

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Косолапов Ю.Ф.**

# **ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ**

Навчальний посібник

*Рекомендовано*

*Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
технічних спеціальностей вищих  
закладів освіти*

ДОНЕЦЬК - 2003

**Елементи теорії випадкових функцій.** Навчальний посібник /Косолапов Ю.Ф.  
– Донецьк: ДонНТУ, 2003, 236 с.

Розглядаються (переважно в прикладному аспекті) деякі питання кореляційної теорії випадкових функцій: характеристики випадкових функцій та лінійних операторів від них, зокрема диференціальних та інтегральних, стаціонарні випадкові функції й системи, спектральні розклади стаціонарних випадкових функцій з дискретним і неперервним спектрами, перетворення стаціонарної випадкової функції стійкою лінійною динамічною системою. Наводяться численні приклади відшукування характеристик випадкових функцій на виході динамічних систем першого й другого порядків. Особливої уваги надається проблемі визначення стаціонарних розв'язків для диференційовних і недиференційовних випадкових функцій на вході, в тому числі при проходженні через систему білого шуму. Пропонуються завдання для самостійного розв'язування.

Для викладачів та студентів ВЗО

Рецензенти: проф. Романюк А.С., проф. Задерей П.В. (Київ)

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України  
22 вересня 2000 року № 2/1495*

Косолапов Ю.Ф., 2003

ДонНТУ, 2003

## ВСТУП

Побутує думка, що випадкові функції, або випадкові процеси на достатньо ґрунтовному рівні можна вивчати тільки в рамках загальнонаукових університетів. Але наявність численних практичних застосувань (в теорії коливань механічних систем під дією випадкових чинників, теорії автоматичного керування тощо) спонукає викладачів технічних університетів шукати можливості давати студентам ті чи інші відомості з теорії, а особливо практики випадкових функцій. За ініціативою професора Бойка М.Г. майбутнім технологам машинобудування ДонНТУ вже декілька років викладаються елементи теорії випадкових функцій з неперервним часом, головним чином в рамках кореляційної теорії. Вивчаються нормальні випадкові функції, гармонічні коливання, телеграфні сигнали, пуассонівський, марківський та вінерівський процеси. Викладається теорія середньо квадратичної (с.к.) границі, необхідні й достатні умови с.к. неперервності, диференційовності та інтегровності випадкових функцій. Знаходяться характеристики похідних, інтегралів, лінійних диференціальних та інтегральних операторів від випадкових функцій. Розроблений апарат застосовується до вивчення дії динамічних систем.

Наступний посібник складено на основі кількарічного досвіду читання курсу "Елементи теорії випадкових функцій" студентам технологам машинобудування ДонНТУ.

Висловлюю щире подяку проф. Бойко М.Г. за замовлення курсу теорії випадкових функцій для студентів ДонНТУ, за допомогу, слушні методичні поради і надихання на створення на базі курсу цього посібника; завідувачу кафедри вищої математики проф. Носенко Ю.Л. за корисні зауваження, поради й допомогу в виданні посібника; ст. викладачеві Слов'янського державного педагогічного університету Косолаповій Н.В. за участь в перекладанні посібника на українську мову й редагуванні.

## РОЗДІЛ 1

# ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЗАКОНИ ЇХ РОЗПОДІЛУ

### 1.1. ВИПАДКОВА ФУНКЦІЯ

Випадковою називається функція, яка при кожному випробуванні набуває того чи іншого вигляду, заздалегідь невідомо, якого саме. Конкретний вигляд, якого набуває випадкова функція при даному випробуванні, називається її **реалізацією**, або ж **траєкторією**.

Необхідність розглядання випадкових функцій виникає при вивченні багатьох реально існуючих процесів: вібрація працюючих верстатів, нагрівання мастила в механізмах, завади в радіоприладах тощо.

Ми розглядатимемо випадкові функції одного аргументу, хоча існують функції багатьох змінних (наприклад, температура, тиск та інші величини, що характеризують стан атмосфери, залежать від трьох просторових координат і часу). Аргумент випадкової функції позначатимемо буквою  $t$  і здебільшого під  $t$  розумітимемо час, хоча є функції з іншими аргументами (наприклад, густина та інші характеристики стрижня - функції від абсциси його поперечного перерізу). Значення  $t$  можуть утворювати деякий відтинок, і тоді випадкову функцію називають **випадковим процесом**. Якщо ж  $t$  набуває певні дискретні значення, кажуть про **випадкову послідовність**. Тут розглядатимуться випадкові функції - процеси, спочатку дійсні, а згодом і комплексні.

Будемо позначати випадкову функцію  $\xi(t)$  (в разі необхідності -  $\eta(t)$ ,  $\zeta(t), \dots$ ), а її реалізацію (траєкторію) -  $x(t)$ . На рис. 1.1 показано декілька траєкторій випадкової функції. Саму функцію  $\xi(t)$ , очевидно, зобразити якимось графіком неможливо.

Якщо надати  $t$  деякого значення  $t = t_0$ , отримаємо випадкову величину  $\xi(t_0)$ , яку називають **перерізом**, або **ординатою** випадкової функції при  $t = t_0$ .

Перерізи можуть бути як дискретними, так і неперервними. Ми розглядатимемо, як правило, випадкові функції з неперервними перерізами (про два винятки див. нижче пп. 3.4, 3.5).

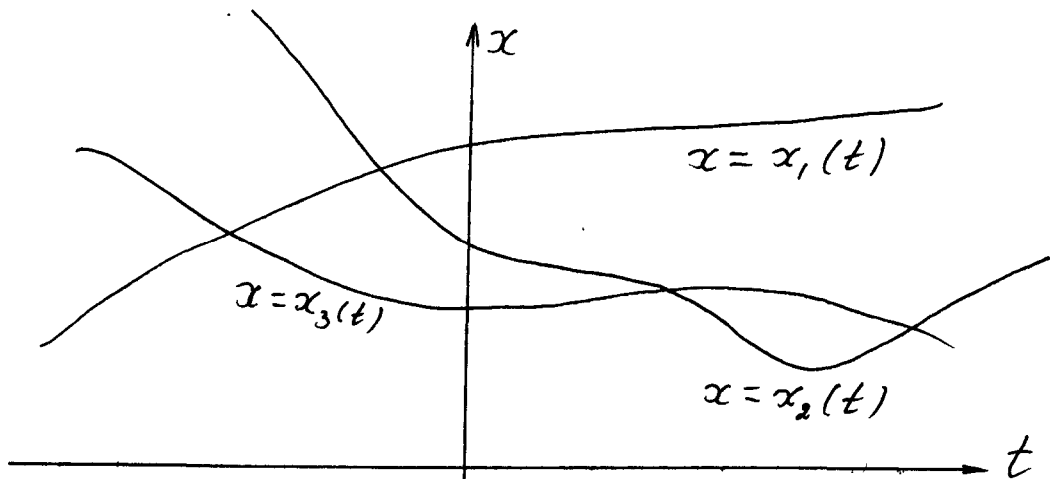


Рис. 1.1. Реалізації (траєкторії) випадкової функції

## 1.2. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай для кожного значення  $t$  з області визначення відомий закон розподілу перерізу (ординати)  $\xi(t)$ , наприклад, функція розподілу

$$F(x, t) = P(\xi(t) < x)$$

або щільність ймовірності

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}.$$

В цьому випадку кажуть, що задано одновимірний закон розподілу випадкової функції.

Якщо для двох довільних значень аргументу  $t = t_1$ ,  $t = t_2$  та відповідних перерізів  $\xi(t_1)$ ,  $\xi(t_2)$  знають закон розподілу двовимірної випадкової величини  $(\xi(t_1), \xi(t_2))$ , наприклад, двовимірну функцію розподілу

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2)$$

або двовимірну щільність ймовірності

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

то кажуть, що задано двовимірний закон розподілу цієї функції. Аналогічно можна говорити про тривимірні, чотиривимірні, загалом  $n$ -вимірні закони розподілу. Випадкова функція вважається заданою, якщо відомі всі її закони розподілу.

Існують випадкові функції, які цілком визначаються одновимірним чи двовимірним законами розподілу.

Приклад 1.1. Нехай перерізи випадкової функції для будь-яких двох значень аргументу є незалежними. Тоді її багатовимірна щільність ймовірності розпадається в добуток одновимірних, зокрема

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_1(x_1, t_1) f_2(x_2, t_2).$$

В цьому випадку вичерпною характеристикою випадкової функції є одновимірний закон її розподілу.

Прикладами випадкових функцій, які цілком визначаються одновимірними та двовимірними законами розподілу, є так звані марківські процеси (процеси без післядії) та нормальні випадкові функції (див. розділ 3).

Відзначимо найпростіші властивості двовимірної щільності ймовірності.

1. Симетричність:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_2, x_1; t_2, t_1)$$

2. Узгодженість:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2 = f_1(x_1, t_1).$$

При  $t_2 \rightarrow t_1$  двовимірна щільність ймовірності, здавалось би, повинна прямувати до одновимірної щільності  $f_1(x_1, t_1)$ . Пізніше ми побачимо, що справа обстоїть дещо складніше.

## РОЗДІЛ 2

# ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

### 2.1. МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ

Нехай  $t$  - довільне конкретне значення аргументу,  $\xi(t)$  - відповідний переріз (ордината) випадкової функції, а

$$m(t) = m_{\xi}(t) = M(\xi(t)) \quad (2.1)$$

- його математичне сподівання. Невипадкова функція  $m(t)$  називається **математичним сподіванням** випадкової функції  $\xi(t)$ . Це – деяка середня функція, навколо якої концентруються всі реалізації. На рис. 2.1 зображено графіки приблизно однакових математичних сподівань  $m_{\xi}(t), m_{\eta}(t), m_{\zeta}(t)$  та графіки деяких реалізацій трьох випадкових функцій  $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$ .

При відомій одновимірній щільності ймовірності  $f(x;t)$  випадкової функції  $\xi(t)$  її математичне сподівання дорівнює

$$m(t) = m_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t) dx \quad (2.2)$$

З властивостей математичного сподівання випадкової величини впливають властивості математичного сподівання випадкової функції.

1. Математичне сподівання невідповідної функції  $\varphi(t)$  дорівнює самій цій функції,

$$M(\varphi(t)) = \varphi(t).$$

2. Невипадковий множник  $\varphi(t)$  можна винести за знак математичного сподівання,

$$M(\varphi(t)\xi(t)) = \varphi(t)m(t).$$

3. Математичне сподівання суми невідповідної  $\varphi(t)$  і випадкової  $\xi(t)$  функцій дорівнює сумі невідповідної функції та математичного сподівання випадкової,

$$M(\varphi(t) + \xi(t)) = \varphi(t) + m(t).$$

4. Математичне сподівання суми випадкових функцій дорівнює сумі їх математичних сподівань,

$$M(\xi(t) + \eta(t)) = m_\xi(t) + m_\eta(t).$$

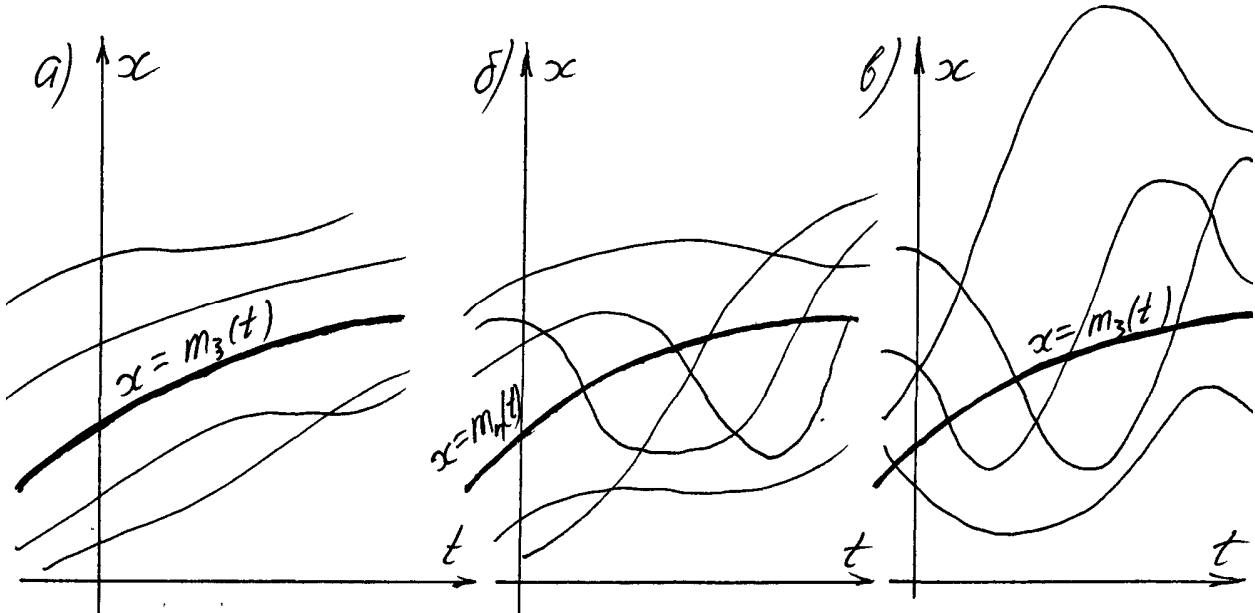


Рис. 2.1. Математичне сподівання випадкової функції

Приклад 2.1. Елементарною випадковою функцією називається функція, що зображається добутком невідповідної функції  $\varphi(t)$  та випадкової величини  $U$  з нульовим математичним сподіванням,

$$\xi_0(t) = U\varphi(t), \quad M(U) = 0. \quad (2.3)$$

Математичне сподівання елементарної випадкової функції дорівнює нулю,

$$m_{\xi_0}(t) = 0. \quad (2.4)$$

Випадкова функція

$$\overset{0}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t) \quad (2.5)$$

називається центрованою, її математичне сподівання дорівнює нулю. Саму функцію  $\xi(t)$  можна зобразити сумою її невідповідної  $m_\xi(t)$  та випадкової центрованої  $\overset{0}{\xi}(t)$  складових,

$$\xi(t) = m_\xi(t) + \overset{0}{\xi}(t) \quad (2.6)$$



Елементарна випадкова функція  $\overset{0}{\xi}(t)$ , як видно з формул (2.3), (2.4), - центрована.

## 2.2. ДИСПЕРСІЯ ТА СЕРЕДНЄ КВАДРАТИЧНЕ ВІДХИЛЕННЯ

**Дисперсією**  $D(t)$  випадкової функції  $\xi(t)$  називається: невідповідна функція, яка при кожному конкретному значенні  $t$  є дисперсією перерізу (ординати)  $\xi(t)$ ,

$$D(t) = D_{\xi}(t) = D(\xi(t)) = M\left(\left(\overset{0}{\xi}(t)\right)^2\right) = M((\xi(t) - m(t))^2) = M(\xi^2(t)) - m^2(t) \quad (2.7)$$

Квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma(t) = \sigma_{\xi}(t) = \sqrt{D_{\xi}(t)} = \sqrt{D(t)} \quad (2.8)$$

називається середнім квадратичним відхиленням випадкової функції. Дисперсія й середнє квадратичне відхилення характеризують величину відхилення реалізацій випадкової функції від її математичного сподівання. З рис. 2.1 видно, що для випадкових функцій  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\zeta(t)$  (з приблизно рівними математичними сподіваннями) маємо  $D_{\xi}(t) \approx D_{\eta}(t)$ , але  $D_{\xi}(t) < D_{\zeta}(t)$ .

При відомій одновимірній щільності ймовірності  $f(x;t)$  дисперсія випадкової функції дорівнює

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m(t))^2 f(x;t) dx. \quad (2.9)$$

Приклад 2.2. Нехай  $\xi(t)$  - випадкова функція з незалежними перерізами (див. приклад 1.1) та одновимірною щільністю ймовірності

$$f(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-b\cos t)^2}{2\sigma^2}},$$

де  $b, \sigma$  - сталі, а  $\sigma > 0$ . Знайти математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення та  $n$ -вимірну щільність ймовірності випадкової функції.

Розв'язання. Очевидно, при кожному значенні  $t$  маємо нормальний розподіл з математичним сподіванням  $b \cos t$  та середнім квадратичним відхиленням  $\sigma$ . Тому  $m(t) = b \cos t, \sigma(t) = \sigma$ .  $n$ -вимірну щільність ймовірності на підставі прикладу 1.1 дорівнює добуткові одновимірних,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^{n-1}} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_k - b \cos t_k)^2}$$

Тут ми маємо один з прикладів так званої нормальної функції, тобто функції, всі закони розподілу якої є нормальними.

Перелічимо властивості дисперсії випадкової функції (вони впливають з аналогічних властивостей дисперсії випадкової величини).

1. Дисперсія не випадкової функції  $\varphi(t)$  дорівнює нулю,

$$D(\varphi(t)) = 0.$$

2. Невипадковий множник можна винести за знак дисперсії, попередньо піднісши його до квадрата,

$$D(\varphi(t)\xi(t)) = \varphi^2(t)D(\xi(t)) = \varphi^2(t)D(t).$$

3. При додаванні до випадкової функції не випадкової дисперсія не змінюється,

$$D(\varphi(t) + \xi(t)) = D(\xi(t)) = D(t).$$

Приклад 2.3. Дисперсії та середні квадратичні відхилення випадкової функції та її центрованої складової збігаються

$$D_{\xi}^0(t) = D_{\xi}(t), \quad \sigma_{\xi}^0(t) = \sigma_{\xi}(t), \quad (2.10)$$

що випливає з формули (2.6) та властивості 3 дисперсії.

Приклад 2.4. Дисперсія й середнє квадратичне відхилення елементарної випадкової функції  $\xi_0(t)$  дорівнюють

$$D_{\xi_0}(t) = \varphi^2(t)D(U), \quad \sigma_{\xi_0}(t) = |\varphi(t)|\sigma(U), \quad (2.11)$$

що є наслідком формули (2.3) і властивості 2 дисперсії.

Приклад 2.5. Переконайтесь, що для так званої нормованої випадкової функції

$$\xi_N(t) = \frac{\xi(t)}{\sigma(t)} \quad (2.12)$$

математичне сподівання дорівнює нулю, а дисперсія й середнє квадратичне відхилення - одиниці,

$$m_{\xi_N}(t) = 0, \quad D_{\xi_N}(t) = \sigma_{\xi_N}(t) = 1. \quad (2.13)$$

### 2.3. КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ

Дві випадкові функції, маючи приблизно рівні математичні сподівання та дисперсії, можуть бути суттєво різними (пор., наприклад, рис. 2.1 а, б). Часто-густо це спричиняється неоднаковим рівнем залежності між перерізами у кожній функції.

Нехай  $t = t_1, t = t_2$  - два довільних значення аргументу, а випадкові величини  $\xi(t_1), \xi(t_2)$  - відповідні перерізи випадкової функції  $\xi(t)$ . Кореляційний момент цих випадкових величин,

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= K_{\xi}(t_1, t_2) = K(\xi(t_1), \xi(t_2)) = M\left(\overset{0}{\xi}(t_1), \overset{0}{\xi}(t_2)\right) = M((\xi(t_1) - m(t_1))(\xi(t_2) - m(t_2))) = \\ &= M(\xi(t_1)\xi(t_2)) - m(t_1)m(t_2), \end{aligned} \quad (2.14)$$

є невідповідною функцією двох змінних  $t_1, t_2$  і називається **кореляційною функцією** випадкової функції  $\xi(t)$ . Перерізи  $\xi(t_1), \xi(t_2)$  називаються **некорельованими** (незв'язаними), якщо  $K(t_1, t_2) = 0$ , і **корельованими** (зв'язаними) при  $K(t_1, t_2) \neq 0$ . Математичне сподівання добутку  $\xi(t_1)\xi(t_2)$ , тобто  $M(\xi(t_1)\xi(t_2))$ , називають **коваріацією**.

З рис. 2.1 а, б видно, що кореляційні функції  $K_{\xi}$  і  $K_{\eta}$  - різні. Зокрема, з зростанням довжини інтервалу  $(t_1, t_2)$  абсолютні значення обох спадають внас-

лідок зменшення залежності між перерізами  $\xi(t_1), \xi(t_2)$ , але у другій випадковій функції це спадання є інтенсивнішим.

Формули (2.7), (2.14) свідчать, що при  $t_1 = t_2 = t$  кореляційна функція збігається з дисперсією,

$$K(t, t) = M\left(\overset{0}{\xi}(t)\right) = D(t) = \sigma^2(t). \quad (2.15)$$

З цієї причини нема потреби спеціально використовувати поняття дисперсії випадкової функції: достатньо знати її кореляційну функцію.

Якщо відома двовимірна щільність ймовірності  $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$  випадкової функції, то її кореляційна функція зображається подвійним інтегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m(t_1))(x_2 - m(t_2)) f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (2.16)$$

Зауважимо, що на підставі рівності (2.15) ми, здавалось би, повинні вважати інтеграл (2.9) частинним випадком інтеграла (2.16). Проте пересвідчитись в цьому ми зможемо пізніше.

Кореляційна функція має наступні властивості.

1. Симетричність:

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1).$$

Якщо побудувати в просторі  $O_{t_1 t_2} x$  поверхню  $x = K(t_1, t_2)$  (графік кореляційної функції), то вона є симетричною відносно площини  $t_1 = t_2$ , яка проходить через вісь  $Ox$  та бісектрису кута  $t_1 O t_2$  (рис. 2.2).

2. Кореляційна функція не змінюється при додаванні до випадкової функції  $\xi(t)$  невинуваткової  $\varphi(t)$ : якщо  $\eta(t) = \xi(t) + \varphi(t)$ , то

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = K_{\xi+\varphi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2) = K(t_1, t_2).$$

3. При множенні випадкової функції  $\xi(t)$  на невинуваткову  $\varphi(t)$  кореляційна функція помножається на добуток  $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$ : якщо  $\zeta(t) = \varphi(t)\xi(t)$ , то

$$K_{\zeta}(t_1, t_2) = K_{\varphi\xi}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K(t_1, t_2).$$

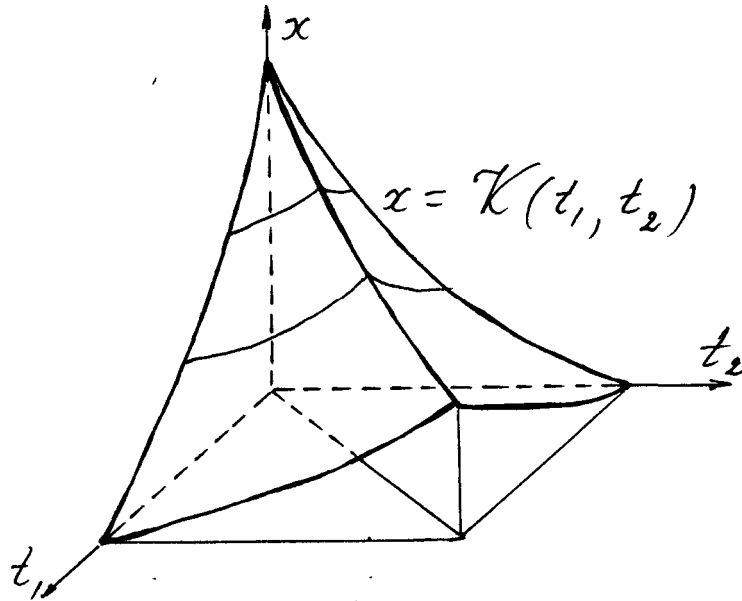


Рис. 2.2. Кореляційна функція

Властивості 2, 3 безпосередньо впливають з означення кореляційної функції. Якщо, наприклад,  $\eta(t) = \xi(t) + \varphi(t)$ , то

$$m_\eta(t) = m(t) + \varphi(t), \quad \overset{\circ}{\eta}(t) = \eta(t) - m_\eta(t) = \xi(t) - m(t) = \overset{\circ}{\xi}(t),$$

так що на підставі формули (2.14)  $K_\eta(t_1, t_2) = K(t_1, t_2)$ . Якщо ж  $\zeta(t) = \varphi(t)\xi(t)$ , то

$m_\zeta(t) = \varphi(t)m(t)$ ,  $\overset{\circ}{\zeta}(t) = \zeta(t) - m_\zeta(t) = \varphi(t)\xi(t) - \varphi(t)m(t) = \varphi(t)(\xi(t) - m(t)) = \varphi(t)\overset{\circ}{\xi}(t)$ ,  
тому

$$K_\zeta(t_1, t_2) = M\left(\varphi(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_1) \cdot \varphi(t_2)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)M\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K(t_1, t_2)$$

4. Абсолютне значення кореляційної функції не перевищує добутку середніх квадратичних відхилень відповідних перерізів,

$$|K(t_1, t_2)| \leq \sigma_1(t_1)\sigma_2(t_2) = \sqrt{K(t_1, t_1)K(t_2, t_2)}. \quad (2.17)$$

5. Для будь-якої невід'язкової функції  $\varphi(t)$  та довільних заданих чисел  $a, b$  ( $a < b$ ) виконується нерівність

$$\int_a^b \int_a^b \varphi(t_1)\varphi(t_2)K(t_1, t_2)dt_1 dt_2 \geq 0 \quad (2.18)$$

за умови існування інтеграла. Властивість 5, як буде показано нижче, є необхідною для того, щоб функція  $K(t_1, t_2)$  була кореляційною.

Поряд з кореляційною функцією розглядають **нормовану кореляційну функцію**

$$r(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \frac{K(t_1, t_2)}{\sqrt{K(t_1, t_1)K(t_2, t_2)}} \quad (2.19) -$$

невипадкову функцію, яка є нічим іншим як коефіцієнтом кореляції перерізів  $\xi(t_1)$ ,  $\xi(t_2)$ . З нерівності (2.17) видно, що

$$|r(t_1, t_2)| \leq 1, \quad (2.20)$$

а з формули (2.15) – що  $r(t, t) = 1$ .

Приклад 2.6. Кореляційні функції випадкової функції  $\xi(t)$  та її центрованої складової  $\overset{0}{\xi}(t)$  збігаються на підставі властивості 2 кореляційної функції,

$$K(t_1, t_2) - K_{\xi}^0(t_1, t_2). \quad (2.21)$$

Приклад 2.7. Знайти характеристики випадкової функції  $\xi(t) = V t^3$ , якщо  $V$  - випадкова величина з математичним сподіванням  $m_V = 4$  та дисперсією  $D_V = 3$ .

Розв'язання. Математичне сподівання випадкової функції дорівнює

$$m(t) = m_{\xi}(t) = t^3 M(V) = 4t^3.$$

Кореляційну функцію можна знайти двома способами.

а) Спочатку знаходимо

$$\overset{0}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t) = Vt^3 - 4t^3 = t^3(V - 4) = t^3 \overset{0}{V},$$

а далі за формулою (2.14)

$$K(t_1, t_2) = M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{\xi}(t_2)\right) = M\left(t_1^3 \overset{0}{V} \cdot t_2^3 \overset{0}{V}\right) = t_1^3 t_2^3 M\left(\overset{0}{V}^2\right) = t_1^3 t_2^3 D(V) = 3t_1^3 t_2^3,$$

$$D(t) = K(t, t) = 3t^6.$$

б) Другий спосіб полягає в використанні властивості 3 кореляційної функції. Спочатку знайдемо кореляційну функцію випадкової величини  $V$ , розглядаючи останню як частинний випадок випадкової функції,

$$K_V(t_1, t_2) = M\left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ V & V \end{matrix}\right) = M\left(\begin{matrix} 0 & 2 \\ V & \end{matrix}\right) = D(V) = 3,$$

а далі згідно з властивістю 3

$$K(t_1, t_2) = K_{r_V}(t_1, t_2) = t_1^3 t_2^3 K_V(t_1, t_2) = 3t_1^3 t_2^3.$$

Приклад 2.8. Кореляційна функція елементарної випадкової функції  $\xi_0(t)$  дорівнює

$$K_{\xi_0}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)D_U. \quad (2.22)$$

Доведіть це самостійно, використовуючи другий спосіб прикладу 2.7.

Приклад 2.9. Знайти характеристики випадкової функції  $\xi(t)$ , знаючи її двовимірну щільність ймовірності

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}\right)$$

Розв'язання. Очевидно, що

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}\right),$$

тобто перерізи  $\xi(t_1), \xi(t_2)$  - незалежні нормальні випадкові величини, а  $\xi(t)$  - нормальна випадкова функція з нульовим математичним сподіванням і середнім квадратичним відхиленням  $\sigma$  (пор. приклади 1.1 та 2.2). Через незалежність різних перерізів кореляційна функція  $K(t_1, t_2)$  при  $t_1 \neq t_2$  дорівнює нулю. Якщо ж  $t_1 = t_2 = t$ , то  $K(t_1, t_2) = D(t) = \sigma^2$ . Таким чином,

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t_1 \neq t_2, \\ \sigma^2, & \text{якщо } t_1 = t_2 \end{cases}$$

Приклад 2.10. Для нормованої випадкової функції  $\xi_N(t)$  на підставі властивості 3 кореляційної функції та формул (2.13), (2.19), (2.21)

$$K_{\xi_N}(t_1, t_2) = r_{\xi_N}(t_1, t_2) = r(t_1, t_2). \quad (2.23)$$

Приклад 2.11. Характеристики випадкової функції  $\xi(t)$  дорівнюють

$$m(t) = t^2 + 9, K(t_1, t_2) = t_1^2 + t_2^2.$$

Знайти характеристики випадкової функції

$$\eta(t) = 9(t+5)\xi(t) + \cos t.$$

Розв'язання. Згідно з властивостями 1-3 математичного сподівання

$$\begin{aligned} m_\eta(t) &= M(9(t+5)\xi(t) + \cos t) = M(9(t+5)\xi(t)) + M(\cos t) = \cos t + 9(t+5)m(t) = \\ &= 9(t+5)(t^2 + 9) + \cos t. \end{aligned}$$

На підставі властивостей 2, 3 кореляційної функції

$$K_\eta(t_1, t_2) = K_{9(t+5)\xi}(t_1, t_2) = 9(t_1+5) \cdot 9(t_2+5)K(t_1, t_2) = 81(t_1+5)(t_2+5)(t_1^2 + t_2^2).$$

Нарешті, за формулою (2.15)

$$D_\eta(t) = K_\eta(t, t) = 162t^2(t+5)^2.$$

## 2.4. КАНОНІЧНИЙ РОЗКЛАД ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ

Припустимо, що центрована складова  $\overset{0}{\xi}(t)$  випадкової функції  $\xi(t)$  зображається сумою елементарних випадкових функцій

$$\overset{0}{\xi}(t) = \sum_{i=1}^n \xi_{0i}(t) = \sum_{i=1}^n U_i \varphi_i(t), M(U_i) = 0 \forall i,$$

причому випадкові величини  $U_i$  парами не корельовані, тобто при  $i \neq j$

$$K(U_i, U_j) = M\left(\overset{0}{U}_i \overset{0}{U}_j\right) = M(U_i U_j) = 0.$$

Знайдемо кореляційну функцію випадкової функції  $\overset{0}{\xi}(t)$  або, що те ж саме (див. приклад 2.6), - функції  $\xi(t)$ . Маємо

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= K_{\overset{0}{\xi}}(t_1, t_2) = M\left(\overset{0}{\xi}(t_1) \overset{0}{\xi}(t_2)\right) = M\left(\sum_{i=1}^n U_i \varphi_i(t_1) \cdot \sum_{j=1}^n U_j \varphi_j(t_2)\right) = \\ &= M\left(\sum_{i,j=1}^n U_i U_j \varphi_i(t_1) \varphi_j(t_2)\right) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_i(t_1) \varphi_j(t_2) M(U_i U_j) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) M(U_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) D_i, \end{aligned}$$

де  $D_i = D(U_i)$  - дисперсія випадкової величини  $U_i$ .

Таким чином, якщо випадкову функцію  $\xi(t)$  можна зобразити у вигляді



$$\xi(t) = m(t) + \overset{0}{\xi}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^n U_i \varphi_i(t), M(U_i) = 0 \forall i, K(U_i, U_j) = 0 (i \neq j), \quad (2.24)$$

то її кореляційна функція та дисперсія дорівнюють

$$K(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) D_i, \quad (2.25)$$

$$D(t) = K(t, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^2(t) D_i. \quad (2.26)$$

Вираз (2.24) називається **канонічним розкладом** випадкової функції  $\xi(t)$ , а (2.25) - канонічним розкладом її кореляційної функції. Невипадкові функції  $\varphi_i(t)$  називаються **координатними**, а парами не корельовані центровані випадкові величини  $U_i$  - **коефіцієнтами** канонічного розкладу. Як бачимо, розклад (2.25) є наслідком розкладу (2.24). Можна довести, що і навпаки, розкладові (2.25) кореляційної функції відповідає канонічний розклад (2.24) випадкової функції з коефіцієнтами  $U_i$ , які мають дисперсії  $D_i$ .

Приклад 2.12. Випадкова функція зображена канонічним розкладом

$$\xi(t) = \sin^2 t + U_1 + U_2 \cos t + U_3 t \cos^2 t.$$

Знайти її характеристики, якщо відомі дисперсії  $D_i$  випадкових величин  $U_i$ ,  $i=1, 2, 3$ .

Розв'язання. Маємо  $m(t) = \cos^2 t$ , координатні функції

$$\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = \cos t, \varphi_3(t) = t \cos^2 t.$$

За формулами (2.25), (2.26)

$$K(t_1, t_2) = D_1 + D_2 \cos t_1 \cos t_2 + D_3 \cos^2 t_1 \cdot t_2 \cos^2 t_2,$$

$$D(t) = K(t, t) = D_1 + D_2 \cos^2 t + D_3 t^2 \cos^4 t.$$

Приклад 2.13. По канонічному розкладові кореляційної функції

$$K(t_1, t_2) = 4 \cos t_1 \cos t_2 + 6 t_1^4 t_2^4$$

знайти канонічний розклад центрованої випадкової функції  $\overset{0}{\xi}(t)$ .

Розв'язання. Координатні функції канонічного розкладу  $\varphi_1(t) = \cos t$ ,  $\varphi_2(t) = t^4$ . Згідно з формулою (2.24)

$$\overset{0}{\xi}(t) = U_1 \cos t + U_2 t^4, M(U_1) = M(U_2) = 0, D_1 = D(U_1) = 4, D_2 = 6.$$

Зауважимо, що в знайденому канонічному розкладі ми знаємо тільки по дві числові характеристики коефіцієнтів - випадкових величин  $U_1, U_2$ , але не самі коефіцієнти.

Приклад 2.14. Знайти канонічний розклад та характеристики випадкової функції,  $\eta(t) = 3t\xi(t) + 5t^2$  якщо  $\xi(t)$  - випадкова функція з прикладу 2.12.

Розв'язання. Канонічний розклад функції

$$\begin{aligned} \eta(t) &= 3t(\sin^2 t + U_1 + U_2 \cos t + U_3 t \cos^2 t) + 5t^2 = \\ &= 3t \sin^2 t + 5t^2 + 3U_1 t + 3U_2 t \cos t + 3U_3 t^2 \cos^2 t, \end{aligned}$$

координатні функції

$$\varphi_1(t) = 3t, \varphi_2(t) = 3t \cos t, \varphi_3(t) = 3t^2 \cos^2 t.$$

Тепер за формулою (2.25)

$$K_\eta(t_1, t_2) = 9D_1 t_1 t_2 + 9D_2 t_1 t_2 \cos t_1 \cos t_2 + 9D_3 t_1^2 t_2^2 \cos^2 t_1 \cos^2 t_2,$$

а за формулами (2.24) та (2.26)

$$m_\eta(t) = 3t \sin^2 t + 5t^2, D_\eta(t) = K_\eta(t, t) = 9D_1 t^2 + 9D_2 t^2 \cos^2 t + 9D_3 t^4 \cos^4 t.$$

## 2.5. ВЗАЄМНА КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ

Нехай  $\xi(t), \eta(t)$  - дві випадкові функції, що розглядаються разом (можна сказати, що  $(\xi(t), \eta(t))$  - двовимірна випадкова функція). Їх **взаємною кореляційною функцією** ВКФ (або кореляційною функцією зв'язку) називається не випадкова функція

$$\begin{aligned} R_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= \\ &= K(\xi(t_1), \eta(t_2)) = M\left(\overset{0}{\xi}(t_1) \overset{0}{\eta}(t_2)\right) = M\left((\xi(t_1) - m_\xi(t_1))(\eta(t_2) - m_\eta(t_2))\right) \quad (2.27) \end{aligned}$$

яка є кореляційним моментом випадкових величин  $\xi(t_1), \eta(t_2)$  - перерізів випадкових функцій  $\xi(t), \eta(t)$  при  $t = t_1, t = t_2$  відповідно. Функції  $\xi(t), \eta(t)$  називаються **корельованими** (зв'язаними), якщо  $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$  не дорівнює нулю тотожно

(для будь-яких  $t_1, t_2$ ), і **некорельованими** (незв'язаними) в протилежному разі. Поруч з ВКЗ  $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$  розглядають також ВКФ  $R_{\eta\xi}(t_1, t_2)$

$$R_{\eta\xi}(t_1, t_2) = K(\eta(t_1), \xi(t_2)) = M\left(\overset{0}{\eta}(t_1)\overset{0}{\xi}(t_2)\right)$$

Якщо  $f(x, y; t_1, t_2)$  - щільність ймовірності двовимірної випадкової величини  $(\xi(t_1), \eta(t_2))$ , то

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi}(t_1))(y - m_{\eta}(t_2))f(x, y; t_1, t_2) dx dy. \quad (2.28)$$

Приклад 2.15. Знайти взаємні кореляційні функції двох елементарних функцій

$$\xi_0(t) = U\varphi(t), \eta_0(t) = V\phi(t), M(U) = M(V) = 0.$$

Розв'язання. Функції  $\xi_0(t), \eta_0(t)$ - центровані, тому по формулі (2.27)

$$R_{\xi_0\eta_0}(t_1, t_2) = M(U\varphi(t_1)V\phi(t_2)) = \varphi(t_1)\phi(t_2)M(UV) = \varphi(t_1)\phi(t_2)K(U, V),$$

$$R_{\xi_0\eta_0}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\phi(t_2)K(U, V), \quad (2.29)$$

де  $K(U, V) = M\left(\overset{0}{U}\overset{0}{V}\right) = M(UV)$ - кореляційний момент випадкових величин  $U, V$ .

