3. Сколько можно составить из простых делителей числа 2310 составных чисел, если каждое число содержит только два простых делителя ?

Вариант 24

1. Сколько пятизначных чисел, оканчивающихся цифрой 9, можно получить, переставляя всевозможными способами цифры числа 19058 ?

2. Сколькими способами можно составить трехцветные флаги из пяти различных цветов ?

3. В группе 25 студентов. Из них нужно избрать 3 делегата на конференцию. Сколько имеется возможностей такого выбора ?

Вариант 25

1. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в которых на втором месте стоит цифра 5, если цифры в числе не повторяются ?

2. Сколько можно составить различных двухцветных флагов, имея в своем распоряжении ткань восьми различных цветов ?

3. Сколько прямых линий можно провести через десять точек, расположенных так, что никакие три из них не лежат на одной прямой ?

2. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

А) Первая группа задач

2а_КласОпр_1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь то, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

2а_КласОпр_2. Имеются карточки разрезной азбуки с буквами Р, Е, М, О, Н, Т. Перемешав карточки, возьмем наудачу четыре из них и положим рядом в произвольном порядке. Какова вероятность, что получится слово "МОРЕ"?

2а_КласОпр_3. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5.

2а_КласОпр_4. На пяти карточках разрезной азбуки имеются буквы А, Д, К, Л, 0. После перемешивания последовательно берут по одной карточке и кладут рядом. Какова вероятность того, что получится слово "ЛОДКА"?

2а_КласОпр_5. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь одну окрашенную грань.

2а_КласОпр_6. Группа из 10 человек, в том числе А и В, располагается за столом в случайном порядке. Найти вероятность того, что между А и В будет сидеть ровно три человека.

2а_КласОпр_7. Числа натурального ряда 1, 2, 3, ..., 9 расставлены случайно. Найти вероятность того, что числа 1 и 2 расположены рядом и притом в порядке возрастания

2а_КласОпр_8. 10 различных книг расставлены на полке наудачу. Определите вероятность того, что при этом три определенных книги окажутся поставленными вместе.

2а_КласОпр_9. Карточки разрезной азбуки рассыпали, а затем собрали в произвольном порядке. Среди букв 9 гласных и 22 согласные. Определить вероятность того, что буквы расположены в алфавитном порядке.

2а_КласОпр_10. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются 2 группы по 9 команд в каждой. Среди участников имеется 5 команд экстра-класса. Найти вероятность того, что все команды экстра-класса попадут в одну и ту же группу.

2а_КласОпр_11. Из 10 билетов выигрышными являются 2. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу 5 билетов один выигрышный

2а_КласОпр_12. Карточки разрезной азбуки рассыпали, а затем собрали в произвольном порядке. Среди букв 9 гласных и 22 согласные. Определить вероятность того, что вначале будут расположены 9 гласных, а затем 22 согласные.

2а_КласОпр_13. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового раз-мера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь три окрашенные грани.

2а_КласОпр_14. В барабане револьвера 7 гнезд, в 5 из них заложены патроны, а остатьные 2 - пустые. Барабан приводится во вращение, против ствола оказывается одно из гнезд. Нажимается спусковой крючок. Найти вероятность того, что, повторив опыт 2 раза, мы оба раза не выстрелим.

2а_КласОпр_15. Компания из 8 человек садится за круглый стол в случайном порядке. С какой вероятностью два определенных лица будут сидеть рядом?

2а_КласОпр_16. Каждая из букв Т, М, Р, О, Ш написана на одной карточке из пяти. Карточки перемешиваются и раскладываются наугад в ряд. Какова вероятность того, что образуется слово "ШТОРМ"?

2а_КласОпр_17. Из 10 билетов выигрышными являются 4. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу 5 билетов два выигрышных.

2а_КласОпр_18. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются 2 группы по 9 команд в каждой. Среди участников имеется 5 команд экстра-класса. Найти вероятность того, что 2 команды экстра-класса попадут в одну из групп, а 3 - в другую.

2а_КласОпр_19. На 6 карточках написаны буквы А. В, К, К, 0, С. После перетасовки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают. Найти вероятность того, что получится слово "МОСКВА".

2а_КласОпр_20. В урне находятся 10 шаров с номерами от 1 до 10. Выбираются наугад 2 шара. Какова вероятность того, что сумма номеров окажется равной 8?

2а_КласОпр_21. Из 6 карточек с буквами Ш, М, Т, С, О, Р пять выбираются наугад. Найти вероятность того, что можно будет составить слово "ШТОРМ".

2а_КласОпр_22. Бросают одновременно 5 монет. Какова вероятность того, что на двух из них выпадет герб?

2а_КласОпр_23. Из 10 карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, ..., 9 выбираются наугад 3 и раскладываются в произвольном порядке. Найти вероятность того, что получится число 835.

2а_КласОпр_24. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового раз-мера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные грани.

2а_КласОпр_25. Буквенный замок содержит на общей оси 5 дисков, каждый из которых разделен на 6 секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв.

2а_КласОпр_26. Из 10 билетов выигрышными являются 2. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу 5 билетов хотя бы один выигрышный.

2а_КласОпр_27. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех - вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что оба раза будет выбрана нечетная цифра.

2а_КласОпр_28. (*) 9 пассажиров рассаживаются в 3 вагонах. Вагон выбирается наугад. Какова вероятность того, что: а) в каждый вагон сядет по 3 человека? б) в один из вагонов сядет 4, в другой - 3, в третий - 2 человека?

2а_КласОпр_29. (*) В лифт семиэтажного дома вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: а) все пассажиры выйдут на четвертом этаже; б) все пассажиры выйдут на одном и том же этаже; в) все пассажиры выйдут на разных этажах.

Б) Вторая группа задач

2б_КласОпр_1. Среди 17 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрывается 7 билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов - 4 девушки?

2б_КласОпр_2. На сборку поступили партия валиков и партия втулок. Из 10 валиков, входящих в партию, 7 имеют нормальные размеры, 2 - завышенные, 1 - заниженные. Из 20 втулок, входящих в партию, 16 имеют нормальные размеры, 1 - завышенные и 3 - заниженные. Найти вероятность того, что первый собранный узел окажется некачественным.

2б_КласОпр_3. Из 15 изделий 8 первого сорта и 7 - второго. Вынимаются наугад 6 изделий. Найти вероятность того, что два из них окажутся первого сорта.

2б_КласОпр_4. Из 20 изделий 12 первого сорта и остальные - второго. Вынимаются наугад 6 изделий. Найти вероятность того, что четыре из них будут первого сорта.

2б_КласОпр_5. В партии из 100 изделий 6 нестандартных. Из партии выбирается наугад 10 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 10 изделий будет 2 нестандартных.

2б_КласОпр_6. В студенческой группе 10 дружинников - 6 девушек и 4 юноши. Жеребьевкой требуется избрать для дежурства 5 человек. Найти вероятность того, что избранными будут 3 девушки и 2 юноши.

2б_КласОпр_7. Студент знает хорошо 30 и неуверенно 15 вопросов из программы, содержащей 50 вопросов. Найти вероятность того, что из предложенных ему 5 вопросов он знает хорошо и неуверенно по 2 вопроса.

2б_КласОпр_8. В магазин поступило 40 электроламп, из которых 5 содержат скрытый дефект. Найти вероятность того, что из 10 наугад купленных ламп 3 лампы окажутся с дефектом.

2б_КласОпр_9. В группе, состоящей из 15 выпускников, 10 выпускниц шкод и 5 слушателей П0, избираются по жребию 12 дружинников. Найти вероятность того, что в дружине окажется по 4 представителя каждой категории студентов.

2б_КласОпр_10. В партии 16 деталей, среди них 3 бракованные. Наудачу проверяют 4 изделия. Найти вероятность того, что среди проверенных окажутся 2 бракованных.

2б_КласОпр_11. В группе из 20 человек распределяется по жребию 9 задачников по теории вероятностей. Найти вероятность того. что среди обладателей задачников окажутся 3 девушки, если в группе 15 юношей и 5 девушек.

2б_КласОпр_12. Из выставленных на продажу 8 гладиолусов, 30 ромашек и 15 жасминов наудачу покупают 19 цветков. Найти вероятность покупки 5 гладиолусов и 11 ромашек.

2б_КласОпр_13. В магазин поступило 20 ПК, из которых 4 неисправны. Найти вероятность того, что из 10 наудачу выбранных ПК 8 исправных.

2б_КласОпр_14. Имеются 25 изделий, из них 20 - первого сорта, а 5 - второго. Наудачу вынимают 7 изделий. Найти вероятность того, что два из них окажутся второго сорта.

2б_КласОпр_15. Из 20 изделий 13 первого сорта и 7 - второго. Вынимаются наугад 9 изделий. Найти вероятность того, что одно из них будет второго сорта.

2б_КласОпр_16. Из 15 изделий 8 - первого сорта и 7 - второго. Вынимают наугад 3 изделия. Найти вероятность того, что два из них будут первого сорта.

2б_КласОпр_17. На столе лежат 3 пятака, 4 гривенника и 5 25-копеечных монет. Студент, опаздывая на занятия, наспех берет 6 монет и бежит на троллейбус. Найти вероятность того, что он взял поровну монет каждого достоинства.

2б_КласОпр_18. Студенту предлагаются 20 билетов. В каждом - 4 вопроса. Из 60 вопросов студент знает хорошо 40, не очень – 10, а остальные вообще не знает. Какова вероятность того, что взятый билет будет состоять из двух хорошо известных и одного неизвестного вопроса?

2б_КласОпр_19. Юноша покупает девушке букет, содержащий 5 цветков, выбирая их наугад из кувшина, где находятся 8 хризантем и 7 роз. Найти вероятность того, что он приобрел 2 розы и 3 хризантемы.

2б_КласОпр_20. Из 25 изделий 18 первого сорта и 7 - второго. Вынимаются наугад 4 изделия. Найти вероятность того, что два из них будут второго сорта.

2б_КласОпр_21. В магазин поступило 25 телевизоров, из которых 4 неисправны. Найти вероятность того, что из 10 наудачу выбранных телевизоров 3 исправных.

2б_КласОпр_22. В группе из 25 человек распределяется по жребию 7 задачников по теории вероятностей. Найти вероятность того. что среди обладателей задачников окажутся 3 девушки, если в группе 10 юношей и 15 девушек.

2б_КласОпр_23. В группе, состоящей из 10 выпускников, 10 выпускниц шкод и 5 слушателей П0, избираются по жребию 9 дружинников. Найти вероятность того, что в дружине окажется по 3 представителя каждой категории студентов.

2б_КласОпр_24. Из выставленных на продажу 10 гладиолусов, 50 ромашек и 12 жасминов наудачу покупают 25 цветков. Найти вероятность покупки 3 гладиолусов, 15 ромашек и 7 жасминов.

2б_КласОпр_25. Из 15 изделий 8 первого сорта и 7 - второго. Вынимаются наугад 4 изделия. Найти вероятность того, что два из них будут второго сорта.

3. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

3_СумПроизв_1. Группа состоит из 7 студентов экономического, 9 - радиотехнического, 6 - механического и 2 - авиационного факультетов. Какова вероятность того, что 3 первых студента, явившихся на экзамен, окажутся студентами одного факультета?

3_СумПроизв_2. Разрыв электрической цепи происходит в том случае, когда выходит из строя один из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что не будет разрыва цепи. если элементы выходят из строя с вероятностями 0,2; 0,7; 0,5 соответственно.

3_СумПроизв_3. При приемке партии подвергается проверке половина изделий. Условие приемки - наличие не выше 2 % брака в выборке. Вычислить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 5 % брака, будет принята.

3_СумПроизв_4. Надежность (т.е. вероятность безотказной работы) радиолампы в течение некоторого промежутка времени равна 0.9. Надежность работы остальных электроустройств радиоприемника - 0,85, механических устройств - 0,95. Найти надежность работы приёмника.

3_СумПроизв_5. Детали проходят 3 операции обработки. Вероятность появления брака во время 1-ой операции равна 0,02, 2-ой - 0,03, 3-ей - 0,02. Найти вероятность выхода стандартной детали, считая случаи появления брака во время операции независимыми событиями.

3_СумПроизв_6. В партии 10 000 приборов. Из них 72 % - отличного качества . Из приборов отличного качества 3 % идут на экспорт. Какова вероятность того, что взятый наугад прибор пойдет на экспорт?

3_СумПроизв_7. Предприятие изготовляет 95 % стандартных изделий, причем 86 % из них – первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие окажется первого сорта.

3_СумПроизв_8. В одном ящике находится 10 деталей (3 - стандартные), во втором - 15 (из них 6 - стандартных). Из ящиков наугад вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

3_СумПроизв_9. Имеется радиолокационная система, состоящая из 2 самостоятельных станций. Для выполнения задачи необходимо, чтобы обе станции, входящие в систему, работали безотказно. Требуется определить вероятность того, что система будет работать безотказно, если вероятность безотказной работы каждой станции в течение времени t, необходимого для выполнения задания, равна $p(t)$=0,9.

3_СумПроизв_10. 3 охотника договорились сделать один выстрел в мишень в определенной последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятность попадания в цель каждым охотником равна 0,7. Найти вероятность того, что: а) будет произведен один выстрел; б) в мишени появится одна пробоина.

3_СумПроизв_11. Стрелок выстрелил 3 раза по удаляющейся от него мишени, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела она уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность попасть в мишень хотя бы один раз.

3_СумПроизв_12. Вероятность того, что изготовленная на 1-ом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой детали на 2-ом станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены 2 детали, на втором - 4. Найти вероятность того, что все изготовленные детали первосортные.

3_СумПроизв_13. По одной и той же мишени производят по одному выстрелу с дистанций 600 м, 500 м, 300 м. Вероятности попадания с этих дистанций соответственно равны 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность не менее 2 попаданий.