Аналогічно

$$R_{\eta_0\xi_0}(t_1, t_2) = \varphi(t_2)\phi(t_1)K(U, V).$$

З формули (2.29) випливає, що при відмінних від тотожних нулів не випадкових функціях  $\varphi(t), \phi(t)$  елементарні випадкові функції  $\xi_0(t), \eta_0(t)$  некорельовані тоді й лише тоді, коли некорельованими є випадкові величини  $U, V$ .

Приклад 2.16. Нехай

$$\eta_1(t) = a_1(t)\xi_1(t) + a_2(t)\xi_2(t), \eta_2(t) = b_1(t)\xi_1(t) + b_2(t)\xi_2(t),$$

де  $\xi(t), \eta(t)$  випадкові функції з відомими характеристиками та ВКФ, а  $a_1(t), a_2(t), b_1(t), b_2(t)$ - не випадкові функції. Знайти взаємну кореляційну функцію функцій  $\eta_1(t)$  і  $\eta_2(t)$ .

Розв'язання. З властивостей математичного сподівання

$$m_{\eta_1}(t) = a_1(t)m_{\xi_1}(t) + a_2(t)m_{\xi_2}(t), \quad m_{\eta_2}(t) = b_1(t)m_{\xi_1}(t) + b_2(t)m_{\xi_2}(t).$$

Центровані випадкові функції

$$\begin{aligned}\overset{0}{\eta}_1(t) &= a_1(t)\overset{0}{\xi}_1(t) + a_2(t)\overset{0}{\xi}_2(t) - a_1(t)m_{\xi_1}(t) - a_2(t)m_{\xi_2}(t) = a_1(t)\overset{0}{\xi}_1(t) + a_2(t)\overset{0}{\xi}_2(t), \\ \overset{0}{\eta}_2(t) &= b_1(t)\overset{0}{\xi}_1(t) + b_{21}(t)\overset{0}{\xi}_2(t).\end{aligned}$$

Тепер

$$\begin{aligned}R_{\eta_1\eta_2}(t_1, t_2) &= M\left(\left(a_1(t_1)\overset{0}{\xi}_1(t_1) + a_2(t_1)\overset{0}{\xi}_2(t_1)\right)\left(b_1(t_2)\overset{0}{\xi}_1(t_2) + b_{21}(t_2)\overset{0}{\xi}_2(t_2)\right)\right) = \\ &= a_1(t_1)b_1(t_2)M\left(\overset{0}{\xi}_1(t_1)\overset{0}{\xi}_1(t_2)\right) + a_2(t_1)b_2(t_2)M\left(\overset{0}{\xi}_2(t_1)\overset{0}{\xi}_2(t_2)\right) + \\ &+ a_1(t_1)b_2(t_2)M\left(\overset{0}{\xi}_1(t_1)\overset{0}{\xi}_2(t_2)\right) + a_2(t_1)b_1(t_2)M\left(\overset{0}{\xi}_2(t_1)\overset{0}{\xi}_1(t_2)\right) = \\ &= a_1(t_1)b_1(t_2)K_{\xi_1}(t_1, t_2) + a_2(t_1)b_2(t_2)K_{\xi_2}(t_1, t_2) + \\ &+ a_1(t_1)b_2(t_2)R_{\xi_1\xi_2}(t_1, t_2) + a_2(t_1)b_1(t_2)R_{\xi_2\xi_1}(t_1, t_2).\end{aligned}$$

Приклад 2.17. Знайти ВКФ випадкових функцій, заданих своїми канонічними розкладами

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n U_i \varphi_i(t), \eta(t) = \sum_{j=1}^n U_j \phi_j(t), M(U_i) = 0, K(U_i, U_j) = 0 (i \neq j).$$

Розв'язання. Функції  $\xi(t), \eta(t)$  центровані, а тому

$$\begin{aligned}R_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= M(\xi(t_1)\eta(t_2)) = M\left(\sum_{i=1}^n U_i \varphi_i(t_1) \cdot \sum_{j=1}^n U_j \phi_j(t_2)\right) = \sum_{i,j} \varphi_i(t_1)\phi_j(t_2)M(U_i U_j) = \\ &= \sum_i \varphi_i(t_1)\phi_i(t_2)M(U_i^2) = \sum_i \varphi_i(t_1)\phi_i(t_2)D_i, \\ R_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= \sum_i \varphi_i(t_1)\phi_i(t_2)D_i.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Перелічимо властивості взаємної кореляційної функції.

1. ВКФ не змінюється при одночасній зміні місцями її індексів і аргументів,

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = R_{\eta\xi}(t_2, t_1).$$

2. ВКФ не змінюється при додаванні до випадкових функцій  $\xi(t), \eta(t)$  невідповідних  $\varphi(t), \phi(t)$ , тобто якщо

$$\xi_1(t) = \xi(t) + \varphi(t), \eta_1(t) = \eta(t) + \phi(t),$$

то

$$R_{\xi_1\eta_1}(t_1, t_2) = R_{\xi+\varphi, \eta+\phi}(t_1, t_2) = R_{\xi\eta}(t_1, t_2).$$

3. Якщо випадкові функції  $\xi(t), \eta(t)$  помножити на невідповідні  $\varphi(t)$ ,  $\phi(t)$ , то ВКВ помножаться на добуток  $\varphi(t_1)\phi(t_2)$ , тобто якщо

$$\xi_2(t) = \xi(t)\varphi(t), \eta_2(t) = \eta(t)\phi(t),$$

то

$$R_{\xi_2\eta_2}(t_1, t_2) = R_{\varphi\xi, \phi\eta}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\phi(t_2) = R_{\xi\eta}(t_1, t_2).$$

4. Абсолютне значення ВКФ не перевищує добутку середніх квадратичних відхилень випадкових функцій,

$$|R_{\xi\eta}(t_1, t_2)| \leq \sigma_\xi(t_1)\sigma_\eta(t_2) = \sqrt{K_\xi(t_1, t_1)K_\eta(t_2, t_2)}.$$

Крім ВКФ користуються **нормованою ВКФ** (НВКФ) – коефіцієнтом кореляції перерізів  $\xi(t_1), \eta(t_2)$ ,

$$\rho_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \frac{R_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\eta(t_2)} = \frac{R_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_\xi(t_1, t_1)K_\eta(t_2, t_2)}}. \quad (2.31)$$

З властивості 3 ВКФ випливає, що  $|\rho_{\xi\eta}(t_1, t_2)| \leq 1$ .

## 2.6. ДОДАВАННЯ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Знайдемо характеристики суми

$$\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t) \quad (2.32)$$

двох випадкових функцій  $\xi(t), \eta(t)$  з відомими характеристиками та та взаємними кореляційними функціями (ВКФ). Оскільки математичне сподівання суми дорівнює

$$m_\zeta(t) = m_\xi(t) + m_\eta(t),$$

йдеться тільки про кореляційну функцію суми. Очевидно,

$$\overset{0}{\zeta}(t) = \overset{0}{\xi}(t) + \overset{0}{\eta}(t).$$

Використовуючи тепер властивості математичного сподівання та формули (2.14), (2.27), отримуємо

$$\begin{aligned}
K_{\zeta}(t_1, t_2) &= M\left(\overset{0}{\zeta}(t_1)\overset{0}{\zeta}(t_2)\right) = M\left(\left(\overset{0}{\xi}(t_1) + \overset{0}{\eta}(t_1)\right)\left(\overset{0}{\xi}(t_2) + \overset{0}{\eta}(t_2)\right)\right) = \\
&= M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{\xi}(t_2)\right) + M\left(\overset{0}{\eta}(t_1)\overset{0}{\eta}(t_2)\right) + M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{\eta}(t_2)\right) + M\left(\overset{0}{\eta}(t_1)\overset{0}{\xi}(t_2)\right) = \\
&= K_{\xi}(t_1, t_2) + K_{\eta}(t_1, t_2) + R_{\xi\eta}(t_1, t_2) + R_{\eta\xi}(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

Отже,

$$K_{\zeta}(t_1, t_2) = K_{\xi+\eta}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2) + K_{\eta}(t_1, t_2) + R_{\xi\eta}(t_1, t_2) + R_{\eta\xi}(t_1, t_2), \quad (2.33)$$

тобто кореляційна функція суми двох випадкових функцій дорівнює сумі кореляційних та обох взаємних кореляційних функцій доданків. Якщо останні некорельовані, то

$$K_{\zeta}(t_1, t_2) = K_{\xi+\eta}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2) + K_{\eta}(t_1, t_2), \quad R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = 0. \quad (2.34)$$

Формули (2.33), (2.34) аналогічні формулам для дисперсії суми двох випадкових величин.

Приклад 2.18. Кореляційна функція суми двох елементарних випадкових функцій з прикладу 2.15 за формулами (2.33), (2.22), (2.29) дорівнює

$$K_{\xi_0+\eta_0}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)D_U + \phi(t_1)\phi(t_2)D_V + (\varphi(t_1)\phi(t_2) + \varphi(t_2)\phi(t_1))K(U, V). \quad (2.35)$$

Якщо  $\xi_0(t), \eta_0(t)$  або, що те ж саме,  $U, V$  - некорельовані, то

$$K_{\xi_0+\eta_0}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)D_U + \phi(t_1)\phi(t_2)D_V \quad (2.36)$$

Приклад 2.19. Якщо додаються некорельовані випадкова функція  $\xi(t)$  й

випадкова величина  $U$ ,  $R_{\xi U} = M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{U}\right) = 0$ , то

$$K_{\xi+U}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2) + D_U, \quad R_{\xi U}(t_1, t_2) = M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{U}\right) = 0 \quad (2.37)$$

Тут використано формулу (2.34), а також те, що кореляційна функція випадкової величини дорівнює її дисперсії (пор. приклад 2.7).

Формули (2.32), (2.33), (2.34) узагальнюються на випадок суми будь-якої кількості доданків. Якщо

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t), \quad (2.38)$$

то, природно,

$$m_{\eta}(t) = \sum_{i=1}^n m_{\xi_i}(t),$$

а кореляційна функція дорівнює

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n K_{\xi_i}(t_1, t_2) + \sum_{i \neq j} R_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2). \quad (2.39)$$

Якщо доданки парами не корельовані, то

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n K_{\xi_i}(t_1, t_2), \quad R_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2) = 0 \quad (i \neq j). \quad (2.40)$$

Приклад 2.20. Розглянемо канонічний розклад (2.24) випадкової функції  $\xi(t)$  по елементарних функціях  $\xi_{0i}(t) = U_i \varphi_i(t)$  з кореляційними функціями  $K_{\xi_{0i}}(t_1, t_2) = \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) D_i$  (див. формулу (2.22)). З огляду на те, що доданки парами не корельовані, застосовна формула (2.40), яка приводить іншим шляхом до канонічного розкладу (2.25) кореляційної функції  $K_{\xi}(t_1, t_2)$ .

Приклад 2.21. Знайти характеристики випадкової функції

$$\eta(t) = a_1(t) \xi_1(t) + a_2(t) \xi_2(t) + a_3(t),$$

якщо  $\xi_1(t), \xi_2(t)$ - випадкові функції з відомими характеристиками та взаємними кореляційними функціями (ВКФ), а  $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$  - невідомі функції.

Розв'язання. Згідно з властивостями математичного сподівання

$$m_{\eta}(t) = a_1(t) m_{\xi_1}(t) + a_2(t) m_{\xi_2}(t) + a_3(t).$$

Для визначення кореляційної функції зручно покласти

$$\eta_1(t) = a_1(t) \xi_1(t), \quad \eta_2(t) = a_2(t) \xi_2(t),$$

так що  $\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t) + a_3(t)$ . Залишається послідовно застосувати властивості кореляційної функції, формулу (2.33) та властивість 3 ВКФ. Отже,

$$\begin{aligned} K_{\eta}(t_1, t_2) &= K_{\eta_1 + \eta_2}(t_1, t_2) = K_{\eta_1}(t_1, t_2) + K_{\eta_2}(t_1, t_2) + R_{\eta_1 \eta_2}(t_1, t_2) + R_{\eta_2 \eta_1}(t_1, t_2) = \\ &= a_1(t_1) a_1(t_2) K_{\xi_1} + a_2(t_1) a_2(t_2) K_{\xi_2} + a_1(t_1) a_2(t_2) R_{\xi_1 \xi_2} + a_1(t_1) a_2(t_1) R_{\xi_2 \xi_1}. \end{aligned}$$

## 2.7. ОСНОВНА (ПРЯМА) ЗАДАЧА ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Динамічною системою ми називатимемо будь-яку систему, стан якої змінюється під впливом випадкових зовнішніх чинників. Це може бути прибор, лічильно-розв'язуючий механізм, система автоматичного керування, коливальна система тощо. В технології машинобудування як динамічні розглядаються найрізноманітніші механічні коливальні системи. Зміст терміну "динамічна система" вельми широкий, і послуговуються ним задля зручності (пор. терміни "екстремум функції", "фігура" та "інтеграл по фігурі" в теорії ріманівського інтеграла по мірі). Дуже поширеними є динамічні системи, дія яких характеризується лінійними диференціальними рівняннями.

Надалі ми зустрічатимемось з різними варіантами однієї й тієї ж проблеми.

На вхід деякої динамічної системи надходить випадкова функція з відомими характеристиками й зазнає там певних перетворень. Необхідно визначити характеристики випадкової функції на виході системи.

Крім названої (**прямої**) задачі часто-густо мають справу з оберненими задачами, наприклад, про вибирання параметрів динамічної системи оптимальним в тому чи іншому сенсі чином. Деякі зауваження щодо обернених задач можна знайти в книзі [4]. Достатньо ґрунтовну теорію розроблено в книзі [9].



## РОЗДІЛ 3

### ПРИКЛАДИ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

#### 3.1. ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПЕРЕРІЗАМИ

Випадкові функції з незалежними перерізами вже згадувалися в прикладах 1.1, 2.2. Вони цілком визначаються одновимірним законом розподілу. При відомій одновимірній щільності ймовірності  $f(x;t)$   $n$ -вимірна щільність ймовірності дорівнює

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; t_i),$$

математичне сподівання та дисперсія даються формулами (2.2), (2.9), а кореляційна функція дорівнює

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{нпу } t_1 \neq t_2 \\ D(t) & \text{нпу } t_1 = t_2 = t. \end{cases}$$

#### 3.2. НОРМАЛЬНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ

Випадкова функція  $\xi(t)$  називається нормальною, якщо для будь-яких  $n, t_1, t_2, \dots, t_n$   $n$ -вимірна величина  $(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))$  має нормальний розподіл, тобто її щільність ймовірності дається формулою

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|K|}} \exp\left(-\frac{1}{2|K|} \sum_{i,j=1}^n A(t_i, t_j) (x_i - m(t_i))(x_j - m(t_j))\right).$$

Тут  $K = (K(t_i, t_j))$  - кореляційна матриця,  $|K|$  - її визначник,  $A(t_i, t_j)$  - алгебричне доповнення елемента  $K(t_i, t_j)$ . Елементи кореляційної матриці при відомій двовимірній щільності ймовірності визначаються формулою (2.16); властивість

узгодженості з п. 1.2 забезпечує існування одновимірної щільності ймовірності, а отже - знаходження математичного сподівання за формулою (1.2). Таким чином, нормальна випадкова функція цілком визначається своєю двовимірною щільністю ймовірності. Всі перерізи нормальної випадкової функції мають нормальний розподіл. Якщо випадкова функція має незалежні нормально розподілені перерізи, то вона є нормальною (п. 3.1).

Двовимірна щільність ймовірності нормальної випадкової функції дорівнює

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma(t_1)\sigma(t_2)\sqrt{1-r^2}} \times \exp\left(-\frac{(x_1 - m(t_1))^2}{\sigma^2(t_1)} - 2r \frac{(x_1 - m(t_1))(x_2 - m(t_2))}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} + \frac{(x_2 - m(t_2))^2}{\sigma^2(t_2)}\right),$$

де  $r = r(t_1, t_2)$  - нормована кореляційна функція.

Відзначимо один частинний випадок, що він знадобиться нам в п. 3.7.

Нехай 
$$m(t) = at, \sigma(t) = \sigma\sqrt{t}, \quad r = r(t_1, t_2) = \begin{cases} \sqrt{\frac{t_1}{t_2}} & \text{нпу } t_1 < t_2, \\ \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} & \text{нпу } t_1 > t_2. \end{cases}$$

В такому разі двовимірна щільність ймовірності дорівнює

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{t_1(t_2-t_1)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{(x_1-at_1)^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1-a(t_2-t_1))^2}{t_2-t_1}\right)\right) & \text{нпу } t_1 < t_2, \\ \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{t_2(t_1-t_2)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{(x_2-at_2)^2}{t_2} + \frac{(x_1-x_2-a(t_1-t_2))^2}{t_1-t_2}\right)\right) & \text{нпу } t_1 > t_2. \end{cases}$$

### 3.3. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Так називають випадкову функцію

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \Phi) \quad (3.1)$$

(або  $\eta(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$ ), в якій  $A$  (амплітуда),  $\omega$  (частота),  $\Phi$  (початкова фаза) – випадкові величини. Припустимо, що частота  $\omega$  фіксована, величини  $A$  та  $\Phi$  незалежні, а початкова фаза  $\Phi$  рівномірно розподілена на відрізку  $[0, 2\pi]$ , тобто має щільність ймовірності

$$f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{якщо } \varphi \in [0, 2\pi], \\ 0, & \text{якщо } \varphi \notin [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Знайдемо характеристики гармонічних коливань.

Внаслідок незалежності випадкових величин  $A$ ,  $\Phi$  математичне сподівання гармонічних коливань дорівнює

$$\begin{aligned} m(t) &= M(A \cdot \cos(\omega t + \Phi)) = M(A)M(\cos(\omega t + \Phi)) = M(A) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + \varphi) f(\varphi) d\varphi = \\ &= M(A) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) d\varphi = \frac{M(A)}{2\pi} (\sin(\omega t + 2\pi) - \sin(\omega t)) = 0, \end{aligned}$$

тобто  $m(t) = 0$ ,  $\xi(t) = \xi(t)$ . Зважаючи на центрованість  $\xi(t)$ , на підставі формули (2. 14) маємо

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M(\xi(t_1)\xi(t_2)) = M(A^2 \cos(\omega t_1 + \Phi)\cos(\omega t_2 + \Phi)) = \\ &= M(A^2)M(\cos(\omega t_1 + \Phi)\cos(\omega t_2 + \Phi)) = M(A^2) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi) f(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} M(A^2) \int_0^{2\pi} \cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi) d\varphi = \frac{1}{4\pi} M(A^2) \left( \int_0^{2\pi} \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi) d\varphi + \right. \\ &\left. + \int_0^{2\pi} \cos \omega(t_2 - t_1) d\varphi \right) = \frac{1}{4\pi} M(A^2) \left( \frac{1}{2} \sin(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi) \Big|_0^{2\pi} + \cos \omega(t_2 - t_1) \int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} M(A^2) (0 + 2\pi \cos \omega(t_2 - t_1)) = \frac{1}{2} M(A^2) \cos \omega(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Таким чином, гармонічні коливання є центрованою випадковою функцією з кореляційною функцією

$$K(t_1, t_2) = \frac{1}{2} M(A^2) \cos \omega(t_2 - t_1), \quad (3.2)$$

дисперсією

$$D(t) = K(t, t) = \frac{1}{2} M(A^2) \quad (3.3)$$

та нормованою кореляційною функцією

$$r(t_1, t_2) = \cos \omega(t_2 - t_1). \quad (3.4)$$

### 3.4. ПУАССОНІВСЬКИЙ ПРОЦЕС

**Потоком подій** називається послідовність подій, які відбуваються в випадкові моменти часу. Наприклад: 1) потік заявок в системі масового обслуговування; 2) потік поломок дрібнорізального інструменту (зокрема свердлів-нульовок) при низькій якості, технологічних дефектах виготовлення, несприятливих умовах експлуатації; 3) потік відмов у добрих інструментів, які працюють в умовах граничних динамічних, температурних навантажень; 4) потік регулювань та підналадок верстатів, які періодично здійснюються протягом робочого часу; 5) потік викликів на телефонній станції; 6) потік аварій в електричній мережі; 7) потік проколів шин автомобіля; 8) шляхові аварії; 9) відмови при роботі електронних обчислювальних машин (ЕОМ); 10) відмови елементів складної радіотехнічної системи, котра складається з великої кількості елементів, кожний з яких лише з малою ймовірністю може відмовити в роботі за одиницю часу незалежно від стану інших елементів; 11) потік захворювань на рідкісну хворобу; 12) потік електронів, які випромінює катоднопроменева трубка; 13) потік зареєстрованих  $\alpha$ -частинок, що утворюються внаслідок розпаду радіоактивної речовини; 14) потік космічних частинок, які потрапляють на певну площадку.

Потік подій називається **найпростішим**, якщо він задовольняє наступні три умови: 1) **стаціонарності** (однорідності, або однорідності за часом); 2) **відсутності післядії**; 3) **ординарності**.

1) **Стаціонарність** (однорідність) полягає в тому, що ймовірність

$$P_k(t_0, t_0 + t]$$

появи  $k$  подій за будь-який проміжок часу  $(t_0, t_0 + t]$  залежить тільки від тривалості  $t$  проміжку і не залежить від його початку. З стаціонарності випливає, що  $p_k(t_0, t_0 + t] = p_k(t)$ , де  $p_k(t) = p_k(0, t]$  - ймовірність появи  $k$  подій за відтинку часу  $(0, t]$ , тобто від початку відліку часу ( $t = 0$ ) до моменту  $t$ .

2) **Відсутність післядії** означає, що ймовірність  $p_k(t_0, t_0 + t]$  не залежить від того, скільки подій відбулося до початку відтинка  $(t_0, t_0 + t]$ . Якщо  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , то кількості появ подій на проміжках  $(t_0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{n-1}, t_n]$  - незалежні випадкові величини.

3) **Ординарність** потоку означає практичну неможливість появи двох або більшої кількості подій за малий відтинок часу тривалості  $\Delta t$ , а саме, при  $k \geq 2$  і довільному  $t$

$$p_k(\Delta t) = p_k(0, \Delta t] = p_k(t, t + \Delta t] = o(\Delta t)$$

Для найпростішого потону подій, як можна довести,

$$p_0(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t}, p_1(\Delta t) = p_1(t, t + \Delta t] = 1 - p_0(\Delta t) + o(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

тобто ймовірність появи однієї події за малий відтинок часу приблизно пропорційна його тривалості, а ймовірністю появи не менш, ніж двох подій, можна знехтувати. Сталий додатний множник  $\lambda$  - це **інтенсивність** потоку, тобто кількість подій, що відбуваються пересічно протягом одиниці часу.

Можна довести, що при  $t > 0$

$$p_k(\Delta t) = p_k(0, \Delta t] = p_k(t_0, t_0 + \Delta t] = \frac{\lambda t^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (3.4)$$

Отже, кількість подій найпростішого потоку, які відбуваються за довільний відтинок часу тривалості  $t$ , є випадковою величиною, яка має розподіл Пуассона з математичним сподіванням і дисперсією, рівними  $\lambda t$ .

Все сказане про найпростіший потік подій слушно висловити в термінах теорії випадкових функцій. Саме, розглядатимемо випадкову функцію  $\xi(t)$  - кількість подій найпростішого потоку, які відбуваються протягом відтинку часу

$(0, t]$ . Вважатимемо момент  $t = 0$  початком процесу, а всі значення часу  $t$  - невід'ємними. Очевидно,

$$\xi(0) = 0.$$

Функція  $\xi(t)$  набуває тільки цілочислових значень, не спадає, тотожно до-рівнює нулю при  $t \leq 0$ , є сталою на кожному відтинковій часу, протягом якого не відбувається жодної події потоку. Всі її реалізації (траєкторії) – ступінчасті функції з точками розриву першого роду, а саме одиничними додатними стрибками (рис. 3.1). Точки розриву утворюють найпростіший потік з тією ж інтенсивністю.

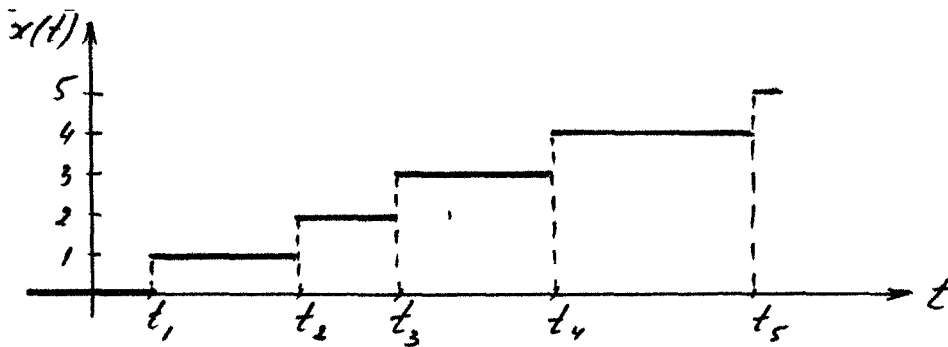


Рис. 3.1. Реалізації (траєкторії) пуассонівського процесу

Кількість подій найпростішого потоку, котрі відбуваються на проміжку часу  $(t_1, t_2]$ , дорівнює різниці (приростові функції)  $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ , а

$$P(\xi(t_2) - \xi(t_1) = k) = p_k(t_1, t_2].$$

За відсутності післядії для довільних значень часу  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  випадкові величини  $\xi(t_1) = \xi(t_1) - \xi(0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$  (прирости функції  $\xi(t)$  на проміжках часу  $(0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{n-1}, t_n]$ ) є незалежними. Через властивість стаціонарності (однорідності) розподіл випадкової величини  $\xi(t_0 + t) - \xi(t_0)$  залежить тільки від  $t$  і не залежить від  $t_0$ . Зокрема, величини  $\xi(t_0 + t) - \xi(t_0)$  та  $\xi(t) = \xi(t) - \xi(0)$  мають однаковий розподіл, і

$$P(\xi(t_0 + t) - \xi(t_0) = k) = P(\xi(t) = k) = p_k(t).$$

Якщо  $t \rightarrow 0$ , то

$$P(\xi(t) \geq 2) = P(\xi(t_0 + t) - \xi(t_0) \geq 2) = o(t),$$

$$P(\xi(t) = 1) = P(\xi(t_0 + t) - \xi(t_0) = 1) = \lambda t + o(t).$$

Формула (3.4) для випадкової функції  $\xi(t)$  набуває вигляду

$$P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (3.5)$$

тобто одновимірний закон розподілу  $\xi(t)$  є розподілом Пуассона, а тому функцію  $\xi(t)$  звичайно називають процесом Пуассона. Її математичне сподівання та дисперсія дорівнюють

$$m(t) = D(t) = \lambda t \quad (3.6)$$

Неважко знайти  $n$ -вимірний закон розподілу пуассонівського процесу. Обмежимося випадком  $n = 2$ . Вважаючи  $t_1 < t_2$ , маємо

$$\begin{aligned} P(\xi(t_1) = k_1, \xi(t_2) = k_2) &= P(\xi(t_1) = k_1, \xi(t_2) - \xi(t_1) = k_2 - k_1) = \\ &= P(\xi(t_1) = k_1) P(\xi(t_2) - \xi(t_1) = k_2 - k_1) = P(\xi(t_1) = k_1) P(\xi(t_2 - t_1) = k_2 - k_1) = \\ &= \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}; \\ P(\xi(t_1) = k_1, \xi(t_2) = k_2) &= \frac{\lambda^{k_2} t_1^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2 - k_1}}{k_1! (k_2 - k_1)!} e^{-\lambda t_2}, \quad t_1 < t_2. \end{aligned}$$

При перетвореннях ми скористалися незалежністю приростів функції  $\xi(t)$ , збігом законів розподілу випадкових величин  $\xi(t_2) - \xi(t_1), \xi(t_2 - t_1)$  та формулою (3.5).

Кореляційна функція (при  $t_1 < t_2$ ) знаходиться таким ланцюжком перетворень

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M\left(\overset{0}{\xi}(t_1) \overset{0}{\xi}(t_2)\right) = M\left(\overset{0}{\xi}(t_1) \left(\overset{0}{\xi}(t_1) + \left(\overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_1)\right)\right)\right) = M\left(\overset{0,2}{\xi}(t_1)\right) + \\ &= M\left(\overset{0}{\xi}(t_1) \left(\overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_1)\right)\right) = D(t_1) + M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\right) M\left(\overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_1)\right) = \lambda t_1 + 0 \cdot 0 = \lambda t_1. \end{aligned}$$

При  $t_1 > t_2$  таким же чином доводиться, що  $K(t_1, t_2) = \lambda t_2$ . Остаточню

$$K(t_1, t_2) = \lambda \cdot \min\{t_1, t_2\} = \begin{cases} \lambda t_1, & \text{якщо } t_1 < t_2, \\ \lambda t_2, & \text{якщо } t_1 > t_2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Графік кореляційної функції зображено на рис. 3. 2.

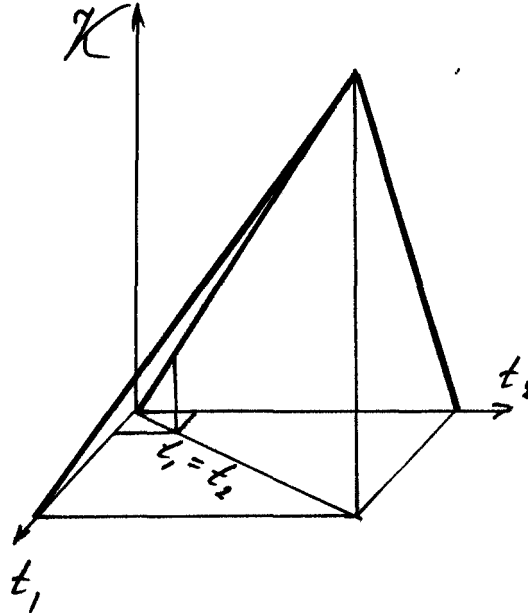


Рис. 3.2. Кореляційна функція пуассонівського процесу

З пуассонівським процесом тісно пов'язаний так званий показниковий розподіл  $T$  - відтинок часу між двома послідовними подіями найпростішого потоку подій. Ми знаємо, що функція розподілу та щільність ймовірності цієї випадкової величини дорівнюють

$$F(t) = P(T < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad f(t) = F'(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функція

$$R(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t),$$

тобто ймовірність того, що за проміжок часу тривалістю  $t$  не відбувається жодної події найпростішого потоку, називається функцією надійності. Вона застосовується в теорії надійності.

Випадкова функція  $\xi(t)$  називається функцією з **незалежними приростами**, якщо для довільних  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  випадкові величини  $\xi(t_1)$ ,  $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ ,  $\xi(t_3) - \xi(t_2)$ , ...,  $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$  незалежні.



Випадкова функція  $\xi(t)$  називається **однорідною**, якщо для довільних  $t_1 < t_2$  закон розподілу випадкової величини  $\xi(t_2) - \xi(t_1)$  залежить тільки від довжини проміжку  $(t_1, t_2]$  або від різниці  $t_1 - t_2$  і не залежить від його початку  $t_1$ .

Пуассонівський процес є прикладом однорідного процесу з незалежними приростами.

### 3.5. ТЕЛЕГРАФНИЙ СИГНАЛ

Телеграфним сигналом називається випадкова функція  $\xi(t)$ , яка по черзі набуває сталі значення  $\sigma > 0$  або  $-\sigma$  в випадкові моменти часу, що утворюють найпростіший потік подій з деякою інтенсивністю  $\lambda$ . Одну з реалізацій телеграфного сигналу показано на рис. 3.3.

За змістом функції  $\xi(t)$  її математичне сподівання дорівнює нулю. Для знаходження кореляційної функції  $K(t_1, t_2) = M(\xi(t_1)\xi(t_2))$  зауважимо,

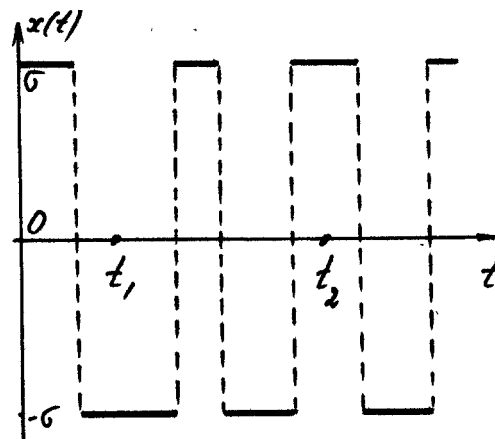


Рис. 3.3. Телеграфний сигнал

що добуток  $\xi(t_1)\xi(t_2)$  набуває значень  $\sigma^2$  або  $-\sigma^2$  залежно від того, парну чи непарну кількість разів функція  $\xi(t)$  змінює знак на проміжку часу тривалістю  $|t_2 - t_1|$ . Якщо  $P_{\text{парн}}, P_{\text{непарн}}$  - ймовірності набуття значень  $\sigma^2, -\sigma^2$  відповідно, то

$$M(\xi(t_1)\xi(t_2)) = \sigma^2 P_{\text{парн}} - \sigma^2 P_{\text{непарн}} = \sigma^2 (P_{\text{парн}} - P_{\text{непарн}})$$

Позначимо через  $N$  кількість змін знака на згаданому проміжку. Тоді за формулою Пуассона

$$P(N = n) = \frac{b^n}{n!} e^{-b}, \quad b = \lambda |t_2 - t_1|,$$

а відтак

$$\begin{aligned} P_{\text{парн}} = P(N - \text{парне}) &= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} (N = 2k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{2k}}{(2k)!} e^{-b} = \\ &= e^{-b} \left(1 + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} + \dots\right). \end{aligned}$$

Аналогічно

$$P_{\text{непарн}} = e^{-b} \left(b + \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} + \dots\right).$$

Отже, кореляційна функція телеграфного сигналу дорівнює

$$K(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-b} \left(1 - b + \frac{b^2}{2!} - \frac{b^3}{3!} + \dots\right) = \sigma^2 e^{-b} e^{-b} = \sigma^2 e^{-2b},$$

$$K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = \sigma^2 e^{-2\lambda |t_2 - t_1|} \quad (3.8)$$

Розглянемо тепер більш загальну випадкову функцію  $\eta(t)$ , котра від телеграфного сигналу відрізняється тим, що сталі її значення на інтервалах, утворених послідовними моментами часу, в які функція змінює значення, є незалежними центрованими випадковими величинами з однією й тією ж дисперсією  $\sigma^2$ .

Очевидно,  $m_\eta(t) = 0$ , так що йдеться тільки про кореляційну функцію.