3_СумПроизв_14. Последовательно послано 4 радиосигнала. Вероятности приёма каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, и соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Определить вероятность приема трех радиосигналов.

3_СумПроизв_15. 3 охотника договорились стрелять в цель в определенной последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятность попадания в цель каждым охотником равна 0,7. Найти вероятность того, что будет произведено два выстрела.

3_СумПроизв_16. Вероятность того, что студент сдаст 1-й экзамен, равна 0,9, 2-й - 0,9, 3-й - 0,8. Вычислить вероятность того, что хотя бы два экзамена будут сданы.

3_СумПроизв_17. Производится три выстрела по одной мишени. Вероятности попадания при 1-м, 2-м, 3-м выстрелах равны соответственно 0,4; 0,5; 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих 3-х выстрелов в мишени будет одна пробоина.

3_СумПроизв_18. 3 охотника договорились стрелять в цель в определенной последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятность попадания в цель каждым охотником равна 0,7. Найти вероятность того, что будет произведено три выстрела.

3_СумПроизв_19. Студентам, едущим на практику, предоставили 15 мест в Санкт-Петербург, 10 - в Киев, 5 - в Баку. Какова вероятность того, что 3 определенных студента А, Б, В попадут на практику в один город ?

3_СумПроизв_20. Трое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

3_СумПроизв_21. Из зенитного орудия производится 3 выстрела по снижающемуся самолету. Вероятности попадания при 1-ом, 2-ом и 3-ем выстрелах равны 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность не менее 2-х попаданий в самолет.

3_СумПроизв_22. Охотники Александр, Виктор и Павел попадают в летящую утку с вероятностями, соответственно равными 2/3, 3/4, 1/4/. Они стреляют по пролетающей утке одновременно. Какова вероятность того, что утка будет подбита?

3_СумПроизв_23. В студии телевидения имеются 3 телевизионные камеры. Вероятность, что камера включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

3_СумПроизв_24. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех - вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что оба раза будет выбрана нечетная цифра. (Подчеркнутое - выбросить)

3_СумПроизв_25. Стрелок выстрелил 3 раза по удаляющейся от него мишени, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела она уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность попасть в мишень 1 раз и 2 раза промахнуться.

3_СумПроизв_26. Вероятность безотказной работы блока, входящего в систему, в течение заданного времени составляет 0,8. Для повышения надежности работы системы в ней устанавливают такой же резервный блок. Требуется найти, какой станет вероятность безотказной работы системы с добавлением резервного блока.

3_СумПроизв_27. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено два залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,3, а из второго - 0,4.

3_СумПроизв_28. Рабочий обслуживает 3 станка, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа 1-й станок не потребует внимания рабочего, равна 0,95, 2-й - 0,9, 3-й - 0,8. Какова вероятность, что в течение часа а) ни один станок не потребует внимания рабочего; б) один станок не потребует внимания рабочего

3_СумПроизв_29. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех - вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра в первый раз.

3_СумПроизв_30. 3 баскетболиста должны произвести по одному броску мяча. Вероятности попадания мяча в корзину для 1-го, 2-го и 3-го баскетболистов равны соответственно 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что удачно произведет бросок один баскетболист.

3_СумПроизв_31. На тепловой станции 12 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену занято 8 человек. Найти вероятность того, что в одну смену женщин окажется не менее двух.

3_СумПроизв_32. Через остановку проходят автобусы №№ 1, 3, 10, 14, 15. Пассажир ожидает № 3 или № 10. Какова вероятность того, что первый подошедший автобус будет нужным, если автобусы ходят равномерно, причем маршрута № I - 10, № 3 - 5, № 10 - 12, № 14 - 8 и № 15 - 5 машин (все маршруты кольцевые).

3_СумПроизв_33. В ящике лежат 10 заклепок, из них 5 стальных, 3 латунных и 2 медных. Какова вероятность того, что 2 наугад взятые заклепки будут из одного материала?

3_СумПроизв_34. Рабочий обслуживает 3 станка, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа 1-й станок не потребует внимания рабочего, равна 0,95, 2-й - 0,9, 3-й - 0,8. Какова вероятность, что в течение часа один станов потребует внимания?

3_СумПроизв_35. Монета подбрасывается до тех пор, пока 2 раза подряд не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятность, что опыт окончится до 6-го броска

3_СумПроизв_36. 3 спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятности зачисления в сборную команду 1-го, 2-го, 3-го спортсменов соответственно равны 0,8; 0,7; 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из этих спортсменов попадет в сборную.

3_СумПроизв_37. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в 3 места.

3_СумПроизв_38. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Производится 5 выстрелов. Чему равна вероятность того, что цель будет поражена?

3_СумПроизв_39. Дается залп из двух орудий по мишени. Вероятности попадания из 1-го орудия равна 0,85, из 2-го - 0,91. Найти вероятность поражения цели.

3_СумПроизв_40. 3 стрелка бьют по мишени, вероятности попадания в которую соответственно равны: для 1-го стрелка - 0,6; для 2-го - 0,7; для 3-го - 0,8. Найти вероятность того, что в мишени появятся 2 пробоины.

3_СумПроизв_41. Рабочий обслуживает 3 станка, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа 1-й станок не потребует внимания рабочего, равна 0,95, 2-й - 0,9, 3-й - 0,8. Какова вероятность, что в течение часа хотя бы один станок потребует внимания рабочего?

3_СумПроизв_42. 15 равных секторов вращающегося диска раскрашены в красный, белый, зеленый, черный и синий цвета. Найти вероятность того, что пуля попадет в красный или черный сектор (количество секторов, окрашенных в один цвет, одинаково).

3_СумПроизв_43. 4 стрелка стреляют в одну мишень. Вероятность попадания в цель для 1-го стрелка равна 0,45, для 2-го - 0,5; для 3-го - 0,6; для 4-го - 0,7. Найти вероятность того, что в результате однократного выстрела всех 4-х стрелков будет хотя бы одна пробоина.

3_СумПроизв_44. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна: для 1-го станка - 0,9; для 2-го - 0,8; для 3-го - 0,75; для 4-го - 0,7. Найти вероятность того, что по крайней мере 3 станка не потребуют внимания рабочего в течение часа.

3_СумПроизв_45. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более, чем в 3 места

3_СумПроизв_46. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна: для 1-го станка - 0,8; для 2-го - 0,6; для 3-го - 0,5; для 4-го - 0,9. Найти вероятность того, что три станка не потребуют внимания рабочего в течение часа.

3_СумПроизв_47. В механизм вводят 3 одинаковые детали. При изготовлении детали получаются с размерами, большими и меньшими номинала. Правильное функционирование нарушается, если при сборке будут поставлены все три детали с размерами, большими номинала. У сборщика осталось 12 деталей, из которых 5 имеют размеры, больше номинала, 7- меньше номинала. Найти вероятность непрерывного функционирования механизма.

3_СумПроизв_48. Среди 10 дружинников 3 девушки и 7 юношей. Требуется путем жеребьевки отправить на дежурство трех дружинников. Чему равна вероятность того, что при извлечении одного за другим трех "жребиев" окажутся избранными 3 юноши ?

3_СумПроизв_49. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более, чем в 3 места, если известно, что последняя цифра нечетная ?

3_СумПроизв_50. (*) Монета подбрасывается до тех пор, пока 2 раза подряд не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятность того, что для этого потребуется четное число бросков.

3_СумПроизв_51. (*)Для бесперебойной работы некоторого предприятия необходима непрерывная работа не менее 5 автомашин. Вероятность того, что в данный момент автомашина не может работать, равна 0,3. Имеется 8 автомашин. Найти вероятность бесперебойной работы предприятия в данный момент.

3_СумПроизв_52. (*) Прибор состоит из трех узлов. При его включении с вероятностью p_1 появляется неисправность в первом узле, с вероятностью p_2 во втором, с вероятностью p_3 - в третьем. Неисправности в узлах возникают независимо друг от друга. Каждый из трех узлов, безусловно, необходим для работы прибора. Для отказа узла нужно, чтобы в нем было не менее 2-х неисправностей. Найти вероятность того, что прибор благополучно выдержит одно включение; *n* включений.

3_СумПроизв_53. *Прибор выходит из строя, если перегорит не менее пяти ламп первого типа или не менее четырех ламп второго типа, причем лампы работают (или перегорают) независимо друг от друга. Определить вероятность выхода прибора из строя при перегорании шести ламп, если вероятности перегорания ламп 1-го и 2-го типов равны соответственно 0,7 и 0,3.

4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

4_ПолнВер_1. На конвейер поступают детали с 4-х автоматов, работающих с различной точностью. 1-й автомат дает 0,5% брака, 2-й - 0,4 %, 3-й - 0,7 %, 4-й 0,6 %. С 1-го автомата поступило 1200 деталей, со 2-го - 500, с 3-го - 200 и с 4-го - I 300. Найти вероятность попадания на конвейер стандартной детали.

4_ПолнВер_2. С 1-го автомата на сборку поступает 20%, со 2-го - 30%, с 3-го - 50% деталей. Один автомат дает в среднем 0,2 % брака, второй - 0,3%, третий - 1%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь - бракованная.

4_ПолнВер_3. На сборку поступают детали с 3-х автоматов. 1-й автомат дает 0,3% брака, 2-й - 0.25%, 3-й - 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с 1-го автомата поступает 1000, со 2-го - 2000. с 3-го - 2500 деталей.

4_ПолнВер_4. Известно, что 95% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,93 и нестандартную - с вероятностью 0,06. Определить вероятность того, что изделие прошло упрощенный контроль.

4_ПолнВер_5. На склад поступили изделия из 3-х цехов: 20 % от 1-го, 50% - от 2-го, 30% - от 3-го. Среди изделий 1-го цеха брак в среднем составляет 0,4%, 2-го цеха - 0,3%, 3-го цеха - 0,15%. Какова вероятность того, что взятое наудачу изделие будет без брака?

4_ПолнВер_6. Радиолампа может принадлежать к одной из 3-х партий с вероятностями 0,25; 0,5; 0,25. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.

4_ПолнВер_7. Деталь для сборки поступает с 2-х автоматов одинаковой производительности. Вычислить вероятность поступления стандартной детали, если 1-й автомат дает 3% нарушения стандарта, а 2-й - 2%.

4_ПолнВер_8. На 2-х станках обрабатываются детали. Вероятность брака для 1-го станка равна 0,03; для 2-го - 0,04; обработанные детали складываются вместе, причем деталей с 1-го станка вдвое больше, чем со 2-го станка. Вычислить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

4_ПолнВер_9. Литье в болванках для дальнейшей обработки поступает из 2-х заготовительных цехов: из 1-го цеха - 70%, из 2-го - 30%, причем материал 1-го цеха имеет 10% брака, 2-го - 20%. Найти вероятность того, что взятая наугад болванка не имеет дефектов.

4_ПолнВер_10. Наборщик пользуется двумя кассами. В 1-й кассе - 90%, во 2-й - 80% отличного шрифта. Найти вероятность того, что любая извлеченная литера из наудачу взятой кассы будет отличного качества.

4_ПолнВер_11. При передаче сообщения сигналами "точка" - "тире" эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений "точка" и 1/3 сообщений "тире". Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

4_ПолнВер_12. Имеются 5 урн: в двух урнах - по 2 белых и I черному шару, в одной - 10 черных и в двух - по 3 белых и I черному шару. Найти вероятность того, что вынутый из наудачу взятой урны шар будет белым.

4_ПолнВер_13. Один из 3-х стрелков вызывается на линию огня и производит 2 выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для 1-го стрелка равна 0,4, для 2-го - 0,6, для 3-го - 0,8. Найти вероятность того , что в мишени будет 2 пробоины.

4_ПолнВер_14. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1 : 3 : 6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9, средний - 0,3, мелкий -0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок пробьет ее?

4_ПолнВер_15. По танку производятся 2 одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5, при 2-ом - 0,6. Для вывода танка из строя заведомо достаточно 2-х попаданий. При одном попадании танк выходит из строя с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что в результате 2-х выстрелов танк будет выведен из строя.

4_ПолнВер_16. По самолету производится 3 выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором - 0,5, при третьем - 0,7. Для вывода самолета из строя достаточно 3-х попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2, при двух - 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет сбит.

4_ПолнВер_17. При разрушении шестерни образуются крупные, средние и мелкие осколки, причем число мелких, средних и крупных осколков составляет соответственно 0,3; 0,6 и 0,1 от общего числа осколков. Крупный осколок пробивает экран с вероятностью 0,9, средний - 0,3, мелкий - 0,1. Какова вероятность того, что попавший в экран осколок пробьет его?

4_ПолнВер_18. Радиолампа может принадлежать к одной из 3-х партий с вероятностями 0,25; 0,25; 0,5. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

4_ПолнВер_19. На складе находятся изделия трех заводов в соотношении 3: 5: 4. Изделия первого завода содержат 2% брака, второго – 5%, третьего – 3%. Найти вероятность того, что наудачу взятое со склада изделие стандартно.

4_ПолнВер_20. Радиолампа может принадлежать к одной из 2-х партий с вероятностями 0,6 и 0,4. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,7 и 0,8. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

4_ПолнВер_21. В 2-х ящиках содержится по 20 деталей, в 1-ом - 17, во 2-ом - 15 стандартных. Из 2-го ящика наугад извлечена одна деталь и переложена в 1-й ящик. Найти вероятность того, что наугад извлеченная теперь деталь из 1-го ящика будет стандартной.

4_ПолнВер_22. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложили 2 шара в урну, имеющую 4 белых и 4 черных шара. Вычислить вероятность вынуть белый шар из 2-й урны.

4_ПолнВер_23. С 1-го автомата на сборку поступает 20 %, со 2-го - 30 %, с 3-го - 50 % деталей. 1-ый автомат дает в среднем 0,2 % брака, 2-ой - 0,3%, 3-ий - 0,1%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

4_ПолнВер_24. Среди 25 экзаменационных билетов имеется 20 "счастливых" и 5 "несчастливых". Студенты подходят за билетами один за другим по очереди. У кого больше вероятность взять "счастливый" билет - у того, кто подошел первым, или у того, кто подошел вторым?

4_ПолнВер_25. Работа двигателя контролируется двумя регуляторами. Рассматривается определенный промежуток времени t, в течение которого желательно обеспечить безотказную работу двигателя. Надежность 1-го регулятора - 0,6, 2-го - 0,7. При отказе обоих регуляторов двигатель выходит из строя. При отказе одного из них двигатель выходит из строя с вероятностью 0,80. Найти полную надежность двигателя (вероятность безотказной его работы).

4_ПолнВер_26. Из урны с 6-ю белыми и 4-мя черными шарами переложили 2 шара в урну, содержащую 3 белых и 5 черных шаров. После этого из 2-й урны вынимают один шар. Чему равна вероятность, что он белый? что он черный?

4_ПолнВер_27. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна: для лыжника - 0,9, для велосипедиста - 0,3, для бегуна - 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наудачу, выполнит норму.

4_ПолнВер_28. В правом кармане имеются 3 монеты по 25 коп., 4 - по 10 коп., а в левом - 6 монет по 25 коп. и 3 - по 10 коп. Из правого кармана в левый наудачу перекладываются 3 монеты, а затем из левого (также наудачу) берется одна монета. Определить вероятность извлечения из левого кармана монеты в 25 коп.

4_ПолнВер_29. 15 экзаменационных билетов содержат по 2 вопроса, которые не повторяются. Экэаменующийся может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на 2 вопроса из одного билета или на один вопрос из одного билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

4_ПолнВер_30. На двух станках обрабатываются одинаковые детали. Вероятность брака для станка № I - 0,03, а для станка № 2 - 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей со станка № 1 складывается вдвое больше, чем со станка № 2. Вычислить вероятность того, что взятая наудачу деталь не будет бракованной.

4_ПолнВер_31. (*) 3 самолета - 1 ведущий и 2 ведомых - отправляются на бомбометание по объекту. Радионавигационное устройство, без которого выход к цели невозможен, имеется только у ведущего самолета. Перед выходом на цель самолеты проходят оборонительную зону противника, в которой каждый из них может быть сбит с вероятностью 0,2. После выхода на цель самолеты выполняют бомбометание независимо, и каждый может разрушить объект с вероятностью 0,3. Определить вероятность разрушения объекта.

5. ФОРМУЛЫ БЕЙЕСА

5_Бейес_1. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,90. Предполагается упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,97 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, с вероятностью 0,04. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту.

5_Бейес_2. С 1-го автомата на сборку поступает 20%, со 2-го - 30%, с 3-го - 50% деталей. 1-й автомат дает в среднем 0,2% брака, 2-й - 0,3%, 3-й - 0,1%. Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на 1-м автомате.

5_Бейес_3. Телеграфное сообщение состоит из сигналов "точка" и "тире". Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений "точка" и 1/3 - "тире". Известно, что среди передаваемых сигналов "точка" и "тире" встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принят сигнал "точка".

5_Бейес_4. Имеется 5 урн: 2 из них содержат по 2 белых и 3 черных шара, 2 - по 1-му белому и 4 черных шара, и 1 урна - 4 белых и 1 черный. Из одной урны взяли шар. Он оказался белым. Чему равна вероятность того, что шар вынули из урны с 4 белыми и 1 черным шаром?

5_Бейес_5. 3 охотника одновременно выстрелили по медведю, который был убит пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит вторым охотником, если вероятность попадания для них равна соответственно 0,4;0,5; 0,6.

5_Бейес_6. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени с вероятностями попадания 0.7, 0.6 и 0.5. После стрельбы в мишени образовалось две пробоины. Найти вероятность того, что они принадлежат первому и третьему стрелкам.

5_Бейес_7. 2 стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, причем каждый из них делает по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для 1-го стрелка - 0,8, для 2-го - 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит 1-му стрелку.

5_Бейес_8. В батарее из 8 орудий три непристрелянных. Вероятность попадания из непристрелянных орудий равна 0,23, а из пристрелянных - 0,73. Произвели один выстрел из наудачу взятого орудия и промахнулись. Найти вероятность того, что выстрел произведен из пристрелянного орудия.

5_Бейес_9. С 1-го автомата на сборку поступает 30%, со 2-го - 20%, с 3-го - 50% деталей. 1-й автомат дает в среднем 0,4% брака, 2-й - 0,2%, 3-й - 0,3%. Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на 1-м автомате.

5_Бейес_10. Первая урна содержит 1 белый и 6 черных шаров, вторая урна - 3 белых и 2 черных, третья - 7 белых и 8 черных шаров. Из одной наудачу взятой урны вынут шар, он оказался белым. Чему равна вероятность того, что он вынут из первой урны?

5_Бейес_11. Имеется 10 урн, в 9-ти из которых находятся по 2 черных и по 2 белых шара, а в одной - 5 белых и 1 черный. Из одной урны взят шар. Чему равна вероятность того, что шар взят из урны, содержащей 5 белых и I черный дар, если он оказался белым?

5_Бейес_12. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,94. Предполагается упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,97 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, с вероятностью 0,04. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно стандартно.

5_Бейес_13. В партии 600 лампочек: 200 изготовлены на 1-ом заводе, 250 - на 2-ом, 150 - на 3-ем. Вероятность того, что лампочка окажется стандартной, для 1-го завода равна 0,97, для 2-го - 0,91, для 3-го - 0,93. Какова вероятность того, что взятая лампочка, оказавшаяся стандартной, изготовлена 1-ым заводом?

5_Бейес_14. Противник применяет самолеты 5-ти типов. Известно, что на данном участке фронта сосредоточено примерно равное число самолетов каждого типа. Вероятности сбить самолет каждого типа при проходе над оборонительной зоной соответственно равны 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1.Самолет противника, летевший через оборонительную зону, сбит. Чему равна вероятность того, что это самолет 1-го типа?

5_Бейес_15. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их стандартности к одному из двух контролеров; вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,7, а ко второму - 0,3. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,89, а вторым - 0,91. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

5_Бейес_16. 3 охотника одновременно выстрелили по медведю, который был убит пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым охотником, если вероятность попадания для них равна соответственно 0,3; 0,4; 0,5.

5_Бейес_17. В батарее из 10 орудий одно непристрелянное. Вероятность попадания из этого орудия равна 0,23, а из пристрелянного - 0,73. Произвели один выстрел из наудачу взятого орудия и промахнулись. Найти вероятность того, что выстрел произведен из непристрелянного орудия.

5_Бейес_18. Имеется 6 одинаковых урн, из которых в 5-ти находится по 7 черных и по 3 белых шара, а в одной - 9 белых и 1 черный. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей 9 белых шаров?

5_Бейес_19. Телеграфное сообщение состоит из сигналов "точка" и "тире". Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений "точка" и 1/3 - "тире". Известно, что среди передаваемых сигналов "точка" и "тире" встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность того что принят передаваемый сигнал, если принят сигнал "тире".

5_Бейес_20. Имеется 2 партии деталей, причем известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим требованиям, а в другой 1/4 деталей недоброкачественна. Деталь, взятая наудачу из наудачу взятой партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что 2-я деталь из этой же партии окажется недоброкачественной, если 1-ая деталь после проверки возвращена в партию.

5_Бейес_21. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их стандартности к одному из двух контролеров; вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму - 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,84, а вторым - 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

5_Бейес_22. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предполагается упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту.

5_Бейес_23. 3 охотника одновременно выстрелили по медведю, который был убит пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,6; 0,7; 0,4.

5_Бейес_24. Известно, что соответствуют стандарту 95 % электроламп, изготовленных заводом № 1, 90 % - заводом № 2, 89 % -заводом № 3.

В магазин поступило 100 ламп, изготовленных заводом № 1, 90 - заводом № 2, 40- заводом № 3. Здесь они оказались расположенными в случайном порядке. Лампа, приобретенная покупателем, оказалась нестандартной. Определить вероятность того, что она изготовлена:а) на заводе № 1; б) на заводе № 2; в) на заводе № 3.

5_Бейес_25. Известно, что 97% выпускаемой продукции стандартны. Упрощенная схема контроля признает стандартной стандартную продукцию с вероятностью 0,98, а бракованную - с вероятностью 0,04. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее контроль, стандартно.

5_Бейес_26. Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0.6, а ко второму – 0.4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым - 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Какова вероятность тогг, что эту деталь проверил первый контролер?

5_Бейес_27. Сборщик получил 500 деталей завода № 1 , 300 - завода № 2, 200 - завода № 3. Вероятность того, что деталь первого завода стандартна, равна 0,7; для деталей второго и третьего заводов эти вероятности соответственно равны 0.8 и 0.9. Наудачу взятая сборщиком деталь оказалась стандартной. На каком заводе она вероятней всего изготовлена?

5_Бейес_28. В батарее из 11 орудий два непристрелянных. Вероятность попадания из непристрелянных орудий равна 0,21, а из пристрелянных - 0,78. Произвели один выстрел из наудачу взятого орудия и промахнулись. Найти вероятность того, что выстрел произведен из непристрелянного орудия.

5_Бейес_29. Имеется 2 партии деталей, в первой из них – 4 детали, в другой – 12. Известно, что в первой партии все детали удовлетворяют техническим требованиям, а в другой 1/8 деталей недоброкачественна. Деталь, взятая наудачу из наудачу взятой партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что вторая наудачу извлеченная деталь окажется недоброкачественной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

6. ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

6_Берн_1. Статистикой установлено, что из каждой I 000 родившихся детей в среднем рождается 485 девочек и 515 мальчиков. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей 3 девочки.

6_Берн_2. В урне 3 шара: 1 белый и 2 черных. Наудачу вынимают 5 раз один шар и каждый раз возвращают. Найти вероятность того, что белый шар вынули 2 раза.

6_Берн_3. Вероятность попадания в "десятку" равна 0,7, в "девятку" - 0,3. Определить вероятность того, что при трех выстрелах стрелок наберет не менее 29 очков.

6_Берн_4. В магазине 8 покупателей. Найти вероятность того, что 3 совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого покупателя одна - 0,3.

6_Берн_5. Для бесперебойной работы некоторого предприятия необходима непрерывная работа не менее 5 автомашин. Вероятность того, что в данный момент автомашина не может работать, равна 0,3. Имеется 8 автомашин. Найти вероятность бесперебойной работы предприятия в данный момент.

6_Берн_6. При каждом выстреле из орудия вероятность поражения цели равна 0,8. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах будет сделано 3 промаха.

6_Берн_7. В урне 4 шара: 1 белый и 3 черных. Наудачу вынимают 5 раз один шар и каждый раз возвращают. Найти наивероятнейшее число появлений белого шара и вероятность этого числа.

6_Берн_8. Что вероятнее - выиграть у равносильного противника: 3 партии из 4-х или 5 из 8-ми?

6_Берн_9. Производится 6 выстрелов по цистерне с горючим, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Первое попадание дает пробоину и вызывает течь, а второе - воспламенение горючего. Найти вероятность того, что цистерна будет подожжена.

6_Берн_10. Статистикой установлено, что из каждой I 000 родившихся детей в среднем рождается 485 девочек и 515 мальчиков. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей не более 3-х девочек.

6_Берн_11. 30 % изделий предприятия - продукция высшего качества. Некто приобрел 6 изделий. Чему равна вероятность того, что 4 изделия из них высшего сорта?

6_Берн_12. В партии изделий 5 % бракованных. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание 5 изделий: а) не окажется ни одного бракованного, б) будет по крайней мере одно бракованное?

6_Берн_13. Пусть вероятность того, что покупателю необходимо купить обувь 42-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 6-ти первых покупателей обувь этого размера будет необходима по крайней мере трём.

6_Берн_14. По цели производится 5 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Для получения зачета по стрельбе требуется не менее 3 попаданий. Найти вероятность получения зачета.

6_Берн_15. В урне находятся шары: 3 белых, 2 черных, 1 красный. Наугад вынули 6 раз по одному шару, сразу же возвращая их обратно. Найти вероятность того, что белый шар появится 2 раза, черный - 1 раз, красный - 3 раза.

6_Берн_16. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/100. В предположении независимости искажения знаков найти вероятность того, что сообщение из 5 знаков не будет искажено; б) содержит ровно одно искажение.

6_Берн_17. В цехе имеется 7 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включены 4 мотора; б) включен по крайней мере один мотор.

6_Берн_18. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока 10%. Вычислить вероятность того, что из 10 наблюдаемых телевизоров более 7 выдержат гарантийный срок.

6_Берн_19. Что вероятнее - выиграть у равносильного противника: не менее 3-х партий из 4-х или не менее 5-ти из 8-ми? Равносильный противник - вероятность выигрыша у которого равна 1/2.

6_Берн_20. В партии изделий 4 % бракованных. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание 6 изделий: а) не окажется ни одного бракованного, б) будет по крайней мере одно стандартное?

6_Берн_21. 35 % изделий предприятия - продукция высшего качества. Некто приобрел 7 изделий. Чему равна вероятность того, что из них не менее 4-х высшего сорта?

6_Берн_22. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/100. В предположении независимости искажения знаков найти вероятность того, что сообщение из 5 знаков: а) содержит ровно одно искажение; б) содержит хотя бы 2 искажения.

6_Берн_23. Вероятность изготовления детали отличного качества равна 0,9. Какова вероятность того, что среди 10 деталей не менее 9 отличного качества?