Нехай  $t_1, t_2$  - довільні, причому  $t_1 < t_2$ , а  $\zeta$  - допоміжна випадкова величина, яка набуває два значення 1 або 0 залежно від того, змінює чи ні  $\eta(t)$  своє значення на інтервалі  $(t_1, t_2]$ . Оскільки моменти зміни значень  $\eta(t)$  утворюють найпростіший потік з інтенсивністю  $\lambda$ , за формулою (3. 4)

$$P(\zeta = 0) = p_0(t_2 - t_1) = \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^0}{0!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} = e^{-\lambda(t_2 - t_1)}, \quad P(\zeta = 1) = 1 - P(\zeta = 0).$$

Якщо на інтервалі  $(t_1, t_2]$  значення функції не змінюються ( $\zeta = 0$ ), маємо

$$M(\eta(t_1)\eta(t_2)) \equiv M((\eta(t_1)\eta(t_2))/\zeta = 0) = M(\eta(t_1)\eta(t_1)) = M(\eta^2(t_1)) = D_\eta(t_1) = \sigma^2.$$

В протилежному випадку внаслідок незалежності  $\xi(t_1), \xi(t_2)$  маємо

$$M(\eta(t_1)\eta(t_2)) \equiv M((\eta(t_1)\eta(t_2))/\zeta = 1) = M(\eta(t_1))M(\eta(t_2)) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Залишається скористатись відомою формулою, згідно з якою для кожних двох випадкових величин  $\alpha$  та  $\beta$

$$M(\beta) = M(M(\beta/\alpha)). \quad (3.9)$$

Взявши за  $\alpha$  випадкову величину  $\zeta$ , а за  $\beta$  - добуток  $\eta(t_1)\eta(t_2)$ , матимемо (при  $t_1 < t_2$ )

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= M(\eta(t_1)\eta(t_2)) = M(M((\eta(t_1)\eta(t_2))/\zeta)) = M((\eta(t_1)\eta(t_2))/\zeta = 0)P(\zeta = 0) + \\ &= M((\eta(t_1)\eta(t_2))/\zeta = 1)P(\zeta = 1) = \sigma^2 e^{-\lambda(t_2-t_1)} + 0 = \sigma^2 e^{-\lambda(t_2-t_1)}. \end{aligned}$$

Якщо ж  $t_1 > t_2$ , аналогічні міркування дають

$$K_\eta(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\lambda(t_1-t_2)}.$$

Об'єднуючи обидва випадки, дістанемо

$$K_\eta(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\lambda|t_1-t_2|}.$$

Отриманий результат різниться від формули (3.8) тільки відсутністю двійки в показнику степеня.

### 3.6. МАРКІВСЬКІ ПРОЦЕСИ (ПРОЦЕСИ БЕЗ ПІСЛЯДІЇ)

Випадковий процес  $\xi(t)$  називається марківським, або процесом без післядії, якщо для довільних значень  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  закон розподілу перерізу  $\xi(t_n)$  залежить тільки від значень перерізу  $\xi(t_{n-1})$  і не залежить від того, які значення набули перерізи  $\xi(t_{n-2}), \xi(t_{n-3}), \dots, \xi(t_2), \xi(t_1)$ . Образно кажучи, стан процесу в майбутньому залежить тільки від його сучасного стану і не залежить від стану минулого.

Пуассонівський процес (п. 3.4) - марківський. Марківським є будь-який випадковий процес з незалежними приростами.

Назва процесу пов'язана з ім'ям російського математика А.А. Маркова (1856 – 1922), який вперше дослідив безпослідовні випадкові послідовності з дискретними перерізами - так звані ланцюги Маркова. Деякі елементарні відомості щодо них можна знайти в книзі [11]. Ми ж зупинимось на марківських процесах з неперервними перерізами. Задля деякого спрощення символіки в позначеннях щільностей ймовірності процесів відкидатимемо значення аргументу  $t$ , наприклад, замість  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$  писатимемо просто  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Нехай  $f(x_n/x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1)$ - щільність ймовірності перерізу  $\xi(t_n)$  за умов  $\xi(t_i) = x_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ . Марківським є такий випадковий процес, для якого

$$f(x_n/x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) = f(x_n/x_{n-1}). \quad (3.11)$$

Праву частину  $f(x_n/x_{n-1}) = f(x_n; t_n/x_{n-1}; t_{n-1})$  формули (3.11), тобто щільність ймовірності перерізу  $\xi(t_n)$  за умови  $\xi(t_{n-1}) = x_{n-1}$ , звичайно називають умовною двовимірною щільністю ймовірності для перерізів  $\xi(t_{n-1}), \xi(t_n)$ .

Для марківського процесу є справедливою рівність

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2/x_1)f(x_3/x_2, x_1) \dots f(x_n/x_{n-1}), \quad (3.12)$$

тобто  $n$ -вимірну щільність ймовірності зображається добутком умовних щільностей ймовірності та одновимірної щільності ймовірності першого перерізу  $\xi(t_1)$ .

Дійсно, якщо, наприклад,  $n = 4$ , то на підставі формули (3.11) маємо

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f(x_1)f(x_2/x_1)f(x_3/x_2, x_1)f(x_4/x_3, x_2, x_1) = \\ &= f(x_1)f(x_2/x_1)f(x_3/x_2)f(x_4/x_3). \end{aligned}$$

З формули (3.12) випливає, що для того, щоб задати марківський процес (з неперервними перерізами), достатньо для довільних значень аргументу знати його одновимірну та умовну двовимірну щільності ймовірності. Про визна-

чення останньої з деяких диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних див. в книзі [4].

Внаслідок того, що

$$f(x_k / x_{k-1}) = \frac{f(x_{k-1}, x_k)}{f(x_{k-1})},$$

формулу (3.12) можна переписати інакше, а саме:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2)f(x_2, x_3)\dots f(x_{n-1}, x_n)}{f(x_2)f(x_3)\dots f(x_{n-1})}.$$

Оскільки ж

$$f(x_{k-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k-1}, x_k) dx_k,$$

цій формулі можна надати ще одного вигляду,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2)f(x_2, x_3)\dots f(x_{n-1}, x_n)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_2, x_3) dx_3 \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{n-1}, x_n) dx_n},$$

котрий свідчить, що марківський процес цілком визначається двовимірною щільністю ймовірності.

### 3.7. ВІНЕРІВСЬКІ ПРОЦЕСИ

Випадковий процес  $\xi(t)$  називається вінерівським (на честь Норберта Вінера (1894 – 1964) - американського математика, логіка, визнаного "батька кібернетики"), якщо він визначений для всіх  $t \geq 0$  і задовольняє умови:

- 1)  $\xi(t)$  - процес з незалежними приростами;
- 2)  $\xi(t)$  - однорідний процес;
- 3)  $\xi(0) = 0$ ;

4) для будь-якого  $t > 0$  переріз  $\xi(t)$  розподілений нормально  $N(at, \sigma\sqrt{t})$ ,

тобто одновимірна щільність ймовірності, математичне сподівання та дисперсія процесу відповідно дорівнюють

$$f(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-at)^2}{2\sigma^2 t}\right) \quad (3.13)$$

$$m(t) = at, \quad D(\sigma^2 t) \quad (3.14)$$

Внаслідок однорідності вінерівського процесу для довільних  $t_1 < t_2$  розподіл приросту  $\xi(t_2) - \xi(t_1)$  залежить тільки від різниці  $t_2 - t_1$  і є таким же, що й розподіл випадкової величини  $\xi(t_2 - t_1) = \xi(t_2 - t_1) - \xi(0)$  - нормальний з математичним сподіванням  $a(t_2 - t_1)$  й дисперсією  $\sigma^2(t_2 - t_1)$ . Тому умовна двовимірна щільність ймовірності дорівнює

$$f(x_2 / x_1) = f(x_2; t_2 / x_1; t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_2 - x_1 - a(t_2 - t_1))^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}\right) \quad (3.15)$$

Завдяки незалежності приростів, а отже марковості процесу, для відшукування  $n$ -вимірної щільності ймовірності можна скористатися формулою (3.12). Наприклад, для  $n = 2$  і  $t_1 < t_2$  маємо

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{t_1(t_2 - t_1)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{(x_1 - at_1)^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1 - a(t_2 - t_1))^2}{t_2 - t_1} \right)\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Аналогічно при  $t_1 > t_2$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{t_2(t_1 - t_2)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{(x_2 - at_2)^2}{t_2} + \frac{(x_1 - x_2 - a(t_1 - t_2))^2}{t_1 - t_2} \right)\right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Вінерівські процеси застосовуються для вивчення багатьох фізичних явищ, наприклад, руху дифундуючих частинок. З цієї причини їх часто звать процесами броунівського руху.

Вінерівський процес  $\eta(t)$ , в якого  $a = 0, \sigma = 1$ , тобто

$$m_\eta(t) = 0, \quad D_\eta(t) = t,$$

називається стандартним. Нестандартний процес  $\xi(t)$  завжди можна привести до стандартного, поклавши

$$\eta(t) = \frac{\xi(t) - at}{\sigma}.$$

Кореляційна функція вінерівського процесу дається формулою

$$K(t_1, t_2) = \sigma^2 \min\{t_1, t_2\} = \begin{cases} \sigma^2 t_1 & \text{при } t_1 < t_2, \\ \sigma^2 t_2 & \text{при } t_1 > t_2. \end{cases} \quad (3.18)$$

Доведімо це для випадку стандартного процесу. З формул (2.16) та (3.16) (при  $t_1 < t_2$ ) маємо

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \exp\left(-\frac{x_1^2}{2t_1} - \frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\right) dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \exp\left(-\frac{x_1^2}{2t_1}\right) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \exp\left(-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\right) dx_2. \end{aligned}$$

Внутрішній інтеграл підстановкою

$$\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2(t_2 - t_1)}} = y$$

приводиться до суми двох інтегралів, з яких один є добутком на  $x_1$  інтеграла Пуассона, тобто дорівнює  $x_1 \sqrt{\pi}$ , а другий анулюється через непарність підінтегральної функції. Тому

$$K_\eta(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \exp\left(-\frac{x_1^2}{2t_1}\right) dx_1 = \left| \frac{x_1}{\sqrt{2t_1}} = z \right| = \frac{2t_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot z e^{-z^2} dz$$

Останній інтеграл інтегруванням частинами ( $u = z$ ) зводиться до інтеграла Пуассона та дорівнює  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ , а отже  $K_\eta(t_1, t_2) = t_1$  ( $t_1 < t_2$ ). Аналогічно доводиться, що при  $t_1 < t_2$   $K_\eta(t_1, t_2) = t_2$ .

Порівняння формул (3.7) та (3.18) свідчить, що вінерівський процес має фактично таку ж кореляційну функцію, що й пуассонівський (з таким же графіком, як на рис. 3. 2).

В п. 3.2 ми знайшли двовимірну щільність ймовірності нормальної випадкової функції з характеристиками (3.14), (3.18). Той результат збігається з

формулами (3.16), (3.17) для двовимірної щільності ймовірності вінерівського процесу. Це значить, що вінерівський процес - нормальна випадкова функція.

Можна довести, що траєкторії вінерівського процесу з ймовірністю 1 можна вибрати неперервними (див., наприклад, [5, с. 294]). Це означає, що існує вінерівський процес  $W(t)$  з неперервними траєкторіями (так звана неперервна модифікація процесу  $\xi(t)$ ) такий, що для всіх  $t > 0$

$$P(W(t) \neq \xi(t)) = 0.$$

Кажуть, що процеси  $W(t)$  та  $\xi(t)$  стохастично еквівалентні.

Для неперервної модифікації  $\omega(t)$  стандартного вінерівського процесу справедливий так званий закон повторного логарифму (див. [5, 13.3]). Суть його полягає в тому, що

1) в досить малому околі точки  $t = 0$  траєкторія процесу "повністю закреслює" внутрішність області, утвореної кривими

$$y = \pm \sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}$$

(локальний закон);

2) яким би не було  $\varepsilon > 0$ , при достатньо великих  $t$  траєкторія процесу  $\omega(t)$  назавжди залишається між кривими

$$y = \pm \sqrt{2t \ln \ln t} (1 + \varepsilon)$$

(закон повторного логарифму для  $t \rightarrow \infty$ ).



## РОЗДІЛ 4

# ВСТУП ДО АНАЛІЗУ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

### 4.1. ДОДАТКОВІ ЗАУВАЖЕННЯ ПРО МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ

Надалі ми матимемо справу тільки з такими випадковими величинами  $\xi$ , математичне сподівання квадрату яких є скінченною величиною,

$$M(\xi^2) < \infty. \quad (4.1)$$

Відповідно розглядатимемо тільки такі випадкові функції, які для кожного значення аргументу (з області визначення) задовольняють нерівність

$$M(\xi^2(t)) < \infty. \quad (4.2)$$

Значну роль у подальшому викладі відіграватиме математичне сподівання  $M(\xi\eta)$  добутку двох випадкових величин  $\xi, \eta$  з скінченними математичними сподіваннями квадратів. Воно завжди існує, що впливає з важливої нерівності, названої за іменами французького математика Коші (1789 - 1857) та українського математика В.Я. Буняковського (1804 - 1889),

$$|M(\xi\eta)| \leq \sqrt{M(\xi^2)} \cdot \sqrt{M(\eta^2)}. \quad (4.3)$$

Справедливість нерівності ґрунтується на тому, що для будь-якого числа  $\lambda$  маємо  $M((\xi - \lambda\eta)^2) \geq 0$ , або ж

$$\lambda^2 M(\eta^2) - 2\lambda M(\xi\eta) + M(\xi^2) \geq 0. \quad (4.4)$$

Квадратний тричлен (4.4) відносно  $\lambda$  є невід'ємним за умови недодатності його дискримінанту, звідки

$$M^2(\xi\eta) - M(\xi^2)M(\eta^2) \leq 0, \quad M^2(\xi\eta) \leq M(\xi^2)M(\eta^2), \quad |M(\xi\eta)| \leq \sqrt{M(\xi^2)} \cdot \sqrt{M(\eta^2)}.$$

Якщо, зокрема, в нерівності (4.3) покласти  $\eta = 1$ , то отримаємо

$$|M(\xi)| \leq \sqrt{M(\xi^2)}, \quad |M(\xi)| < \infty. \quad (4.5)$$

З нерівності Коші-Буняковського випливає так звана "нерівність трикутника"

$$\sqrt{M(\xi + \eta)^2} \leq \sqrt{M(\xi^2)} + \sqrt{M(\eta^2)} \quad (4.6)$$

оскільки

$$\begin{aligned} M((\xi + \eta)^2) &= M(\xi^2) + 2M(\xi\eta) + M(\eta^2) \leq M(\xi^2) + 2\sqrt{M(\xi^2)M(\eta^2)} + M(\eta^2) = \\ &= \left(\sqrt{M(\xi^2)} + \sqrt{M(\eta^2)}\right)^2. \end{aligned}$$

З нерівності трикутника й умови (4.1) видно, що

$$M\left(\begin{matrix} 0^2 \\ \xi \end{matrix}\right) < \infty, \quad (4.7)$$

бо

$$\sqrt{M\left(\begin{matrix} 0^2 \\ \xi \end{matrix}\right)} = \sqrt{M((\xi - M(\xi))^2)} \leq \sqrt{M(\xi^2)} + \sqrt{M(M(\xi^2))} = \sqrt{M(\xi^2)} + |M(\xi)| < \infty.$$

За допомоги нерівності Коші-Буняковського дуже просто довести нерівність (2.17), тобто властивість 4 кореляційної функції,

$$|K(t_1, t_2)| = \left| M\left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ \xi(t_1) & \xi(t_2) \end{matrix}\right) \right| \leq \sqrt{M\left(\begin{matrix} 0^2 \\ \xi(t_1) \end{matrix}\right)} \sqrt{M\left(\begin{matrix} 0^2 \\ \xi(t_2) \end{matrix}\right)} = \sqrt{D(t_1)} \sqrt{D(t_2)} = \sigma(t_1) \sigma(t_2).$$

## 4.2. СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНА ГРАНИЦЯ

Кажуть, що послідовність випадкових величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

збігається в середньоквадратичному (скорочено – в с.к.) до величини  $\xi$ , і пишуть

$$l.i.m._{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi,$$

якщо, як завжди,  $M(\xi^2) < \infty$  та якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M((\xi_n - \xi)^2) = 0, \quad (4.8)$$

тобто якщо при  $n \rightarrow \infty$  математичне сподівання квадрату різниці  $\xi_n - \xi$  прямує до нуля. Величину  $\xi$  називають середньоквадратичною границею (с. к. границею) послідовності.

Теорема 4.1. Необхідною і достатньою умовою існування с.к. границі є існування (звичайної) границі

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} M(\xi_n \xi_m).$$

Доведення див., наприклад, в книзі [10, стор. 67].

Відомо (див., наприклад, [9, стор. 154]), що з с.к. збіжності випливає збіжність за ймовірністю,

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) = 1,$$

але не навпаки.

Величина  $\eta$  називається с.к. границею випадкової функції  $\xi(t)$  в точці  $t_0$ ,

$$\eta = \lim_{t \rightarrow t_0} \text{i.m.} \xi(t), \quad (4.9)$$

якщо  $M(\eta^2) < \infty$  і якщо

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M((\xi(t) - \eta)^2) = 0. \quad (4.10)$$

В термінах теорії границь це означає, що для довільного  $\varepsilon > 0$  існує такий окіл  $W = W(t_0, \varepsilon)$  точки  $t_0$ , що для всіх  $t \in W$  (крім, може,  $t_0$ ) виконується нерівність  $\sqrt{M((\xi(t) - \eta)^2)} < \varepsilon$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists W = W(t_0, \varepsilon), \forall t, t \neq t_0 : (t \in W = W(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \sqrt{M((\xi(t) - \eta)^2)} < \varepsilon) \quad (4.11)$$

Теорема 4.2. Для існування с.к. границі  $\eta$  випадкової функції  $\xi(t)$  в точці  $t_0$  необхідно й достатньо, щоб для будь-якої збіжної до  $t_0$  числової послідовності  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  відповідна послідовність перерізів (ординат)  $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n), \dots$  збігалася в с.к. до  $\eta$ .

Теорема 4.3. Необхідною й достатньою умовою існування с.к. границі випадкової функції  $\xi(t)$  в точці  $t_0$  є існування (звичайної) границі

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} M(\xi(t_1, t_2)).$$

Приклад 4.1. Нехай  $\xi(t) = U\varphi(t)$ , де  $U$  - випадкова величина, а  $\varphi(t)$  - не-випадкова функція. Тоді

$$l.i.m. U\varphi(t) = U \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t),$$

якщо остання границя існує.

Дійсно, нехай  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \phi$ . Тоді при  $t \rightarrow t_0$

$$M((U\varphi(t) - U\phi)^2) = M(U^2(\varphi(t) - \phi)^2) = (\varphi(t) - \phi)^2 M(U^2) \rightarrow 0.$$

Ми скористалися невідповідністю функції  $(\varphi(t) - \phi)^2$ , яка прямує до нуля при  $t \rightarrow t_0$ , та умовою  $M(U^2) < \infty$ .

### 4.3. ВЛАСТИВОСТІ С.К. ГРАНИЦІ

Нехай  $\eta$  - с.к. границя випадкової функції  $\xi(t)$  в точці  $t_0$ ,  $\eta = l.i.m. \xi(t)$ .

Тоді

1. Математичне сподівання  $M(\xi^2(t))$  є обмеженим в деякому околі точки  $t_0$ .
2. Його границя в точці  $t_0$  дорівнює математичному сподіванню квадрата с.к. границі,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(\xi^2(t)) = M\left(\left(l.i.m. \xi(t)\right)^2\right) = M(\eta^2).$$

3. Математичне сподівання с.к. границі  $\eta$  дорівнює границі математичного сподівання функції  $\xi(t)$ ,

$$M(\eta) = M\left(l.i.m. \xi(t)\right) = \lim_{t \rightarrow t_0} M\xi(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} m(t). \quad (4.12)$$

4. Для будь-якої випадкової величини  $U$

$$M(U\eta) = M\left(U l.i.m. \xi(t)\right) = \lim_{t \rightarrow t_0} M(U\xi(t)). \quad (4.13)$$

5. Математичне сподівання добутку  $\eta_1\eta_2$  границь випадкових функцій  $\xi_1(t), \xi_2(t)$  дорівнює границі математичного сподівання добутку функцій,

$$M(\eta_1 \eta_2) = M\left(\lim_{t \rightarrow t_0} \xi_1(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \xi_2(t)\right) = \lim_{t \rightarrow t_0} M(\xi_1(t) \xi_2(t)). \quad (4.14)$$

Властивості 3-5 обґрунтовують можливість внесення операції граничного переходу під знак математичного сподівання.

6. Сталий множник можна винести за знак с.к. границі,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} C \xi(t) = C \lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t), \quad C - const.$$

7. С.к. границя суми випадкових функцій дорівнює сумі їх с.к. границь,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\xi_1(t) + \xi_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \xi_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \xi_2(t)$$

Доведення властивостей 1-5.

1. На підставі (4.11) та нерівності трикутника (4.6) для всіх  $t \in W$ ,  $t \neq t_0$ ,

$$\sqrt{M(\xi^2(t))} = \sqrt{M((\eta + (\xi(t) - \eta))^2)} \leq \sqrt{M(\eta^2)} + \sqrt{M((\xi(t) - \eta)^2)} < \sqrt{M(\eta^2)} + \varepsilon,$$

тобто  $M(\xi^2(t))$  обмежене в  $W = W(t_0, \varepsilon)$ , бо  $M(\eta^2) < \infty$ .

2. З попередньої нерівності випливає, що в  $W = W(t_0, \varepsilon)$ ,

$$\left| \sqrt{M(\xi^2(t))} - \sqrt{M(\eta^2)} \right| < \varepsilon,$$

тобто

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(\xi^2(t)) = M(\eta^2).$$

3. На підставі нерівності (4.5)

$$|M(\eta) - M(\xi(t))| = |M(\eta - \xi(t))| \leq \sqrt{M((\eta - \xi(t))^2)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0,$$

так що

$$\lim_{t \rightarrow t_0} m(t) = M(\eta).$$

4. З нерівності Коші-Буняковського (4.3) випливає

$$|M(U\eta) - M(U\xi(t))| = |M(U(\eta - \xi(t)))| \leq \sqrt{M(U^2)} \sqrt{M((\eta - \xi(t))^2)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0,$$

отже

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(U\xi(t)) = M(U\eta).$$

5. Віднімаючи та додаючи  $\eta, \xi_2(t)$ , маємо

$$\xi_1(t)\xi_2(t) - \eta_1\eta_2 = (\xi_1(t) - \eta_1)\xi_2(t) + \eta_1(\xi_2(t) - \eta_2),$$

а тому, зважаючи на нерівність (4.3) і властивість 1 (обмеженість  $M(\xi_2^2(t))$  в деякому околі точки  $t_0$ ), дістаємо

$$\begin{aligned} & |M(\xi_1(t)\xi_2(t)) - M(\eta_1\eta_2)| = |M(\xi_1(t)\xi_2(t) - \eta_1\eta_2)| = \\ & = |M((\xi_1(t) - \eta_1)\xi_2(t) + \eta_1(\xi_2(t) - \eta_2))| \leq |M((\xi_1(t) - \eta_1)\xi_2(t))| + |M(\eta_1(\xi_2(t) - \eta_2))| \leq \\ & \sqrt{M(\xi_2^2(t))} \sqrt{M((\xi_1(t) - \eta_1)^2)} + \sqrt{M(\eta_1^2(t))} \sqrt{M((\xi_2(t) - \eta_2)^2)} \rightarrow 0, t \rightarrow t_0, \end{aligned}$$

що означає

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(\xi_1(t)\xi_2(t)) = M(\eta_1\eta_2).$$

Властивості 6, 7 доведіть самостійно.

Приклад 4.2. Задамо випадкову функцію канонічним розкладом

$$\xi(t) = m(t) + \sum_{i=1}^n U_i \varphi_i(t), \quad M(U_i) = 0, \quad M(U_i U_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

Тоді на підставі властивості 7 та прикладу 4.1 матимемо

$$l.i.m. \xi(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} m(t) + \sum_{i=1}^n U_i \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi_i(t).$$

Зокрема, якщо математичне сподівання  $m(t)$  та координатні функції  $\varphi_i(t)$  неперервні в точці  $t_0$ , то

$$l.i.m. \xi(t) = m(t_0) + \sum_{i=1}^n U_i \varphi_i(t_0) = \xi(t_0).$$

Це - випадок неперервності в середньоквадратичному випадкової функції, до розгляду якого ми зараз приступаємо.

#### 4.4. С.К. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Випадкова функція  $\xi(t)$  називається неперервною в середньоквадратичному (с.к. неперервною) в точці  $t_0$ , якщо

$$l.i.m. \xi(t) = \xi(t_0). \quad (4.15)$$

За сказаним в п. 4.2 с.к. неперервна випадкова функція є неперервною також і за ймовірністю,

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{t \rightarrow t_0} P(|\xi(t) - \xi(t_0)| < \varepsilon) = 1,$$

але не навпаки.

Якщо випадкова функція  $\xi(t)$  - с.к. неперервна в точці  $t_0$ , то з властивостей с.к. границі випливає, що

1. Математичне сподівання  $M(\xi^2(t))$  є обмеженим в деякому колі точки  $t_0$ .

2. Математичне сподівання  $M(\xi^2(t))$  неперервне в точці  $t_0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(\xi^2(t)) = M(\xi^2(t_0)). \quad (4.16)$$

3. Математичне сподівання  $m(t)$  неперервне в точці  $t_0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} m(t) = m(t_0). \quad (4.17)$$

4. Для будь-якої випадкової величини  $U$  математичне сподівання добутку  $U\xi(t)$  неперервне в точці  $t_0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(U\xi(t)) = M(U\xi(t_0)). \quad (4.18)$$

5. Математичне сподівання добутку с.к. неперервних в точці  $t_0$  випадкових випадкових функцій  $\xi_1(t), \xi_2(t)$  неперервне в цій точці,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(\xi_1(t)\xi_2(t)) = M(\xi_1(t_0)\xi_2(t_0)). \quad (4.19)$$

6. Добуток с.к. неперервної в точці випадкової функції на сталу - с.к. неперервний.

7. Сума с.к. неперервних в точці випадкових функцій є с.к. неперервною.

Наслідок. Якщо випадкова функція є с.к. неперервною в точці, то її центрована частина також там с. к. неперервна.

Неважко означити с.к. неперервність в точці зліва, справа, с.к. неперервність на інтервалі й відрізьку. Зробіть це самі.

Теорема 4. 4. Для с.к. неперервності випадкової функції  $\xi(t)$  на відріжку  $[a, b]$  необхідно й достатньо, щоб її математичне сподівання та кореляційна функція були неперервними відповідно на відріжку  $[a, b]$  та в квадраті  $\{(t_1, t_2): a \leq t_i \leq b\}$ .

Доведення. I. Нехай спочатку функція  $\xi(t)$  с. к. неперервна. Неперервність її математичного сподівання та с.к. неперервність центрованої функції вже доведено, так що йдеться тільки про неперервність кореляційної функції  $K(t_1, t_2)$ .

Для яких завгодно  $t_{10} \in [a, b], t_{20} \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |K(t_1, t_2) - K(t_{10}, t_{20})| &= \left| M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{\xi}(t_2)\right) - M\left(\overset{0}{\xi}(t_{10})\overset{0}{\xi}(t_{20})\right) \right| = \\ &= \left| M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_{10})\overset{0}{\xi}(t_2) + \overset{0}{\xi}(t_{10})\overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_{10})\overset{0}{\xi}(t_{20})\right) \right| = \\ &= \left| M\left(\left(\overset{0}{\xi}(t_1) - \overset{0}{\xi}(t_{10})\right)\overset{0}{\xi}(t_2)\right) + M\left(\overset{0}{\xi}(t_{10})\left(\overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_{20})\right)\right) \right| \leq \\ &\leq \left| M\left(\overset{0}{\xi}(t_2)\left(\overset{0}{\xi}(t_1) - \overset{0}{\xi}(t_{10})\right)\right) \right| + \left| M\left(\overset{0}{\xi}(t_{10})\left(\overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_{20})\right)\right) \right| \leq \\ &\leq \sqrt{M\left(\overset{0}{\xi}(t_2)^2\right)} \sqrt{M\left(\left(\overset{0}{\xi}(t_1) - \overset{0}{\xi}(t_{10})\right)^2\right)} + \sqrt{M\left(\overset{0}{\xi}(t_{10})^2\right)} \sqrt{M\left(\left(\overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_{20})\right)^2\right)}. \end{aligned}$$

Останній вираз прямує до нуля при  $t_i \rightarrow t_{i0}$  внаслідок с.к. неперервності  $\overset{0}{\xi}(t)$  та обмеженості  $M\left(\overset{0}{\xi}(t)^2\right)$  в деякому околі точки  $t_{20}$ . Отже,  $\lim_{t_1 \rightarrow t_{10}, t_{21} \rightarrow t_{20}} K(t_1, t_2) = K(t_{10}, t_{20})$ , і кореляційна функція неперервна.

2. У випадку неперервності  $m(t), K(t_1, t_2)$  достатньо довести с.к. неперервність центрованої функції  $\overset{0}{\xi}(t)$ . Маємо

$$M\left(\left(\overset{0}{\xi}(t) - \overset{0}{\xi}(t_0)\right)^2\right) = M\left(\overset{0}{\xi}(t)^2 - 2\overset{0}{\xi}(t)\overset{0}{\xi}(t_0) + \overset{0}{\xi}(t_0)^2\right) = M\left(\overset{0}{\xi}(t)^2\right) - 2M\left(\overset{0}{\xi}(t)\overset{0}{\xi}(t_0)\right) +$$



$$+ M\left(\xi^2(t_0)\right) = K(t, t) - 2K(t, t_0) + K(t_0, t_0) \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow t_0$ , а це значить, що  $\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t) = \xi(t_0)$ .

Приклад 4. 3. Якщо випадкову функцію задано канонічним розкладом (2.24) з неперервними на відрізку  $[a, b]$  математичним сподіванням і координатними функціями, то вона є с.к. неперервною на  $[a, b]$ . По-перше, можна послатися на приклад 4. 2. Подруге, це впливає з того, що кореляційна функція  $K(t_1, t_2)$ , канонічний розклад якої дається формулою (2.25), неперервна на квадраті  $\{(t_1, t_2): a \leq t_i \leq b\}$ .

Приклад 4.4. Пуассонівський процес (п. 3.4), телеграфний сигнал та більш загальна випадкова функція з п. 3. 5, вінерівський процес (п. 3.7) - всі вони мають неперервні математичні сподівання й кореляційні функції і тому є с.к. неперервними.

Приклад 4.4, між іншим, демонструє різницю між с.к. і "просто" неперервністю: с.к. неперервні випадкові функції з пп. 3.4, 3.5 мають розривні реалізації (траєкторії), вінерівський же процес, як зазначено в п. 3.7, має неперервні модифікації.

## РОЗДІЛ 5

# С.К. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

### 5.1. СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНА ПОХІДНА

Випадкова функція називається диференційовною в середньоквадратичному (с.к. диференційовною) в точці  $t$ , якщо існує величина  $\xi'(t)$ , для якої

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} = \xi'(t). \quad (5.1)$$

Величина  $\xi'(t)$  називається **середньоквадратичною похідною** (с.к. похідною) випадкової функції  $\xi(t)$  в точці  $t$ . За сенсом с. к. границі мається на увазі, що  $M(\xi'^2(t)) < \infty$ .

Приклад 5.1. Нехай випадкова функція має вигляд

$$\xi(t) = U\varphi(t), \quad (5.2)$$

де  $U$  - випадкова величина, а  $\varphi(t)$  - диференційовна не випадкова функція. С.к. похідна функції  $\xi(t)$  дорівнює

$$\xi'(t) = U\varphi'(t). \quad (5.3)$$

Справді,

$$M\left(\left(\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} - U\varphi'(t)\right)^2\right) = M\left(\left(\frac{U\varphi(t+h) - U\varphi(t)}{h} - U\varphi'(t)\right)^2\right) =$$

$$M\left(U^2\left(\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} - \varphi'(t)\right)^2\right) = \left(\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} - \varphi'(t)\right)^2 M(U^2) \rightarrow 0$$

при  $h \rightarrow 0$ , бо перший (невипадковий) множник прямує до нуля, а другий – обмежений.

## 5.2. ВЛАСТИВОСТІ С.К. ПОХІДНОЇ

1. Якщо існують с.к. похідні декількох випадкових функцій, то с.к. похідна їх суми дорівнює сумі с.к. похідних від доданків,

$$(\xi(t) + \eta(t))' = \xi'(t) + \eta'(t) \quad (5.4)$$

2. Сталій множник можна винести за знак с.к. похідної,

$$(C\xi(t))' = C\xi'(t). \quad (5.5)$$

Доведення обох властивостей випливає з означення с.к. похідної та властивостей 6, 7 с.к. границі.

За умови існування с.к. похідної  $\xi'(t)$  справедливими є наступні три властивості.

3. Існує похідна математичного сподівання функції  $\xi(t)$ , причому

$$m_{\xi'}(t) = M(\xi'(t)) = (M(\xi(t)))'_t = m'(t), \quad (5.6)$$

тобто знак математичного можна вносити під знак с.к. похідної з перетворенням останньої на звичайну похідну.

Дійсно, відповідно формулі (4.12)

$$\begin{aligned} M(\xi'(t)) &= M\left(\underset{h \rightarrow 0}{l.i.m.} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} M\left(\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}\right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{M(\xi(t+h)) - M(\xi(t))}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(t+h) - m(t)}{h} = m'(t). \end{aligned}$$

4. Для довільної випадкової величини  $U$

$$M(U\xi'(t)) = (M(U\xi(t)))'_t. \quad (5.7)$$

Доведення цього узагальнення формули (5.6) випливає з формули (4.13), а саме:

$$\begin{aligned} M(U\xi'(t)) &= M\left(\underset{h \rightarrow 0}{U l.i.m.} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} M\left(U \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}\right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{M(U\xi(t+h)) - M(U\xi(t))}{h}\right) = (M(U\xi(t)))'_t. \end{aligned}$$

5. Існує с.к. похідна центрованої випадкової функції, рівна

$$\overset{0}{\xi}'(t) = \xi'(t) - m'(t). \quad (5.8)$$

Властивість є наслідком властивостей 1-3 с.к. похідної. З властивостей 1, 3 випливає ще одна властивість.

6. Якщо існують с.к. похідна  $\overset{0}{\xi}'(t)$  та похідна  $m'(t)$ , то випадкова функція  $\xi(t)$  диференційовна і

$$\xi'(t) = \overset{0}{\xi}'(t) + m'(t).$$

Приклад 5.2. На диференційуючий механізм надходить випадкова функція, зображена своїм канонічним розкладом (2. 24). Знайти перетворену функцію та її характеристики.

Розв'язання. Користуючись властивостями с.к. похідної та результатами прикладу 5.1, дістаємо канонічний розклад с.к. похідної

$$\xi'(t) = m'(t) + \sum_{i=1}^n U_i \varphi_i'(t),$$

після чого за формулою (2.25) - канонічний розклад її кореляційної функції,

$$K_{\xi'}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \varphi_i'(t_1) \varphi_i'(t_2) D_i, \quad D_i = D(U_i).$$

Зокрема, дисперсія похідної дорівнює

$$D_{\xi'}(t) = K_{\xi'}(t, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i'^2(t) D_i.$$

Приклад 5.3. На вхід динамічної системи (див. п. 2. 7) надходить випадкова функція з канонічним розкладом

$$\xi(t) = t^2 + U_1 \cos t + U_2 \sin t,$$

причому  $D_i = D(U_i) = 3, i = 1, 2, 3..$  Дія системи характеризується лінійним диференціальним оператором

$$\eta(t) = 5t^2 \xi'(t) + 6t^3 \xi(t) + \cos t.$$

Визначити канонічний розклад та характеристики випадкової функції на виході системи.

Розв'язання. Похідна випадкової функції  $\xi(t)$  дорівнює

$$\xi'(t) = 2t - U_1 \sin t + U_2 \cos t,$$

звідки

$$\begin{aligned} \eta(t) &= 5t^2(2t - U_1 \sin t + U_2 \cos t) + 6t^3(t^2 + U_1 \cos t + U_2 \sin t) + \cos t = \\ &= 10t^3 + 6t^5 + \cos t + (6t^3 \cos t - 5t^2 \sin t)U_1 + (5t^2 \cos t + 6t^3 \sin t)U_2. \end{aligned}$$

Отримали канонічний розклад функції  $\eta(t)$ . Тому

$$m_\eta(t) = 10t^3 + 6t^5 + \cos t,$$

а по формулі (2.25)

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= 3(6t_1^3 \cos t_1 - 5t_1^2 \sin t_1)(6t_2^3 \cos t_2 - 5t_2^2 \sin t_2) + \\ &+ 3(5t_1^2 \cos t_1 + 6t_1^3 \sin t_1)(5t_2^2 \cos t_2 + 6t_2^3 \sin t_2). \end{aligned}$$

### 5.3. УМОВИ ІСНУВАННЯ С.К. ПОХІДНОЇ ТА ЇЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Теорема 5.1. Необхідною умовою с.к. диференційовності випадкової функції є її с.к. неперервність.

Доведення. Якщо існує с.к. похідна  $\xi'(t)$  в точці  $t$ , то згідно з властивістю 2 с.к. границі маємо

$$\begin{aligned} M(\xi'^2(t)) &= M\left(\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}\right)^2\right) = \lim_{h \rightarrow 0} M\left(\left(\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}\right)^2\right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M((\xi(t+h) - \xi(t))^2)}{h^2}, \end{aligned}$$

звідки випливає, що  $M((\xi(t+h) - \xi(t))^2) \rightarrow 0$ , тобто  $\lim_{h \rightarrow 0} \xi(t+h) = \xi(t)$ , і функція  $\xi(t)$  с.к. неперервна в точці  $t$ .