6_Берн_24. Принимая вероятность изготовления нестандартной детали равной 0,05, найти вероятность того, что из восьми наудачу взятых деталей будет не менее 4-х стандартных.

6_Берн_25. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/100. В предположении независимости искажения знаков найти вероятность того, что сообщение из 6 знаков: а) не будет искажено; б) содержит хотя бы одно искажение.

6_Берн_26. В цехе имеется 5 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включены все моторы, в) выключен по крайней мере один мотор.

6_Берн_27. В урне лежат 20 шаров: 10 белых и 10 черных. Вынимают 4 шара по схеме повторной выборки (с возвращением шаров обратно). Найти вероятность того, что не менее 2-х вынутых шаров будут белыми.

6_Берн_28. Каждое из 10 независимых испытаний заключается в подбрасывании 3-х игральных костей. Найти вероятность того, что в 4-х испытаниях появятся в точности по две "шестерки".

6_Берн_29. В ящике находится 90 годных и 10 бракованных деталей. Найти вероятность того, что среди 10 вынутых из ящика деталей а) нет бракованных; б) имеется по крайней мере одно бракованное.

6_Берн_30. Из имеющихся 15 деталей - 3 бракованные. Определить вероятность того, что среди 5-ти наугад взятых деталей будет 2 бракованные.

6_Берн_31. В цехе имеется 5 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено не менее 4-х моторов.

6_Берн_32. Отверстия штампуются на 2-х станках, причем на 1-м - в 2 раза быстрее. Найти вероятность того, что из 5-ти взятых наугад деталей число отштампованных первым станком окажется не менее 4-х.

6_Берн_33. Вероятность выигрыша по билету равна 0,2. Найти вероятность того, что из четырех купленных билетов хотя бы один выиграет.

6_Берн_34. Из последовательности чисел 1, 2, ..., 100 выбирают наугад с возвращением 10 чисел. Чему равна вероятность того, что среди них кратных 7 будет не более 2?

6_Берн_35. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет менее 2-х раз.

6_Берн_36. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/100. В предположении независимости искажения знаков найти вероятность того, что сообщение из 7 знаков: а) не будет искажено; б) содержит хотя бы 2 искажения.

6_Берн_37. Вероятность выиграть по билету лотереи равна 1/7. Найти вероятность выигрыша не менее, чем по 2-м билетам из шести.

6_Берн_38.Пусть всхожесть семян данного растения составляет 90 %. Найти вероятность того, что из 4-х посеянных семян взойдут не менее 3-х.

6_Берн_39.Вероятность того, что расход угля на некотором предприятии в течение одного дня окажется нормальным (не выше установленной нормы) равна 0.7. Найти вероятность того, что по крайней мере в течение трёх дней недели расход угля будет нормальным (неделя - 5 рабочих дней).

6_Берн_40.Принимая вероятность изготовления нестандартной детали равной 0,05, найти вероятность того, что из 5-ти наудачу взятых деталей будет 4 стандартных.

6_Берн_41.Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/9. Какова вероятность того, что, имея 7 билетов, можно выиграть не более двух раз?

6_Берн_42.Пусть вероятность того, что покупателю необходимо купить обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 5-ти первых покупателей обувь этого размера будет необходима по крайней мере 2-м.

6_Берн_43.Пусть вероятность того, что наудачу взятая деталь нестандартная, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 5-ти деталей будет не менее 2-х стандартных.

6_Берн_44.Среди волокон хлопка определенного сорта в среднем 78% по длине меньше 40 мм. Какова вероятность того, что из взятых наудачу 4-х волокон не менее 3-х короче 40 мм?

6_Берн_45.В хлопке имеется 70 % длинных волокон. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 8-ми волокон будет не менее 7-ми длинных.

6_Берн_46.Из последовательности чисел 1, 2, ..., 100 выбирают наугад с возвращением 10 чисел. Чему равна вероятность того, что среди них кратных 11 будет не более 2?

6_Берн_47.В цехе имеется 9 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены 4 мотора.

6_Берн_48. Вероятность выиграть по билету лотереи равна 1/7. Найти вероятность выигрыша не менее, чем по 2-м билетам из шести.

6_Берн_49. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не менее 2-х раз.

6_Берн_50. Вероятность того, что расход угля на некотором предприятии в течение одного дня окажется нормальным (не выше установленной нормы) равна 0.8. Найти вероятность того, что по крайней мере в течение 2 двух дней недели расход угля будет нормальным (неделя - 5 рабочих дней).

6_Берн_51. (*) 2 автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность 1-го автомата втрое больше, чем 2-го. Вероятность изготовления годной детали 1-м автоматом равна 0,9, а 2-м - 0,7. С конвейера взяты любые 5 деталей. Найти вероятность того, что 4 из них - годные.

7. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

7_Локальн_1. Найти приближенно вероятность того, что при 400 испыта-ниях событие M наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

7_Локальн_2. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,85. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах стрелок поразит мишень 175 раз.

7_Локальн_3. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты позвонит какой-либо абонент, равна 0,02. Какое из 2-х событий вероятнее: а) в течение одной минуты позвонят 3 абонента; б) 4 абонента?

7_Локальн_4. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 200 родившихся детей мальчиков и девочек будет поровну.

7_Локальн_5. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,04. Какова вероятность того, что 37 деталей из 900 окажутся бракованными?

7_Локальн_6. Пусть вероятность промаха при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность 240 попаданий при 300 выстрелах.

7_Локальн_7. Найти вероятность того, что в серии из 200 независимых испытаний событие наступит 140 раз, если вероятность непоявления этого события в отдельном испытании равна 0,3.

7_Локальн_8. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что из 800 посеянных семян не взойдет 165.

7_Локальн_9. На опытной станции посеяно 150 семян кукурузы. Всхожесть семян - 95 %. Найти вероятность того, что взойдет 140 семян.

7_Локальн_10. Вероятность выпуска некоторого изделия в соответствии с утвержденными техническими условиями принимается равной 0,9. Какова вероятность того, что в партии из 300 изделий окажутся годными к эксплуатации 265?

7_Локальн_11. При установившемся технологическом процессе происходит 10 обрывов нити на 100 веретен в час. Определить наивероятнейшее число обрывов нити на 80 веретенах в течение часа и вероятность этого числа.

7_Локальн_12. Вероятность появления события А в каждом отдельном испытании равна 0,75. Вычислить вероятность того, что при 48 независимых испытаниях событие А наступит ровно 30 раз.

7_Локальн_13. Известно, что 3/5 всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией 1-го сорта. Чему равна вероятность того, что в изготовленной партии из 200 аппаратов окажется наивероятнейшее число аппаратов 1-го сорта?

7_Локальн_14. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0.8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень ровно 75 раз.

7_Локальн_15. Вероятность попадания в цель при одном выстреле - 0,6. Найти: а) вероятность того, что при 6400 выстрелах цель будет поражена 3 240 раз, б) наиболее вероятное число попаданий при 5400 выстрелах

7_Локальн_16. Известно, что 3/5 количества обуви, изготовленной фабрикой, оценивается как продукция 1-го сорта. Нужно определить вероятность того, что среди 200 пар изготовленной обуви будет 140 пар 1-го сорта.

7_Локальн_17. Опытным путем установлено, что доля волокна хлопка-сырца длиной *а* составляет в среднем 10 % в каждой подопытной партии. Какова вероятность появления волокна указанной длины 150 раз при I 700 опытах ?

7_Локальн_18. Вероятность того, что лампа останется исправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что хотя бы три из 200 ламп останутся исправными после 1000 часов работы?

7_Локальн_19. Каждый моряк из экипажа прибывшего в порт судна с вероятностью, равной 1/3, осматривает город, остается на корабле или находится в ресторане. Найти вероятность того, что из 203 членов экипажа в данный момент 71 моряк осматривает город.

7_Локальн_20. Батарея сделала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий и его вероятность; б) вероятность разрушения объекта, если для этого необходимо не менее 4 попаданий.

7_Локальн_21. Доля брака при производстве некоторой продукции составляет 1,8 %. Определить наивероятнейшее число бракованных единиц в партии из 600 штук продукции, а также найти вероятность этого числа.

7_Локальн_22. При данном технологическом процессе 79 % всей производственной продукции оказывается продукцией высшего сорта. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 150 изделий. Вычислить вероятность того, что в этой партии окажется наивероятнейшее число изделий высшего сорта.

7_Локальн_23. Известно, что 3/5 всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией 1-го сорта. Определить вероятность того, что среди изготовленных 200 аппаратов окажется 140 аппаратов 1-го сорта.

7_Локальн_24. Вероятность попадания по движущейся мишени - 0,7. Какова вероятность того, что из 200 выстрелов 15 окажутся удачными?

7_Локальн_25. По данным технологического контроля в среднем 2 % изготовляемых на заводе часов нуждаются в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из 300 изготовленных часов 200 штук не будут нуждаться в дополнительной регулировке?

7_Локальн_26. Известно, что 3/5 количества обуви, изготовленной фабрикой, оценивается как продукция 1-го сорта. Найти наивероятнейшее число пар обуви 1-го сорта и его вероятность.

7_Локальн_27. При установившемся технологическом процессе происходит 10 обрывов нити на 100 веретен в час. Определить вероятность того, что в течение часа на 80 веретенах произойдет 7 обрывов нити.

7_Локальн_28. Вероятность того, что ПК потребует обновления в течение одного года, равна 0.2. Найти вероятность, что в партии, содержащей 150 ПК, обновления в течение года потребуют ровно 20.

7_Локальн_29. Доля бракованных изделий, выпускаемых заводом, равна 2%. Найти вероятность появления 30 бракованных изделий в партии, содержащей 200 изделий.

7_Локальн_30. (*) Определить вероятность того, что среди 500 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 50 лампочек все оказались исправными. Предполагается, что число неисправных лампочек из 500 равновозможно от 0 до 5.

8. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

8_Интегр_1. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей не прошедшими проверку окажутся от 70 до 100.

8_Интегр_2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Произведено 100 выстрелов. Найти вероятность попадания не более 75 раз.

8_Интегр_3. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень не менее 81 раза.

8_Интегр_4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Произведено 100 выстрелов. Найти вероятность попаданий не менее 20 раз.

8_Интегр_5. Проверкой качества изготовляемых радиоламп установлено, что из них 96 % служат не меньше гарантируемого срока в t часов. Наугад выбирают 15000 радиоламп. Найти вероятность того, что со сроком службы, менее гарантируемого, будет меньше 615 радиоламп.

8_Интегр_6. Электростанция обслуживает сеть в 20 000 электролампочек. Какова вероятность того, что в некоторый момент, взятый наудачу, будет включено не менее 15 900 и не более 16 100 лампочек, если вероятность включения каждой отдельной лампочки равна 0,8.

8_Интегр_7. Процент всхожести семян кукурузы равен 95%. Найти вероятность того, что из 2000 посеянных семян число не взошедших будет не более 120.

8_Интегр_8. Известно, что 60% всего числа изготовляемых заводом изделий выпускаются 1-м сортом. Приемщик берет первые попавшиеся 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них изделий I сорта окажется от 120 до 150 шт.?

8_Интегр_9. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 70 и не более 80 раз.

8_Интегр_10. Вероятность получения стандартной детали составляет 97%. Какова вероятность того, что в партии из случайно отобранных 300 деталей число бракованных будет не менее 18.

8_Интегр_11. На склад поступают изделия, из которых 90 % оказывается высшего сорта. Найти вероятность того, что из 400 взятых наудачу изделий не менее 350 окажутся высшего сорта.

8_Интегр_12. Полагая вероятность рождения мальчика равной 0,515, найти вероятность того, что среди 10000 новорожденных детей мальчиков будет не больше, чем девочек.

8_Интегр_13. Производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,8. Найти вероятность появления события более 79 раз в 100 испытаниях.

8_Интегр_14. Некоторая операция выполняется с 3% брака. Какова вероятность того, что в партия из случайно отобранных 300 деталей число бракованных будет более 18.

8_Интегр_15. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится в этих испытаниях не менее 80 и не более 90 раз.

8_Интегр_16. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не более 70 раз.

8_Интегр_17. В результате проверки качества приготовленного для посева зерна было установлено, что 90 % зерна всхоже. Определить вероятность того, что среди отобранных и высаженных 1000 зерен прорастет не менее 700 шт.

8_Интегр_18. Вероятность пройти через некоторый заболоченный участок, не промочив ноги, равна 0,6. Какова вероятность того, что из 220 человек не промочат ноги от 120 до 133 человек?

8_Интегр_19. Ботаники делали опыты по скрещиванию желтого гороха. По гипотезе Менделя, вероятность появления зеленого гороха равна 1/4. Какова вероятность того, что при 34 153 скрещиваниях зеленый горох будет получен от 3 493 до 8 507 раз ?

8_Интегр_20. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,2. Определить вероятность того, что среди 100 наудачу отобранных деталей бракованных окажется не менее 6.

8_Интегр_21. Принимал одинаково вероятным рождение мальчика и девочки, найти вероятность того, что из 4000 новорожденных мальчиков будет от 1960 до 2050.

8_Интегр_22. Известно, что 60% всего числа изготовляемых заводом изделий выпускаются 1-м сортом. Приемщик берет первые попавшиеся 200 изделий. Чему равна вероятность того, что среди них изделий I сорта окажется от 90 до 150 шт.?

8_Интегр_23. Принимая вероятность рождения мальчика равной 0,51, оценить вероятность того, что среди 1200 новорожденных мальчиков будет от 550 до 650 включительно.

8_Интегр_24. Вероятность того, что пара обуви, взятая наудачу из изготовленной партии, окажется высшего сорта, равна 0,6. Чему равна вероятность того, что среди 600 пар, поступивших на контроль, окажется от 342 до 378 пар обуви высшего сорта?

8_Интегр_25. 5 работниц окрашивают одинаковые по размерам и по форме игрушки. Две из них производят окраску в красный цвет, три - в зеленый. Производительность труда работниц одинакова. Окрашенные игрушки оказались перемешанными. Определить вероятность того, что среди 600 игрушек, отобранных случайным образом, окажется красных от 228 до 264 шт.

8_Интегр_26. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

8_Интегр_27. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень не менее 81 раза.

8_Интегр_28. В результате проверки качества приготовленного для посева зерна было установлено, что 90 % зерна всхоже. Определить вероятность того, что среди отобранных и высаженных 1000 зерен прорастет от 700 до 740 шт.

8_Интегр_29. При вытачивании болтов наблюдается в среднем 10% брака. Можно ли быть уверенным, что в партии из 400 болтов окажутся пригодными более 299 ?

8_Интегр_30. Штамповка металлических клемм для соединительных пластин дает 20 % брака. Определить вероятность наличия от 100 до 125 клемм не соответствующих стандарту, в партии из 600 клемм.

8_Интегр_31. При автоматической прессовке карболитовых болванок 2/3 их общего числа не имеют зазубрин. Найти вероятность того, что из 450 взятых наудачу болванок число болванок без зазубрин заключено между 280 и 320.

8_Интегр_32. (*) В страховом обществе застраховано 10000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течение года для каждого лица равна 0.006. Каждый застрахованный вносит 1 января наступающего года 12 руб. страховых, и в случае его смерти его родственники получают 1000 руб. Чему равна вероятность того, что общество получит прибыль не меньше, чем 40000 руб.?

8_Интегр_33. (*) В страховом обществе застраховано 10000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течение года для каждого лица равна 0.006. Каждый застрахованный вносит 1 января наступающего года 12 руб. страховых, и в случае его смерти его родственники получают 1000 руб. Чему равна вероятность того, что общество потерпит убытки?

8_Интегр_34. (*) В страховом обществе застраховано 10000 лиц одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти в течение года для каждого лица равна 0.006. Каждый застрахованный вносит 1 января наступающего года 12 руб. страховых, и в случае его смерти его родственники получают 1000 руб. Чему равна вероятность того, что общество получит прибыль не меньше, чем 80000 руб.??

8_Интегр_35. (*) В городе ежегодно рождается в среднем 122500 детей. Принимая вероятность рождения мальчика равной 0,51, найти вероятность того, что число родившихся за год мальчиков превосходит число девочек не менее, чем на 1500.

8_Интегр_36. (*) Игрок выигрывает 7 коп. при появлении 6 очков на игральной кости и платит 1 коп. в других случаях. Найти вероятность того, что его выигрыш будет составлять от 16 до 30 руб. после 8000 бросаний кости.

9. ФОРМУЛА ПУАССОНА

9_Пуассон_1. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 мин. на коммутатор позвонит абонент, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение 1 мин. позвонят ровно 3 абонента.

9_Пуассон_2. При штамповке зубчатых колесиков для часов наблюдается 0.2 % брака. Найти вероятность того, что в партии из 2 000 штук число пригодных будет более I 955.

9_Пуассон_3. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на 5 веретенах.

9_Пуассон_4. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность наиболее вероятного числа этих деталей в партии из 1000 шт.

9_Пуассон_5. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл?

9_Пуассон_6. Радиоаппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года равна 0,001. Какова вероятность отказа не менее 2-х элементов в год?

9_Пуассон_7. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 мин. на коммутатор позвонит абонент, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение 1 мин. позвонят менее 3-х абонентов.

9_Пуассон_8. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брака) равна 0,01. Сверла укладываются в коробки по 50 шт. Пользуясь законом Пуассона, определить вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных сверл; б) число бракованных сверл не превосходит 2.

9_Пуассон_9. Аппаратура содержит 1000 электроэлементов, вероятность отказа для каждого из которых в течение некоторого времени равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из электроэлементов?

9_Пуассон_10. Работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва пряжи на каждом из веретен в течение некоторого времени равна 0,005. Найти наиболее вероятное число обрывов и его вероятность.

9_Пуассон_11. Телефонная станция обслуживает 500 абонентов. Вероятность позвонить на коммутатор любому абоненту в течение часа равна 0,01. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 3 абонента?

9_Пуассон_12. Счетчик Гейера регистрирует частицы, вылетающие из некоторого радиоактивного источника, с вероятностью 0,0001. Предположим, что за время наблюдения из источника вылетело 30 000 частиц. Какова вероятность того, что счетчик зарегистрировал более 10 частиц?

9_Пуассон_13. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу поступят: а) ровно 3 негодных изделия; б) от 2 до 5 негодных изделий.

9_Пуассон_14. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,02. Вычислить вероятность того, что контролер, проверяющий качество 100 изделий, обнаружит среди них 5 бракованных.

9_Пуассон_15. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что число бракованных сверл в коробке окажется не более 3-х?

9_Пуассон_16. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа 2-х электроэлементов в год?

9_Пуассон_17. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,02. Вычислить вероятность того, что контролер, проверяющий качество 100 изделий, обнаружит среди них 5 бракованных.

9_Пуассон_18. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двумя и более пулями, если число выстрелов равно 5000.

9_Пуассон_19. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 мин. на коммутатор позвонит абонент, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение 1 мин. позвонят более 3-х абонентов.

9_Пуассон_20. Счетчик Гейера регистрирует частицы, вылетающие из некоторого радиоактивного источника, с вероятностью 0,0001. Предположим, что за время наблюдения из источника вылетело 30 000 частиц. Какова вероятность того, что счетчик не зарегистрировал ни одной частицы?

9_Пуассон_21. Работница обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва пряжи на каждом из веретен в течение некоторого времени равна 0,005. Найти вероятность того, что в течение промежутка времени произойдет не более 10 обрывов.

9_Пуассон_22. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа не менее 2-х электроэлементов в год?

9_Пуассон_23. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 мин. на коммутатор позвонит абонент, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение 1 мин. позвонит хотя бы один абонент.

9_Пуассон_24. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,02. Вычислить вероятность того, что контролер, проверяющий качество 100 изделий, обнаружит среди них не менее 3-х бракованных.

9_Пуассон_25. Счетчик Гейера регистрирует частицы, вылетающие из некоторого радиоактивного источника, с вероятностью 0,0001. Предположим, что за время наблюдения из источника вылетело 30 000 частиц. Какова вероятность того, что счетчик зарегистрирует ровно 3 частицы?

9_Пуассон_26. При изготовлении изделий некоторой фабрики наблюдается в среднем 0.3 % брака. Найти вероятность того, что в партии из 2000 изделий число стандартных будет более I 980.

9_Пуассон_27. На факультете насчитывается 3000 студентов. Найти вероятность того, что 8 октября является днем рождения 8 студентов (год – не високосный).

9_Пуассон_28. (*) Вероятность сбить самолет винтовочным выстрелом равна 0,004. Какова вероятность уничтожения самолета при залпе из 250 винтовок?

10. ОТКЛОНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ ОТ ВЕРОЯТНОСТИ

10_Отклон_1. Вероятность появления события в каждом из 650 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03.

10_Отклон_2. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

10_Отклон_3. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

10_Отклон_4. Французский ученый Бюффон (XVIII в.) бросил монету 4040 раз, причем «герб» появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности появления «герба» по абсолютной величине не более чем в опыте Бюффона.

10_Отклон_5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,6. Найти число испытаний *n,* при котором с вероятностью 0,9438 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

10_Отклон_6. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы вероятность неравенства

$$\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right| \le 0{,}02$$

была не меньше чем вероятность противоположного неравенства, где m—число появлений одного очка в n бросаниях игральной кости?

10_Отклон_7. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний n, при котором с вероятностью 0,99 можно ожидать, что относительная частота появлений события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

10_Отклон_8. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4:1. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений n, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,01?

10_Отклон_9. Вероятность появления события в каждом из 600 независимых испытаний равна 0,7. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,95 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не превысила ε.

10_Отклон_10. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,77 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,5 не превысила ε.

10_Отклон_11. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,98 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,75 не превысила ε.

10_Отклон_12. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 1000 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,95. Найти с вероятностью 0,90 границы, в которых будет заключено число m стандартных деталей среди проверенных.

10_Отклон_13. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

10_Отклон_14. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число *m* выпадений шестерки.

10_Отклон_15. Вероятность появления события в каждом из 700 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

10_Отклон_16. Вероятность появления события в каждом из 1000 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03.

10_Отклон_17. Вероятность появления события в каждом из 9000 независимых испытаний равна 0,85. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

10_Отклон_18. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти число испытаний *n,* при котором с вероятностью 0,9804 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03.

10_Отклон_19. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы вероятность неравенства

$$\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right| \le 0{,}03$$

была не меньше, чем вероятность противоположного неравенства, где *m* — число появлений двух очков в *n* бросаниях игральной кости?

10_Отклон_20. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний *n,* при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что относительная частота появлений события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03.

10_Отклон_21. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 3:5. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений n, при котором с вероятностью 0,90 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,03?

10_Отклон_22. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,9. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,95 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,9 не превысила ε.

10_Отклон_23. Вероятность появления события в каждом из 1000 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,80 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,8 не превысила ε.

10_Отклон_24. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,80. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,95 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,80 не превысила ε.

10_Отклон_25. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 2000 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,95. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число m стандартных деталей среди проверенных.

10_Отклон_26. Отдел технического контроля проверяет 500 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,10. Найти с вероятностью 0,92 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

10_Отклон_27. Игральную кость бросают 90 раз. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m выпадений шестерки.

11. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

11_Обратн_1. В некоторой лотерее вероятность выигрыша на один билет равна 1/5. Предполагая, что выигрыши на различные билеты независимы, определить число билетов, которые нужно купить, чтобы вероятность получения хотя бы одного выигрыша была не меньше 0,9.

11_Обратн_2. Сколько нужно взять случайных цифр, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей 0,9, цифра "6" появилась хотя бы один раз?

11_Обратн_3. Вероятность попадания в цель равна 0,01. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы иметь хотя бы одно попадание с вероятностью, не меньшей 0,95?

11_Обратн_4. Вероятность попадания в цель равна 0,003. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы с вероятностью, большей 0,94, можно было утверждать, что цель будет поражена?

11_Обратн_5. Сколько раз достаточно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью, равной 1/2, можно было бы ожидать появление "6" хотя бы в одном случае?

11_Обратн_6. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,3. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, получить хотя бы один отказ?

11_Обратн_7. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,05. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью, большей 0,8, можно было ожидать, что событие появится на менее 5 раз?

11_Обратн_8. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки. Сколько нужно класть сверл в коробку, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,90, в ней оказалось не менее 100 исправных?

11_Обратн_9. Вероятность попадания в цель равна 0,01. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы иметь хотя бы одно попадание с вероятностью, не меньшей 0,9?

11_Обратн_10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,3. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью, большей 0, 99, получить хотя бы один отказ?

11_Обратн_11. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было ожидать, что событие появится не менее 80 раз?

11_Обратн_12. Вероятность появления положительного результата в каждом из n независимых испытаний равна 0,9. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью, большей 0,98, можно было ожидать, что не менее 150 испытаний дадут положительный результат?

11_Обратн_13. В некоторой лотерее вероятность выигрыша на один билет равна 1/8. Предполагая, что выигрыши на различные билеты независимы, определить число билетов, которые нужно купить, чтобы вероятность получения хотя бы одного выигрыша была не меньше 0,8.

11_Обратн_14. Сколько нужно взять случайных цифр, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей 0,95, цифра "3" появилась хотя бы один раз?

11_Обратн_15. Вероятность попадания в цель равна 0,8. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы иметь хотя бы одно попадание с вероятностью, не меньшей 0,9?

11_Обратн_16. Вероятность попадания в цель равна 0,7. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы с вероятностью, большей 0,90, можно было утверждать, что цель будет поражена?

11_Обратн_17. Сколько раз достаточно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.95, можно было бы ожидать появление "1" хотя бы в одном случае?

11_Обратн_18. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,05. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью 0,90 получить хотя бы один отказ?

11_Обратн_19. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,85. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью, большей 0,9, можно было ожидать, что событие появится не менее 10 раз?

11_Обратн_20. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,01. Сверла укладываются в коробки. Сколько нужно класть сверл в коробку, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, в ней оказалось не менее 100 исправных?

11_Обратн_21. Вероятность попадания в цель равна 0,85. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы иметь хотя бы одно попадание с вероятностью, не меньшей 0,95?

11_Обратн_22. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью, не меньшей 0, 95, получить хотя бы один отказ?

11_Обратн_23. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,9. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью, большей 0,95, можно было ожидать, что событие появится не менее 60 раз?

11_Обратн_24. Вероятность появления положительного результата в каждом из n независимых испытаний равна 0,95. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, можно было ожидать, что не менее 100 испытаний дадут положительный результат?

12. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Дискретная случайная величина задана таблицей распределения. Изобразить многоугольник распределения, найти и изобразить функцию распределения данной случайной величины. С помощью функции распределения найти следующие вероятности $P(a \le \xi < b)$, $P(a \le \xi \le b)$, $P(c < \xi < d)$, $P(c < \xi \le d)$. Найти числовые характеристики случайной величины.