Теорема 5.2. Необхідною й достатньою умовою с.к. диференційовності випадкової функції  $\xi(t)$  є диференційовність її математичного сподівання та с.к. диференційовність її центрованої складової  $\overset{0}{\xi}(t)$ .

Справедливість теореми є очевидною з огляду на властивості 5, 6 с.к. похідної. Безпосереднім наслідком теореми 4.3 є така теорема.

Теорема 5.3. Для того щоб центрована випадкова функція  $\overset{0}{\xi}(t)$  мала на відрізку  $[a, b]$  с.к. похідну, необхідно й достатньо, щоб для кожного  $t \in [a, b]$  існувала границя

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} M \left( \frac{\overset{0}{\xi}(t+h_1) - \overset{0}{\xi}(t)}{h_1} \cdot \frac{\overset{0}{\xi}(t+h_2) - \overset{0}{\xi}(t)}{h_2} \right),$$

або, що є тим же самим, - границя

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 h_2} (K(t+h_1, t+h_2) - K(t+h_1, t) - K(t, t+h_2) + K(t, t)). \quad (5.9)$$

Наслідок. Випадкова функція  $\xi(t)$  с.к. диференційовна тоді й тільки тоді, коли існують похідна її математичного сподівання та границя (5.9).

Теорема 5.4. Якщо випадкова функція  $\xi(t)$  с.к. диференційовна на відрізку  $[a, b]$ , то кореляційна функція її с.к. похідної та взаємні кореляційні функції функцій  $\xi(t)$  і  $\xi'(t)$  даються формулами

$$K_{\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1}, \quad (5.10)$$

$$R_{\xi'\xi}(t_1, t_2) = \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_1}, \quad R_{\xi\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} \quad (5.11)$$

Доведення. Відповідно до формули (5.7) маємо

$$R_{\xi'\xi}(t_1, t_2) = M \left( \overset{0}{\xi}'(t_1) \overset{0}{\xi}'(t_2) \right) = \frac{\partial}{\partial t_1} M \left( \overset{0}{\xi}(t_1) \overset{0}{\xi}(t_2) \right) = \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_1};$$

друга з формул (5.11) і формула (5.10) виводяться аналогічно.

Математичне сподівання с. к. похідної  $\xi'(t)$  визначається формулою (5.6).

Доведена теорема та властивість 3 с.к. похідної свідчать, що існування похідних

$$m'(t), \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_1}, \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2}, \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1}, \quad (5.12)$$

котрі фігурують в формулах (5.6), (5.10), (5.11), є необхідною умовою с.к. диференційовності випадкової функції з характеристиками  $m(t)$ ,  $K(t_1, t_2)$ .

Приклад 5.4. Знайти характеристики похідної від елементарної випадкової функції  $\xi_0(t) = U\varphi(t)$ , де  $U$  - центрована випадкова величина, а  $\varphi(t)$  - не-випадкова функція.

Розв'язання. Оскільки  $m_{\xi_0} = 0$  (приклад 2.1),  $m_{\xi_0'} = m_{\xi_0}' = 0$ . Кореляційну функцію можна знайти двома способами.

а) З прикладу 2.8  $K_{\xi_0}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)D(U)$ . Тепер за формулою (5.10)

$$K_{\xi_0'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_{\xi_0}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \varphi'(t_1)\varphi'(t_2)D(U).$$

б) На підставі прикладу 5.1  $\xi_0'(t) = U\varphi'(t)$ , отже  $\overset{0}{\xi_0'}(t) = \xi_0'(t) - m_{\xi_0'}(t) = \xi_0'(t)$ , звідки по формулі (2.14)

$$\begin{aligned} K_{\xi_0'}(t_1, t_2) &= \\ &= M(\xi_0'(t_1)\xi_0'(t_2)) = M(U\varphi'(t_1) \cdot U\varphi'(t_2)) = \varphi'(t_1)\varphi'(t_2)M(U^2) = \varphi'(t_1)\varphi'(t_2)D(U). \end{aligned}$$

Приклад 5.5. Знайти взаємну кореляційну функцію випадкових функцій

$$\eta_1(t) = \varphi_1(t)\xi'(t) + \phi_1(t)\xi(t), \quad \eta_2(t) = \varphi_2(t)\xi'(t) + \phi_2(t)\xi(t),$$

якщо відома кореляційна функція  $K(t_1, t_2)$  випадкової функції  $\xi(t)$ , а  $\varphi_i(t)$ ,  $\phi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , - не-випадкові функції.

Розв'язання. Перш за все

$$m_{\eta_i}(t) = \varphi_i(t)m'(t) + \phi_i(t)m(t), \quad \overset{0}{\eta_i}(t) = \eta_i(t) - m_{\eta_i}(t) = \varphi_i(t)\overset{0}{\xi}'(t) + \phi_i(t)\overset{0}{\xi}(t), \quad i = 1, 2.$$

Користуючись означенням (2.27) ВКФ та властивостями математичного сподівання, а потім, перемінюючи місцями операції с.к. диференціювання та знаходження математичного сподівання, отримуємо

$$R_{\eta_1\eta_2}(t_1, t_2) = R_{\varphi_1\overset{0}{\xi}' + \phi_1\overset{0}{\xi}, \varphi_2\overset{0}{\xi}' + \phi_2\overset{0}{\xi}}(t_1, t_2) = M\left(\overset{0}{\eta}_1(t_1)\overset{0}{\eta}_2(t_2)\right) =$$

$$\begin{aligned}
& M \left( \left( \varphi_1(t_1) \overset{0}{\xi}'(t_1) + \phi_1(t_1) \overset{0}{\xi}(t_1) \right) \left( \varphi_2(t_2) \overset{0}{\xi}'(t_2) + \phi_2(t_2) \overset{0}{\xi}(t_2) \right) \right) = \\
& = \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) M \left( \overset{0}{\xi}'(t_1) \overset{0}{\xi}'(t_2) \right) + \phi_1(t_1) \phi_2(t_2) M \left( \overset{0}{\xi}(t_1) \overset{0}{\xi}(t_2) \right) + \\
& + \varphi_1(t_1) \phi_2(t_2) M \left( \overset{0}{\xi}'(t_1) \overset{0}{\xi}(t_2) \right) + \phi_1(t_1) \varphi_2(t_2) M \left( \overset{0}{\xi}(t_1) \overset{0}{\xi}'(t_2) \right) = \\
& = \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} + \phi_1(t_1) \phi_2(t_2) K(t_1, t_2) + \\
& + \varphi_1(t_1) \phi_2(t_2) \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \phi_1(t_1) \varphi_2(t_2) \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2}
\end{aligned}$$

Зважаючи на формули (5.10), (5.11), можемо остаточно написати

$$R_{\eta\eta_2}(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2) K_{\xi'} + \phi_1(t_1) \phi_2(t_2) K + \varphi_1(t_1) \phi_2(t_2) R_{\xi\xi'} + \phi_1(t_1) \varphi_2(t_2) R_{\xi\xi'}.$$

Приклад 5.6. Пуассонівський та вінерівський процеси (див. пп. 3.4, 3.7, а також приклад 4.4) не є с.к. диференційовними в жодній точці.

Доведення. Обмежимося вінерівським процесом. Для довільного  $t > 0$  при  $t_2 = t$  і  $t_1 \neq t$  його кореляційна функція (3.18) має частинну похідну по  $t_1$ ,

$$\frac{\partial K(t_1, t)}{\partial t_1} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{при } t_1 < t, \\ 0 & \text{при } t_1 > t. \end{cases}$$

Остання при  $t_1 \rightarrow t \pm 0$  зазнає стрибок

$$\frac{\partial K(t+0, t)}{\partial t_1} - \frac{\partial K(t-0, t)}{\partial t_1} = -\sigma^2 < 0,$$

тому в точці  $(t, t)$  не існує частинних похідних (5.12). Згідно з теоремою 5.4 це означає недиференційовність процесу.

Не диференційовними в жодній точці є також випадкові функції, які ми були розглянули в п. 3.5, але про це - пізніше.

Приклад 5.6 показує, що нормальна випадкова функція (а саме такою є вінерівський процес), взагалі кажучи, не має с.к. похідної. Проте з властивостей нормального розподілу випливає, що якщо с.к. похідна  $\xi'(t)$  від нормальної випадкової функції  $\xi(t)$  існує, то  $\xi'(t)$  - також нормальна функція.



## 5.4. С.К. НЕПЕРЕРВНА ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ

Випадкова функція називається с. к. неперервно диференційовною, якщо її с.к. похідна є с.к. неперервною.

Теорема 5.5. Для того, щоб випадкова функція  $\xi(t)$  була с. к. неперервно диференційовною на відрізку  $[a, b]$ , необхідно й достатньо, щоб похідні (5.12), тобто праві частини формул (5.6), (5.10), (5.11) були неперервними при  $t, t_1, t_2 \in [a, b]$ .

Обмежимось доведенням необхідності (достатність вимагає тонкіших міркувань; див., наприклад, [10, стор. 69]).

Нехай с.к. похідна  $\xi'(t)$  є с.к. неперервною. Тоді відповідно до теореми 4. 4 її математичне сподівання (5. 6) та кореляційна функція (5.10) неперервні. Залишається встановити неперервність частинних похідних (5.11). Але при  $t_1 \rightarrow t_{10}, t_2 \rightarrow t_{20}$  маємо

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_1} - \frac{\partial K(t_{10}, t_{20})}{\partial t_1} \right| = \left| R_{\xi'\xi}(t_1, t_2) - R_{\xi'\xi}(t_{10}, t_{20}) \right| = \\ & \left| M\left( \overset{0}{\xi}'(t_1) \overset{0}{\xi}'(t_2) \right) - M\left( \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \overset{0}{\xi}'(t_{20}) \right) \right| = \left| M\left( \overset{0}{\xi}'(t_1) \overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \overset{0}{\xi}(t_{20}) \right) \right| = \\ & = \left| M\left( \overset{0}{\xi}'(t_1) \overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \overset{0}{\xi}(t_2) + \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \overset{0}{\xi}(t_{20}) \right) \right| = \\ & = \left| M\left( \left( \overset{0}{\xi}'(t_1) - \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \right) \overset{0}{\xi}(t_2) \right) + M\left( \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \left( \overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_{20}) \right) \right) \right| \leq \\ & \left| M\left( \left( \overset{0}{\xi}'(t_1) - \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \right) \overset{0}{\xi}(t_2) \right) \right| + \left| M\left( \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \left( \overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_{20}) \right) \right) \right| \leq \\ & \leq \sqrt{M\left( \overset{0}{\xi}^2(t_2) \right)} \sqrt{M\left( \left( \overset{0}{\xi}'(t_1) - \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \right)^2 \right)} + \sqrt{M\left( \overset{0}{\xi}'^2(t_{10}) \right)} \sqrt{M\left( \left( \overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_{20}) \right)^2 \right)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Прямуювання до нуля останньої суми спричиняється тим, що

$$M\left( \left( \overset{0}{\xi}'(t_1) - \overset{0}{\xi}'(t_{10}) \right)^2 \right) \rightarrow 0, M\left( \left( \overset{0}{\xi}(t_2) - \overset{0}{\xi}(t_{20}) \right)^2 \right) \rightarrow 0, M\left( \overset{0}{\xi}^2(t_2) \right) \rightarrow M\left( \overset{0}{\xi}^2(t_{20}) \right)$$

(с.к. неперервність функцій  $\xi^0(t_1), \xi^0(t_2)$  та неперервність математичного сподівання  $M\left(\xi^0(t_2)\right)$ , див. п. 4.4, властивість 2). Це означає, що частинна похідна

$\frac{\partial}{\partial t_1} K(t_1, t_2)$  неперервна в точці  $(t_{10}, t_{20})$ . Неперервність  $\frac{\partial}{\partial t_2} K(t_1, t_2)$  доводиться

аналогічно.

Приклад 5.7. Випадкова функція  $\xi(t)$  з характеристиками

$$m(t) = \sin t, K(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}, \alpha > 0,$$

є с.к. неперервно диференційованою на  $(-\infty, \infty)$  внаслідок неперервності похідних  $m'(t)$ ,

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_1} = 2\alpha\sigma^2(t_2 - t_1)e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}, \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} = -2\alpha\sigma^2(t_2 - t_1)e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = 2\alpha\sigma^2 e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2} (1 - 2\alpha(t_2 - t_1)^2)$$

Характеристиками с.к. похідної  $\xi'(t)$  є функції  $m_{\xi'}(t) = m'(t) = \cos t$ ,

$$K_{\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = 2\alpha\sigma^2 e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2} (1 - 2\alpha(t_2 - t_1)^2),$$

$$D_{\xi'}(t) = K_{\xi'}(t, t) = 2\alpha\sigma^2.$$

Залежність дисперсії  $D_{\xi'}(t)$  не тільки від  $D(t) = \sigma^2$ , але й від  $\alpha$  свідчить, що для знаходження дисперсії с.к. похідної недостатньо знати тільки дисперсію вихідної функції: потрібна ще й її кореляційна функція.

Вираз для  $K_{\xi'}(t_1, t_2)$  показує, що з зменшенням  $\alpha$  кореляційний зв'язок між перерізами  $\xi'(t_1), \xi'(t_2)$  с.к. похідної зменшується. Він також зменшується, причому необмежено, з зростанням відстані між  $t_1$  і  $t_2$ .

## 5.5. С.К. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ТА ЇХ

### ХАРАКТЕРИСТИКИ

С.к. похідною другого порядку від випадкової функції  $\xi(t)$  називається

с.к. похідна від її с.к. похідної,

$$\xi''(t) = (\xi'(t))' = l.i.m._{h \rightarrow 0} \frac{\xi'(t+h) - \xi'(t)}{h}.$$

Необхідною умовою існування  $\xi''(t) = (\xi'(t))'$  є с.к. неперервність  $\xi'(t)$  (пор. теорему 5.1).

Аналогічно означається с.к. похідна  $n$ -го порядку,

$$\xi^{(n)}(t) = (\xi^{(n-1)}(t))'.$$

Теорема 5.6. Для того, щоб випадкова функція  $\xi(t)$  з характеристиками  $m(t), K(t_1, t_2)$  мала на відрізку  $[a, b]$  с.к. неперервні похідні до  $n$ -го порядку включно, необхідно й достатньо, щоб існували неперервні похідні

$$m^{(k)}(t), \frac{\partial^{k+l} K(t_1, t_2)}{\partial t_1^k \partial t_2^l} \quad (5.13)$$

при  $k \leq n, l \leq n, t, t_1, t_2 \in [a, b]$ .

Неважко переконатись (зробіть це самостійно), що математичне сподівання, кореляційна та взаємні кореляційні функції для с.к. похідних вищих порядків визначаються формулами

$$M(\xi^{(k)}(t)) = m_{\xi^{(k)}}(t) = m^{(k)}(t), \quad (5.14)$$

$$K_{\xi^{(k)}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{2k} K(t_1, t_2)}{\partial t_1^k \partial t_2^k}, \quad (5.15)$$

$$R_{\xi^{(k)}\xi^{(l)}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{k+l} K(t_1, t_2)}{\partial t_1^k \partial t_2^l}. \quad (5.16)$$

При їх доведенні використовуються, як і раніше, формули (5.6), (5.7), що "дозволяють" внесення знаку математичного сподівання під знак с.к. похідної.

Надалі в питаннях, які стосуються середньоквадратичних граничних переходів, ми здебільшого опускатимемо аббревіатуру с.к., якщо, звичайно, це не спричинятиме непорозумінь.

## 5.6. ЛІНІЙНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР ВІД ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Лінійним диференціальним (або ж диференціальним) оператором  $n$ -го порядку від  $n$  разів диференційовної випадкової функції  $\xi(t)$  називається випадкова функція

$$\begin{aligned} \chi(t) &= L[\xi(t)] = \sum_{k=0}^n a_k(t) \xi^{(k)}(t) = \\ &= a_n(t) \frac{d^n \xi(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} \xi(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{d\xi(t)}{dt} + a_0(t) \xi(t), \end{aligned} \quad (5.17)$$

де коефіцієнти  $a_k(t)$  - не випадкові функції. Якщо ввести позначення

$$p = \frac{d}{dt}, \quad (5.18)$$

$$P_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1(t) + a_0(t), \quad (5.19)$$

то оператор можна переписати в більш короткому й зручному символічному, або операторному, вигляді

$$\chi(t) = P_n(p) \xi(t). \quad (5.20)$$

Нашою задачею є отримання характеристик функції  $\chi(t)$ , якщо відомі характеристики  $m(t), K(t_1, t_2)$  випадкової функції  $\xi(t)$ .

Математичне сподівання знаходиться з урахуванням його властивостей та формули (5.14),

$$m_\chi(t) = a_n(t) m^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) m^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) m'(t) + a_0(t) m(t),$$

тобто

$$m_\chi(t) = L[m(t)] = P_n(p) m(t) = \sum_{k=0}^n a_k(t) m^{(k)}(t). \quad (5.21)$$

Формула (5.21) свідчить, що для знаходження математичного сподівання оператора  $L$  від випадкової функції треба застосувати цей же оператор до математичного сподівання самої функції.

Далі, центрована випадкова функція  $\chi^0(t)$  дорівнює

$$\begin{aligned}\chi^0(t) &= \chi(t) - m_\chi(t) = \sum_{k=0}^n a_k(t) \chi^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^n a_k(t) m^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n a_k(t) (\chi^{(k)}(t) - m^{(k)}(t)) = \\ &= \sum_{k=0}^n a_k(t) (\chi(t) - m(t))^{(k)} = \sum_{k=0}^n a_k(t) \xi^{0(k)}(t), \\ \chi^0(t) &= L \left[ \xi^0(t) \right] = P_n(p) \xi^0(t) = \sum_{k=0}^n a_k(t) \xi^{0(k)}(t),\end{aligned}\quad (5.22)$$

а тому кореляційну функцію  $K_\chi(t_1, t_2)$  можна дістати згідно з формулою (2.14).

Маємо

$$\begin{aligned}K_\chi(t_1, t_2) &= M \left( \chi^0(t_1) \chi^0(t_2) \right) = M \left( \sum_{k=0}^n a_k(t_1) \xi^{0(k)}(t_1) \cdot \sum_{l=0}^n a_l(t_2) \xi^{0(l)}(t_2) \right) = \\ &= M \left( \sum_{k,l=0}^n a_k(t_1) a_l(t_2) \xi^{0(k)}(t_1) \xi^{0(l)}(t_2) \right) = \sum_{k,l=0}^n M \left( a_k(t_1) a_l(t_2) \xi^{0(k)}(t_1) \xi^{0(l)}(t_2) \right) = \\ &= \sum_{k,l=0}^n a_k(t_1) a_l(t_2) M \left( \xi^{0(k)}(t_1) \xi^{0(l)}(t_2) \right) = \sum_{k,l=0}^n a_k(t_1) a_l(t_2) \frac{\partial^{k+l}}{\partial t_1^k \partial t_2^l} M \left( \xi^0(t_1) \xi^0(t_2) \right).\end{aligned}$$

Оскільки  $M \left( \xi^0(t_1) \xi^0(t_2) \right) = K(t_1, t_2)$ , доводимо остаточного результату

$$K_\chi(t_1, t_2) = \sum_{k,l=0}^n a_k(t_1) a_l(t_2) \frac{\partial^{k+l} K(t_1, t_2)}{\partial t_1^k \partial t_2^l} = \sum_{k,l=0}^n a_k(t_1) a_l(t_2) K_{t_1^k t_2^l}^{(k+l)}(t_1, t_2). \quad (5.23)$$

Існують інші способи виведення формули (5.23). Один з них заснований на формулі (2.39) (або (2.23), якщо  $n=1$ ). Другий полягає в послідовному застосуванні оператора  $L$ : спочатку до кореляційної функції  $K(t_1, t_2)$  по одній з змінних  $t_1, t_2$ , а потім - до результату по другій змінній,

$$K_\chi(t_1, t_2) = L_{t_2} [L_{t_1} [K(t_1, t_2)]] = L_{t_1} [L_{t_2} [K(t_1, t_2)]] \quad (5.24)$$

В операторному вигляді те ж саме можна записати таким чином

$$K_\chi(t_1, t_2) = P_n(p_2, t_2) (P_n(p_1, t_1) K(t_1, t_2)) = P_n(p_1, t_1) (P_n(p_2, t_2) K(t_1, t_2)),$$

де

$$p_1 = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad p_2 = \frac{\partial}{\partial t_2},$$

а позначення  $P_n(p_i, t_i)$  означає, що в операторі (5.17) треба букву  $t$  замінити буквою  $t_i, i = 1, 2$ .

Приклад 5.8. Нехай  $n = 1$ , тобто

$$\chi(t) = L[\xi(t)] = P_1(p)\xi(t) = a_1(t)\xi'(t) + a_0(t)\xi(t).$$

На підставі формули (5.21)

$$m_\chi(t) = L[m(t)] = P_1(p)m(t) = a_1(t)m'(t) + a_0(t)m(t).$$

Кореляційну функцію  $K_\chi(t_1, t_2)$  визначимо трьома способами.

а) Перш за все за основною формулою (5.23)

$$K_\chi(t_1, t_2) = a_0(t_1)a_0(t_2)K(t_1, t_2) + a_1(t_1)a_0(t_2)K'_{t_1}(t_1, t_2) + \\ + a_0(t_1)a_1(t_2)K'_{t_2}(t_1, t_2) + a_1(t_1)a_1(t_2)K''_{t_1 t_2}(t_1, t_2).$$

б) Далі, згідно з формулою (5.24) або її операторним аналогом

$$L_{t_1}[K] = P_1(p_1, t_1)K = a_1(t_1)K'_{t_1} + a_0(t_1)K,$$

$$L_{t_2}[L_{t_1}[K]] =$$

$$= P_1(p_2, t_2)(P_1(p_1, t_1)K) = a_1(t_2)(a_1(t_1)K'_{t_1} + a_0(t_1)K)'_{t_2} + a_0(t_2)(a_1(t_1)K'_{t_1} + a_0(t_1)K) = \\ = a_1(t_1)a_1(t_2)K''_{t_1 t_2} + a_0(t_1)a_1(t_2)K'_{t_2} + a_0(t_2)a_1(t_1)K'_{t_1} + a_0(t_1)a_0(t_2)K.$$

в) Нарешті, по формулі (2.23), а потім – по формулах (5.10), (5.11)

$$K_\chi(t_1, t_2) = K_{a_1 \xi'} + K_{a_0 \xi} + R_{a_1 \xi', a_0 \xi} + R_{a_0 \xi, a_1 \xi'} = \\ = a_1(t_1)a_1(t_2)K_{\xi'} + a_0(t_1)a_0(t_2)K_\xi + a_1(t_1)a_0(t_2)R_{\xi' \xi} + a_0(t_1)a_1(t_2)R_{\xi \xi'} = \\ = a_1(t_1)a_1(t_2)K''_{t_1 t_2} + a_0(t_1)a_0(t_2)K + a_1(t_1)a_0(t_2)K'_{t_1} + a_0(t_1)a_1(t_2)K'_{t_2}.$$

Звичайно, всі три способи ведуть до одного й того ж результату. Пропонуємо застосувати ще один спосіб - той, яким ми тут вивели формулу (5.23).

Приклад 5.9. Доведіть самостійно, що якщо до лінійного оператора з прикладу 5.8 додати випадкову величину  $U$ , некорельовану з  $\xi(t)$ , то кореляційна функція  $K_\chi$  збільшиться на величину дисперсії величини  $U$ .

Приклад 5.10. Для випадку  $n = 2$ , коли

$$\chi(t) = L[\xi(t)] = P_2(p)\xi(t) = a_2(t)\xi''(t) + a_1(t)\xi'(t) + a_0(t)\xi(t),$$

по формулі (5.21)

$$m_{\chi}(t) = a_2(t)m''(t) + a_1(t)m'(t) + a_0(t)m(t),$$

а по формулі (5.23)

$$\begin{aligned} K_{\chi}(t_1, t_2) = & \\ = & a_0(t_1)a_0(t_2)K + a_1(t_1)a_0(t_2)K'_{t_1} + a_0(t_1)a_1(t_2)K'_{t_2} + a_2(t_1)a_0(t_2)K''_{t_1^2} + a_1(t_1)a_1(t_2)K''_{t_1t_2} + \\ & + a_0(t_1)a_2(t_2)K''_{t_2^2} + a_2(t_1)a_1(t_2)K'''_{t_1^2t_2} + a_1(t_1)a_2(t_2)K'''_{t_1t_2^2} + a_2(t_1)a_2(t_2)K^{(4)}_{t_1^2t_2^2}. \end{aligned}$$

## РОЗДІЛ 6

# С.К. ІНТЕГРОВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

## 6.1. СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНИЙ ІНТЕГРАЛ ВІД ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай випадкова функція  $\xi(t)$  розглядається на відрізку  $[a, b]$  осі  $t$ . Розбиваючи  $[a, b]$  на  $n$  частин точками

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b,$$

утворимо інтегральну суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \xi(t_i^*) \Delta t_i,$$

де  $t_i^* \in (t_{i-1}, t_i]$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ . Якщо існує с.к. границя  $I$  інтегральної суми  $\sigma$  при  $\lambda = \max \Delta t_i \rightarrow 0$ , то випадкова функція  $\xi(t)$  називається інтегрованою в середньому квадратичному (с.к. інтегрованою) на відрізку  $[a, b]$ , а величина  $I$  - с. к. інтегралом функції  $\xi(t)$  на  $[a, b]$ ,

$$I = \int_a^b \xi(t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma. \quad (6.1)$$

С.к. інтеграл  $I$  є, вочевидь, випадковою величиною. За сенсом с.к. границі передбачається виконання умови

$$M(I^2) < \infty.$$

Приклад 6.1. С.к. інтеграл від випадкової функції

$$\xi(t) = U\varphi(t),$$

де  $U$  - випадкова величина, а  $\varphi(t)$  - не випадкова функція, інтегровна (за Ріманом) на відрізку  $[a, b]$ , дорівнює

$$\int_a^b \xi(t) dt = U \int_a^b \varphi(t) dt.$$



Дійсно, інтегральна сума  $\sigma$  функції  $\xi(t)$  дорівнює  $U\sigma_\varphi$ , де  $\sigma_\varphi$  - інтегральна сума функції  $\varphi(t)$ , звідки

$$M\left(\left(\sigma - U\int_a^b \varphi(t)dt\right)^2\right) = M\left(U^2\left(\sigma_\varphi - \int_a^b \varphi(t)dt\right)^2\right) = \left(\sigma_\varphi - \int_a^b \varphi(t)dt\right)^2 M(U^2) \rightarrow 0$$

при  $\lambda \rightarrow 0$ , тому що

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_\varphi = \int_a^b \varphi(t)dt, \quad M(U^2) < \infty,$$

а вираз

$$\left(\sigma_\varphi - \int_a^b \varphi(t)dt\right)^2$$

винесено за знак математичного сподівання, як не випадкову функцію.

## 6.2. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ С.К. ІНТЕГРАЛА

1. Якщо  $\xi_1(t), \xi_2(t)$  - с.к. інтегровні на  $[a, b]$  випадкові функції, то

$$\int_a^b (\xi_1(t) + \xi_2(t))dt = \int_a^b \xi_1(t)dt + \int_a^b \xi_2(t)dt.$$

2. Для довільної сталої  $C$  і с.к. інтегровної функції  $\xi(t)$

$$\int_a^b C\xi(t)dt = C \int_a^b \xi(t)dt.$$

Властивості лінійності 1, 2 доводяться на підставі означення с.к. інтеграла та властивостей 6, 7 с.к. границі.

3. Якщо  $m(t)$  - математичне сподівання с.к. інтегровної на  $[a, b]$  випадкової функції  $\xi(t)$ , то математичне сподівання її с.к. інтеграла дорівнює звичайному інтегралові від  $m(t)$ ,

$$M(I) = M\left(\int_a^b \xi(t)dt\right) = \int_a^b m(t)dt. \quad (6.2)$$

Доведення. Оскільки на підставі (4.5) з нерівності  $M(I^2) < \infty$  випливає нерівність  $|M(I)| < \infty$ , то інтеграл (6.1) має скінченне математичне сподівання. Отже, йдеться тільки про його обчислення. Відповідно властивості 3 с.к. границі маємо

$$\begin{aligned} M(I) &= M\left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} l.i.m. \sigma\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} M(\sigma) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} M\left(\sum_{i=1}^n \xi(t_i^*) \Delta t_i\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M(\xi(t_i^*)) \Delta t_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m(t_i^*) \Delta t_i = \int_a^b m(t) dt, \end{aligned}$$

що й вимагалось. Існування інтеграла від  $m(t)$  забезпечене існуванням математичного сподівання  $M(I)$ .

Формула (6.2) обґрунтовує можливість внесення математичного сподівання під знак с.к. інтеграла.

4. Якщо випадкова функція  $\xi(t)$  с.к. інтегровна на  $[a, b]$ , то її центрована складова  $\overset{0}{\xi}(t)$  також с.к. інтегровна, причому

$$\int_a^b \overset{0}{\xi}(t) dt = \int_a^b \xi(t) dt - \int_a^b m(t) dt = \overset{0}{I}. \quad (6.3)$$

Властивість 4 є простим наслідком трьох попередніх.

5. Дисперсія с.к. інтеграла (6.1) дорівнює звичайному подвійному інтегралу від кореляційної функції підінтегральної випадкової функції  $\xi(t)$ ,

$$D(I) = \int_a^b \int_a^b K(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (6.4)$$

Доведення. Дисперсія  $D(I)$  існує, бо за умови  $M(I^2) < \infty$  нерівність (4.7) дає  $M\left(\overset{0}{I}{}^2\right) < \infty$ . Згідно з формулами (6.3), (2.7) і властивістю 5 с.к. границі (формула (4.14)) маємо

$$D(I) = M\left(\overset{0}{I}{}^2\right) = M\left(\left(\int_a^b \overset{0}{\xi}(t) dt\right)^2\right) = M\left(\left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} l.i.m. \sum_{i=1}^n \overset{0}{\xi}(t_i^*) \Delta t_i\right)^2\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} M\left(\left(\sum_{i=1}^n \overset{0}{\xi}(t_i^*) \Delta t_i\right)^2\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} M \left( \sum_{i=1}^n \xi^0(t_i^*) \Delta t_i \sum_{j=1}^n \xi^0(t_j^*) \Delta t_j \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} M \left( \sum_{i,j=1}^n \xi^0(t_i^*) \xi^0(t_j^*) \Delta t_i \Delta t_j \right) = \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \sum_{i,j=1}^n M \left( \xi^0(t_i^*) \xi^0(t_j^*) \right) \Delta t_i \Delta t_j \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \sum_{i,j=1}^n K(t_i^*, t_j^*) \Delta t_i \Delta t_j \right) = \int_a^b \int_a^b K(t_1, t_2) dt_1 dt_2,
\end{aligned}$$

що й треба було показати. Інтегровність кореляційної функції, себто існування границі інтегральної суми подвійного інтеграла від  $K(t_1, t_2)$  зумовлена існуванням дисперсії  $D(I)$ .

Зауваження 6.1. Формула (6.4) є одним з дуже часто вживаних надалі результатів. Щоб запобігти громіздких перетворень задля їх виведення, відзначимо досить просте (своєрідне мнемонічне) правило, яке дозволяє зразу написати потрібну формулу.

Стосовно  $D(I)$  правило полягає в формальній заміні  $I^2$  подвійним інтегралом і внесенні під його знак математичного сподівання, тобто

$$\begin{aligned}
D(I) &= M \left( I^2 \right) = M \left( \int_a^b \xi^0(t_1) dt_1 \int_a^b \xi^0(t_2) dt_2 \right) = M \left( \int_a^b \int_a^b \xi^0(t_1) \xi^0(t_2) dt_1 dt_2 \right) = \\
&= \int_a^b \int_a^b M \left( \xi^0(t_1) \xi^0(t_2) \right) dt_1 dt_2 = \int_a^b \int_a^b K(t_1, t_2) dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Як ще один приклад знайдемо кореляційний момент с.к. інтегралів від двох випадкових функцій  $\xi(t), \eta(t)$ ,

$$\begin{aligned}
K(I_\xi, I_\eta) &= M \left( I_\xi, I_\eta \right) = M \left( \int_a^b \xi^0(t_1) dt_1 \int_a^b \eta^0(t_2) dt_2 \right) = M \left( \int_a^b \int_a^b \xi^0(t_1) \eta^0(t_2) dt_1 dt_2 \right) = \\
&= \int_a^b \int_a^b M \left( \xi^0(t_1) \eta^0(t_2) \right) dt_1 dt_2 = \int_a^b \int_a^b R_{\xi\eta}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

### 6.3. ІСНУВАННЯ С.К. ІНТЕГРАЛА

Теорема 6.1. Для с.к. інтегровності випадкової функції на відрізку  $[a, b]$  необхідно й достатньо, щоб для будь-яких двох інтегральних сум

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \xi(t_i^*) \Delta t_i', \quad \sigma_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \xi(t_j^{**}) \Delta t_j''$$

$$(a = t'_0 \leq t_1^* \leq t'_1 \leq t_2^* \leq t'_2 \leq \dots \leq t'_{n_1-1} \leq t_{n_1}^* \leq t'_{n_1} = b, \quad \lambda_1 = \max \Delta t'_i,$$

$$a = t''_0 \leq t_1^{**} \leq t''_1 \leq t_2^{**} \leq t''_2 \leq \dots \leq t''_{n_2} \leq t_{n_2}^{**} \leq t''_{n_2} = b, \quad \lambda_2 = \max \Delta t''_j)$$

існувала границя

$$\lim_{\lambda_1, \lambda_2} M(\sigma_1 \sigma_2). \quad (6.5)$$

Справедливість теореми заснована на загальній теоремі 4.3.

Теорема 6.2. Для існування с.к. інтеграла (6.1) від випадкової функції  $\xi(t)$  з характеристиками  $m(t)$ ,  $K(t_1, t_2)$  необхідно й достатньо існування звичайних інтегралів

$$\int_a^b m(t) dt, \quad \int_a^b \int_a^b K(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (6.6)$$

Необхідність існування інтегралів (6.6) вже встановлено в п. 6.2 при доведенні властивостей 2, 4. Достатність стає очевидною, якщо математичне сподівання  $M(\sigma_1 \sigma_2)$  переписати у вигляді

$$M(\sigma_1 \sigma_2) = M\left(\sum_{i,j} \xi(t_i^*) \xi(t_j^{**}) \Delta t'_i \Delta t''_j\right) = \sum_{i,j} M(\xi(t_i^*) \xi(t_j^{**})) \Delta t'_i \Delta t''_j =$$

$$= \sum_{i,j} (K(t_i^*, t_j^{**}) + m(t_i^*) m(t_j^{**})) \Delta t'_i \Delta t''_j = \sum_{i,j} K(t_i^*, t_j^{**}) \Delta t'_i \Delta t''_j + \sum_i m(t_i^*) \Delta t'_i + \sum_j m(t_j^{**}) \Delta t''_j.$$

Звідси вбачаємо, що існування інтегралів (6.6) спричиняє існування границі (6.5), а саме

$$\lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0} M(\sigma_1 \sigma_2) = \int_a^b \int_a^b K(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \left(\int_a^b m(t) dt\right)^2 = \int_a^b \int_a^b K(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + M^2(I),$$

що й означає існування інтеграла (6.1).

Зауважимо, що оскільки

$$M(I^2) - M^2(I) = D(I),$$

$$\lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0} M(\sigma_1 \sigma_2) = M\left(\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sigma_1 \cdot \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sigma_2\right) = M\left(\left(\int_a^b \xi(t) dt\right)^2\right) = M(I^2),$$

ми іншим шляхом приходимо до формули (6.4).

## 6.4. ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ. ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

### 6.4.1. С.к. інтеграл з змінною верхньою межею інтегрування

В застосуваннях часто зустрічається с.к. інтеграл з змінною верхньою межею інтегрування

$$\eta(t) = \int_a^t \xi(t') dt', \quad (6.7)$$

який вочевидь є випадковою функцією від  $t$ .

Якщо  $\xi(t)$  - нормальна випадкова функція, то, як виходить з властивостей нормального розподілу, с.к. інтеграл (6.7) є також нормальною функцією.

Приклад 6.2. На вхід інтегруючого за формулою (6.7) механізму надходить випадкова функція, зображена своїм канонічним розкладом (2.24). Знайти канонічний розклад та характеристики випадкової функції  $\eta(t)$  на виході.