Вар. 1	ξ	-5	-2	1	4	9	a	b	c	d
	p_i	0.10	0.12	0.13	0.20	?	-2	9	1	11
Вар. 2	ξ	-3	0	2	5	9	a	b	c	d
	p_i	0.10	?	0.20	0.25	0.32	0	15	-3	2
Вар. 3	ξ	-4	-1	3	8	10	a	b	c	d
	p_i	?	0.12	0.21	0.37	0.23	-1	5	-4	10
Вар. 4	ξ	-2	1	4	7	10	a	b	c	d
	p_i	0.11	0.22	?	0.15	0.30	-2	10	4	16
Вар. 5	ξ	-6	-4	-1	2	5	a	b	c	d
	p_i	0.14	0.15	0.21	?	0.30	-4	2	-3	5
Вар. 6	ξ	-7	-3	1	4	6	a	b	c	d
	p_i	?	0.20	0.14	0.31	0.21	-9	4	-1	10
Вар. 7	ξ	-9	-6	-2	1	4	a	b	c	d
	p_i	0.25	0.10	0.03	0.14	?	-6	0	-9	3
Вар. 8	ξ	-8	-5	-1	2	5	a	b	c	d
	p_i	0.05	0.19	?	0.23	0.30	-10	2	-5	4
Вар. 9	ξ	1	2	4	9	12	a	b	c	d
	p_i	?	0.21	0.11	0.19	0.30	1	9	3	12
Вар. 10	ξ	-1	2	5	10	14	a	b	c	d
	p_i	0.50	0.03	0.09	0.23	?	-1	12	2	15
Вар. 11	ξ	2	5	8	13	16	a	b	c	d
	p_i	0.15	0.21	0.30	0.20	?	1	13	5	15
Вар. 12	ξ	-3	1	4	8	11	a	b	c	d
	p_i	?	0.19	0.21	0.20	0.31	-3	8	1	15
Вар. 13	ξ	3	7	10	16	20	a	b	c	d
	p_i	0.25	0.30	0.15	?	0.10	0	14	7	19
Вар. 14	ξ	-2	1	4	9	11	a	b	c	d
	p_i	0.14	0.20	?	0.30	0.25	-2	9	1	10
Вар.	ξ	4	7	11	17	20	a	b	c	d

15	p_i	0.30	?	0.15	0.10	0.15	1	11	4	19
Вар. 16	ξ	-3	1	4	9	11	a	b	c	d
	p_i	0.34	0.20	0.14	0.16	?	-3	9	2	14
Вар. 17	ξ	4	7	10	13	16	a	b	c	d
	p_i	?	0.14	0.21	0.31	0.23	5	16	7	20
Вар. 18	ξ	-2	3	6	10	14	a	b	c	d
	p_i	0.31	?	0.31	0.09	0.15	-1	6	3	12
Вар. 19	ξ	5	8	12	16	20	a	b	c	d
	p_i	0.08	0.18	?	0.25	0.30	5	17	12	23
Вар. 20	ξ	-4	-1	3	8	13	a	b	c	d
	p_i	0.10	0.25	0.30	?	0.30	-3	3	3	10
Вар. 21	ξ	6	10	14	19	22	a	b	c	d
	p_i	0.11	0.31	0.15	0.27	?	5	19	14	22
Вар. 22	ξ	-6	-1	5	9	13	a	b	c	d
	p_i	0.12	0.15	0.40	?	0.10	-6	5	5	10
Вар. 23	ξ	7	10	17	21	25	a	b	c	d
	p_i	0.10	0.07	?	0.30	0.25	6	17	10	28
Вар. 24	ξ	-8	-4	1	4	7	a	b	c	d
	p_i	?	0.20	0.31	0.31	0.10	0	7	-4	10
Вар. 25	ξ	3	6	11	16	21	a	b	c	d
	p_i	0.10	?	0.25	0.30	0.30	3	16	6	26
Вар. 26	ξ	- 3	- 1	2	4	5	a	b	c	d
	p_i	0.3	0.1	?	0.2	0.1	- 2	5	2	6

Дискретная случайная величина задана таблицей распределения. Изобразить многоугольник распределения, найти и изобразить функцию распределения данной случайной величины. С помощью функции распределения найти следующие вероятности $P(a \le \xi < b)$, $P(a \le \xi \le b)$, $P(c < \xi < d)$, $P(c < \xi \le d)$. Найти числовые характеристики случайной величины.

13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

13_СлучВел_1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для данного стрелка равна 0,8. Стрелок производит 3 выстрела. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа попаданий в цель. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для данного стрелка равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа попаданий в цель при четырёх выстрелах. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_3. Игральная кость брошена 3 раза. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа появлений шестерки. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_4. Игральная кость брошена четыре раза. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа появлений двойки. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_5. Игральная кость брошена 5 раз. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа появлений тройки. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_6. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа появлений события А в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6. Найти максимальное ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_7. Монета бросается 3 раза. Составить закон распределения случайно величины ξ - числа появлений герба. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_8. Монета бросается два раза. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа появлений герба. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_9. Монета бросается 4 раза. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа появлений герба. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_10. Монета бросается 5 раз. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа появлений герба. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_11. Монета бросается 6 раз. Составить закон распределения случайной величины ξ -числа появлений герба. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_12. Производится 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа попаданий в мишень. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_13. По мишени ведутся выстрелы до первого попадания или до израсходования всех патронов. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при отдельном выстреле равна 0.4, а число имеющихся патронов 3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_14. По мишени ведутся выстрелы до первого попадания или до израсходованиия всех патронов. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле 0,6, а число имеющихся патронов 4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_15. По мишени ведутся выстрелы до первого попадания или до израсходования всех патронов. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле 0,8, а число имеющихся патронов 5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_16. По мишени ведутся выстрелы до первого попадания или до израсходования всех патронов. Составить закон распределения случайной вели чины ξ - числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле 0,4, а число имеющихся патронов 5. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_17. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,5. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа попаданий в мишень при 5 выстрелах. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_18. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа появлений события A в 4 независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_19. Составить закон распределения случайной величины - числа появлений события ***A*** в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_20. Составить затон распределения случайной величины ξ - числа появлений события ***A*** в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_21. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа нестандартных деталей среди трех отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_22. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа нестандартных деталей среди четырёх отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_23. В партии из 8 деталей имеются 6 стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа стандартных деталей среди трёх отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_24. В партии из 8 деталей имеются 6 стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа стандартных деталей среди трёх отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_25. В партии из 6 деталей имеются 4 стандартные. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа стандартных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_26. При установившемся технологическом процессе $2/3$ всей продукции станок-автомат выпускает первым сортом и $1/3$ - вторым сортом. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа изделий первого сорта среди 5 штук, отобранных случайным образом. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой величины.

13_СлучВел_27. Каждый из трех стрелков стреляет по мишени один раз. Вероятность того, что первый, второй и третий стрелки попадут при одном выстреле в мишень, соответственно равны p_1, p_2, p_3. Пусть случайная величина ξ — общее число попаданий в мишень. Найти закон её распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

13_СлучВел_28. По цели производится стрельба независимыми выстрелами до первого попадания. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, причём производится не более пяти выстрелов. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа произведенных выстрелов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

13_СлучВел_29. На пути следования автомобиля находятся 4 светофора. Каждый из них пропускает автомобиль с вероятностью 0.7. Составить закон распределения случайной величины ξ - количества светофоров, пройденных до первой остановки. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

13_СлучВел_30. Вероятность брака в партии изделий некоторого завода равна 0.02. Контролер последовательно проверяет по одному изделию и при появлении первого бракованного бракует всю партию. Всего он проверяет не более четырех изделий. Составить закон распределения случайной величины ξ - количества изделий, проверенных контролером. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

13_СлучВел_31. В группе из десяти изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое вынутое изделие проверяют. Пусть ξ — число проверенных изделий (включая бракованное). Составить закон распределения случайной величины ξ. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

14. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА МОЖЕТ ПРИНИМАТЬ ТОЛЬКО ДВА ЗНАЧЕНИЯ…

Дискретная случайная величина ξ может принимать только два значения x_1, x_2 $\left(x_1 < x_2\right)$, первое из них с известной вероятностью p_1. Найти закон распределения случайной величины, если известны её математическое ожидание и дисперсия.

Вариант	p_1	$M(\xi)$	$D(\xi)$	**Вариант**	p_1	$M(\xi)$	$D(\xi)$
1	0,5	3,5	0,25	**14**	0.9	1,3	0,81
2	0.5	3	4	**15**	0.8	1.2	0.16
3	0.1	1.9	0.09	**16**	0.8	1.4	0.64
4	0.2	2.6	0.64	**17**	0.8	1.6	1.44
5	0.5	5.5	0.25	**18**	0.8	1.8	2.56
6	0.2	1.8	0.16	**19**	0.8	2	4
7	0.2	2.8	0.16	**20**	0.6	1.4	0.24
8	0.1	2.8	0.36	***21***	0.6	1.8	0.96
9	0.4	2,2	0,96	**22**	0,6	2,2	2.16
10	0.5	2.5	2.25	**23**	0.6	2.6	3.84
11	0.9	1.4	1.44	**24**	0.5	1.5	0.25
12	0.9	1.1	0.09	**25**	0.5	2	1.0
13	0,9	1,2	0,36	**26**	0.2	4.6	0.64

15. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА ОПРЕДЕЛЕНА ПЛОТНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{C}\dfrac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}(x-x_1), & x_1<x<x_2, \\ 0, & x<x_1,\, x>x_2, \end{cases}$$

где C – постоянная, а $y_1>0, y_2>0$.

А) Найти значение постоянной C так, чтобы функция $f(x)$ могла быть плотностью распределения (плотностью вероятностей) некоторой непрерывной случайной величины ξ. Построить график плотности распределения.

Б) Найти функцию распределения случайной величины ξ, построить её график.

В) Найти вероятности попадания значений случайной величины ξ в интервалы с концами a,b и c,d (интервалы $<a,b>$ и $<c,d>$) двумя способами: а) с помощью функции распределения; б) с помощью плотности распределения.

Г) Найти числовые характеристики случайной величины ξ.

ВАР	x_1	x_2	y_1	y_2	a	b	c	d	ВАР	x_1	x_2	y_1	y_2	a	b	c	d
1	-4	8	5	9	-2	9	1	11	14	-4	12	20	32	-2	9	1	10
2	-5	10	11	15	0	15	-4	10	15	2	20	10	19	1	11	4	19
3	-10	8	17	28	-1	5	-4	10	16	-3	8	14	22	-3	9	2	15
4	1	7	1	6	-2	10	4	16	17	1	10	2	13	5	16	7	20
5	-6	10	12	19	-4	2	-3	5	18	-3	10	7	20	-1	6	3	12
6	-7	5	4	9	-9	4	-1	10	19	6	20	22	30	5	17	12	23
7	-10	5	16	27	-6	0	-9	3	20	0	10	3	12	-3	3	4	10
8	-10	10	13	22	-10	2	-5	4	21	7	20	15	23	5	19	14	22
9	1	10	21	30	1	9	3	12	22	-9	5	23	33	-6	5	4	10
10	0	15	6	15	-1	12	2	15	23	10	20	8	17	6	17	10	28
11	0	17	24	32	1	13	5	15	24	-5	6	9	20	0	7	-4	10
12	-5	10	9	17	-3	8	1	15	25	3	16	7	10	0	14	10	18
13	-1	16	18	25	0	14	7	19	26	-5	12	8	17	-3	9	-7	10

16. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА ОПРЕДЕЛЕНА ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Задана функция распределения некоторой непрерывной случайной величины.

а) Найти значения параметров a и b.

б) Построить график функции распределения.

в) Найти плотность распределения случайной величины и построить её график.

г) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

1. $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 3\pi/4, \\ a\cos 2x+b, & \text{если} \quad 3\pi/4<x<\pi, \\ 1, & \text{если} \quad x\ge \pi. \end{cases}$$

2. $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 1, \\ a\left(x^2-x\right)+b, & \text{если} \quad 1<x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$$

3. $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le -\pi/2, \\ a\cos x+b, & \text{если} \quad -\pi/2<x\le 0, \\ 1, & \text{если} \quad x>0. \end{cases}$$

4. $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0, \\ ax^2+b, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$$

5. $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0, \\ ax^2+2x+b, & \text{если} \quad 0<x\le 1/3, \\ 1, & \text{если} \quad x>1/3. \end{cases}$$

6. $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0, \\ a\sin x+b, & \text{если} \quad 0<x\le \pi/6, \\ 1, & \text{если} \quad x>\pi/6. \end{cases}$$

7. $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0, \\ a\sin 2x+b, & \text{если} \quad 0<x\le \pi/4, \\ 1, & \text{если} \quad x>\pi/4. \end{cases}$$

8. $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0, \\ 3x^2+ax+b, & \text{если} \quad 0<x\le 1/3, \\ 1, & \text{если} \quad x>1/3. \end{cases}$$

9. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ a\sin 3x+b, & \text{если} \quad 0<x\le \pi/6, \\ 1, & \text{если} \quad x>\pi/6. \end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 1, \\ a(x-1)^2+b, & \text{если} \quad 1<x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ ax^4+b, & \text{если} \quad 0<x\le 1, \\ 1, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ ax^2+b, & \text{если} \quad 0<x\le 4, \\ 1, & \text{если} \quad x>4. \end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ a(1-\cos 3x)+b, & \text{если} \quad 0<x\le \pi/3, \\ 1, & \text{если} \quad x>\pi/3. \end{cases}$

14. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ ax^2+b, & \text{если} \quad 0<x\le 9, \\ 1, & \text{если} \quad x>9. \end{cases}$

15. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ a(x^2+x)+b, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ a\sin x+b, & \text{если} \quad 0<x\le \pi/6, \\ 1, & \text{если} \quad x>\pi/6. \end{cases}$

17. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ ax^4+b, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$

18. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -\pi/2, \\ a(\sin x+1)+b, & \text{если} \quad -\pi/2<x\le \pi/2, \\ 1, & \text{если} \quad x>\pi/2. \end{cases}$

19. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ x^3+ax+b, & \text{если} \quad 0<x\le 1, \\ 1, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$

20. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0, \\ a(1-\cos 2x)+b, & \text{если} \quad 0<x\le \pi/2, \\ 1, & \text{если} \quad x>\pi/2. \end{cases}$

21. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0, \\ ax^3+b, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$

22. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 3\pi/2, \\ a\cos x+b, & \text{если} \quad 3\pi/2<x\le 2\pi, \\ 1, & \text{если} \quad x>2\pi. \end{cases}$

23. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le -1, \\ ax^3+b, & \text{если} \quad -1<x\le 1, \\ 1, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$

24. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le -1, \\ a+b\arcsin x, & \text{если} \quad -1<x\le 1, \\ 1, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$

25. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le -\pi/4, \\ a\cos 2x+b, & \text{если} \quad -\pi/4<x\le -\pi/6, \\ 1, & \text{если} \quad x>-\pi/6. \end{cases}$

26. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le -3, \\ a+b\arcsin\dfrac{x}{3}, & \text{если} \quad -3<x\le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$

17. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Известны математическое ожидание a и среднеквадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины ξ . Найти: 1) вероятность того, что в результате испытания случайная величина попадет в интервалы (α,β), $(a-\sigma,a+\sigma)$, $(a-4\sigma,a+4\sigma)$; 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения ξ - a случайной величины от её математического ожидания меньше положительного числа δ ; 3) вероятность попадания случайной величины на интервал $(a-3\sigma,a+3\sigma)$ (проверить выполнение "правила трёх сигм")

Вариант 1	a = 13	σ = 7	α = 8	β = II	δ = 2
Вариант 2	a = 12	σ = 3	α = 7	β = 13	δ = 5
Вариант 3	a = 9	σ = 5	α = 3	β = 10	δ = 6
Вариант 4	a = 8	σ = 9	α = 10	β = 16	δ = 10
Вариант 5	a = 14	σ = 8	α = 4	β = 18	δ = 8
Вариант 6	a = 3	σ = 10	α = 2	β = 12	δ = 16
Вариант 7	a = 7	σ = 10	α = 14	β = 19	δ = 12
Вариант 8	a = 5	σ = 6	α = 12	β = 16	δ = 12
Вариант 9	a = 4	σ = II	α = 16	β = 23	δ = 24
Вариант 10	a = 6	σ = 13	α = 15	β = 26	δ = 8
Вариант 11	a = 10	σ = 4	α = 2	β = 13	δ = 6
Вариант 12	a = 9	σ = 5	α = 5	β = 14	δ = 6
Вариант 13	a = 8	σ = 2	α = 4	β = 9	δ = 3

Вариант 14	$a = -7$	$\sigma = 2$	$\alpha = 3$	$\beta = 10$	$\delta = \mathrm{I}$
Вариант 15	$a = 6$	$\sigma = 3$	$\alpha = 2$	$\beta = \mathrm{II}$	$\delta = 5$
Вариант 16	$a = 5$	$\sigma = 4$	$\alpha = 2$	$\beta = 12$	$\delta = 3$
Вариант 17	$a = 4$	$\sigma = 5$	$\alpha = 2$	$\beta = \mathrm{II}$	$\delta = 7$
Вариант 18	$a = 3$	$\sigma = 2$	$\alpha = 3$	$\beta = 6$	$\delta = 3$
Вариант 19	$a = 2$	$\sigma = 5$	$\alpha = 4$	$\beta = 9$	$\delta = 9$
Вариант 20	$a = 2$	$\sigma = 4$	$\alpha = 6$	$\beta = 10$	$\delta = 5$
Вариант 21	$a = 15$	$\sigma = 2$	$\alpha = 12$	$\beta = 19$	$\delta = 3$
Вариант 22	$a = 14$	$\sigma = 4$	$\alpha = 10$	$\beta = 20$	$\delta = 8$
Вариант 23	$a = 13$	$\sigma = 6$	$\alpha = \mathrm{II}$	$\beta = 21$	$\delta = 8$
Вариант 24	$a = 12$	$\sigma = 5$	$\alpha = 12$	$\beta = 22$	$\delta = 12$
Вариант 25	$a = \mathrm{II}$	$\sigma = 8$	$\alpha = 13$	$\beta = 23$	$\delta = 6$

18. ЗАДАЧИ НА НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

18_Нормал_1. Результаты измерения расстояния ξ между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением $a = 16\ км, \sigma = 100\ м$ соответственно. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не меньше 15,8 км.

18_Нормал_2. Результаты ξ измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами: $a = 20\ км$, $\sigma = 300\ м$. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не более 16,5 км.

18_Нормал_3. Рост взрослого мужчины ξ является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть ее математическое ожидание равно 170 см, а дисперсия – 36 см^2. Вычислить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных четырех мужчин будет иметь рост от 168 см до 172 см.

18_Нормал_4. Диаметр ξ детали, изготовленной заводом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Дисперсия ее равна 0,0001см^2, а математическое ожидание - 2,5 см. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9973 заключен диаметр наудачу взятой детали.

18_Нормал_5. Рост взрослой женщины ξ является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами: $a = 164\ см, \sigma = 5{,}5\ см$. Найти вероятность того, что одна **из** наудачу выбранных трех женщин имеет рост от 153 см до 175 см.

18_Нормал_6. Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок, случайные ошибки измерения ξ подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 5\ мм.$. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 7 мм**.**

18_Нормал_7. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания ξ подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 10$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 5 г.

18_Нормал_8. Автомат штампует детали. Деталь считается годной, если отклонение ξ ее длины от проектной не превышает 0,9 мм**.** Считая, что случайная величина ξ распределена нормально со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}5$ мм, найти, сколько в среднем будет годных деталей среди ста изготовленных.

18_Нормал_9. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 12 **мм.** Случайные отклонения ξ размера от проектного подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм. Какова вероятность изготовления годной детали автоматом ?

18_Нормал_10. Случайная величина ξ распределена нормально с математическим ожиданием $a = 20$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9544 попадет величина ξ в результате испытания.

18_Нормал_11. Случайная величина ξ распределена нормально со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,6826 попадет ξ в результате испытания.

18_Нормал_12. Станок-автомат изготовляет шарики, причем контролируется **их** диаметр ξ. Считая, что ξ - нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $a = 6$ мм и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}1$ мм, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных шариков.

18_Нормал_13. Размер ξ диаметра детали, выпускаемой цехом, распределяется по нормальному закону с параметрами: $a = 5$ см, $\sigma^2 = 0{,}81$ см^2. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более, чем на 2 см.

18_Нормал_14. Результаты измерения ξ расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами $a = 200\ км, \sigma = 500\ м$. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не меньше 199 км.

18_Нормал_15. Результаты измерения ξ расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами $a = 100\ км, \sigma = 200\ м$. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не более 100,4 км.

18_Нормал_16. Рост взрослого мужчины ξ является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 174\ см, \sigma = 6\ см$. Вычислить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных 6 мужчин будет иметь рост от 168 см до 180 см.

18_Нормал_17. Рост взрослого мужчины ξ является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть ее математическое ожидание равно 174 см, а дисперсия – 64 см^2. Вычислить вероятность того, что один из двух наудачу выбранных мужчин будет иметь рост от 170 см до 178 см.

18_Нормал_18. Длина ξ некоторой детали, изготовленной заводом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Математическое ожидание ее равно 20 см, а дисперсия - 0,01 см^2. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 заключена длина наудачу взятой детали.

18_Нормал_19. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки ξ взвешивания подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 50$ мг. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 мг.

18_Нормал_20. Вес карпа ξ, вылавливаемого из колхозного пруда, подчинен нормальному закону с параметрами $a = 1200\ г, \sigma = 50\ г$. Найти вероятность того, что вес первого карпа, пойманного на удочку в этом пруду, не будет превышать 1250 г.

18_Нормал_21. Вес ξ клубней картофеля, подготовленного для посадки; подчинен нормальному закону с параметрами $a = 60\ г, \sigma = 5\ г$. Найти вероятность того, что вес наудачу взятого клубня будет не меньше 55 г.

18_Нормал_22. Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $a = 45, \sigma = 2$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,4844 попадет ξ в результате испытания.

18_Нормал_23. Случайная величина ξ распределена нормально с математическим ожиданием $a = 24$. Вероятность попадания ξ в интервал [24, ЗО] равна 0,3. Чему равна вероятность попадания ξ в интервал [18, ЗО]?

18_Нормал_24. Стрельба ведется из орудия вдоль некоторой прямой. Средняя дальность полета снаряда равна 1200 м. Предполагая, что дальность полета ξ распределена по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 40 **м,** найти, какой процент выпускаемых снарядов даст перелет от 50 до 70 м.

18_Нормал_25. На станке изготовляется некоторая деталь. Ее длина ξ является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 20 см и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}2$ см. Какой процент деталей, изготовленных на этом станке, будет иметь длину, отличающуюся от средней не более чем на 0,3 см?

18_Нормал_26. Ошибка измерения подчинена нормальному закону. Математическое ожидание этой ошибки равно 5 *м,* а среднеквадратическое отклонение 10 *м.* Найти вероятность того, что измеренное значение дальности будет отклоняться от истинного не более, чем на 15 *м.*

18_Нормал_27. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением σ = 0,8. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

18_Нормал_28. Результаты ξ измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчиняются нормальному закону распределения с параметрами $M[\xi]=a=16$ км и $\sigma[\xi]=\sigma=100$ м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не менее 16,3 км и не более 17,75 км.

18_Нормал_29. Случайная величина ξ распределена нормально. $\sigma[\xi]=0{,}4$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

18_Нормал_30. Валики, изготовляемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения ξ диаметра подчиняются нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 1,6 мм и математическим ожиданием, равным нулю. Сколько процентов стандартной продукции изготовляет автомат?

18_Нормал_31. Рост ξ взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 170 см, а дисперсия 36 см^2. Вычислить вероятность того, что хотя бы один из наугад выбранных четырех мужчин будет иметь рост от 168 см до 172 см.

18_Нормал_32. Рост ξ взрослой женщины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Ее математическое ожидание равно 164 см, а среднеквадратичное отклонение - 5,5 см. Найти плотность вероятности этой случайной величины и вычислить вероятность того, что хотя ба одна из пяти взятых наудачу женщин имеет рост в пределах 163 - 165 см.

18_Нормал_33. Известно, что в некоторой местности средний рост взрослых мужчин a =170 см, а σ = 10 см. Какова вероятность того, что рост ξ наудачу выбранного мужчины этой местности попадет в промежуток между 165 см и 180 см?

18_Нормал_34. Установлено, что диаметр ξ изготовляемых поршней является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением, равным 4 дюймам, и дисперсией, равной $9 \cdot 10^{-6}$. Поршни с диаметром более 4,006 и менее 3,994 дюйма являются браком. Каков при этих условиях процент брака в изготовляемых партиях?

18_Нормал_35. Результаты измерения расстояния ξ между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами: $M[\xi] = a = 20$ км и $\sigma[\xi] = \sigma = 200$ м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами но менее 19,65 км и не более 22,3 км.

18_Нормал_36. Процент содержания золы в угле является нормально распределенной случайной величиной ξ с математическим ожиданием, равным 16% и среднеквадратическим отклонением, равным 4*%.* Определить вероятность того, что в наудачу взятой пробе угля будет от 12% до 24% золы.

18_Нормал_37. Считается, что отклонение ξ длины изготовленных деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина m = 40 см, а среднеквадратическое отклонение равно $\sigma = 0{,}4$ см, то какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью 0,95?

18_Нормал_38. Предполагается, что предел прочности выпускаемой партии стальной проволоки диаметром 1,4 мм является нормально распределенной случайной величиной ξ с математическим ожиданием a =160 кг/мм^2 и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 8$ кг/мм^2. Требуется: а) найти дифференциальную и интегральную функции распределения этой случайной величины; б)определить, какое предельное отклонение в ту или другую сторону предела прочности испытываемого образца проволоки от математического ожидания можно гарантировать с вероятностью 0,9901.

18_Нормал_39. Детали, выпускаемые цехом, по размеру ξ диаметра распределяются по нормальному закону с параметрами $M[\xi] = a = 5$ см и $D[\xi] = 0{,}81$ см^2. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали: а) от4 см до 7 см, б) отличается от математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на 2 мм.

18_Нормал_40. Предполагается, что длина ξ болтов, изготавливаемых на автоматическом станке, является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 5,6 см. Вероятность того, что наудачу взятый болт имеет размер от 5,55 до 5,65 см, равна 0,9545. Чему равна вероятность того, что размер наудачу взятого болта будет от 5,60 до 5,75 см?

18_Нормал_41. Случайная величина ξ , распределенная по нормальному закону, представляет собой ошибку измерения некоторого расстояния. При измерении допускается систематическая ошибка на 1,2 м (в сторону завышения). Среднеквадратичное отклонение ошибки измерения равно 0,6 м. Найти вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 1,6 м.

18_Нормал_42. Случайные ошибки измерения ξ подчинены нормальное закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 1$ мм и математическим ожиданием, равным нулю. Найти вероятность того, что из двух независимых наблюдений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 1,28 мм.

18_Нормал_43. Среднеквадратичное отклонение случайной величины ξ, распределенной по нормальному закону, равно 2 см. Найти, в каких границах следует ожидать значение случайной величины, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95, если математическое ожидание ее равно 20 см.

18_Нормал_44. Для величины ξ, распределенной по нормальному закону, найти вероятность того, что $|\xi| > 2\sigma$, если $M[\xi] = 0$.

18_Нормал_45. Случайная величина ξ подчинена нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю. Вероятность попадания этой случайной величины на промежуток $(-2{,}2)$ равна 0,5. Найти среднеквадратичное отклонение и написать дифференциальную функцию распределения [плотность распределения] .

18_Нормал_46. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ξ ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения ξ контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм и математическим ожиданием, равным нулю. Сколько процентов годных деталей изготовляет автомат?