Розв'язання. Канонічний розклад інтеграла є наслідком лінійності та результату прикладу 6.1,

$$\eta(t) = \int_a^t \xi(t') dt' = \int_a^t m(t') dt' + \sum_{i=1}^n U_i \int_a^t \varphi_i(t') dt', \quad m_\eta(t) = \int_a^t m(t') dt'.$$

Канонічний розклад кореляційної функції  $K_\eta(t_1, t_2)$  за формулою (2.25)

$$K_\eta(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n D_i \int_a^{t_1} \varphi_i(t') dt' \int_a^{t_2} \varphi_i(t'') dt'' = \sum_{i=1}^n D_i \int_a^{t_1} \varphi_i(t') \varphi_i(t'') dt' dt''.$$

Знайдемо характеристики с.к. інтеграла (6.7). Математичне сподівання отримаємо внесенням знаку математичного сподівання під знак с.к. інтеграла, можливість чого обґрунтовувалась в п. 6.2 (властивість 3),

$$m_\eta(t) = M \left( \int_a^t \xi(t') dt' \right) = \int_a^t m(t') dt'. \quad (6.8)$$

Можна було б просто замінити в формулі (6.2) верхню межу  $b$  на  $t$ . Формулу для обчислення кореляційної функції  $K_\eta(t_1, t_2)$  знайдемо, виходячи з зауваження 6.1 (наприкінці п. 6.2), а саме

$$\begin{aligned} \overset{0}{\eta}(t) &= \eta(t) - m_\eta(t) = \int_a^t (\xi(t') - m(t')) dt' = \int_a^t \overset{0}{\xi}(t') dt', \\ K_\eta(t_1, t_2) &= M\left(\overset{0}{\eta}(t_1)\overset{0}{\eta}(t_2)\right) = M\left(\int_a^{t_1} \overset{0}{\xi}(t') dt' \int_a^{t_2} \overset{0}{\xi}(t'') dt''\right) = \\ &= M\left(\int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \overset{0}{\xi}(t') \overset{0}{\xi}(t'') dt' dt''\right) = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} M\left(\overset{0}{\xi}(t') \overset{0}{\xi}(t'')\right) dt' dt''. \end{aligned}$$

Остаточно

$$K_\eta(t_1, t_2) = K_{\int_a^t \overset{0}{\xi}(t') dt'}(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} K(t', t'') dt' dt''. \quad (6.9)$$

Такий же результат мали б, замінивши в правій частині формули (6.4) одну букву  $b$  буквою  $t_1$ , а другу – буквою  $t_2$ . Звичайно, якби йшлося про строге виведення, треба було б здійснити міркування, аналогічні використаним при доведенні формули (6.4).

Існування інтегралів в правій частині формул (6.8), (6.9) є, згідно з п. 6.3, необхідною й достатньою умовою існування с.к. інтеграла (6.7).

Приклад 6.3. Взаємні кореляційні функції випадкової функції та її с.к. інтеграла (6.7) від неї дорівнюють

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_a^{t_2} K(t_1, t') dt', \quad R_{\eta\xi}(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} K(t', t_2) dt'.$$

Дійсно, за формулою (2.27) та зауваженням 6.1

$$\begin{aligned} R_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{\eta}(t_2)\right) = M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\int_a^{t_2} \overset{0}{\xi}(t') dt'\right) = M\left(\int_a^{t_2} \overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{\xi}(t') dt'\right) = \\ &= \int_a^{t_2} M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{\xi}(t')\right) dt' = \int_a^{t_2} K(t_1, t') dt'; \end{aligned}$$

аналогічно знаходиться  $R_{\eta\xi}(t_1, t_2)$ .

Приклад 6.4. Взаємні кореляційні функції похідної  $\zeta(t) = \xi'(t)$  та с.к. інтеграла (6.7) від випадкової функції  $\xi(t)$  дорівнюють

$$R_{\zeta\eta}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_a^{t_2} K(t_1, t') dt', \quad R_{\eta\zeta}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} \int_a^{t_1} K(t', t_2) dt'.$$

Знайдемо  $R_{\zeta\eta}$  ( $R_{\eta\zeta}$  отримаєте самостійно);

$$\begin{aligned} R_{\zeta\eta}(t_1, t_2) &= M\left(\overset{0}{\zeta}(t_1)\overset{0}{\eta}(t_2)\right) = M\left(\overset{0}{\xi}'(t_1)\int_a^{t_2}\overset{0}{\xi}(t')dt'\right) = \frac{\partial}{\partial t_1} M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\int_a^{t_2}\overset{0}{\xi}(t')dt'\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1} M\left(\int_a^{t_2}\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{\xi}(t')dt'\right) = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_a^{t_2} M\left(\overset{0}{\xi}(t_1)\overset{0}{\xi}(t')\right) dt' = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_a^{t_2} K(t_1, t') dt'. \end{aligned}$$

Приклад 6.5. Знайдіть характеристики випадкової функції

$$\chi(t) = \xi(t) + \int_a^t \xi(t') dt' + \xi'(t),$$

якщо відомі характеристики випадкової функції  $\xi(t)$ .

Вказівка. Скористайтеся результатами п. 2.7 та двох попередніх прикладів.

## 6.4.2. Інтеграл від добутку випадкової функції на не випадкову

Часто зустрічаються с.к. інтеграли від добутку випадкової функції на не випадкову.

Приклад 6.6. Знайти характеристики с.к. інтеграла

$$\eta(t) = \int_a^t \varphi(t') \xi(t') dt', \quad (6.10)$$

де  $\varphi(t)$  - не випадкова функція, а  $\xi(t)$  - випадкова функція з характеристиками  $m(t)$ ,  $K(t_1, t_2)$ .

Розв'язання. Математичне сподівання дорівнює

$$m_\eta(t) = M\left(\int_a^t \varphi(t') \xi(t') dt'\right) = \int_a^t M(\varphi(t') \xi(t')) dt' = \int_a^t \varphi(t') m(t') dt'.$$

Кореляційну функцію можна дістати двома способами – використовуючи або зауваження 6.1, або властивості кореляційної функції. За другим способом (перший здійсніть самостійно) маємо

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} K_{\varphi\xi}(t', t'') dt' dt'' = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \varphi(t') \varphi(t'') K(t', t'') dt' dt''.$$

При  $t_1 = t_2 = t$  отримуємо дисперсію с.к. інтеграла (6.10),

$$D_{\eta}(t) = K_{\eta}(t, t) = \int_a^t \int_a^t \varphi(t') \varphi(t'') K(t', t'') dt' dt''.$$

Подвійний інтеграл тут повинен бути невід'ємним, що доводить справедливості нерівності (2.18) з п. 2.3 (властивість 5 кореляційної функції).

Приклад 6.7. Доведіть двома способами, що характеристики с.к. інтеграла

$$\zeta(t) = b(t) \int_a^t \varphi(t') \xi(t') dt' + c(t), \quad (6.11)$$

де  $b(t), c(t), \varphi(t)$  - не випадкові функції, дорівнюють

$$m_{\zeta}(t) = b(t) \int_a^t \varphi(t') m(t') dt' + c(t),$$

$$K_{\zeta}(t_1, t_2) = b(t_1) b(t_2) \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \varphi(t') \varphi(t'') K(t', t'') dt' dt''.$$

Тут  $m(t), K(t_1, t_2)$  - характеристики випадкової функції  $\xi(t)$ .

Приклад 6.8. Знайдіть характеристики випадкової функції

$$\eta(t) = b(t) \xi(t) + c(t) \xi'(t) + f(t) \int_a^t g(t') \xi(t') dt' + h(t),$$

в якій  $b(t), c(t), f(t), g(t), h(t)$  - не випадкові функції, а характеристики випадкової функції  $\xi(t)$  задано.

Один із множників під знаком інтеграла може залежати від двох аргументів, наприклад

$$\eta(t) = \int_a^b p(t, t') \xi(t') dt', \quad (6.12)$$



$$\zeta(t) = \int_a^t p(t, t') \xi(t') dt', \quad (6.13)$$

$$\chi(t) = \int_a^b v(z) \xi(t-z) dz. \quad (6.14)$$

( $p(t, t'), v(z)$  - не випадкові,  $\xi(t)$  - випадкова функція). В такому разі кажуть про наявність інтегрального перетворення випадкової функції. Очевидно, всі ці перетворення - випадкові функції.

Приклад 6. 9. Знайти характеристики інтегральних перетворень (6.12), (6.13).

Відповідь

$$m_\eta(t) = \int_a^b p(t, t') m(t') dt',$$

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_a^b \int_a^b p(t_1, t') p(t_2, t'') K(t', t'') dt' dt''.$$

Характеристики другого перетворення отримаємо, змінивши в формулі для  $m_\eta(t)$   $b$  на  $t$  і в формулі для  $K_\eta$  одну букву  $b$  на  $t_1$ , а другу – на  $t_2$ .

Приклад 6.10. Отримати характеристики інтегрального перетворення (6.14).

Відповідь

$$m_\chi(t) = \int_a^b v(z) m(t-z) dz,$$

$$K_\chi(t_1, t_2) = \int_a^b \int_a^b v(z') v(z'') K(t_1 - z', t_2 - z'') dz' dz''.$$

### 6.4.3. Невластиві с.к. інтегралі.

Часто-густо доводиться мати справу з с.к. інтегралами від випадкових функцій, в яких одна з меж інтегрування є нескінченною. Такі інтегралі означаються як с.к. границі відповідних властивих інтегралів, наприклад

$$\int_a^{\infty} \xi(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \xi(t) dt.$$

Необхідною й достатньою умовою існування невластивого с.к. інтеграла є збіжність інтегралів, якими визначаються математичне сподівання й кореляційна функція невластивого інтеграла.

Приклад 6.11. Знайти характеристики випадкової функції

$$\eta(t) = \int_0^{\infty} v(z) \xi(t-z) dz, \quad (6.15)$$

Якщо  $v(t)$  - не випадкова функція, а характеристики випадкової функції  $\xi(t)$  відомі.

Відповідь

$$m_{\eta}(t) = \int_0^{\infty} v(z) m(t-z) dz,$$

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} v(z') v(z'') K(t_1 - z', t_2 - z'') dz' dz''.$$

Приклад 6.12. Знайдіть характеристики с.к. інтеграла

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^t v(t-t') \xi(t') dt'. \quad (6.16)$$

Відповідь

$$m_{\zeta}(t) = \int_{-\infty}^t v(t-t') m(t') dt',$$

$$K_{\zeta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} v(t_1-t') v(t_2-t'') K(t', t'') dt' dt''.$$

## РОЗДІЛ 7

# ПРОХОДЖЕННЯ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ ЧЕРЕЗ ЛІНІЙНУ ДИНАМІЧНУ СИСТЕМУ

### 7. 1. ЛІНІЙНА ДИНАМІЧНА СИСТЕМА. СТІЙКІСТЬ

В технології машинобудування, теорії автоматичного керування та інших галузях науки й техніки часто досліджуються так звані лінійні динамічні системи  $n$ -го порядку, тобто системи, дія яких характеризується лінійним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку. Загальний вигляд такого рівняння

$$a_n(t)\eta^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\eta^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\eta'(t) + a_0(t)\eta(t) = \zeta(t), \quad (7.1)$$

в якому права частина є

$$\zeta(t) = b_m(t)\xi^{(m)}(t) + b_{m-1}(t)\xi^{(m-1)}(t) + \dots + b_1(t)\xi'(t) + b_0(t)\xi(t),$$

$\xi(t)$  -  $m$  разів диференційовна випадкова функція на вході системи,  $\eta(t)$  - шукана випадкова функція на виході, а  $a_k, b_k, k = 0, 1, 2, \dots, n; l = 0, 1, 2, \dots, m$  - коефіцієнти. Останні є невідповідними функціями від  $t$ , але здебільшого ми розглядатимемо випадок сталих коефіцієнтів.

Використовуючи позначення п. 5.6, можна записати рівняння в операторній формі

$$P_n(p)\eta(t) = Q_m(p)\xi(t),$$

де  $p, P_n(p)$  визначені формулами (5.18), (5.19), а

$$Q_m(p) = b_m(t)p^m + b_{m-1}(t)p^{m-1} + \dots + b_1(t)p + b_0(t),$$

Оскільки ми, взагалі кажучи, маємо справу з реальними випадковими процесами, рівняння (7.1) розглядається в сукупності з деякими початковими умовами

$$\eta(t_0) = y_0, \eta'(t_0) = y'_0, \dots, \eta^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (7.2)$$

Величини  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  можуть бути як випадковими (але не залежними від випадкової функції  $\xi(t)$ ), так і невідповідними.

Розв'язок задачі Коші (7.1), (7.2) можна зобразити сумою розв'язку  $\eta_{н.н.}(t)$  вихідного (неоднорідного) рівняння, що задовольняє нульові початкові умови, та розв'язку  $\eta_{о.н.}(t)$  однорідного рівняння

$$P_n(p)\eta(t) \equiv a_n(t)\eta^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\eta^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\eta'(t) + a_0(t)\eta(t) = 0, \quad (7.3)$$

який задовольняє задані початкові умови (7.2). Отже,

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) + \eta_{о.н.}(t). \quad (7.4)$$

Для індексів "н.н." "о.п." тут використано відповідно перші букви слів "неоднорідне", "нульові" та "однорідне", "початкові". Розв'язок  $\eta_{о.н.}(t)$  визначає властивий "рух" динамічної системи, наприклад, властиві коливання коливної системи/, а  $\eta_{н.н.}(t)$  - вимушений "рух" (або реакцію системи на дію зовнішніх чинників). Залежно від того, чи початкові умови є не випадковими або випадковими,  $\eta_{о.н.}(t)$  є не випадковою або випадковою функцією.

Динамічна система називається **стійкою** (асимптотично стійкою), якщо властивий її "рух" достатньо швидко згасає з часом, тобто розв'язок  $\eta_{о.н.}(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  прямує до нуля, в звичайному розумінні або (при випадкових початкових умовах) в середньому квадратичному. За наявності стійкої динамічної системи можна знехтувати розв'язком  $\eta_{о.н.}(t)$  і для достатньо великих  $t$  шукати та досліджувати лише розв'язок  $\eta_{н.н.}(t)$ .

З теорії лінійних диференціальних рівнянь відомо, що при  $n > 1$

$$\eta_{о.н.}(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t), \quad (7.5)$$

де  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  - лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння (7.3) (фундаментальна система розв'язків, ФСР). Величини  $C_1, C_2, \dots, C_n$  визначаються початковими умовами і є випадковими чи не випадковими залежно від випадковості або не випадковості останніх.

У випадку сталих дійсних коефіцієнтів  $a_k, k = \overline{0, n}$ , розв'язки  $y_k(t)$  мають вигляд  $t^s e^{rt}$  ( $s \geq 0$ ), якщо  $r$  - дійсний корінь характеристичного рівняння

$$P_n(r) \equiv a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0, \quad (7.6)$$

і  $t^s e^{\alpha s} \cos \beta t, t^s e^{\alpha s} \sin \beta t$ , якщо  $r = \alpha \pm i\beta$  - комплексні корені. Припустимо, що всі дійсні корені рівняння (7.6) від'ємні, а всі комплексні корені мають від'ємні дійсні частини. Тоді при  $t \rightarrow \infty$  розв'язок  $\eta_{o.n.}(t)$  досить швидко прямує до нуля (у середньому квадратичному, а отже й за ймовірністю за випадкових початкових умов), і динамічна система виявляється стійкою.

Приклад 7. 1. Динамічні системи з диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} \eta_1''(t) + 5\eta_1'(t) + 6\eta_1(t) &= \xi_1(t), & \eta_2''(t) + 6\eta_2'(t) + 9\eta_2(t) &= \xi_2(t), \\ \eta_3''(t) + 4\eta_3'(t) + 13\eta_3(t) &= \xi_3(t) \end{aligned}$$

є стійкими.

Дійсно, для кожного з рівнянь маємо відповідно характеристичні рівняння

$$r_1^2 + 5r_1 + 6 = 0, \quad r_2^2 + 6r_2 + 9 = 0, \quad r_3^2 + 4r_3 + 13 = 0,$$

їх корені  $-2$  і  $-3$ ,  $3$  і  $-3$ ,  $-2 \pm 3i$ , фундаментальні системи розв'язків

$$y_1^{(1)} = e^{-2t}, y_2^{(1)} = e^{-3t}; \quad y_1^{(2)} = e^{-3t}, y_2^{(2)} = te^{-3t}; \quad y_1^{(3)} = e^{-2t} \cos 3t, y_2^{(3)} = e^{-2t} \sin 3t,$$

нарешті, загальні розв'язки рівнянь

$$\eta_{o.n.}^{(1)} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}; \quad \eta_{o.n.}^{(2)} = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}; \quad \eta_{o.n.}^{(3)} = C_1 e^{-2t} \cos 3t + C_2 e^{-2t} \sin 3t.$$

Очевидно, що при  $t \rightarrow \infty$  розв'язки  $\eta_{o.n.}^{(1)}, \eta_{o.n.}^{(2)}, \eta_{o.n.}^{(3)}$  прямують до нуля, що й спричиняє стійкість систем.

Приклад 7.2. Динамічна система з рівняннями

$$\begin{aligned} \eta_1''(t) - 6\eta_1'(t) + 8\eta_1(t) &= \xi_1(t), & \eta_2''(t) - 8\eta_2'(t) + 16\eta_2(t) &= \xi_2(t), \\ \eta_3''(t) - 8\eta_3'(t) + 65\eta_3(t) &= \xi_3(t), & \eta_4''(t) + k^2\eta_4(t) &= \xi_4(t) \end{aligned}$$

не є стійкими. Пересвідчіться в цьому самостійно.

Розглянемо тепер декілька прикладів динамічних систем першого порядку.

Приклад 7.3. Матеріальна точка одиничної маси рухається прямолінійно. На неї діє випадкова сила  $\xi(t)$  з характеристиками  $m(t), K(t_1, t_2)$ . Крім того, вона зазнає протидії середовища, яка пропорційна добуткові швидкості й часу.

Початкова швидкість в момент  $t_0$  дорівнює  $v_0$ . Знайти випадкову швидкість точки та характеристики швидкості.

Розв'язання. Якщо  $\eta(t)$  - швидкість матеріальної точки, то згідно з умовою та другим законом Ньютона маємо

$$\eta'(t) = \xi(t) - k\eta(t), \quad k - \text{const},$$

тобто лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно  $\eta(t)$ . Отже, йдеться про розв'язання задачі Коші

$$\eta'(t) + k\eta(t) = \xi(t), \quad \eta(t_0) = v_0.$$

Застосовуючи до диференціального рівняння відомий алгоритм, маємо

$$\eta(t) = u(t)v(t), \quad u'v + u(v' + ktv) = \xi(t), \quad v' + ktv = 0, \quad v = e^{-\frac{kt^2}{2}}, \quad u' = e^{\frac{kt^2}{2}} \xi(t),$$

$$\eta(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}} \int_{t_0}^t e^{\frac{kt'^2}{2}} \xi(t') dt' + C e^{-\frac{kt^2}{2}}.$$

З початкової умови  $C = v_0 e^{kt_0^2/2}$ , так що розв'язок задачі Коші є

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) + \eta_{о.н.}(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}} \int_{t_0}^t e^{\frac{kt'^2}{2}} \xi(t') dt' + v_0 e^{-\frac{k(t^2 - t_0^2)}{2}}.$$

Розв'язок

$$\eta_{о.н.}(t) = v_0 e^{-\frac{k(t^2 - t_0^2)}{2}}$$

при  $t \rightarrow \infty$  прямує до нуля в звичайному сенсі, якщо  $v_0$  - не випадкова величина, та в середньоквадратичному в протилежному випадку (пор. приклад 4.1). Отже, динамічна система - рухома матеріальна точка - є стійкою, і для великих значень  $t$  можна вважати, що шукана швидкість дається формулою

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = e^{-\frac{kt^2}{2}} \int_{t_0}^t e^{\frac{kt'^2}{2}} \xi(t') dt'.$$

Характеристики швидкості впливають з результатів прикладу 6.7 (для випадкової функції (6.11)), а саме

$$M(\eta(t)) = M(\eta_{н.н.}(t)) = e^{-\frac{kt^2}{2}} \int_{t_0}^t e^{\frac{kt'^2}{2}} m(t') dt',$$

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = K_{\eta_{n.n.}}(t_1, t_2) = e^{-\frac{k(t_1^2+t_2^2)}{2}} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} e^{-\frac{k(t'^2+t''^2)}{2}} K(t', t'') dt' dt''.$$

Зробимо декілька додаткових зауважень стосовно випадкової, але не залежної від  $\xi(t)$ , початкової швидкості  $v_0$ . Випадкова функція  $\eta_{o.n.}(t)$ , як неважко перевірити, має характеристики

$$M(\eta_{o.n.}(t)) = M(v_0) e^{-\frac{k(t^2-t_0^2)}{2}}, \quad K_{\eta_{o.n.}}(t_1, t_2) = D(v_0) e^{-\frac{k(t_1^2+t_2^2-2t_0^2)}{2}},$$

які прямують до нуля при  $t, t_1 \rightarrow \infty$ , або  $t_2 \rightarrow \infty$ , а її взаємні кореляційні функції з  $\eta_{n.n.}(t)$  дорівнюють нулю. Наприклад,

$$\begin{aligned} R_{\eta_{n.n.}, \eta_{o.n.}}(t_1, t_2) &= M\left(e^{-\frac{kt_1^2}{2}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{kt'^2}{2}} \xi(t') dt' \cdot v_0 e^{-\frac{k(t^2-t_0^2)}{2}}\right) = \\ &= e^{-\frac{k(t_1^2+t_2^2-2t_0^2)}{2}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{kt'^2}{2}} M\left(\xi(t') v_0\right) dt' = 0, \end{aligned}$$

оскільки  $M\left(\xi(t') v_0\right) = M\left(\xi(t')\right) M\left(v_0\right) = 0$  через незалежність  $v_0$  і  $\xi(t)$ . З огляду на п. 2.6, формули (2.32), (2.33), це означає, що для великих значень аргумента характеристики розв'язків  $\eta(t)$  та  $\eta_{n.n.}(t)$  збігаються, і характеристиками розв'язку  $\eta_{o.n.}(t)$ , як і самим розв'язком, можна знехтувати.

Приклад 7. 4. На вхід лінійної динамічної системи першого порядку надходить випадкова функція  $\xi(t)$  з характеристиками  $m(t), K(t_1, t_2)$ , на виході - розв'язок задачі Коші

$$\eta'(t) = a^2 t \eta(t) + b \xi(t), \quad \eta(t_0) = y_0, \quad a, b - \text{const}, \quad a > 0.$$

Міркуючи як і в попередньому прикладі, знаходимо

$$\eta(t) = \eta_{n.n.}(t) + \eta_{o.n.}(t) = b e^{\frac{a^2 t^2}{2}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{a^2 t'^2}{2}} \xi(t') dt' + y_0 e^{-\frac{a^2(t^2-t_0^2)}{2}}.$$

Динамічна система не є стійкою, оскільки  $\eta_{o.n.}(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Характеристиками розв'язку отримуємо так само, як і в прикладі 6.7. Покладаючи для простоти  $t_0 = 0$ , маємо

$$M(\eta(t)) = b e^{\frac{a^2 t^2}{2}} \int_0^t e^{-\frac{a^2 t'^2}{2}} m(t') dt' + y_0 e^{-\frac{a^2 t^2}{2}},$$

$$K_\eta(t_1, t_2) = b^2 e^{\frac{a^2(t_1^2 + t_2^2)}{2}} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} e^{-\frac{a^2(t_1'^2 + t_2'^2)}{2}} K(t', t'') dt' dt''.$$

В книзі [4] розглянуто частинний випадок

$$y_0 = 0, \quad m(t) = 1, \quad K(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha(t_2 - t_1)}, \quad \alpha > 0.$$

Отриманий там результат свідчить, що математичне сподівання й дисперсія є нескінченно великими функціями від  $t$ , і навіть при не дуже великих  $t$  динамічна система не забезпечує більш-менш задовільної точності на виході.

Приклад 7.5. Дія лінійної динамічної системи першого порядку описується диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами

$$a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \xi(t), \quad m_\xi(t) = m(t), \quad K_\xi(t_1, t_2) = K(t_1, t_2). \quad (7.7)$$

Система є стійкою тоді й тільки тоді, коли коефіцієнти  $a_0, a_1$  мають однакові знаки.

Дійсно, розв'язок задачі Коші для рівняння (7.7) дається формулою (перевірте!)

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) + \eta_{о.н.}(t) = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \int_{t_0}^t e^{\frac{a_0}{a_1} t'} \xi(t') dt' + y_0 e^{-\frac{a_0}{a_1} (t - t_0)},$$

де  $y_0 = \eta(t_0)$ . Формула свідчить, що  $\eta_{о.н.}(t)$  прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$  за й лише за умови  $a_0 a_1 > 0$ , тобто за умови збіжності знаків у  $a_0$  та  $a_1$ . Отже, при  $a_0 a_1 > 0$  та достатньо великих  $t$

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \int_{t_0}^t e^{\frac{a_0}{a_1} t'} \xi(t') dt'. \quad (7.8)$$

Динамічні системи, що характеризуються рівнянням (7.7), часто зустрічаються в застосуваннях (задача про броунівський рух та споріднені їй, наприклад, про шуми в радіолампах, деякі проблеми теорії автоматичного регулювання; див. [4, стор. 113]).



## 7.2. ВАГОВА ФУНКЦІЯ

Розв'язок  $\eta_{н.н.}(t)$  неоднорідного рівняння (7.1), що задовольняє нульові початкові умови, можна зобразити інтегралом

$$\eta_{н.н.}(t) = \int_{t_0}^t v(t, t') \zeta(t') dt'. \quad (7.9)$$

Тут підінтегральна функція є добутком правої частини рівняння на деяку функцію  $v(t, t')$  двох змінних. Останню, яку називають **ваговою** (іноді – імпульсною перехідною), неважко знайти.

Нехай спочатку  $n > 1$ . Вагова функція з точністю до множника  $a_n^{-1}(t')$  є відношенням двох визначників  $n$ -го порядку,

$$v(t, t') = \frac{1}{a_n(t')} \cdot \frac{\Delta(t, t')}{W(t')}, \quad (7.10)$$

один з яких,  $W(t')$ , є значенням при  $t = t'$  вронскіана фундаментальної системи розв'язків  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ , а другий,  $\Delta(t, t')$ , утворюється заміщенням в  $W(t')$  останнього рядка рядком  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ .

Так, якщо  $n = 2$ , тобто йдеться про рівняння

$$a_2 \eta''(t) + a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \zeta(t), \quad (7.11)$$

маємо

$$W(t') = \begin{vmatrix} y_1(t') & y_2(t') \\ y_1'(t') & y_2'(t') \end{vmatrix}, \quad \Delta(t, t') = \begin{vmatrix} y_1(t') & y_2(t') \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix},$$

і вагова функція дорівнює

$$v(t, t') = \frac{1}{a_n(t')} \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_1(t') & y_2(t') \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t') & y_2(t') \\ y_1'(t') & y_2'(t') \end{vmatrix}} \quad (7.12)$$

Формулу (7.10) ми вже були виводили методом варіації сталих в курсі звичайних диференціальних рівнянь. Інший шлях застосовано в книзі [4].

Можна довести, що вагова функція як функція змінної  $t$  (при фіксованому  $t'$  є розв'язком задачі Коші для однорідного рівняння (7.3) з початковими умовами (умовами Коші)

$$v|_{t=t'} = \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=t'} = \dots = \frac{\partial^{n-2} v}{\partial t^{n-2}}|_{t=t'} = 0, \quad \frac{\partial^{n-2} v}{\partial t^{n-2}}|_{t=t'} = \frac{1}{a_n(t')}.$$

Аналогічна обставина є вірною, якщо вважати  $v(t, t')$  функцією від  $t'$  (при фіксованому  $t$ ).

Вагову функцію можна ввести й у випадку  $n=1$ , тобто випадку лінійної динамічної системи першого порядку. Так, для рівняння з сталими коефіцієнтами (7.7) з формули (7.8) безпосередньо видно, що

$$v(t, t') = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1}(t-t')}. \quad (7.13)$$

Вагова функція залежить тільки від різниці аргументів і за умови  $a_0 a_1 > 0$  прямує до нуля при  $t - t' \rightarrow \infty$ .

Приклад 7.6. Знайти вагові функції для рівнянь динамічних систем прикладу 7.1.

Розв'язання. Для рівняння

$$\eta_3''(t) + 4\eta_3'(t) + 13\eta_3(t) = \xi_3(t)$$

маємо

$$y_1(t) = y_1^{(3)} = e^{-2t} \cos 3t, \quad y_2(t) = y_2^{(3)} = e^{-2t} \sin 3t,$$

$$\Delta(t, t') = \begin{vmatrix} e^{-2t'} \cos 3t' & e^{-2t'} \cos 3t' \\ e^{-2t} \cos 3t & e^{-2t} \cos 3t \end{vmatrix} = e^{-2(t+t')} \sin 3(t-t'),$$

$$W(t') = \begin{vmatrix} e^{-2t'} \cos 3t' & e^{-2t'} \sin 3t' \\ -2e^{-2t'} \cos 3t' - 3e^{-2t'} \sin 3t' & -2e^{-2t'} \sin 3t' + 3e^{-2t'} \cos 3t' \end{vmatrix} = 3e^{-4t'},$$

$$v_3(t, t') = \frac{1}{3} e^{-2(t-t')} \sin 3(t-t').$$

Аналогічно для рівнянь

$$\eta_1''(t) + 5\eta_1'(t) + 6\eta_1(t) = \xi_1(t), \quad \eta_2''(t) + 6\eta_2'(t) + 9\eta_2(t) = \xi_2(t),$$

отримуємо

$$v_1(t, t') = e^{-2(t-t')} - e^{-3(t-t')}, \quad v_2(t, t') = (t - t')e^{-3(t-t')}.$$

Приклад 7.7. Знайти вагові функції для рівнянь прикладу 7.2.

$$\eta_3''(t) - 8\eta_3'(t) + 65\eta_3(t) = \xi_3(t), \quad \eta_4''(t) + k^2\eta_4(t) = \xi_4(t)$$

Відповідь

$$\text{а/ для } \eta_1''(t) - 6\eta_1'(t) + 8\eta_1(t) = \xi_1(t) \quad v_1(t, t') = \frac{1}{2}(e^{4(t-t')} - e^{2(t-t')});$$

$$\text{б/ для } \eta_2''(t) - 8\eta_2'(t) + 16\eta_2(t) = \xi_2(t) \quad v_2(t, t') = (t - t')e^{4(t-t')};$$

$$\text{в) для } \eta_3''(t) - 8\eta_3'(t) + 65\eta_3(t) = \xi_3(t) \quad v_3(t, t') = \frac{1}{7}e^{4(t-t')} \sin 7(t - t');$$

$$\text{г) для } \eta_4''(t) + k^2\eta_4(t) = \xi_4(t) \quad v_4 = \frac{1}{k} \sin k(t - t').$$

Приклади 7.6, 7.7 і формула (7.13) свідчать, що для лінійних диференціальних рівнянь першого й другого порядків з сталими коефіцієнтами вагова функція залежить тільки від різниці аргументів. Те ж саме є справедливим для якого завгодно  $n > 2$ . Для стійких систем вагова функція  $v(t, t') = v(t - t')$  швидко прямує до нуля, якщо  $t - t' \rightarrow \infty$ . Вагові функції нестійких систем (приклад 7.7) такої властивості позбавлені.

Приклад 7.8. Знайти характеристики випадкової функції на виході динамічної системи другого порядку, яка розв'язує задачу Коші

$$\eta''(t) + k^2\eta(t) = \xi(t), \quad k - \text{const}, \quad k > 0; \quad \eta(0) = \eta'(0) = 0,$$

якщо випадкова функція  $\xi(t)$  на вході має характеристики

$$m(t) = m_0, \quad K(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha|t_1 - t_2|}, \quad \alpha > 0, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Розв'язання. З огляду на приклад 7.2 система є нестійкою. Нульові початкові умови спричиняють рівності  $\eta_{o.n.}(t) \equiv 0, \eta(t) = \eta_{n.n.}(t)$ . Оскільки нам відома вагова функція (це  $v_4$  з прикладу 7.7), згідно з формулою (7.9) маємо

$$\eta(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \xi(t') \sin k(t - t') dt'.$$

Користуючись тепер методом прикладів 6.7, 6.9, отримуємо

$$m_{\eta}(t) = \frac{1}{k} \int_0^t m(t') \sin k(t-t') dt' = \frac{m_0}{k} \int_0^t \sin k(t-t') dt' = -\frac{m_0}{k} \cos k(t-t') \Big|_0^t =$$

$$= \frac{m_0}{k} (1 - \cos kt) = \frac{2m_0}{k} \sin^2 \frac{kt}{2} \neq \text{const},$$

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{1}{k^2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K(t', t'') \sin k(t_1 - t') \sin k(t_2 - t'') dt' dt'' =$$

$$= \frac{\sigma^2}{k^2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-\alpha|t''-t'|} \sin k(t_1 - t') \sin k(t_2 - t'') dt' dt''.$$

$$D_{\eta}(t) = K_{\eta}(t, t) = \frac{\sigma^2}{2k^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\alpha|t''-t'|} \sin k(t_1 - t') \sin k(t_2 - t'') dt' dt'' =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2k^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\alpha|t''-t'|} (\cos k(t'' - t') - \cos k(2t - (t' + t''))) dt' dt''.$$

Обчислення дисперсії неважко довести до кінця заміною змінних

$$2t - t' - t'' = y, \quad t'' - t' = z.$$

Оскільки в свій час ми займатимемося такими замінами систематично, обмежимося тут остаточним результатом,

$$D_{\eta}(t) = \frac{\sigma^2}{2k^2(\alpha^2 + k^2)} \left( te^{-\alpha t} (k \sin kt - \alpha \cos kt) + \left( \cos 2\alpha t - \frac{\alpha}{k} \sin 2kt \right) + 2\alpha t + 1 \right).$$

Наявність доданка  $2\alpha t$  в дужках спричиняє необмежене зростання дисперсії при  $t \rightarrow \infty$ .

Зупинимось більш докладно на випадку стійкої динамічної системи з сталими коефіцієнтами  $a_0, a_1, \dots, a_n$  відповідного диференціального рівняння (7.1). Оскільки вагова функція залежить тут тільки від різниці аргументів, слушно замінити формулу (7.9), яка зображає розв'язок рівняння при великих значеннях  $t$ , наступною

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_{t_0}^t v(t-t') \zeta(t') dt' \quad (7.14)$$

або, після заміни змінної  $t - t' = z$ ,

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_0^{t-t_0} v(z) \zeta(t-z) dz.$$

Швидке прямування до нуля вагової функції  $v(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  дозволяє замінити верхню межу інтегрування  $t-t_0$  на  $\infty$ , і для великих значень  $t$  матимемо

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_0^{\infty} v(z) \zeta(t-z) dz. \quad (7.15)$$

Запровадивши, нарешті, в інтегралі (7.15) заміну змінної  $t-z=t'$  (або, що є тим же самим, замінивши в формулі (7.14)  $t_0$  на  $-\infty$ ) отримаємо ще одну форму розв'язку

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_{-\infty}^t v(t-t') \zeta(t') dt' \quad (7.16)$$

Приклад 7.9. На вхід динамічної системи другого порядку з рівнянням

$$\eta''(t) + 5\eta'(t) + 6\eta(t) = \xi(t)$$

надходить випадкова функція  $\xi(t)$  з характеристиками  $m(t) = m_0$ ,  $K(t_1, t_2) = K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ , де  $\tau = t_2 - t_1$ , а  $\alpha > 0$ . Знайти випадкову функцію  $\eta(t)$  на виході та її характеристики для великих значень  $t$ .

Розв'язання. Стійкість системи з'ясовано в прикладі 7.1, а вагову функцію

$$v(t-t') = e^{-2(t-t')} - e^{-3(t-t')}$$

визначено прикладом 7.6. Скориставшись, наприклад, формулою (7.15), для великих значень  $t$  дістанемо

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_0^{\infty} (e^{-2z} - e^{-3z}) \xi(t-z) dz.$$

Згідно з результатами прикладу 6.11 характеристики розв'язку є

$$m_{\eta}(t) = m_{\eta} = m_0 \int_0^{\infty} (e^{-2z} - e^{-3z}) dz = m_0 \left( -\frac{1}{2} e^{-2z} + \frac{1}{3} e^{-3z} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{m_0}{6},$$

$$K_{\eta}(\tau) = K_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{-2z'} - e^{-3z'}) (e^{-2z''} - e^{-3z''}) K(t_1 - z', t_2 - z'') dz' dz'' =$$

$$\begin{aligned}
&= |K(t_1 - z', t_2 - z'') = K((t_2 - z'') - (t_1 - z')) = K(t_2 - t_1 + z' - z'') = K(\tau + z' - z'')| = \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-2z'} - e^{-3z'}) (e^{-2z''} - e^{-3z''}) K(\tau + z' - z'') dz' dz'' = \\
&= \sigma^2 \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-2z'} - e^{-3z'}) (e^{-2z''} - e^{-3z''}) e^{-\alpha|\tau + z' - z''|} dz' dz'', \\
D_\eta = K_\eta(0) &= \sigma^2 \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-2z'} - e^{-3z'}) (e^{-2z''} - e^{-3z''}) e^{-\alpha|z' - z''|} dz' dz''.
\end{aligned}$$

Проведемо до кінця обчислення дисперсії. Для цього область інтегрування ( $0 \leq z', z'' < \infty$ ) розіб'ємо (рис. 7.1) на дві частини

$$D_1 \quad (0 \leq z'' < \infty, \forall z'' \in (0, +\infty), z'' \leq z' < \infty, |z' - z''| = z' - z'')$$

та

$$D_2 \quad (0 \leq z'' < \infty, \forall z'' \in (0, +\infty), 0 \leq z' < z'', |z' - z''| = z'' - z'),$$

звідки

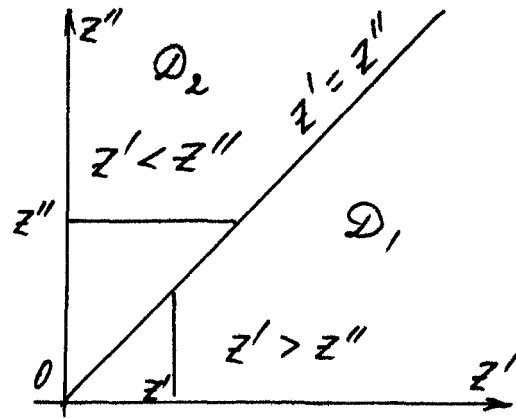


Рис. 7.1. Обчислення дисперсії

$$\begin{aligned}
D_\eta &= \sigma^2 \left( \iint_{D_1} (e^{-2z'} - e^{-3z'}) (e^{-2z''} - e^{-3z''}) e^{-\alpha(z' - z'')} dz' dz'' + \right. \\
&\quad \left. + \iint_{D_2} (e^{-2z'} - e^{-3z'}) (e^{-2z''} - e^{-3z''}) e^{-\alpha(z'' - z')} dz' dz'' \right) = \\
&= \sigma^2 \left( \int_0^\infty (e^{-2z''} - e^{-3z''}) e^{\alpha z''} dz'' \int_{z''}^\infty (e^{-2z'} - e^{-3z'}) e^{-\alpha z'} dz' + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} (e^{-2z''} - e^{-3z''}) e^{-\alpha z''} dz'' \int_0^{z''} (e^{-2z'} - e^{-3z'}) e^{\alpha z'} dz' = \\
& = \sigma^2 \left( \int_0^{\infty} (e^{-(2-\alpha)z''} - e^{-(3-\alpha)z''}) dz'' \int_{z''}^{\infty} (e^{-(2+\alpha)z'} - e^{-(3+\alpha)z'}) dz' + \right. \\
& \left. + \int_0^{\infty} (e^{-(2+\alpha)z''} - e^{-(3+\alpha)z''}) dz'' \int_0^{z''} (e^{-(2-\alpha)z'} - e^{-(3-\alpha)z'}) dz' \right) =
\end{aligned}$$

Перший повторний інтеграл дорівнює

$$\frac{\alpha + 5}{60(2 + \alpha)(3 + \alpha)},$$

другий (при  $\alpha \neq 2, \alpha \neq 3$ )

$$\frac{\alpha^3 - 19\alpha + 30}{60(4 - \alpha^2)(9 - \alpha^2)}.$$

Але, як можна помітити,  $\alpha^3 - 19\alpha + 30 = (\alpha + 5)(\alpha - 2)(\alpha - 3)$ , і після скорочення на  $(2 - \alpha)(3 - \alpha)$  пересвідчуємось в рівності обох інтегралів. Остаточний результат

$$D_{\eta} = \frac{\sigma^2(\alpha + 5)}{30(2 + \alpha)(3 + \alpha)},$$

отриманий в припущенні  $\alpha \neq 2, \alpha \neq 3$ , залишається справедливим і при цих значеннях  $\alpha$ .

## РОЗДІЛ 8

# СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ

## 8.1. СТАЦІОНАРНІСТЬ ТА СТАЦІОНАРНІСТЬ В ШИРОКОМУ РОЗУМІННІ

Часто-густо зустрічаються випадкові процеси, які відбуваються приблизно однорідно й мають вигляд неперервних випадкових коливань навколо деякої середньої функції, причому ні середня амплітуда, ні характер цих коливань суттєво не змінюються з часом. Такі процеси називаються стаціонарними, і для їх дослідження послуговуються стаціонарними випадковими функціями.

Приклади стаціонарних процесів: 1) вібрація верстатів в усталеному режимі; 2) коливання напруги в електромережі; 3) випадкові шуми в радіоприймачі; 4) вимушені гармонічні коливання механічної або електричної системи за відсутності власних коливань.

Існують численні нестаціонарні процеси, як то: 1) гальмовий шлях автомобіля; 2) процес зупинки верстата по вимкненні електроживлення. Нестаціонарним є так званий перехідний процес в коливальній системі, яку щойно привели в дію. Протягом перехідного процесу відбувається згасання власних коливань, а відтак встановлюється стаціонарний режим вимушених коливань.

Випадкова функція  $\xi(t)$  називається стаціонарною, якщо всі  $n$ -вимірні закони її розподілу, тобто закони розподілу  $n$ -вимірних випадкових величин  $(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))$  залежать не від моментів часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , а тільки від їх взаємного розташування. Якщо йдеться про  $n$ -вимірну щільність ймовірності

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n),$$

то стаціонарність випадкової функції  $\xi(t)$  означає, що для будь-яких  $\tau$  і  $n$  виконується умова

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau), \quad (8.1)$$



Іншими словами, для стаціонарної випадкової функції всі закони розподілу не залежать від початку відліку часу. Зокрема, при  $n = 1, n = 2$

$$f(x;t) = f(x;t + \tau); \quad f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 + \tau, t_2 + \tau).$$

Покладаючи тут відповідно  $\tau = -t, \tau = -t_1$ , отримуємо

$$f(x;t) = f(x;t + (-t)) = f(x;0) = f(x), \quad (8.2)$$

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = f(x_1, x_2; t_2 - t_1). \quad (8.3)$$

З'ясуємо вигляд характеристик стаціонарної випадкової функції. За формулами (2.2), (2.16)

$$m(t) = m_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = const = m_0,$$

$$K(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_0)(x_2 - m_0) f(x_1, x_2; t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = K(t_2 - t_1),$$

$$D(t) = D_\xi(t) = K(t, t) = K(0) = const.$$

Отже, математичне сподівання й дисперсія сталі, а кореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів,

$$m(t) = m_\xi(t) = const = m_0, \quad K(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2) = K(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (8.4)$$

Рівності (8.4) впливають з (8.2), (8.3), тобто є необхідними для стаціонарності випадкової функції. Проте вони не є достатніми, бо їх наявність, взагалі кажучи, не забезпечує умов (8.2), (8.3), а отже й умови (8.1).

Будемо називати випадкову функцію  $\xi(t)$  стаціонарною в широкому розумінні (в ш.р.), якщо її математичне сподівання стале, а кореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів, тобто якщо для неї справджуються рівності (8.4). Якщо, крім того, всі закони розподілу функції не залежать від початку відліку часу, а це іноді буває очевидним з характеру процесу, який описується випадковою функцією, то остання є стаціонарною й в звичайному розумінні.

Можна довести (див., наприклад, [4, стор. 25]), що для нормальної випадкової функції обидва означення стаціонарності збігаються. З іншого боку,

існують нестационарні функції, котрі є стаціонарними в широкому розумінні (див., наприклад, [9, розділ 72, приклад 1]).

Якщо для випадкової функції  $K = K(\tau)$ , але  $m(t) \neq const$ , тобто функція нестационарна в ш.р. тільки за рахунок математичного сподівання, то можна перейти до центрованої функції  $\overset{0}{\xi}(t)$ , яка, маючи ту ж кореляційну функцію, є стаціонарною.

Відзначимо специфіку властивостей кореляційної функції у стаціонарної випадкової функції. По-перше, вона парна

$$K(-\tau) = K(\tau), \quad (8.5)$$

по-друге

$$|K(\tau)| \leq \sigma^2 = D = K(0), \quad (8.6)$$

так що нормована кореляційна функція дорівнює

$$r(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)}.$$

Нарешті, властивість 5 (див. п. 2.3) набуває вигляду

$$\int_a^b \int_a^b \varphi(t_1) \varphi(t_2) K(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \geq 0. \quad (8.7)$$

Приклад 8.1. Гармонічні коливання

$$\xi(t) = A \sin(\omega t + \Phi), \quad \eta(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

( $\omega = const$ , випадкові величини  $A$  і  $\Phi$  незалежні,  $\Phi$  рівномірно розподілена на  $[0, 2\pi]$ ) - стаціонарні в ш. р., бо мають (див. п. 3. 3) нульові математичні сподівання та кореляційну функцію

$$K(\tau) = \frac{1}{2} M(A^2) \cos \omega \tau.$$

Більш того, в досить широких припущеннях їх взагалі можна вважати стаціонарними.

Приклад 8.2. Телеграфний сигнал і більш загальна випадкова функція, які ми були розглянули в п. 3. 5, - стаціонарні в ш. р.

Приклад 8.3. Пуассонівський (п. 3.4) та вінерівський (п. 3.7) процеси не є стаціонарними, бо їх математичні сподівання не стали, а кореляційні функції не є функціями тільки від різниці  $\tau = t_2 - t_1$ .

Надалі стаціонарність випадкових функцій ми розумітимемо в широкому розумінні й не вживатимемо аббревіатуру "в ш.р".

Приклад 8.4. Розв'язок рівняння з прикладу 7.9 стаціонарний для достатньо великих значень  $t$ .

Приклад 8.5. Дія стійкої лінійної динамічної системи  $n$ -го порядку характеризується диференціальним рівнянням (7.1) з сталими коефіцієнтами  $a_k$  ( $k = \overline{0, n}$ ). Якщо на вхід системи надходить стаціонарна випадкова функція  $\zeta(t)$  з характеристиками  $m_\zeta(t) = \text{const} = m_0, K_\zeta(t_1, t_2) = K(\tau), \tau = t_2 - t_1$ , то для достатньо великих значень  $t$  випадкова функція на виході також стаціонарна.

Для доведення достатньо скористатися розв'язком рівняння у вигляді формули (7.15) і знайти його характеристики методом прикладу 6.11 (див. приклад 7.9). З'ясуємо, що математичне сподівання розв'язку дорівнює

$$m_\eta = \int_0^\infty v(z) m_\zeta(t-z) dz = m_0 \int_0^\infty v(z) dz = \text{const},$$

тобто є сталим, а кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_\eta &= \int_0^\infty \int_0^\infty v(z') v(z'') K_\zeta(t_1 - z', t_2 - z'') dz' dz'' = \\ &= \left| K_\zeta(t_1 - z', t_2 - z'') = K((t_2 - z'') - (t_1 - z')) = K(\tau + z' - z'') \right| = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty v(z') v(z'') K(\tau + z' - z'') dz' dz'' = K_\eta(\tau) \end{aligned}$$

залежить тільки від різниці  $\tau = t_2 - t_1$ . Отже, розв'язок  $\eta(t)$  для достатньо великих значень  $t$  стаціонарний (звичайно, за умови збіжності інтегралів для обчислення  $m_\eta$  та  $K_\eta$ ).

Приклад 8.6. Випадкові функції на виходах нестійких динамічних систем з прикладів 7.4, 7.8 не є стаціонарними, яких би великих значень не набувало  $t$ .

Приклад 8.7. Якщо в гармонічних коливаннях  $\xi(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$  (приклад 8.1) зафіксувати значення початкової фази,  $\Phi = \varphi_0$ , стаціонарна випадкова функція перетвориться на нестаціонарну

$$\xi_1(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

бо, по-перше,

$$m_{\xi_1}(t) = M(A) \sin(\omega t + \varphi_0) \neq \text{const},$$

а по-друге, кореляційна функція  $K_{\xi_1}$  більше не залежатиме тільки від різниці  $\tau = t_2 - t_1$ . Дійсно, в цьому випадку

$$\begin{aligned} K_{\xi_1}(t_1, t_2) &= M\left( \overset{0}{A} \sin(\omega t_1 + \varphi_0) \overset{0}{A} \sin(\omega t_2 + \varphi_0) \right) = M\left( \overset{0}{A} \right)^2 \sin(\omega t_1 + \varphi_0) \sin(\omega t_2 + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2} D(A) (\cos \omega \tau - \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi_0)) \neq K_{\xi_1}(\tau). \end{aligned}$$

Приклад 8.8. Сума  $\eta(t) = \xi(t) + \xi(t_0)$  стаціонарної функції  $\xi(t)$  та її перерізу  $\xi(t_0)$  для довільного значення  $t = t_0$ , маючи сталі математичне сподівання  $m_\eta = 2m_0$ , - не стаціонарна.

Дійсно,

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= M\left( \left( \overset{0}{\xi}(t_1) + \overset{0}{\xi}(t_0) \right) \left( \overset{0}{\xi}(t_2) + \overset{0}{\xi}(t_0) \right) \right) = M\left( \overset{0}{\xi}(t_1) \overset{0}{\xi}(t_2) \right) + M\left( \overset{0}{\xi}(t_0) \right)^2 + \\ &+ M\left( \left( \overset{0}{\xi}(t_1) + \overset{0}{\xi}(t_2) \right) \overset{0}{\xi}(t_0) \right) = K_\xi(t_1, t_2) + K_\xi(t_0, t_0) + M\left( \left( \overset{0}{\xi}(t_1) + \overset{0}{\xi}(t_2) \right) \overset{0}{\xi}(t_0) \right) = \\ &= K(\tau) + D + M\left( \left( \overset{0}{\xi}(t_1) + \overset{0}{\xi}(t_2) \right) \overset{0}{\xi}(t_0) \right), \end{aligned}$$

і  $K_\eta$  не є функцією тільки від різниці аргументів.

Приклади 8.7, 8.8 засвідчують, як просто "зіпсувати" стаціонарну випадкову функцію, перетворивши її на нестаціонарну.

Приклад 8.9. Якщо в гармонічних коливаннях  $\xi(t)$  початкова фаза  $\Phi$  не є, як раніше, рівномірно розподіленою на  $[0, 2\pi]$ , а має нормальний розподіл

або має щільність ймовірності  $f(\varphi) = \cos \varphi$  при  $\varphi \in (0, \pi/2)$ ,  $f(\varphi) = 0$  при  $\varphi \notin (0, \pi/2)$ , то  $\xi(t)$  - нестационарна випадкова функція.

Перший випадок (за умови  $A = \text{const}$ ) розглянуто в [3, стор. 349], в другому випадку маємо (при  $M(A) \neq 0$ )

$$\begin{aligned} m(t) &= M(A)M(\sin(\omega t + \Phi)) = M(A) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} M(A) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\omega t + 2\varphi) + \sin \omega t) d\varphi = \frac{1}{2} M(A) \left( -\frac{1}{2} \cos(\omega t + 2\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} \sin \omega t \right) = \\ &= \frac{1}{2} M(A) \left( \cos \omega t + \frac{\pi}{2} \sin \omega t \right) \neq \text{const}. \end{aligned}$$

Деякі складніші обчислення свідчать, що  $K_\xi \neq K(\tau)$ .

Приклад 8.10. Нехай  $\xi(t)$  - стаціонарна випадкова функція,  $C$  - стала,  $\varphi(t) \neq \text{const}$  - не випадкова функція. Тоді функції  $\xi(t) + C, C\xi(t)$  стаціонарні, функція  $\eta(t) = \xi(t) + \varphi(t)$  нестационарна при стаціонарній центрованій частині, нарешті, функція  $\zeta(t) = \varphi(t)\xi(t)$  нестационарна, оскільки

$$m_\zeta = m_0 \varphi(t) \neq \text{const}, K_\zeta = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K(\tau) \neq K_\zeta(\tau).$$

Приклад 8.11. Випадкову функцію зображено канонічним розкладом

$$\xi(t) = m(t) + U_1 \sin \omega t + U_2 \cos \omega t, \quad M(U_1) = M(U_2) = 0, \quad M(U_1 U_2) = 0,$$

дисперсії випадкових величин  $U_1, U_2$  рівні й дорівнюють  $D$ . Тоді на підставі формули (2.25) кореляційна функція

$$K(t_1, t_2) = D \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 + D \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 = D \cos \omega(t_2 - t_1) = D \cos \omega \tau.$$

Отже, центрована складова  $\overset{0}{\xi}(t)$  випадкової функції стаціонарна.

Зауважимо, що стаціонарною є також центрована складова випадкової функції, яка зображається канонічним розкладом більш загального вигляду

$$\xi(t) = m(t) + \sum_{k=1}^n (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t)$$

з центрованими парами некорельованими випадковими величинами  $U_k, V_k$ , для яких  $D(U_k) = D(V_k) = D_k$ . Перевірте це.

## 8.2. СТАЦІОНАРНІ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Вище йшлося про стаціонарні випадкові функції. Аналогічно вводиться поняття стаціонарної системи випадкових функцій. Обмежимося стаціонарністю в широкому розумінні (без вжитку "в ш.р.").

Дві випадкові функції  $\xi(t), \eta(t)$  називаються стаціонарно зв'язаними, якщо їх взаємна кореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів

$$\tau = t_2 - t_1, R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = R_{\xi\eta}(t_2 - t_1) = R_{\xi\eta}(\tau).$$

Система випадкових функцій

$$\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$$

називається стаціонарною, якщо всі її складові - стаціонарні й парами стаціонарно зв'язані. Це означає, що

$$m_{\xi_i}(t) = \text{const} = m_{0i}, K_{\xi_i} = K_{\xi_i}(\tau), i = \overline{1, n}, R_{\xi_i \xi_j} = R_{\xi_i \xi_j}(\tau), i \neq j.$$

Відзначимо деяку специфіку властивостей взаємної кореляційної функції (див. п. 2.5) для стаціонарних випадкових функцій.

1. Для стаціонарно зв'язаних функцій  $\xi(t), \eta(t)$

$$R_{\xi\eta}(\tau) = R_{\eta\xi}(-\tau). \quad (8.8)$$

2. Якщо випадкові функції  $\xi(t), \eta(t)$  стаціонарні та стаціонарно зв'язані (утворюють стаціонарну систему), а  $\varphi(t) \neq \text{const}, \phi(t) \neq \text{const}$  - не випадкові функції, то суми  $\xi(t) + \varphi(t), \eta(t) + \phi(t)$  - стаціонарно зв'язані, але не стаціонарні.

3. За тих же умов функції  $C_1\xi(t), C_2\eta(t)$ , де  $C_1, C_2$  - сталі, - стаціонарні та стаціонарно зв'язані, але функції  $\varphi(t)\xi(t), \phi(t)\eta(t)$  - не стаціонарні й стаціонарно не зв'язані.

4. Якщо система функцій  $\xi(t), \eta(t)$  стаціонарна, то

$$|R_{\xi\eta}(\tau)| \leq \sigma_\xi \sigma_\eta = \sqrt{K_\xi(0)K_\eta(0)}.$$

Приклад 8.12. Два гармонічні коливання (п. 3.3)

$$\xi(t) = A \sin(\omega t + \Phi), \quad \eta(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

де  $\omega = const$ , випадкові величини  $A, \Phi$  незалежні, а  $\Phi$  має рівномірний розподіл на відрізку  $[0, 2\pi]$ , утворюють стаціонарну систему.

Достатньо (з огляду на приклад 8.1) пересвідчитись в стаціонарній зв'язаності функцій  $\xi(t), \eta(t)$ . Але внаслідок їх центрованості маємо

$$\begin{aligned} R_{\xi\eta} &= M(\xi(t_1)\eta(t_2)) = M(A \sin(\omega t_1 + \Phi) A \cos(\omega t_2 + \Phi)) = \\ &= M(A^2) M(\sin(\omega t_1 + \Phi) \cos(\omega t_2 + \Phi)) = M(A^2) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin(\omega t_1 + \varphi) \cos(\omega t_2 + \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi} M(A^2) \int_0^{2\pi} (\sin(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi) + \sin \omega(t_1 - t_2)) d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi} M(A^2) \left( -\frac{1}{2} \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi) \Big|_0^{2\pi} + 2\pi \sin \omega(t_1 - t_2) \right) = \\ &= \frac{1}{2} M(A^2) (\sin \omega(t_1 - t_2)) = -\frac{1}{2} M(A^2) \sin \omega \tau = R_{\xi\eta}(\tau), \end{aligned}$$

що й вимагалось.

Приклад 8.13. Випадкові функції задано канонічними розкладами

$$\xi(t) = -U \sin \omega t + V \cos \omega t, \quad \eta(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t,$$

$$m_\xi = m_\eta = m(U) = m(V) = 0, \quad M(UV) = 0,$$

причому  $D(U) = D(V) = D..$  Довести, що  $\xi(t), \eta(t)$  - стаціонарна система функцій. Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію.

Розв'язання. Міркуючи як і в прикладі 8. 11, маємо

$$K_\xi = K_\eta = K_\xi(\tau) = K_\eta(\tau) = D \cos \omega \tau,$$

тобто функції  $\xi(t), \eta(t)$  - стаціонарні. Стаціонарна зв'язаність  $\xi(t), \eta(t)$  випливає з того, що

$$\begin{aligned} R_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= M(\xi(t_1)\eta(t_2)) = M((-U \sin \omega t_1 + V \cos \omega t_1)(U \cos \omega t_2 + V \sin \omega t_2)) = \\ &= -\sin \omega t_1 \cos \omega t_2 M(U^2) + \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 M(V^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\cos \omega t_1 \cos \omega t_2 - \sin \omega t_1 \sin \omega t_2) M(UV) = -D(U) \sin \omega t_1 \cos \omega t_2 + \\
& + D(V) \sin \omega t_2 \cos \omega t_1 = D \sin \omega(t_2 - t_1) = D \sin \omega \tau = R_{\xi\eta}(\tau).
\end{aligned}$$

Нормовану взаємну кореляційну функцію обчислюємо по формулі (2.31) з урахуванням того, що  $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sqrt{D}$ ,

$$\rho_{\xi\eta}(\tau) = \frac{R_{\xi\eta}(\tau)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \sin \omega \tau.$$

Стаціонарною є також система двох випадкових функцій

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^n (-U_k \sin \omega_k t + V_k \cos \omega_k t), \quad \eta(t) = \sum_{k=1}^n (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t),$$

заданих канонічними розкладами з центрованими парами некорельованими випадковими величинами  $U_k, V_k$ , якщо вони мають дисперсії  $D(U_k) = D(V_k) = D_k, k = \overline{1, n}$ .

Справді, випадкові функції  $\xi(t), \eta(t)$  центровані, мають кореляційні функції

$$K_\xi(\tau) = K_\eta(\tau) = \sum_{k=1}^n D_k \cos \omega_k \tau$$

(пор. приклад 8.11) і взаємну кореляційну функцію

$$R_{\xi\eta}(\tau) = \sum_{k=1}^n D_k (\sin \omega_k t_2 \cos \omega_k t_1 - \cos \omega_k t_2 \sin \omega_k t_1) = \sum_{k=1}^n D_k \sin \omega_k \tau.$$

(пор. приклад 2.17). Кореляційна та взаємна кореляційна функції залежать тільки від різниці  $\tau = t_2 - t_1$ .

### 8.3. ПОХІДНІ ВІД СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Теорія (с. к.) диференційовності, що її було викладено в розділі 5, стосується, природно, й стаціонарних випадкових функцій. Тут ми зупинимося лише на особливостях, притаманних останнім.



Математичне сподівання похідної будь-якого порядку від стаціонарної випадкової функції дорівнює нулю,

$$m_{\xi'} = (m_{\xi})' = m'_0 = 0, \quad m_{\xi''} = (m_{\xi'})' = 0, \dots$$

Теорема. Для того, щоб стаціонарна випадкова функція  $\xi(t)$  мала на відрізку  $[a, b]$  неперервні похідні до  $n$ -го порядку включно, необхідно й достатньо, щоб її кореляційна функція  $K(\tau)$  мала при  $|\tau| \leq b - a$  неперервні похідні  $2n$ -го порядку.

Достатньо послатися на теорему 5.4 та зауважити, що нерівність  $|\tau| \leq b - a$  впливає з нерівностей  $a \leq t_1 \leq b, a \leq t_2 \leq b$ , а частинні похідні від  $K(\tau)$  по  $t_1, t_2$  дорівнюють

$$\frac{\partial K(\tau)}{\partial t_1} = K'(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -K'(\tau), \quad \frac{\partial K(\tau)}{\partial t_2} = K'(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = K'(\tau),$$

Взагалі

$$\frac{\partial^{k+l} K(\tau)}{\partial t_1^k \partial t_2^l} = (-1)^k K^{(k+l)}(\tau). \quad (8.9)$$

Формула (8.9) свідчить, що похідна будь-якого порядку від стаціонарної випадкової функції є також стаціонарною, звичайно, в разі її існування.

На підставі формул (5.12), (5.13), (5.15), (5.16) та (8.9) ми можемо знайти кореляційні функції похідних від стаціонарної випадкової функції, а також взаємні кореляційні функції,

$$K_{\xi'}(\tau) = \frac{\partial^2 K(\tau)}{\partial t_1 \partial t_2} = -K''(\tau), \quad K_{\xi''}(\tau) = \frac{\partial^2 K_{\xi'}(\tau)}{\partial t_1 \partial t_2} = K^{(4)}(\tau), \dots,$$

$$R_{\xi\xi'}(\tau) = K'(\tau), \quad R_{\xi'\xi}(\tau) = -K'(\tau),$$

$$R_{\xi\xi''}(\tau) = K''(\tau), \quad R_{\xi''\xi}(\tau) = K''(\tau),$$

$$R_{\xi'\xi''}(\tau) = \frac{\partial^3 K(\tau)}{\partial t_1 \partial t_2^2} = -K'''(\tau), \quad R_{\xi''\xi'}(\tau) = \frac{\partial^3 K(\tau)}{\partial t_2 \partial t_1^2} = K'''(\tau).$$

Загалом,

$$K_{\xi^{(k)}}(\tau) = (-1)^k K_{\xi}^{(2k)}(\tau) = (-1)^k K^{(2k)}(\tau), \quad (8.10)$$

$$R_{\xi^{(k)}\xi^{(l)}}(\tau) = (-1)^k K_{\xi}^{(k+l)}(\tau) = (-1)^k K^{(k+l)}(\tau) \quad (8.11)$$

Звідси випливає, що стаціонарна випадкова функція та всі її (існуючі) похідні утворюють стаціонарну систему

$$\xi(t), \quad \xi'(t), \quad \xi''(t), \quad \dots, \quad \xi^{(n)}(t). \quad (8.12)$$

Теорема 8.2. Необхідною умовою диференційовності стаціонарної випадкової функції є виконання рівності

$$K'(0) = 0. \quad (8.13)$$

Перед доведенням зауважимо таке. З диференціального числення відомо, що за умови існування лівої границі  $f'(t_0 - 0)$  похідної  $f'(t)$  функції  $f(t)$  в точці  $t_0$  існує ліва похідна

$$f'_-(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

і вона дорівнює  $f'(t_0 - 0)$ . Аналогічно, існування правої границі похідної  $f'(t_0 + 0)$  спричиняє існування правої похідної й рівність  $f'_+(t_0) = f'(t_0 + 0)$ .

Похідна  $f'(t_0)$  існує тоді й тільки тоді, коли існують і є рівними односторонні похідні, а відтак  $f'(t_0) = f'_-(t_0) = f'_+(t_0)$ .

Нехай тепер випадкова функція  $\xi(t)$  диференційовна. Тоді

$$K'(0) = K'_+(0) = K'_-(0),$$

і якщо

$$K'_+(0) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{K(\tau) - K(0)}{\tau} = A,$$

то, завдячуючи парності кореляційної функції, маємо

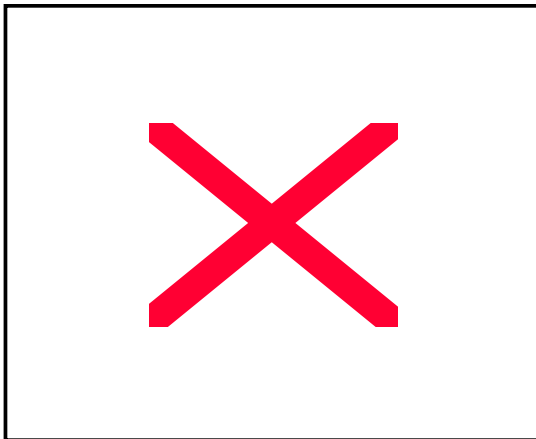
$$K'_-(0) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{K(-\tau) - K(0)}{-\tau} = -\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{K(\tau) - K(0)}{\tau} = -A,$$

Отже,  $A = -A$ ,  $2A = 0$ ,  $A = K'(0)$ , і теорему доведено.

Зауважимо, що на підставі формул (8.13), (8.11) взаємна кореляційна функція функцій  $\xi(t)$  і  $\xi'(t)$  при  $\tau = 0$  дорівнює нулю,  $R_{\xi\xi'}(0) = K'(0)$ , тобто

перерізи стаціонарної випадкової функції та її похідної для одного й того ж моменту часу ( $\tau = t - t = 0$ ) є некорельованими.

Приклад 8.14. Стаціонарні випадкові функції  $\xi_1(t), \xi_2(t)$  з кореляційними функціями



$$K_1(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad K_2(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0$$

не є диференційовними, бо для них не виконується необхідна умова (8.13).

Обмежимося розглядом першої функції (другу дослідіть самі).

Якщо  $\tau \neq 0$ , то кореляційна функція  $K_1(\tau)$  випадкової функції  $\xi_1(t)$  має похідні

Рис. 8.1. Дослідження  $\xi_1(t)$  будь-якого порядку. Тому треба перевірити наявність похідної при  $\tau = 0$ .

При  $\tau < 0$  маємо  $K_1(\tau) = \sigma^2 e^{\lambda\tau}$ ,  $K_1'(\tau) = \alpha\sigma^2 e^{\lambda\tau}$ , ліва границя  $K_1'$  в точці  $\tau = 0$  дорівнює  $K_1'(-0) = \alpha\sigma^2$ , звідки ліва похідна в цій точці дорівнює  $K_{1,-}'(0) = K_1'(-0) = \alpha\sigma^2$ .

Якщо ж  $\tau > 0$ , то  $K_1(\tau) = \sigma^2 e^{-\lambda\tau}$ ,  $K_1'(\tau) = -\alpha\sigma^2 e^{-\lambda\tau}$ , права границя  $K_1'$  в точці  $\tau = 0$  дорівнює  $K_1'(0) = -\alpha\sigma^2$ , тому права похідна кореляційної функції в точці  $\tau = 0$  дорівнює  $K_{1,+}'(0) = K_1'(0) = -\alpha\sigma^2$ .

Оскільки односторонні похідні функції  $K_1(\tau)$  в точці  $\tau = 0$  не збігаються, похідна  $K_1'(0)$  не існує. Умова (8.13) не виконується, значить, функція  $\xi_1(t)$  не диференційовна.

Зазначимо, що невиконання умови (8.13) впливає також з нерівності нулю будь-якої з односторонніх похідних  $K_{1,-}'(0), K_{1,+}'(0)$  бо (8.13) означає, що  $K_1'(0) = K_{1,-}'(0) = K_{1,+}'(0) = 0$ . На рис. 8.1 зображено графік кореляційної функції  $K = K_1(\tau)$ . При побудові взято до уваги симетричність графіка відносно осі

$\tau = 0$ , його угнутість ( $K_1''(\tau) > 0$  при  $\tau \neq 0$ ), спадання функції  $K_1(\tau)$  при  $\tau > 0$  та прямування її до нуля при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . В точці  $(0, \sigma^2)$  графік має кутову точку.

Приклад 8.15. Стаціонарні випадкові функції з кореляційними функціями

$$K_3(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \alpha > 0,$$

$$K_4(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|), \quad K_5(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} (ch \tau + \alpha sh|\tau|),$$

$$K_6(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}, \quad K_7(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2} \cos \beta\tau$$

неперервно диференційовні, причому перші три мають похідні тільки першого порядку, а останні дві нескінченно диференційовні. Кореляційні функції їх похідних дорівнюють

$$K_{\xi_3'}(\tau) = \sigma^2 (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right); \quad K_{\xi_4'}(\tau) = \alpha^2 \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|);$$

$$K_{\xi_5'}(\tau) = \sigma^2 (\alpha^2 - 1) e^{-\alpha|\tau|} (ch \tau - \alpha sh|\tau|), \quad \alpha > 1; \quad K_{\xi_6'}(\tau) = 2\sigma^2 \alpha^2 (1 - 2\alpha^2 \tau^2) e^{-\alpha^2 \tau^2};$$

$$K_{\xi_7'}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2} \left( (2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha^4 \tau^4) \cos \beta\tau - 4\alpha^2 \beta |\tau| \sin \beta|\tau| \right).$$

Зупинимось на першій випадковій функції  $\xi_3(t)$ . Як і в попередньому прикладі, особливої уваги вимагає значення  $\tau = 0$ .

Якщо  $\tau < 0$ , то

$$K_3'(\tau) = -\sigma^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{\alpha\tau} \sin \beta\tau, \quad K_3''(\tau) = -\sigma^2 (\alpha^2 + \beta^2) e^{\alpha\tau} \left( \cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau \right),$$

$$K_3'''(\tau) = -\sigma^2 (\alpha^2 + \beta^2) e^{\alpha\tau} \left( 2\alpha \cos \beta\tau + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta} \sin \beta\tau \right).$$

При  $\tau > 0$  маємо

$$K_3'(\tau) = -\sigma^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau, \quad K_3''(\tau) = -\sigma^2 (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha\tau} \left( \cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau \right),$$

Очевидно,  $K_3'(-0) = K_3'(0) = 0$ , тому  $K_{3,-}'(0) = K_{3,+}'(0) = 0$ , звідки  $K_3'(0) = 0$ , і умова (8.13) виконується. Далі,  $K_3''(-0) = K_3''(0) = -\sigma^2 (\alpha^2 + \beta^2)$  і

тому  $K_{3,-}''(-0) = K_{3,+}''(+0) = K_3''(0) = -\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2)$ . Отже, кореляційна функція  $K_3(\tau)$  для всіх  $\tau$  має похідні  $K_3'(\tau), K_3''(\tau)$ , так що випадкова функція  $\xi_3(t)$  диференційовна (с. к., навіть с. к. неперервно диференційовна з огляду на неперервність  $K_3'(\tau), K_3''(\tau)$ ), і кореляційна функція її похідної є

$$K_{\xi_3'}(\tau) = -K_3''(\tau) = \sigma^2(\alpha^2 + \beta^2)e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right)$$

Що стосується похідної другого порядку випадкової функції  $\xi_3(t)$ , то вона не існує, оскільки

$$K_{\xi_3'}'(0) = K_{\xi_3'}'(-0) = -K_3'''(-0) = 2\alpha\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0,$$

і для кореляційної функції похідної не виконується необхідна умова (8.13).

Приклад 8.16. Нехай випадкова функція  $\xi_3(t)$  з попереднього прикладу нормальна. Знайти одновимірну щільність ймовірності її похідної  $\xi_3'(t)$  та ймовірність невиходу значень  $\xi_3'(t)$  за межі інтервалу  $(a, b)$ .

Розв'язання. На підставі зауваження з п. 5.4 похідна  $\xi_3'(t)$  є нормальною функцією з характеристиками  $m_{\xi_3'} = 0, \sigma_{\xi_3'} = \sqrt{K_{\xi_3'}(0)} = \sigma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Її одновимір- на щільність ймовірності дорівнює

$$f(x; t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(\alpha^2 + \beta^2)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2)}\right),$$

а ймовірність невиходу за межі інтервалу  $(a, b)$  дається формулою

$$P(a < \xi_3'(t) < b) = \Phi\left(\frac{b}{\sigma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right),$$

в якій

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

функція (нормована функція) Лапласа.

## 8.4. ЛІНІЙНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР З СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай  $\xi(t)$  - стаціонарна  $n$  разів неперервнї диференційовна випадкова функція з характеристиками  $m_0, K(\tau)$ , а

$$\begin{aligned} \chi(t) &= L[\xi(t)] = P_n(p)\xi(t) = \\ &= a_n(t)\xi^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\xi^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\xi'(t) + a_0(t)\xi(t) \end{aligned} \quad (8.14)$$

лінійний диференціальний оператор від неї з сталими коефіцієнтами. Доведемо, що  $\chi(t)$  стаціонарна випадкова функція, та знайдемо її характеристики.

Достатньо скористатися формулами (5.17), (5.21), (5.23) з урахуванням (8.9) та рівностей  $m_{\xi^{(k)}} = 0, k = \overline{1, n}$ , звідки

$$m_\chi = a_0 m_0, \quad (8.15)$$

$$K_\chi(\tau) = \sum_{k,l=0}^n (-1)^k a_k a_l K^{(k+l)}(\tau). \quad (8.16)$$

Формули (8.15), (8.16) засвідчують, що лінійний диференціальний оператор (8.14) з сталими коефіцієнтами перетворює стаціонарну належну кількість разів диференційовну випадкову функцію знову в стаціонарну.