18_Нормал_47. Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки ξ измерения подчинены нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $D[\xi] = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

18_Нормал_48. Стрельба ведется из точки 0 вдоль прямой OX. Средняя дальность полета снаряда равна m. Предполагая, что дальность полета ξ распределена по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 60$ м, найти, какой процент выпускаемых снарядов дает перелет от 120 м до 160 м.

18_Нормал_49. Какой ширины должно быть поле допуска, чтобы с вероятностью не более 0,0027 получалась деталь с контролируемым размером вне поля допуска, если случайные отклонения ξ размера от середины поля допуска подчиняются закону нормального распределения с параметрами: $M[\xi] = 0$ мм и $\sigma[\xi] = 5$ мм?

18_Нормал_50. Изделие считается высшего качества, если отклонение ξ его размеров от номинала не превосходит по абсолютной величине 4,45мм. Случайные отклонения размера изделия от номинала подчиняются нормальному закону со среднеквадратическим отклонением, равным 3 мм, а систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества, если изготавливаются четыре изделия.

18_Нормал_51. Измерительный прибор имеет срединную ошибку (вероятное отклонение)[1] 25 *м.* Систематические ошибки отсутствуют. Сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 ошибка хотя бы одного из них превосходила по абсолютной величине 5 м?

18_Нормал_52. Ошибка радиодальномера подчинена нормальному закону. Систематической ошибки радиодальномер не дает. Какова должна быть срединная ошибка (вероятное отклонение)[2], чтобы с вероятностью не меньшей 0,95 можно было бы ожидать, что измеренное значение дальности будет отклоняться от истинного не более, чем на 20 *м?* (Гурск., стр. 101)

18_Нормал_53. Измерительный прибор имеет срединную ошибку (вероятное отклонение)[3] 25 *м.* Систематические ошибки отсутствуют. Сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 ошибка хотя бы одного из них превосходила по абсолютной величине 5 м? (Гурск., стр. 101)

18_Нормал_54. Стрельба ведется из орудия вдоль некоторой прямой. Средняя дальность полета снаряда равна 1200 м. Предполагая, что дальность полета ξ распределена по нормальному закону со среднеквадратическим от-

---

[1] Срединной ошибкой (вероятным отклонением) $E = E_\xi$ случайной величины ξ называется половина длины участка, симметричного относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна половине, то есть $P\left(m_\xi - E_\xi < \xi < m_\xi + E_\xi\right) = P\left(\left|\xi - m_\xi\right| < E_\xi\right) = 0.5$. Для случая нормального распределения $P\left(a - E < \xi < a + E\right) = P\left(\left|\xi - a\right| < E\right) = 0.5$

[2] См. сноску 1

[3] См. сноску 1

клонением 40 **м,** найти, какой процент выпускаемых снарядов даст перелет от 50 до 70 м.

18_Нормал_55. На станке изготовляется некоторая деталь. Ее длина ξ является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 20 см и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}2$ см. Какой процент деталей, изготовленных на этом станке, будет иметь длину, отличающуюся от средней не более чем на 0,3 см?

19. СУММА И ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Две независимые дискретные случайные величины заданы своими таблицами распределения.

а) Найти законы распределения (таблицы и функции распределения) суммы и произведения этих случайных величин.

б) Найти математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения суммы и произведения заданных случайных величин: непосредственно и, если это возможно, с помощью свойств математического ожидания и дисперсии.

1	ξ	-4	-3	0	2	η	-2	1	3	**2**	ξ	-2	0	1	η	0	1	3	4
	p_i	0.1	0.4	?	0.3	q_j	0.6	0.1	?		p_i	0.3	0.1	?	q_j	0.2	?	0.4	0.3
3	ξ	-3	-1	1	3	η	-2	0	2	**4**	ξ	-2	-1	3	η	-1	0	5	7
	p_i	0.2	0.3	?	0.1	q_j	0.3	0.1	?		p_i	0.6	0.1	?	q_j	0.1	?	0.3	0.4
5	ξ	-1	2	5	7	η	-1	-2	3	**6**	ξ	-2	3	5	η	0	2	3	5
	p_i	0.3	?	0.2	0.4	q_j	0.5	0.3	?		p_i	0.5	?	0.3	q_j	?	0.2	0.1	0.3
7	ξ	-2	0	1	3	η	-1	1	3	**8**	ξ	-2	0	3	η	-1	-2	5	7
	p_i	0.1	?	0.2	0.4	q_j	0.4	?	0.1		p_i	0.4	0.4	?	q_j	0.3	?	0.2	0.4
9	ξ	-1	2	3	5	η	2	3	6	**10**	ξ	2	5	8	η	-2	1	2	4
	p_i	0.2	?	0.3	0.4	q_j	0.5	?	0.4		p_i	0.5	0.4	?	q_j	0.2	?	0.3	0.1
11	ξ	1	2	5	7	η	-1	0	1	**12**	ξ	1	2	3	η	0	1	4	8
	p_i	0.2	?	0.3	0.4	q_j	0.5	0.1	?		p_i	0.4	0.5	?	q_j	0.2	0.1	?	0.4
13	ξ	0	1	3	5	η	0	1	3	**14**	ξ	-5	-3	2	η	-3	-2	3	5
	p_i	0.2	?	0.3	0.4	q_j	?	0.1	0.7		p_i	0.2	0.5	?	q_j	0.4	?	0.2	0.3
15	ξ	0	1	2	4	η	-1	2	5	**16**	ξ	0	2	4	η	-4	-1	0	2
	p_i	?	0.2	0.3	0.4	q_j	0.4	?	0.1		p_i	0.5	0.2	?	q_j	0.1	0.2	?	0.3
17	ξ	1	2	5	7	η	2	6	9	**18**	ξ	2	4	5	η	1	3	5	7
	p_i	0.1	0.6	0.1	?	q_j	0.2	0.3	?		p_i	0.4	?	0.1	q_j	0.1	0.2	?	0.4
19	ξ	0	1	3	5	η	-1	2	5	**20**	ξ	0	1	3	η	0	1	2	4
	p_i	0.2	0.1	?	0.3	q_j	0.4	0.5	?		p_i	0.5	0.3	?	q_j	0.1	0.6	0.1	?
21	ξ	0	1	2	3	η	1	2	3	**22**	ξ	2	6	10	η	1	3	4	5
	p_i	?	0.3	0.1	0.4	q_j	0.5	0.2	?		p_i	0.5	0.1	?	q_j	0.2	?	0.3	0.4
23	ξ	-2	0	1	3	η	0	1	2	**24**	ξ	1	2	3	η	-2	0	1	3
	p_i	0.1	?	0.3	0.1	q_j	0.2	0.5	?		p_i	?	0.1	0.7	q_j	0.1	?	0.3	0.1
25	ξ	1	3	4	6	η	0	2	4	**26**	ξ	-1	0	1	η	0	1	2	3
	p_i	0.3	0.2	?	0.4	q_j	0.4	?	0.4		p_i	0.2	0.3	?	q_j	?	0.2	0.3	0.4

20. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЁВА[1]

20_Чебыш_1. Дисперсия каждой из 3000 независимых случайных величин не превышает числа 6. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий меньше 0,3.

20_Чебыш_2. Суточный расход воды в населенном пункте является случайной величиной, среднеквадратическое отклонение которой равно 10 000 л. Оценить с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение суток отклонится от математического ожидания не менее, чем на 25 000 л (по абсолютной величине).

20_Чебыш_3. Вероятность наступления некоторого события *A* в каждом испытании равна 0,3. Оценить с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что относительная частота события отклонится от его вероятности менее, чем на 0,01 (по абсолютной величине), если предполагается произвести 9000 испытаний.

20_Чебыш_4. Дисперсия каждой из 2000 независимых случайных величин не превышает числа 5. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий меньше 0.4.

20_Чебыш_5. Среднеквадратическое отклонение ошибки измерения курса самолета $\sigma =$ = 2º. Считая математическое ожидание ошибки измерения равным нулю, оценить вероятность того, что ошибка при данном измерении курса будет не менее 5°.

20_Чебыш_6. Вероятность появления события *A* при одном опыте равна 0,3. Оценить с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, относительная частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах 0.2-0.4.

[1] Задачи этого раздела, несколько переработанные автором, взяты из пособия [7].

20_Чебыш_7. Дисперсия каждой из 4000 независимых случайных величин не больше 5. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится от среднего арифметического их математических ожиданий менее, чем на 0,04.

20_Чебыш_8. Вероятность наступления события в каждом испытании равна 0,3. Применяя неравенство Чебышёва, найти число испытаний, необходимых для того, чтобы вероятность отклонения относительной частоты события от его вероятности по абсолютной величине меньше, чем на 0,01, была бы не меньше 0,99.

20_Чебыш_9. Длина изготавливаемых изделий представляет случайную величину, среднее значение которой равно 30 см. Дисперсия этой величины равна 0,0225. Применяя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что отклонение длины изготавливаемого изделия от ее среднего значения по абсолютной величине менее 0,5 см.

20_Чебыш_10. Вероятность вызревания кукурузного стебля с тремя початками 0,75. Оценить с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что среди 3000 стеблей доля (относительная частота) с тремя початками будет по абсолютной величине отличаться от вероятности вызревания стебля менее, чем на 0.02.

20_Чебыш_11. Дисперсия каждой из попарно независимых случайных величин не превышает 10. Требуется оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического 1600 этих величин от среднего арифметического их математических ожиданий меньше 0,25.

20_Чебыш_12. В урне 100 белых и 100 черных шаров. Вынули (с возвращением) 50 шаров. Оценить с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что количество белых шаров из числа вынутых удовлетворяет неравенству $15 < m < 35$.

20_Чебыш_13. Пусть вероятность того, что выпущенный экземпляр часов имеет точность хода в пределах стандарта, равна 0,97. Применяя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что среди имеющихся 1000 часов относительная частота стандартных часов отклонится (по абсолютной величине) от вероятности 0,97 менее, чем на 0,02.

20_Чебыш_14. Длина изготовляемых стержней представляет случайную величину, среднее значение которой равно 90 см. Дисперсия этой величины равна 0,0225. Применяя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что длина стержня выразится числом, заключенным между 89,7 см и 90,3 см.

20_Чебыш_15. Среднеквадратичное отклонение каждой из 2134 независимых случайных величин не превосходит 4. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий менее 0,5.

20_Чебыш_16. Вероятность появления события A в одном опыте равна 0,5. Применяя неравенство Чебышёва, выяснить, можно ли с вероятностью, большей 0,97, утверждать, что число появлений события A в 1000 независимых опытах будет в пределах от 400 до 600?

20_Чебыш_17. Случайная величина ξ имеет математическое ожидание, равное 1, и среднеквадратическое отклонение, равное 0,2. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность неравенства $0.5 < \xi < 1.5$.

20_Чебыш_18. Принимая для упрощения расчетов вероятность рождения мальчика равной 0.5, оценить с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что среди 1200 новорожденных детей мальчиков будет от 550 до 650.

20_Чебыш_19. Математическое ожидание скорости ветра на данной высоте равно 25 км/ч, а среднеквадратичное отклонение - 4,5 км/ч. Применяя неравенство Чебышёва, найти, какие скорости ветра можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,9?

20_Чебыш_20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 1000 испытаний равна 0,3. Оценить с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что отклонение числа наступлений этого события от математического ожидания будет по абсолютной величине меньше 50.

20_Чебыш_21. Суточная потребность в электроэнергии в населенном пункте является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 20 000 квт-час, а дисперсия составляет 2 000 (квт-час)^2. Применяя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что в ближайший день расход электроэнергии в этом населенном пункте будет от 19 600 до 20 400 квт-час.

20_Чебыш_22. Дисперсия каждой из 5000 независимых случайных величин не превосходит числа 20. Применяя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих величин от среднего арифметического их математических ожиданий менее 0.2.

20_Чебыш_23. Шестигранная кость бросается 10 000 раз. Применяя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что относительная частота появления шести очков отклоняется от вероятности появления этого события меньше, чем на 0,01.

20_Чебыш_24. Известно, что дисперсия каждой из данных независимых случайных величин не превышает 4. Применяя неравенство Чебышёва, найти такое число этих величин, при котором вероятность отклонения их средней арифметической от средней арифметической их математических ожиданий менее, чем на 0.25, превысит 0.99.

20_Чебыш_25. Вероятность некоторого события A в каждом из n независимых испытаний равна 1/3. Используя неравенство Чебышёва, найти наименьшее число испытаний, при котором с вероятностью, не меньшей 0,99, относительная частота события A отклонилась бы по абсолютной величине от его вероятности меньше, чем на 0,01.

20_Чебыш_26. Вероятность некоторого события A в каждом из 12100 независимых испытаний равна 1/3. Применяя неравенство Чебышёва, найти границу абсолютной величины отклонения относительной частоты события A от его вероятности, которую можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,99.

20_Чебыш_27. Дисперсия каждой из попарно независимых случайных величин не превышает 10. Применяя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического 16000 этих величин от среднего арифметического их математических ожиданий меньше 0,25.

20_Чебыш_28. При контрольной проверке изготовляемых приборов было установлено, что в среднем 20 штук из 100 изготовленных оказываются с теми или иными дефектами. Применяя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что среди 300 изготовленных приборов количество приборов с дефектами будет по абсолютной величине отличаться от его математического ожидания меньше, чем на 0,15.

20_Чебыш_29. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что в течение времени T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышёва, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп в течение времени T окажется: а) меньше трех; б) не менее трех.

20_Чебыш_30. Оценить с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что в партии из 10000 подшипников отклонение относительной частоты бракованных подшипников от вероятности 0,01 подшипнику быть бракованным не меньше, чем 0,003.

ОГЛАВЛЕНИЕ