Приклад 8.17. Дія стійкої лінійної динамічної системи  $n$ -го порядку характеризується диференціальним рівнянням типу (7.1) з сталими коефіцієнтами

$$P_n(p)\eta(t) \equiv a_n(t)\eta^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\eta^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\eta'(t) + a_0(t)\eta(t) = \zeta(t), \quad (8.17)$$

$$\zeta(t) \equiv Q_m(p)\xi(t) = b_m(t)\xi^{(m)}(t) + b_{m-1}(t)\xi^{(m-1)}(t) + \dots + b_1(t)\xi'(t) + b_0(t)\xi(t),$$

де  $\xi(t)$  - стаціонарна  $m$  разів неперервно диференційовна випадкова функція на вході. Для великих значень  $t$  випадкова функція  $\eta(t)$  на виході системи також є стаціонарною.

Слушність твердження впливає з результату прикладу 8.5, оскільки згідно з тільки-но сказаним права частина  $\zeta(t)$  рівняння (8.17) є стаціонарною випадковою функцією.

Приклад 8.18. Знайти кореляційну функцію випадкової функції

$$\zeta(t) = b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t),$$

де  $b_0, b_1$  - сталі, а  $\xi(t)$  - стаціонарна неперервно диференційовна випадкова функція з характеристиками  $m_0, K(\tau)$ .

Розв'язання. Згідно з формулою (8.16) при  $n = 1$  маємо

$$K_\zeta(\tau) = b_0^2 K(\tau) + (-b_1 b_0 + b_0 b_1) K'(\tau) - b_1^2 K''(\tau) = b_0^2 K(\tau) - b_1^2 K''(\tau) = b_0^2 K(\tau) - b_1^2 K_{\xi'}(\tau),$$

$$K_\zeta(\tau) = K_{b_1 \xi' + b_0 \xi}(\tau) = b_0^2 K(\tau) - b_1^2 K_{\xi'}(\tau) = b_0^2 K(\tau) - b_1^2 K_{\xi'}(\tau)$$

Завдання. Запропонуйте інші способи розв'язання.

Приклад 8.19. Знайти математичне сподівання стаціонарного розв'язку диференціального рівняння (8.17) з сталими коефіцієнтами, якщо  $\xi(t)$  - стаціонарна  $m$  разів неперервно диференційовна випадкова функція.

Розв'язання. На підставі формули (8.15) математичні сподівання лівої та правої частин рівняння відповідно дорівнюють  $a_0 m_\eta, b_0 m_0$ , тому  $a_0 m_\eta = b_0 m_0$ , і отже

$$m_\eta = \frac{b_0}{a_0} m_0. \quad (8.18)$$

## 8.5. ІНТЕГРАЛИ ВІД СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Якщо  $\xi(t)$  - стаціонарна випадкова функція з характеристиками  $m_0, K(\tau)$ , а

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(t') dt', \quad (8.19)$$

то на підставі формул (6.8), (6.9) математичне сподівання й кореляційна функція інтеграла (8.19) дорівнюють

$$m_\eta(t) = \int_0^t m_0 dt' = m_0 t \neq const,$$

$$K_n(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K(t'' - t') dt' dt'', \tag{8.20}$$

а дисперсія

$$D_n(t) = K_n(t, t) = \int_0^t \int_0^t K(t'' - t') dt' dt''. \tag{8.21}$$

Подвійні інтеграли в формулах (8.20), (8.21) можна звести до однократних заміною змінних  $t'' - t' = z, t'' + t' = y$  з модулем якобіана

$$|J(y, z)| = abs \begin{vmatrix} \frac{\partial t'}{\partial y} & \frac{\partial t'}{\partial z} \\ \frac{\partial t''}{\partial y} & \frac{\partial t''}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Зупинимось на обчисленні першого інтеграла, (8.20), який береться по області  $D$  площини  $t'Ot''$  - прямокутнику з вершинами  $O(0,0), A(t_1,0), C(t_1,t_2), B(0,t_2)$  (рис. 8.2 а).

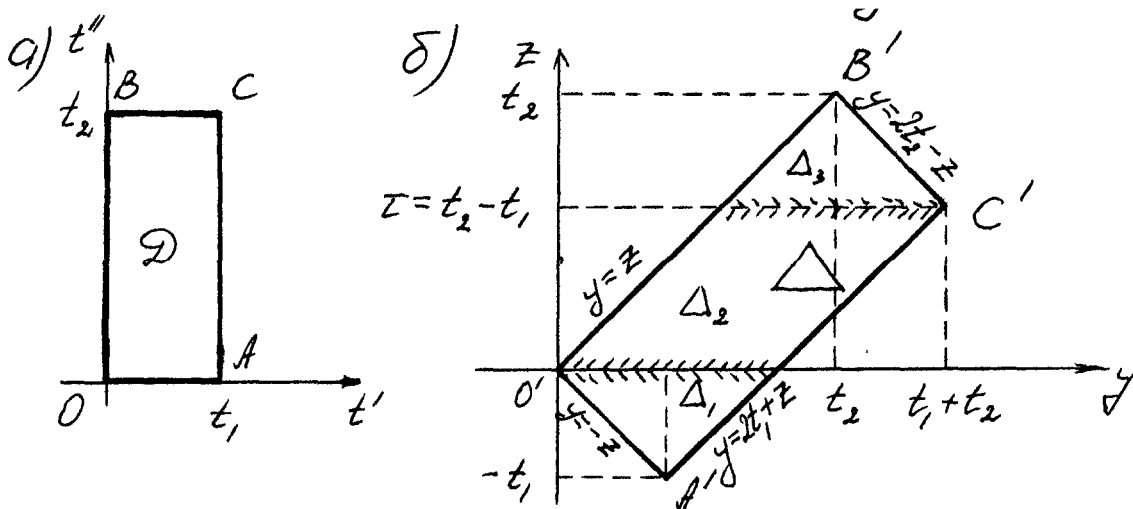


Рис. 8.2. Обчислення кореляційної функції інтеграла (8.19)

Нехай спочатку  $t_1 < t_2$ , тобто  $\tau = t_2 - t_1 > 0$ . Точки  $O(0,0), A(t_1,0), B(0,t_2), C(t_1,t_2)$  переходять відповідно в точки  $O'(0,0), A'(t_1, -t_1), B'(t_2, t_2), C'(t_1 + t_2, \tau)$  площини  $yO'z$  (рис. 8.2 б). Наприклад, для точки  $C$   $t' = t_1, t'' = t_2$ , тому координати точки  $C'$   $y = t_1 + t_2, z = t_2 - t_1 = \tau, C'(t_1 + t_2, \tau)$ . Відрізки  $OA, OB, AC, BC$  площини  $t'Ot''$  перетворюються у відрізки  $O'A', O'B', A'C', B'C'$  площини  $yO'z$  з рівняннями  $y = -z, y = z, y = 2t_1 + z, y = 2t_2 - z$  відповідно.



Наприклад, рівняння прямої  $AC$   $t' = t_1$ , тому  $t'' - t_1 = z, t'' + t' = y$ , і, віднімаючи членами з другого рівняння перше, дістаємо рівняння прямої  $A'C'$ ,  $y - z = 2t_1$ , або  $y = 2t_1 + z$ . Нову область інтегрування (прямокутник  $\Delta$  з вершинами  $O', A', C', B'$ ) розіб'ємо на три частини  $\Delta_1$  ( $t_1 \leq z \leq 0, -z \leq y \leq 2t_1 + z$ ),  $\Delta_2$  ( $0 \leq z \leq \tau = t_2 - t_1, z \leq y \leq 2t_1 + z$ ),  $\Delta_3$  ( $t_2 - t_1 \leq z \leq t_2, z \leq y \leq 2t_2 - z$ ), а відтак отримуємо

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \left( \int_{-t_1}^0 K(z) dz \int_{-z}^{2t_1+z} dy + \int_0^\tau K(z) dz \int_z^{2t_1+z} dy + \int_\tau^{t_2} K(z) dz \int_z^{2t_2-z} dy \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \int_{-t_1}^0 (t_1 + z) K(z) dz + 2 \int_0^\tau t_1 K(z) dz + 2 \int_\tau^{t_2} (t_2 - z) K(z) dz \right) = \left| \begin{array}{l} \text{заміна } z \text{ на } -z \\ \text{в першому інтегралі} \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{t_1} (t_1 - z) K(-z) dz + \int_0^\tau t_1 K(z) dz + \int_\tau^{t_2} (t_2 - z) K(z) dz + \int_0^{t_2} (t_2 - z) K(z) dz = \\ &= \int_0^{t_1} (t_1 - z) K(-z) dz + \int_0^{t_2} (t_2 - z) K(z) dz + \int_0^\tau (t_1 - t_2 + z) K(z) dz. \end{aligned}$$

Остаточно, з урахуванням парності  $K(\tau)$ , дістанемо

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} (t_1 - z) K(z) dz + \int_0^{t_2} (t_2 - z) K(z) dz + \int_0^\tau (\tau - z) K(z) dz. \quad (8.22)$$

Ми вважали  $\tau > 0$  ( $t_1 < t_2$ ). Якщо ж  $\tau < 0$  ( $t_1 > t_2$ ), аналогічні міркування призводять до такої ж формули (перевірте!). Отже, формула (8.22) є справедливою як для  $\tau > 0$ , так і для  $\tau < 0$ . Покладаючи в ній  $t_1 = t_2 = t$ , приходимо до формули для обчислення дисперсії інтеграла (8.19)

$$D_\eta(t) = K_\eta(t, t) = 2 \int_0^t (t - z) K(z) dz. \quad (8.23)$$

Формули (8.22), (8.23) свідчать, що інтеграл (8.19) від стаціонарної випадкової функції не є, взагалі кажучи, стаціонарною випадковою функцією, оскільки кореляційна функція  $K_\eta(t_1, t_2)$  не є обов'язково функцією тільки від різниці  $\tau = t_2 - t_1$ , а дисперсія - сталою.

Неважно пересвідчитись (зробіть це самостійно), що кореляційна функція більш загального інтеграла

$$\eta(t) = \int_{t_0}^t \xi(t') dt'$$

від стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$  дорівнює

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K(t'' - t') dt' dt'' = \\ = \int_0^{t_1 - t_0} (t_1 - t_0 - z) K(z) dz + \int_0^{t_2 - t_0} (t_2 - t_0 - z) K(z) dz + \int_0^\tau (\tau - z) K(z) dz.$$

Вказівка. Вихідна область інтегрування - прямокутник площини  $t'Ot''$  з вершинами  $A(t_0, t_0), B(t_1, t_0), C(t_1, t_2), D(t_0, t_2)$  - заміною змінних  $t'' - t' = z, t' + t'' = y$  перетворюється в прямокутник площини  $yO'z$  з вершинами  $A'(2t_0, 0), B'(t_0 + t_1, t_0 - t_1), C'(t_1 + t_2, t_2 - t_1), D'(t_2 + t_0, t_2 - t_0)$ .

Спитаємо, чи не можна було б вважати  $t_0 = -\infty$ ? Ні: аналогічна заміна змінних призводить до розбіжних інтегралів для обчислення  $m_\eta(t), K_\eta(t_1, t_2)$ .

Формулу (8.23) для обчислення дисперсії можна вивести безпосередньо з формули (8.21), покладаючи  $t'' - t' = z, t'' + t' = y$ . Доведіть це!

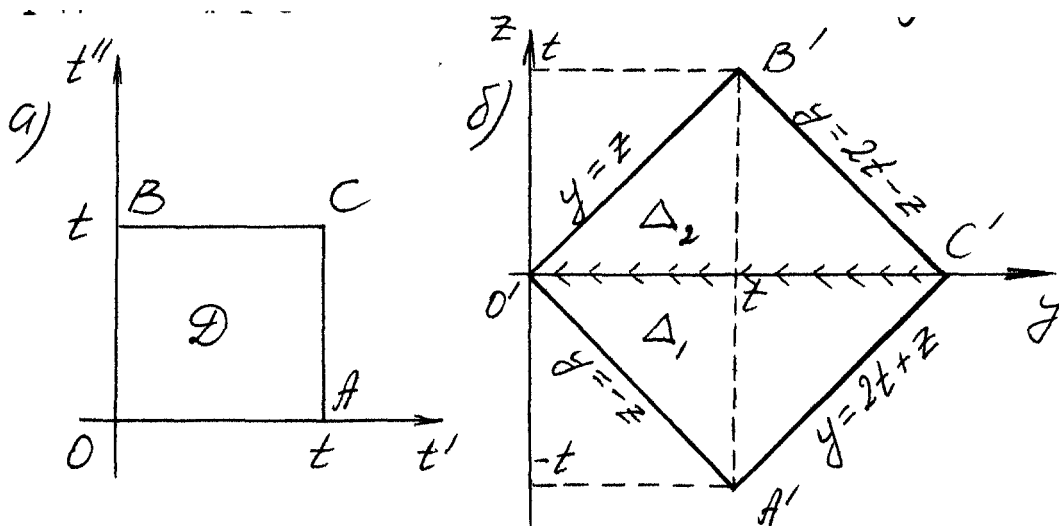


Рис. 8.3. Обчислення дисперсії інтеграла (8.19)

Вказівка. Точки  $O(0,0), A(t,0), B(0,t), C(t,t)$  (рис.8.3) перетворюються відповідно в  $O'(0,0), A'(t,-t), B'(t,t), C'(2t,0)$ ; відрізки  $OA, OB, AC, BC$  - в відрізки

$O'A' (y = -z), O'B' (y = z), A'C' (y = 2t + z), B'C' (y = 2t - z)$ ; нову область інтегрування (рис. 8.3 б) слід розбити на дві частини  $\Delta_1 (-t_1 \leq z \leq 0, -z \leq y \leq 2t + z)$ ,  $\Delta_2 (0 \leq z \leq t, z \leq y \leq 2t - z)$ ; модуль якобіана не зміниться; в інтегралі по області  $\Delta_1$  замінити  $z$  на  $-z$  та врахувати парність  $K(\tau)$ .

Приклад. 8. 20. Знайти дисперсію інтеграла від стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$  з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|), \quad \alpha > 0.$$

Розв'язання. Послугуючись формулою (8.23), матимемо

$$\begin{aligned} D_\eta(t) = K_\eta(t, t) &= 2 \int_0^t (t-z) \sigma^2 e^{-\alpha|z|} (1 + \alpha|z|) dz = 2\sigma^2 \int_0^t (t-z)(1 + \alpha z) e^{-\alpha|z|} dz = \\ &= \left| \begin{array}{l} (t-z)(1 + \alpha z) = u, \quad e^{-\alpha|z|} dz = dv, \\ du = (-1 - 2\alpha z + \alpha t) dz, \quad v = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|z|} \end{array} \right| = \\ &= 2\sigma^2 \left( \frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_0^t (-1 - 2\alpha z + \alpha t) e^{-\alpha|z|} dz \right). \end{aligned}$$

Після ще одного інтегрування частинами ( $-1 - 2\alpha z + t\alpha = u, e^{-\alpha z} dz = dv$ ) остаточно отримаємо

$$D_\eta(t) = \frac{2\sigma^2}{\alpha^2} ((\alpha t + 3)e^{-\alpha t} + 2\alpha t - 3) \neq const.$$

Дисперсія - не стала, а тому інтеграл  $\eta(t)$  не є стаціонарною випадковою функцією.

Приклад 8.21. Знайдіть кореляційну функцію інтеграла (8.19) від стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$  з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0.$$

Відповідь

$$K_\eta(t_1, t_2) = \frac{2\sigma^2}{\alpha} \min\{t_1, t_2\} + \frac{\sigma^4}{\alpha} (e^{-\alpha t_1} + e^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha|t_1 - t_2|} - 1).$$

Приклад 8.22. Нехай  $\xi(t)$  - стаціонарна диференційовна випадкова функція з характеристиками  $m_0, K(\tau)$ . Чи буде стаціонарним інтеграл

$$\zeta(t) = \int_0^t \xi'(t') dt'$$

від її похідної?

Розв'язання. Оскільки  $m_\zeta = 0$ , дослідимо кореляційну функцію випадкової функції  $\zeta(t)$ . За формулами (8.20), (8.10), (8.5)

$$\begin{aligned} K_\zeta(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_{\xi'}(t'' - t') dt' dt'' = - \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K''(t'' - t') dt' dt'' = - \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} K''(t'' - t') dt'' = \\ &= - \int_0^{t_1} dt' K'(t'' - t') \Big|_0^{t_2} = - \int_0^{t_1} (K'(t_2 - t') - K'(-t')) dt' = K(t_2 - t') \Big|_0^{t_1} - K(t') \Big|_0^{t_1} = \\ &= K(t_2 - t_1) - K(t_2) - K(-t_1) + K(0) = K(\tau) - K(t_2) - K(-t_1) + K(0). \end{aligned}$$

Отже,  $K_\zeta(t_1, t_2)$  не зображається функцією тільки від різниці  $\tau = t_2 - t_1$  а тому  $\zeta(t)$  не є стаціонарною функцією.

Того ж висновку можна дійти, показавши за допомоги формул (8.23) та (8.13) несталість дисперсії  $D_\zeta$ , а саме

$$\begin{aligned} D_\zeta(t) &= 2 \int_0^t (t-z) K_{\xi'}(z) dz = -2 \int_0^t (t-z) K''(z) dz = -2 \left( (t-z) K'(z) \Big|_0^t + \int_0^t K'(z) dz \right) = \\ &= -2 \left( 0 - t K'(0) + K'(z) \Big|_0^t \right) = 2K(0) - 2K(t) \neq const. \end{aligned}$$

Наведений приклад свідчить, що застосування до стаціонарної функції двох взаємно обернених операцій (диференціювання та інтегрування) не відтворює, взагалі кажучи, стаціонарність. Натомість, якщо врахувати, що

$$\xi(t) = \int_0^t \xi'(t') dt' + \xi(0),$$

то все стає на свої місця, бо права частина останньої формули - стаціонарна функція,

$$m_{\zeta+\xi(0)} = m_\zeta = m_0, \quad K_{\zeta+\xi(0)} = K_\zeta = K(\tau).$$

## РОЗДІЛ 9

# ПРОХОДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ ЧЕРЕЗ СТІЙКУ ЛІНІЙНУ ДИНАМІЧНУ СИСТЕМУ

В цьому розділі розглядатимуться деякі випадки стійких динамічних систем, визначених лінійним диференціальним рівнянням (8.17)

$$P_n(p)\eta(t) = \zeta(t), \quad \zeta(t) = Q_m(p)\xi(t)$$

з сталими коефіцієнтами, здебільшого першого й другого порядків. Як показано в прикладі 8.17, розв'язок рівняння для достатньо великих  $t$  є стаціонарним за умови стаціонарності його правої частини  $\zeta(t)$ . Оскільки математичне сподівання стаціонарного розв'язку дається формулою (8.18) (див. приклад 8.19), йтиметься тільки про кореляційну функцію, зокрема дисперсію.

### 9.1. СТАЦІОНАРНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Нехай дія стійкої лінійної динамічної системи першого порядку характеризується диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами одного знаку

$$a_1\eta'(t) + a_0\eta(t) = \zeta(t), \quad a_0a_1 > 0. \quad (9.1)$$

Це є знайоме нам рівняння (7.7) з прикладу 7.5, розв'язок якого для великих значень  $t$  дається формулою (7.8), тобто

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \int_{t_0}^t e^{\frac{a_0}{a_1}t'} \zeta(t') dt', \quad (9.2)$$

або

$$\eta(t) = \int_{t_0}^t v(t-t') \zeta(t') dt', \quad (9.3)$$

де

$$v(t-t') = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1}(t-t')}$$

- визначена формулою (7.13) вагова функція рівняння. Повторюючи міркування п. 7.2, які привели до формул (7.15), (7.15), ми можемо звести розв'язок (9.31) до вигляду

$$\eta(t) = \frac{1}{a_1} \int_0^\infty e^{-\frac{a_0}{a_1}z} \zeta(t-z) dz, \tag{9.4}$$

або просто покласти в формулі (9.2)  $t_0 = -\infty$ ,

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \int_{-\infty}^t e^{\frac{a_0}{a_1}t'} \zeta(t') dt', \tag{9.5}$$

Випадкову функцію  $\zeta(t)$  на вході вважатимемо стаціонарною з характеристиками  $m_0, K(\tau)$  і досліджуватимемо кореляційну функцію розв'язку  $\eta(t)$ ,

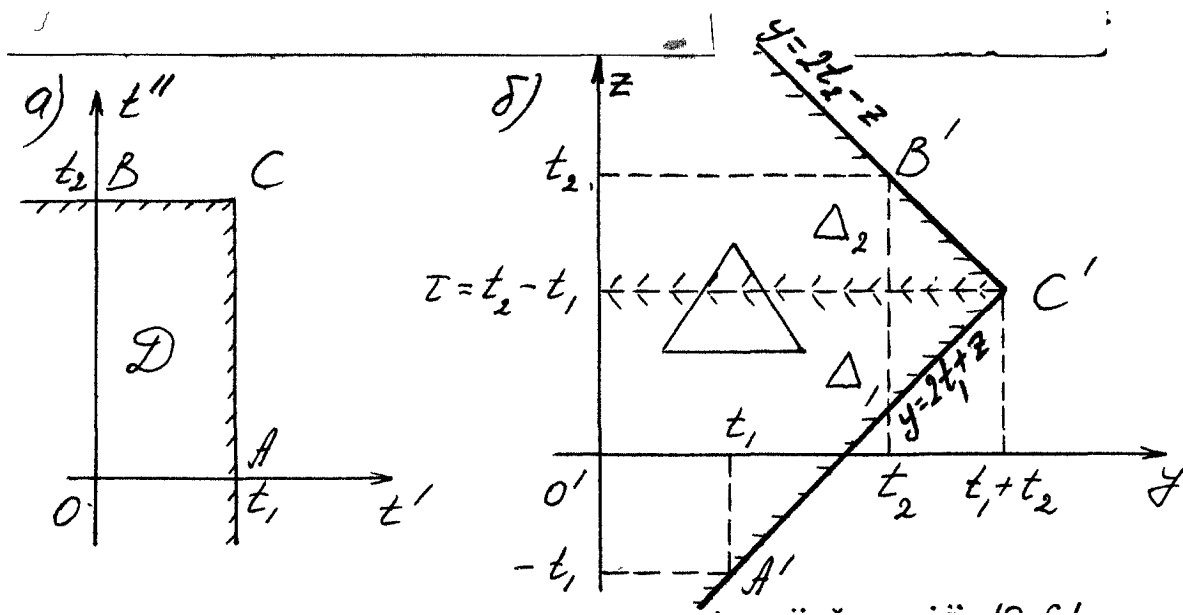


Рис. 9.1. Обчислення кореляційної функції (9.6)

стаціонарного з огляду на приклади 8.5, 8.17. Перш за все ми перетворимо подвійний інтеграл, яким зображається кореляційна функція, в однократний. Далі зупинимось на декількох прикладах.

Розпочнемо з розв'язку (9.5), котрий має кореляційну функцію

$$K_{\eta}(\tau) = \frac{1}{a_1^2} e^{-\frac{a_0}{a_1}(t_1+t_2)} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} e^{\frac{a_0}{a_1}(t'+t'')} K(t'' - t') dt' dt'' \quad (9.6)$$

Нехай поки що  $\tau = t_2 - t_1 > 0$ , тобто  $t_1 < t_2$ . Подвійний інтеграл береться по області  $D$  площини  $t'Ot''$ , визначеній нерівностями  $-\infty < t' \leq t_1, -\infty < t'' \leq t_1$ ; границею її є ламана  $ACB$  (див. рис. 9.1 а, де задля визначеності припущено  $t_1 < 0, t_2 < 0$ ). Заміна змінних  $t'' - t' = z, t'' + t' = y$  з модулем якобіана  $|J(y, z)| = \frac{1}{2}$  переводить: а) точки  $A(t_1, 0), B(0, t_2), C(t_1, t_2), O(0, 0)$  площини  $t'Ot''$  - в точки  $A'(t_1, -t_1), B'(t_2, t_2), C'(t_1 + t_2, t_2 - t_1), O'(0, 0)$  площини  $yO'z$ ; б) промені  $CA, CB$  - в промені  $C'A' (y = 2t_1 + z), C'B' (y = 2t_2 - z)$ ; в) область  $D$  - в область  $\Delta$  з границею  $A'C'B'$  і внутрішньою точкою  $O'$  (рис. 9.1 б). Розбиваючи прямою  $z = \tau \equiv t_2 - t_1$  область  $\Delta$  на дві частини  $\Delta_1 (-\infty < z \leq t_2 - t_1, -\infty < y \leq 2t_1 + z)$  та  $\Delta_2 (t_2 - t_1 \leq z < \infty, -\infty < y \leq 2t_2 - z)$ , знаходимо

$$K_{\eta}(\tau) = \frac{1}{2a_1^2} e^{-\frac{a_0}{a_1}(t_1+t_2)} \left( \int_{-\infty}^{\tau} K(z) dz \int_{-\infty}^{2t_1+z} e^{\frac{a_0}{a_1}y} dy + \int_{\tau}^{\infty} K(z) dz \int_{-\infty}^{2t_2-z} e^{\frac{a_0}{a_1}y} dy \right).$$

Внутрішні інтеграли дорівнюють

$$\int_{-\infty}^{2t_1+z} e^{\frac{a_0}{a_1}y} dy = \frac{a_1}{a_0} e^{\frac{a_0}{a_1}y} \Big|_{-\infty}^{2t_1+z} = \frac{a_1}{a_0} e^{\frac{2a_0 t_1}{a_1}} e^{\frac{a_0 z}{a_1}}, \quad \int_{-\infty}^{2t_2-z} e^{\frac{a_0}{a_1}y} dy = \frac{a_1}{a_0} e^{\frac{2a_0 t_2}{a_1}} e^{-\frac{a_0 z}{a_1}},$$

тому

$$K_{\eta}(\tau) = \frac{1}{2a_0 a_1} \left( e^{-\frac{a_0}{a_1} \tau} \int_{-\infty}^{\tau} K(z) e^{\frac{a_0 z}{a_1}} dz + e^{-\frac{a_0}{a_1} \tau} \int_{\tau}^{\infty} K(z) e^{\frac{a_0 z}{a_1}} dz \right). \quad (9.7)$$

Ми вивели формулу для додатних значень  $\tau$ . Вона не змінюється й при від'ємних  $\tau$ . Переконайтесь в цьому самостійно.

Дисперсія стаціонарного розв'язку рівняння (9.1) дорівнює

$$D_{\eta} = K_{\eta}(0) = \frac{1}{2a_0 a_1} \left( \int_{-\infty}^0 K(z) e^{\frac{a_0 z}{a_1}} dz + \int_0^{\infty} K(z) e^{\frac{a_0 z}{a_1}} dz \right),$$

або, якщо замінити в першому інтегралі  $z$  на  $-z$  та зважити на парність  $K(z)$ ,

$$D_\eta = \frac{1}{a_0 a_1} \int_0^\infty K(z) e^{-\frac{a_0}{a_1} z} dz, \quad (9.8)$$

Того ж результату доходимо при використанні розв'язку (9.4) з кореляційною функцією

$$K_\eta(\tau) = \frac{1}{a_1^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{a_0}{a_1}(z'+z'')} K(\tau - (z'' - z')) dz' dz'', \quad (9.9)$$

фактично знайденою в прикладі 8.5 на підставі прикладу 6.11.

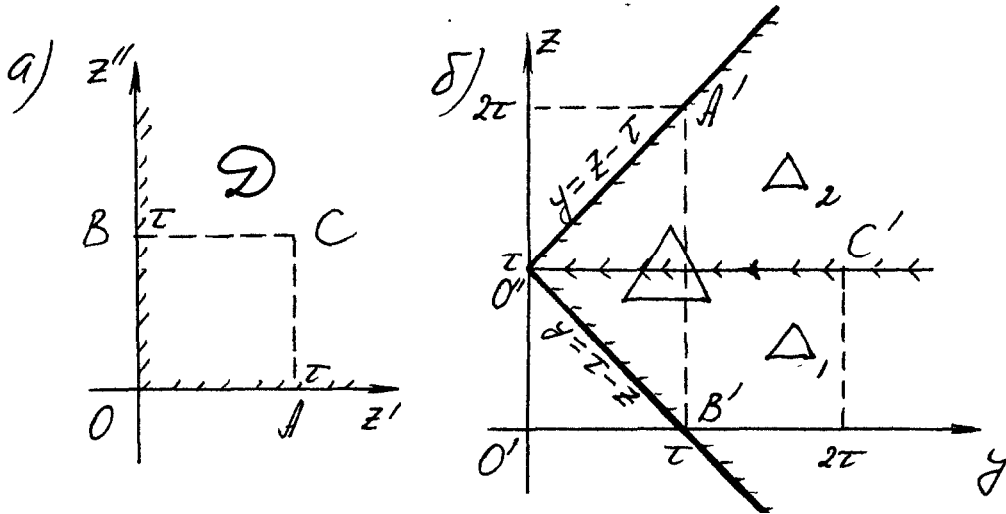


Рис. 9.2. Обчислення кореляційної функції (9.9)

Нехай  $\tau = t_2 - t_1 > 0$ . Область інтегрування інтеграла (9.9) - перший квадрант  $D$  площини  $z'Oz''$  (рис. 9.2 а). Знов запровадимо заміну змінних, але дещо по-іншому. Саме, покладемо  $\tau - (z'' - z') = z, z'' + z' = y$ , або, що те ж саме,  $z'' - z' = \tau - z, z'' + z' = y$ . Незавжно пересвідчитись, що модуль якобіана перетворення, як і раніше, дорівнює  $\frac{1}{2}$ ; точка  $O(0,0)$  переходить в  $O''(0,\tau)$ ; півосі  $OA, OB$  - відповідно в промені  $O''A'$  ( $y = z - \tau$ ),  $O''B'$  ( $y = \tau - z$ ); область  $D$  - в область  $\Delta$ , розташовану праворуч від променів (рис. 9.2 б). Розбиваючи  $\Delta$  на частини  $\Delta_1$  ( $-\infty < z \leq \tau, \tau - z \leq y < \infty$ ) та  $\Delta_2$  ( $\tau \leq z < \infty, z - \tau \leq y < \infty$ ), матимемо

$$K_\eta(\tau) = \frac{1}{2a_1^2} \left( \int_{-\infty}^{\tau} K(z) dz \int_{\tau-z}^{\infty} e^{-\frac{a_0}{a_1} y} dy + \int_{\tau}^{\infty} K(z) dz \int_{z-\tau}^{\infty} e^{-\frac{a_0}{a_1} y} dy \right),$$

і по обчисленні внутрішніх інтегралів знов дістанемо формулу (9.7).



Приклад 9.1. Нехай на вхід динамічної системи надходить стаціонарна випадкова функція  $\xi(t)$  з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0$$

(тобто  $\zeta(t) = \xi(t)$ ). Тоді по формулі (9.7)

$$K_\eta(\tau) = \frac{\sigma^2}{2a_0 a_1} \left( e^{-\frac{a_0}{a_1}\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\alpha|z|} e^{\frac{a_0}{a_1}z} dz + e^{-\frac{a_0}{a_1}\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\alpha|z|} e^{\frac{a_0}{a_1}z} dz \right).$$

Припустимо спочатку, що  $\tau > 0$ . Переписуючи перший з інтегралів як суму двох інтегралів (від  $-\infty$  до 0 і від 0 до  $\tau$ ), матимемо

$$\begin{aligned} K_\eta(\tau) &= \frac{\sigma^2}{2a_0 a_1} \left( e^{-\frac{a_0}{a_1}\tau} \left( \int_{-\infty}^0 e^{\alpha z} e^{\frac{a_0}{a_1}z} dz + \int_0^{\tau} e^{-\alpha z} e^{\frac{a_0}{a_1}z} dz \right) + e^{-\frac{a_0}{a_1}\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\alpha z} e^{\frac{a_0}{a_1}z} dz \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2a_0 a_1} \left( e^{-\frac{a_0}{a_1}\tau} \left( \int_{-\infty}^0 e^{\left(\alpha + \frac{a_0}{a_1}\right)z} dz + \int_0^{\tau} e^{\left(\frac{a_0}{a_1} - \alpha\right)z} dz \right) + e^{-\frac{a_0}{a_1}\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\left(\alpha + \frac{a_0}{a_1}\right)z} dz \right). \end{aligned}$$

По обчисленні інтегралів (при  $\alpha \neq a_0/a_1$  та при  $\alpha = a_0/a_1$ ) і деяких тотожних перетворень дістаємо

$$K_\eta(\tau) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{a_0(a_0^2 - a_1^2 \alpha^2)} \left( a_0 e^{-\alpha\tau} - a_1 e^{-\frac{a_0}{a_1}\tau} \right), & \alpha \neq \frac{a_0}{a_1}, \\ \frac{\sigma^2}{2a_0 a_1} \left( \frac{a_1}{a_0} + \tau \right) e^{-\frac{a_0}{a_1}\tau}, & \alpha = \frac{a_0}{a_1}. \end{cases}$$

Здійснивши аналогічні міркування при  $\tau < 0$  й звівши до купи обидва результати, прийдемо до остаточного результату

$$K_\eta(\tau) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{a_0(a_0^2 - a_1^2 \alpha^2)} \left( a_0 e^{-\alpha|\tau|} - a_1 e^{-\frac{a_0}{a_1}|\tau|} \right), & \alpha \neq \frac{a_0}{a_1}, \\ \frac{\sigma^2}{2a_0^2} \left( 1 + \frac{a_0}{a_1} |\tau| \right) e^{-\frac{a_0}{a_1}|\tau|}, & \alpha = \frac{a_0}{a_1}. \end{cases} \quad (9.10)$$

Аналіз кореляційної функції (9.10) свідчить, що при  $\alpha = a_0/a_1$  стаціонарний розв'язок рівняння (9.1) є (с.к..) неперервно диференційовним (див. приклад 8.15). Таким же він є й в загальному випадку  $\alpha \neq a_0/a_1$ . Зокрема, кореляційна функція похідної  $\eta'(t)$  при  $\alpha \neq a_0/a_1$  дорівнює

$$K_{\eta}(\tau) = \sigma_{\eta}^2 a_0 \alpha \left( \frac{a_0}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1} |\tau|} - \alpha e - \alpha |\tau| \right).$$

Впевніться в цьому самостійно.

Приклад 9.2. Стаціонарна функція  $\zeta(t)$  на вході динамічної системи має вигляд

$$\zeta(t) = b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t),$$

де  $\xi(t)$  - стаціонарна неперервно диференційовна випадкова функція з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|} (1 + \alpha |\tau|), \quad \alpha > 0$$

(див. приклад 8.15).

Кореляційну функцію стаціонарного розв'язку рівняння (9.1) можна знайти за тією ж формулою (9.7), якщо під  $K(z)$  розуміти кореляційну функцію  $K_{\zeta}(z)$ . Остання згідно з прикладом 8.18 дорівнює

$$K_{\zeta}(\tau) = b_0^2 K_{\xi}(\tau) - b_1^2 K_{\xi}''(\tau) = b_0^2 K_{\xi}(\tau) + b_1^2 K_{\xi}'(\tau).$$

Використовуючи значення  $K_{\xi}(\tau)$  з прикладу 8.15, отримуємо

$$K_{\zeta}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|} (\alpha (b_0^2 - b_1^2 \alpha^2) |\tau| + b_0^2 + b_1^2 \alpha^2)$$

Знайдемо дисперсію стаціонарного розв'язку. За формулою (9.8)

$$\begin{aligned} D_{\eta} &= \frac{\sigma^2}{a_0 a_1} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{a_0}{a_1} + \alpha\right)z} (\alpha (b_0^2 - b_1^2 \alpha^2) z + b_0^2 + b_1^2 \alpha^2) dz = \\ &= \left| \begin{array}{l} \alpha (b_0^2 - b_1^2 \alpha^2) z + b_0^2 + b_1^2 \alpha^2 = u, \quad du = \alpha (b_0^2 - b_1^2 \alpha^2) dz \\ e^{-\left(\frac{a_0}{a_1} + \alpha\right)z} dz = dv, \quad v = -\frac{a_1}{a_0 + a_1 \alpha} e^{-\frac{a_0 + a_1 \alpha}{a_1} z} \end{array} \right| = \\ &= \frac{\sigma^2}{a_0 a_1} \left( -\frac{a_1}{a_0 + a_1 \alpha} (\alpha (b_0^2 - b_1^2 \alpha^2) z + b_0^2 + b_1^2 \alpha^2) e^{-\frac{a_0 + a_1 \alpha}{a_1} z} \Big|_0^{\infty} + \right. \\ &\left. + \frac{a_1 \alpha (b_0^2 - b_1^2 \alpha^2)}{a_0 + a_1 \alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_0 + a_1 \alpha}{a_1} z} dz \right) = \frac{\sigma^2}{a_0 a_1} \left( \frac{a_1 (b_0^2 + b_1^2 \alpha^2)}{a_0 + a_1 \alpha} + \frac{a_1^2 \alpha (b_0^2 - b_1^2 \alpha^2)}{(a_0 + a_1 \alpha)^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^2 (b_1^2 a_0 \alpha^2 + b_0^2 (a_0 + 2a_1 \alpha))}{a_0 (a_0 + a_1 \alpha)^2}.$$

Що стосується кореляційної функції, наведемо лише остаточний результат її обчислення

$$K_\eta(\tau) = \frac{\sigma^2}{m} \left( n e^{-\frac{a_0}{a_1} |\tau|} + (p|\tau| + q) e^{-\alpha |\tau|} \right),$$

де

$$m = a_0 (a_0^2 - a_1^2 \alpha^2)^2, \quad n = 2a_1 \alpha^3 (a_1^2 b_0^2 - a_0^2 b_1^2), \quad p = a_0 \alpha (b_0^2 - b_1^2 \alpha^2) (a_0^2 - a_1^2 \alpha^2),$$

$$q = a_0 (a_0^2 b_1^2 \alpha^2 + a_1^2 b_1^2 \alpha^4 + a_0^2 b_0^2 - 3a_1^2 b_0^2 \alpha^2)$$

Неважко впевнитись у неперервній диференційовності стаціонарного розв'язку  $\eta(t)$  на виході динамічної системи.

## 9.2. ВИПАДОК НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ФУНКЦІЇ НА ВХОДІ

Нехай в умовах попереднього прикладу

$$\zeta(t) = b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t),$$

але стаціонарна випадкова функція  $\xi(t)$  має кореляційну функцію

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|}, \quad \alpha > 0,$$

тобто недиференційовна.

Постановка задач такого гатунку є слушною, хоча б з огляду на те, що кореляційна функція задачі може бути наближенням (апроксимацією) складної за формою кореляційної функції деякої диференційовної випадкової функції.

Приступаючи до розв'язання задачі, ми можемо скористатись суто формально формулами (9.4) або (9.5), але наступні формули (9.7), (9.8) вже незастосовні, в чому ми впевнимосся дещо пізніше.

З скрутного становища можемо вийти, якщо міркуватимемо в деякому «узагальненому» сенсі. Запишемо розв'язок задачі за допомогою, наприклад, формули (9.5)

$$\eta(t) = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0 t}{a_1}} \int_{-\infty}^t e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} (b_1 \xi'(t') + b_0 \xi(t')) dt',$$

та запровадимо формальне інтегрування частинами,

$$b_1 \int_{-\infty}^t e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} \xi'(t') dt' = \left| \begin{array}{l} u = e^{\frac{a_0 t'}{a_1}}, \quad du = \frac{a_0}{a_1} e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} dt' \\ v = \xi(t) \end{array} \right| =$$

$$= b_1 \left( e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} \xi(t') \Big|_{-\infty}^t - \frac{a_0}{a_1} \int_{-\infty}^t e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} \xi(t') dt' \right) = b_1 \left( e^{\frac{a_0 t}{a_1}} \xi(t) - \frac{a_0}{a_1} \int_{-\infty}^t e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} \xi(t') dt' \right).$$

Отже,

$$\eta(t) = \frac{b_1}{a_1} \xi(t) + \frac{1}{a_1} \left( b_0 - \frac{b_1 a_0}{a_1} \right) e^{-\frac{a_0 t}{a_1}} \int_{-\infty}^t e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} \xi(t') dt'. \quad (9.11)$$

Формула (9.11) не містить похідної  $\xi'(t)$  й може бути придатною для подальших розрахунків. Якщо позначити доданки правої частини  $\eta_1(t), \eta_2(t)$  відповідно, то кореляційна функція "узагальненого" розв'язку (9.11) дорівнює

$$K_\eta(\tau) = K_{\eta_1}(\tau) + K_{\eta_2}(\tau) + R_{\eta_1 \eta_2}(\tau) + R_{\eta_2 \eta_1}(\tau).$$

Неважко перевірити (зробіть це самостійно), що

$$+ \frac{b_1}{a_1} \left( b_0 - \frac{b_1 a_0}{a_1} \right) \left( e^{-\frac{a_0 t_1}{a_1}} \int_{-\infty}^{t_1} e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} K(t' - t_1) dt' + e^{-\frac{a_0 t_2}{a_1}} \int_{-\infty}^{t_2} e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} K(t_2 - t') dt' \right),$$

$$K_\eta(\tau) = \frac{b_1^2}{a_1} K(\tau) + \frac{1}{a_1} \left( b_0 - \frac{b_1 a_0}{a_1} \right)^2 e^{-\frac{a_0(t_1+t_2)}{a_1}} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} e^{\frac{a_0(t'+t'')}{a_1}} K(t'' - t') dt' dt'' +$$

$$D_\eta = K_\eta(0) = \frac{b_1^2}{a_1} K(0) + \frac{1}{a_1} \left( b_0 - \frac{b_1 a_0}{a_1} \right)^2 e^{-\frac{2a_0 t}{a_1}} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t e^{\frac{a_0(t'+t'')}{a_1}} K(t'' - t') dt' dt'' +$$

$$+ \frac{2b_1}{a_1} \left( b_0 - \frac{b_1 a_0}{a_1} \right) e^{-\frac{a_0 t}{a_1}} \int_{-\infty}^t e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} K(t - t') dt'. \quad (9.12)$$

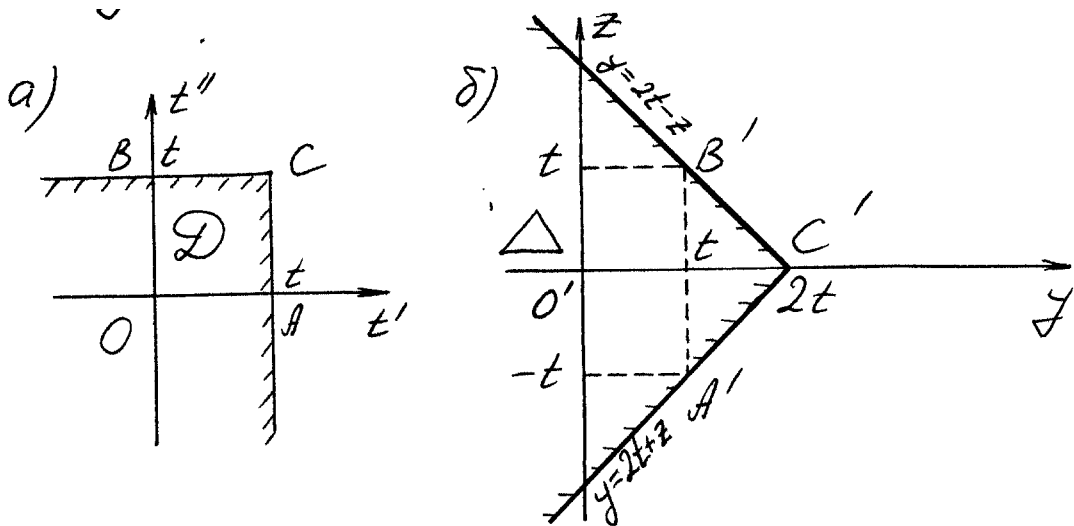


Рис. 9.3. Обчислення дисперсії (9.12)

Здійснімо до кінця обчислення дисперсії. Підставляючи в формулу (9.12) задане значення кореляційної функції  $K(\tau)$ , пересвідчуємось, що однократний інтеграл дорівнює

$$\int_{-\infty}^t e^{\frac{a_0 t'}{a_1}} \sigma^2 e^{-\alpha(t-t')} dt' = \frac{a_1 \sigma^2}{a_0 + a_1 \alpha} e^{\frac{a_0 t}{a_1}};$$

тут  $|t - t'| = t - t'$ , бо  $t' \leq t$ . Подвійний інтеграл заміною  $t'' + t' = y, t'' + t' = z$ , яка переводить область  $D$  площини  $t''Ot'$  з границею  $A(t,0)C(t,t)B(0,t)$  в область  $\Delta$  площини  $yO'z$  з границею  $A'(t,-t)C'(2t,0)B'(t,t)$  (рис. 9.3), приводиться до вигляду

$$\sigma^2 \int_0^\infty e^{-\alpha z} dz \int_{-\infty}^{2t-z} e^{\frac{a_0 y}{a_1}} dy = \frac{a_1^2 \sigma^2}{a_0(a_0 + a_1 \alpha)} e^{\frac{2a_0 t}{a_1}}.$$

Підстановка знайдених інтегралів в формулу (9.12) після деяких перетворень веде до такого результату

$$D_\eta = \frac{\sigma^2 (b_0^2 a_1 + b_1^2 \alpha a_0)}{a_0 a_1 (a_0 + \alpha a_1)} \tag{9.13}$$

Нехай, наприклад,  $a_1 = 2, a_0 = 1, b_1 = 1, b_0 = 3, \sigma^2 = 2, \alpha = 2$ , тобто йдеться про стаціонарний розв'язок рівняння

$$2\eta'(t) + \eta(t) = \xi'(t) + 3\xi(t)$$

з кореляційною функцією

$$K_{\xi}(\tau) = K(\tau) = 2e^{-2|\tau|}.$$

Формула (9.13) дає на виході динамічної системи значення дисперсії  $D_{\eta} = 4$ . Якби ми, проігнорувавши недиференційовність функції  $\xi(t)$ , знайшли при  $\tau \neq 0$  похідну  $K''(\tau) = 8e^{-2|\tau|}$  та підставили її в формулу (9.8) для

$$K(\tau) = K_{\xi}(\tau) = b_0^2 K(\tau) - b_1^2 K''(\tau),$$

то отримали б помилковий результат  $D_{\eta} = 2$ .

Ще покажемо, що є випадок, коли диференціальне рівняння й кореляційна функція  $K_{\xi}(\tau)$  мають вигляд

$$3\eta'(t) + \eta(t) = 4\xi'(t) + \xi(t), \quad K_{\xi}(\tau) = K(\tau) = 6e^{-2|\tau|},$$

тобто  $a_1 = 3, a_0 = 1, b_1 = 4, b_0 = 1, \sigma^2 = 6, \alpha = 2$ . Знайшовши при  $\tau \neq 0$

$$K''(\tau) = 24e^{-2|\tau|}$$

та некритично використавши формулу (9.8), дістали б від'ємне (!) значення дисперсії  $D_{\eta} = -54$ , бо при  $\tau \neq 0$

$$b_0^2 K(\tau) - b_1^2 K''(\tau) = -378e^{-2|\tau|} < 0.$$

Використання ж «узагальненої» формули (9.11) та її наслідка (9.13) дає правильну відповідь  $D_{\eta} = 10$ .

Ми говорили про дисперсію розв'язку (9.11). Відшукання кореляційної функції є технічно складнішим. У великій природі може стати тут теорія лишків, один з розділів теорії функцій комплексної змінної. В той чи інший спосіб дістаємо

$$K_{\eta}(\tau) = \frac{\sigma^2}{a} \left( be^{-\frac{a_0}{a_1}|\tau|} + ce^{-\alpha|\tau|} \right),$$

де

$$a = \frac{\alpha^2 a_1^2 - a_0^2}{\alpha}, \quad b = \frac{a_1^2 b_0^2 - a_0^2 b_1^2}{a_0 a_1}, \quad c = \frac{b_1^2 \alpha^2 - b_0^2}{\alpha}.$$

Наявність кореляційної функції дозволяє углядіти недиференційовність стаціонарного розв'язку на виході динамічної системи, бо, наприклад,

$$K'_{\eta}(-0) = K'_{\eta,-}(0) = \frac{\alpha\sigma^2 b_1^2}{a_1^2} \neq 0.$$

Перевірте це самі.

### 9.3. СТАЦІОНАРНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Звернімося до динамічної системи другого порядку, дія якої характеризується лінійним диференціальним рівнянням

$$\eta''(t) + 2h\eta'(t) + k^2\eta(t) = \zeta(t), \quad (9.14)$$

де  $h, k$  - сталі,  $0 < h < k$ , а  $\zeta(t)$  - стаціонарна випадкова функція з характеристиками  $m, K(\tau)$ .

Рівняння (9.14) має широкі застосування, зокрема в механіці, де здебільшого іменується рівнянням механічних коливань. Перший член лівої частини зумовлений прискоренням, другий – силою опору, пропорційною швидкості, третій - відновлюючою силою, яка пропорційна відхиленню  $\eta(t)$  від стану рівноваги. Права частина рівняння відповідає дії зовнішньої збурюючої сили. Таке ж рівняння, з іншим фізичним сенсом членів, зустрічається в електротехніці, радіотехніці тощо.

Характеристичне рівняння  $r^2 + 2hr + k^2 = 0$  однорідного рівняння  $\eta'' + 2h\eta' + k^2\eta = 0$  має комплексні корені  $r = -h \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k^2 - h^2}$  з від'ємною дійсною частиною  $-h$ . Фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння

$$y_1(t) = e^{-ht} \cos \omega_0 t, \quad y_2(t) = e^{-ht} \sin \omega_0 t.$$

Розв'язок однорідного рівняння, що задовольняє наявні початкові умови,

$$\eta_{o.n.}(t) = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t),$$

прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$  (що більше  $h$ , то швидше), в разі випадкових початкових умов - у середньому квадратичному. Отже, динамічна система з рівнянням (9.14) є стійкою, і при достатньо великих значеннях  $t$  розв'язок можна вважати рівним розв'язку  $\eta_{н.н.}(t)$ , який задовольняє нульові початкові умови. Останній визначається ваговою функцією (формули (7.9), (7.11), (7.12)). Оскільки  $a_2 = 1$ ,

$$\Delta(t, t') = \begin{vmatrix} y_1(t') & y_2(t') \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = e^{-h(t+t')} \sin \omega_0(t-t'), \quad W(t') = \begin{vmatrix} y_1(t') & y_2(t') \\ y_1(t') & y_2(t') \end{vmatrix} = \omega_0 e^{-2ht'}$$

маємо

$$v(t-t') = \frac{\Delta(t, t')}{W(t')} = \frac{1}{\omega_0} e^{-h(t-t')} \sin \omega_0(t-t'),$$

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_{t_0}^t v(t-t') \zeta(t') dt' = \frac{1}{\omega_0} \int_{t_0}^t e^{-h(t-t')} \zeta(t') \sin \omega_0(t-t') dt',$$

або, згідно з формулою (7.15),

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_0^\infty v(z) \zeta(t-z) dz = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\infty e^{-hz} \zeta(t-z) \sin \omega_0 z dz \quad (9.15)$$

Результати прикладу 8.5 засвідчують, що розв'язок (9.15) для великих значень  $t$  є стаціонарним з кореляційною функцією й дисперсією

$$K_\eta(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-h(z'+z'')} K(\tau + z' - z'') \sin \omega_0 z' \sin \omega_0 z'' dz' dz'', \quad (9.16)$$

$$D_\eta = K_\eta(0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-h(z'+z'')} K(z'' - z') \sin \omega_0 z' \sin \omega_0 z'' dz' dz'', \quad (9.17)$$

Якщо скористатися формулою (7.16), матимемо також

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_{-\infty}^t v(t-t') \zeta(t') dt' = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^t e^{-h(t-t')} \zeta(t') \sin \omega_0(t-t') dt', \quad (9.18)$$

$$K_\eta(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} e^{-h(t_1+t_2-t'-t'')} K(t''-t') \sin \omega_0(t_1-t') \sin \omega_0(t_2-t'') dt' dt'', \quad (9.19)$$

$$D_\eta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t e^{-h(2t-t'-t'')} K(t''-t') \sin \omega_0(t-t') \sin \omega_0(t-t'') dt' dt'', \quad (9.20)$$



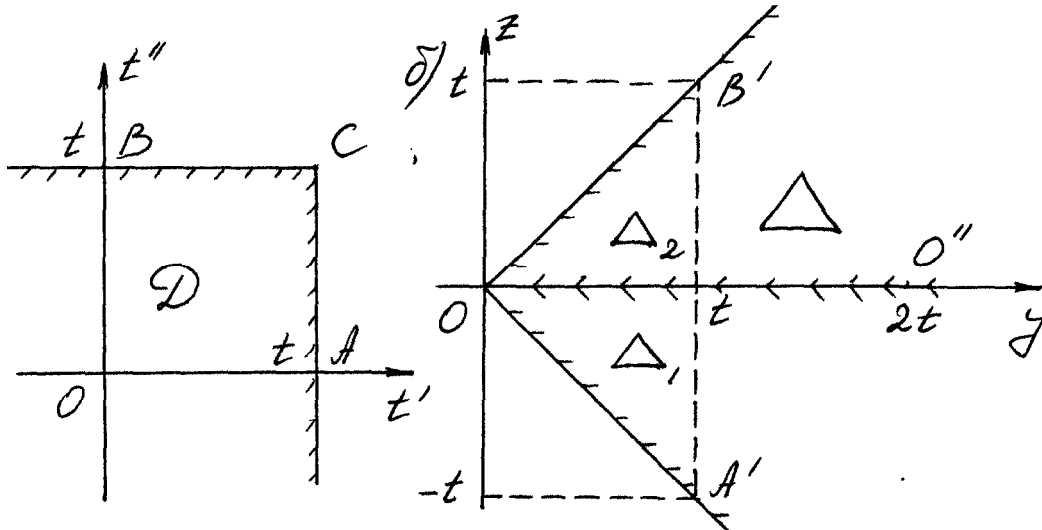


Рис. 9.4. Перетворення дисперсії (9.20)

Зупинимось на спрощенні інтеграла для обчислення дисперсії. Виходячи, наприклад, з формули (9.20), замінимо добуток синусів піввізницею косинусів,

$$D_{\eta} = \frac{1}{2\omega_0^2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t e^{-h(2t-t'-t'')} K(t''-t') (\cos \omega_0(t''-t') - \cos \omega_0(2t-t'-t'')) dt' dt'',$$

після чого здійснимо заміну змінних  $t''-t'=z, 2t-t'-t''=y$  з модулем якобіана  $\frac{1}{2}$ . При цьому відповідно точки  $O(0,0), A(t,0), B(0,t), C(t,t)$  перетворюються в точки  $O''(2t,0), A'(t,-t), B'(t,t), C'=O'(0,0)$ , промені  $CA, CB$  в промені  $O'A', O'B'$ , а початкова область інтегрування  $D$  - в область  $\Delta$  площини  $yO'z$  (див. рис. 9.4). Розбивши  $\Delta$  на дві частини  $\Delta_1, \Delta_2$ , які визначаються, відповідно, нерівностями  $-\infty < z \leq 0, -z \leq y < \infty$  та  $0 \leq z < \infty, z \leq y < \infty$ , дістанемо

$$D_{\eta} = \frac{1}{4\omega_0^2} \left( \int_{-\infty}^0 K(z) dz \int_{-z}^{\infty} e^{-hy} (\cos \omega_0 z - \cos \omega_0 y) dy + \int_0^{\infty} K(z) dz \int_z^{\infty} e^{-hy} (\cos \omega_0 z - \cos \omega_0 y) dy \right).$$

Парність кореляційної функції  $K(z)$  призводить, після заміни в першому інтегралі  $z$  на  $-z$ , до появи одного інтеграла замість двох, а саме

$$D_{\eta} = \frac{1}{2\omega_0^2} \int_0^{\infty} K(z) dz \int_z^{\infty} e^{-hy} (\cos \omega_0 z - \cos \omega_0 y) dy$$

Внутрішній інтеграл дорівнює

$$\begin{aligned}
& \cos \omega_0 z \int_z^\infty e^{-hy} dy - \int_z^\infty e^{-hy} \cos \omega_0 y dy = \\
& = -\frac{1}{h} \cos \omega_0 z \left( e^{-hy} \Big|_z^\infty \right) - \frac{e^{-hy}}{h^2 + \omega_0^2} \left( -h \cos \omega_0 y + \omega_0 \sin \omega_0 y \right) \Big|_z^\infty = \\
& = \frac{1}{h} e^{-hz} \cos \omega_0 z + \frac{e^{-hz}}{h^2 + \omega_0^2} \left( -h \cos \omega_0 z + \omega_0 \sin \omega_0 z \right) = \left| \begin{array}{l} h^2 + \omega_0^2 = k^2 \\ k^2 - h^2 = \omega_0^2 \end{array} \right| = \\
& = e^{-hz} \left( \left( \frac{1}{h} - \frac{h}{k^2} \right) \cos \omega_0 z + \frac{\omega_0}{k^2} \sin \omega_0 z \right) = \frac{\omega_0^2}{hk^2} e^{-hz} \left( \cos \omega_0 z + \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0 z \right),
\end{aligned}$$

а тому

$$D_\eta = \frac{1}{2hk^2} \int_0^\infty K(z) e^{-hz} \left( \cos \omega_0 z + \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0 z \right) dz. \quad (9.21)$$

Якби ми виходили з інтеграла (9.17), то такого ж результату дійшли б заміною змінних  $z'' + z' = y, z'' - z' = z$ . Перевірте!

Не набагато складніші перетворення, що ведуть до спрощення кореляційної функції. Наприклад, для інтеграла (9.19) можна взяти до уваги, що

$$\sin \omega_0 (t_1 - t') \sin \omega_0 (t_2 - t'') = \frac{1}{2} (\cos \omega_0 (\tau - (t'' - t')) - \cos \omega_0 (t_1 + t_2 - t' - t'')),$$

а відтак покласти  $t_1 + t_2 - t' - t'' = y, t'' - t' = z$  (див. рис. 9.5 для випадку  $\tau > 0$ ;

$\Delta_1 : -\infty < z \leq \tau, -z + \tau \leq y < \infty$ ;  $\Delta_2 : \tau \leq z < \infty, z - \tau \leq y < \infty$ ;  $|J| = \frac{1}{2}$ ). По обчисленні

внутрішніх інтегралів кореляційна функція набуває вигляду

$$\begin{aligned}
K_\eta(\tau) = & \frac{1}{4\pi k^2} \left( e^{-h\tau} \int_{-\infty}^\tau K(z) e^{hz} \left( \cos \omega_0 (\tau - z) + \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0 (\tau - z) \right) dz + \right. \\
& \left. + e^{h\tau} \int_\tau^\infty K(z) e^{-hz} \left( \cos \omega_0 (\tau - z) - \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0 (\tau - z) \right) dz + \right).
\end{aligned}$$

Приклад 9.4. Якщо на вхід динамічної системи надходить стаціонарна випадкова функція  $\xi(t)$  ( $\zeta(t) = \xi(t)$ ) з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0,$$

то згідно з формулою (9.21) дисперсія стаціонарного розв'язку рівняння (9.14)

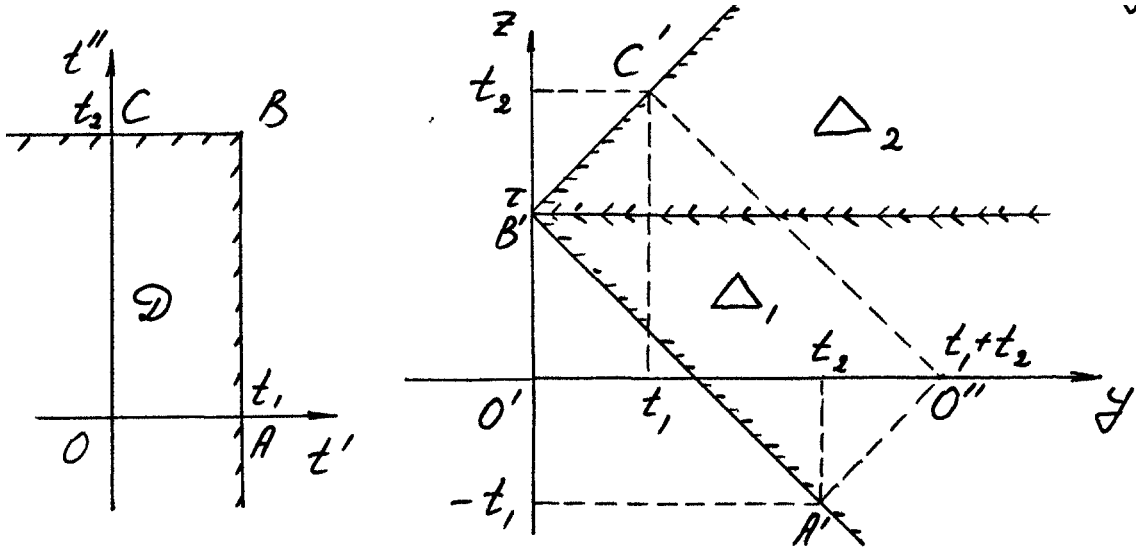


Рис. 9.5. Спрощення кореляційної функції (9.19)

дорівнює

$$D_{\eta} = \frac{\sigma^2}{2hk^2} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+h)z} \left( \cos \omega_0 z + \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0 z \right) dz = \frac{\sigma^2 (\alpha + 2h)}{2hk^2 ((\alpha + h)^2 + \omega_0^2)}.$$

Дисперсія прямує до нуля при  $\alpha \rightarrow +\infty$  і фіксованих  $h, k$ .

Приклад 9.5. Нехай

$$\zeta(t) = b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t),$$

а  $\xi(t)$  стаціонарна випадкова функція з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \alpha > 0.$$

В прикладі 8.15 доведено неперервну диференційовність функції  $\xi(t)$ , звідки на підставі п. 8.4 впливає стаціонарність випадкової функції  $\zeta(t)$ . Користуючись результатами прикладів 8.18, 8.15 і формулою (9.21), маємо

$$K_{\zeta}(\tau) = b_0^2 K(\tau) + b_1^2 K_{\xi'}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( c_1 \cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} c_2 \sin \beta|\tau| \right),$$

$$c_1 = b_0^2 + b_1^2 (\alpha^2 + \beta^2), \quad c_2 = b_0^2 - b_1^2 (\alpha^2 + \beta^2),$$

$$D_{\eta} = \frac{\sigma^2}{2hk^2} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+h)z} \left( c_1 \cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} c_2 \sin \beta|\tau| \right) \left( \cos \omega_0 z + \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0 z \right) dz.$$

В книзі [ 4 ] обчислення дисперсії (для випадку  $b_1 = 0, b_0 = k^2$ ) доведено до кінця.

Приклад 9.6. Нехай

$$\zeta(t) = b_m \xi^{(m)}(t) + b_{m-1} \xi^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t),$$

а  $\xi(t)$  стаціонарна випадкова функція з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}.$$

Як сказано в прикладі 8.15, функція  $\xi(t)$  має похідні будь-якого порядку, і значення  $m$  можна брати яким завгодно. Легко впевнитись в тому, що

$$K'(\tau) = -2\sigma^2 \alpha^2 \tau e^{-\alpha^2 \tau^2}, \quad K''(\tau) = -2\sigma^2 \alpha^2 (1 - 2\alpha^2 \tau^2) e^{-\alpha^2 \tau^2},$$

$$K'''(\tau) = 4\sigma^2 \alpha^4 (3\tau - 2\alpha^2 \tau^3) e^{-\alpha^2 \tau^2}.$$

Взагалі, для будь-якого  $k$  похідна  $k$ -го порядку має вигляд

$$K^{(k)}(\tau) = \sigma^2 S_k(\tau) e^{-\alpha^2 \tau^2},$$

де  $S_k(\tau)$  многочлен  $k$ -го степеня з сталими коефіцієнтами. Тому відповідно формулі (8.16)

$$K_\zeta(\tau) = \sigma^2 T_{2m}(\tau) e^{-\alpha^2 \tau^2},$$

$T_{2m}(\tau)$  - многочлен степеня  $2m$  (також з сталими коефіцієнтами). Замінивши в формулі (9.21)  $K(z)$  на  $K_\zeta(z)$ , матимемо для обчислення дисперсії стаціонарного розв'язку таку формулу

$$D_\eta = \frac{\sigma^2}{2hk^2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 z^2 - hz} T_{2m}(z) \left( \cos \omega_0 z + \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0 z \right) dz.$$

Інтеграл збігається при всіх (натуральних)  $m$ .

Приклад 9.7. В прикладі 7.8 йшлося про рівняння

$$\eta''(t) + k^2 \eta(t) = \xi(t),$$

яке є частинним випадком рівняння (9.14) при  $h = 0$ , тобто за відсутності опору середовища. На відміну від загального випадку тут неприпустимо брати розв'язок  $\eta_{н.н.}(t)$  у вигляді (9. 18)

$$\eta_{н.н.}(t) = \int_{-\infty}^t v(t-t')\xi(t')dt' = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^t \xi(t') \sin k(t-t') dt'$$

(або, що зводиться до того ж, - у вигляді (9.15)).

Дійсно, при  $m_\xi = m_0 \neq 0$  розбігається інтеграл для обчислення математичного сподівання розв'язку. Ба більше, навіть якщо  $m_0 = 0$ , розбігається інтеграл для обчислення дисперсії розв'язку, а саме інтеграл

$$\frac{1}{2k^2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K(t''-t') (\cos k(t''-t') - \cos k(2t-t'-t'')) dt' dt''.$$

Справді, по заміні змінних  $t''-t' = z$ ,  $t''+t' = y$  доходимо повторного інтеграла

$$\frac{1}{2k^2} \int_0^\infty K(z) dz \int_z^\infty (\cos kz - \cos ky) dy$$

з розбіжним внутрішнім. Перевірте!

## 9.4. НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНА ФУНКЦІЯ НА ВХОДІ

Розглянемо стійку лінійну динамічну систему, яка характеризується диференціальним рівнянням

$$P_n(p)\eta(t) = \zeta(t), \quad \zeta(t) = Q_m(p)\xi(t) \quad (9.22)$$

Це відоме нам рівняння (8.17), частинний випадок рівняння (7.1). Дотепер ми завжди (крім п. 9.2) вважали, що стаціонарна випадкова функція  $\xi(t)$  має похідні до порядку  $m$  включно. Але в застосуваннях нерідко трапляються випадки, коли  $\xi(t)$  диференційовна тільки до певного порядку  $k < m$  або взагалі недиференційовна. Про один з них йшлося в п. 9.2. Зупинимось на цьому питанні докладніше. Для визначеності вважатимемо функцію недиференційовною.

В основу міркувань покладемо формулу

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_0^{\infty} v(z) \zeta(t-z) dz. \quad (9.23)$$

котру, для великих  $t$ , ми були вивели в п. 7. 2 (див. (7.15)). Вагова функція  $v(z)$  задовольняє початкові умови

$$v(0) = v'(0) = \dots = v^{(n-2)}(0) = 0, \quad v^{(n-1)}(0) = a_n^{-1},$$

а при  $z \rightarrow +\infty$  прямує до нуля разом зі своїми похідними.

Нехай спочатку  $m < n$ . Візьмемо для простоти  $n = 2, m = 1$ , тобто рівняння

$$P_2(p)\eta(t) \equiv a_2\eta''(t) + a_1\eta'(t) + a_0\eta(t) = \zeta(t), \quad \zeta(t) = Q_1(p)\xi(t) \equiv b_1\xi'(t) + b_0\xi(t).$$

Підставимо значення  $\zeta(t)$  в формулу (9.23) і формально проінтегруємо частинами

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_0^{\infty} v(z) Q_1(p) \xi(t-z) dz = \int_0^{\infty} v(z) (b_1 \xi'(t-z) + b_0 \xi(t-z)) dz = \\ &= \left| \xi'(t-z) = -\frac{\partial \xi(t-z)}{\partial z} \right| = -b_1 \int_0^{\infty} v(z) \frac{\partial \xi(t-z)}{\partial z} dz + b_0 \int_0^{\infty} v(z) \xi(t-z) dz = \\ &= \left| \begin{array}{l} U = v(z) \quad dV = \frac{\partial \xi(t-z)}{\partial z} \\ dU = v'(z) \quad V = \xi(t-z) \end{array} \right| = -b_1 \left( (v(z) \xi(t-z)) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v'(z) \xi(t-z) dz \right) + \\ &+ b_0 \int_0^{\infty} v(z) \xi(t-z) dz = \int_0^{\infty} (b_1 v'(z) + b_0 v(z)) \xi(t-z) dz = \int_0^{\infty} Q_1(p) v(z) \cdot \xi(t-z) dz. \end{aligned}$$

Позаінтегральний член

$$(v(z) \xi(t-z)) \Big|_0^{\infty} = 0$$

дорівнює нулю, бо  $v(0) = 0, \lim_{z \rightarrow \infty} v(z) = 0$ .

Аналогічно для будь-яких  $m, n$  ( $m < n$ ) дістаємо

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_0^{\infty} Q_m(p) v(z) \cdot \xi(t-z) dz, \quad (9.24)$$

тобто маємо розв'язок (можна назвати його узагальненим), що не містить під знаком інтеграла похідних функції  $\xi(t)$ . Диференціальний оператор, який треба було б застосовувати до  $\xi(t)$ , перебирає на себе вагова функція  $v(z)$ .

Тепер розглянемо випадок  $m = n$ . Наприклад, для  $m = n = 2$ , тобто для рівняння

$$a_2 \eta''(t) + a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \zeta(t), \quad \zeta(t) = Q_2(p)\xi(t) \equiv b_2 \xi''(t) + b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t),$$

інтегрування частинами з урахуванням умов

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = a_2^{-1}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} v(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} v'(z) = 0$$

дає

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_0^\infty v(z) Q_2(p) \xi(t-z) dz = \int_0^\infty v(z) (b_2 \xi''(t-z) + b_1 \xi'(t-z) + b_0 \xi(t-z)) dz = \\ &= \int_0^\infty v(z) \left( b_2 \frac{\partial^2 \xi(t-z)}{\partial z^2} - b_1 \frac{\partial \xi(t-z)}{\partial z} + b_0 \xi(t-z) \right) dz = b_2 \left( \left( v(z) \frac{\partial \xi(t-z)}{\partial z} \right) \Big|_0^\infty - \right. \\ &\left. - \int_0^\infty v'(z) \frac{\partial \xi(t-z)}{\partial z} dz \right) - b_1 \left( (v(z) \xi(t-z)) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty v'(z) \xi(t-z) dz \right) + b_0 \int_0^\infty v(z) \xi(t-z) dz = \\ &= -b_2 \left( (v'(z) \xi(t-z)) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty v''(z) \xi(t-z) dz \right) + b_1 \int_0^\infty v'(z) \xi(t-z) dz + b_0 \int_0^\infty v(z) \xi(t-z) dz = \\ &= \frac{b_2}{a_2} \xi(t) + \int_0^\infty (b_2 v''(z) + b_1 v'(z) + b_0 v(z)) \xi(t-z) dz = \frac{b_2}{a_2} \xi(t) + \int_0^\infty Q_2(p) v(z) \cdot \xi(t-z) dz. \end{aligned}$$

Для довільних  $m = n$  аналогічно приходимо до (узагальненого) розв'язку

$$\eta(t) = \eta_{n..n.}(t) = \frac{b_n}{a_n} \xi(t) + \int_0^\infty Q_n(p) v(z) \cdot \xi(t-z) dz, \quad (9.25)$$

в якому дію лінійного оператора  $Q_n(p)$  перенесено з випадкової функції  $\xi(t)$  на диференційовну вагову функцію.

Розв'язки (9.24), (9.25) є приступними щодо подальших досліджень, зокрема для знаходження їх характеристик. Якщо  $m_0$  і  $K(\tau)$  - характеристики стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$ , то характеристиками розв'язку (9.24) є, очевидно,

$$m_\eta = m_0 \int_0^\infty Q_m(p) \nu(z) dz = const,$$

$$K_\eta(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty Q_m(p') \nu(z') Q_m(p'') \nu(z'') K(\tau + z' - z'') dz' dz'', \quad (9.26)$$

де  $p' = d/dz'$ ,  $p'' = d/dz''$ . Розв'язок  $\eta(t)$  виявляється стаціонарним (за умови збіжності останніх двох інтегралів), а тому математичне сподівання  $m_\eta$  можна знайти без інтегрувань методом прикладу 8.19.

Математичне сподівання розв'язку (9.25) дорівнює

$$m_\eta = \frac{b_n}{a_n} m_0 + m_0 \int_0^\infty Q_n(p) \nu(z) dz$$

Задля знаходження кореляційної функції позначимо перший доданок в формулі (9.25) як  $\eta_1$ , другий (інтеграл) – як  $\eta_2$ , тоді

$$K_\eta(\tau) = K_{\eta_1}(\tau) + K_{\eta_2}(\tau) + R_{\eta_1\eta_2}(\tau) + R_{\eta_2\eta_1}(\tau).$$

Оскільки

$$K_{\eta_1}(\tau) = \left( \frac{b_n}{a_n} \right)^2 K(\tau),$$

$$K_{\eta_2}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty Q_n(p') \nu(z') Q_n(p'') \nu(z'') K(\tau + z' - z'') dz' dz'',$$

$$\begin{aligned} R_{\eta_1\eta_2}(\tau) &= M\left( \overset{0}{\eta}_1(t_1) \overset{0}{\eta}_2(t_2) \right) = \frac{b_n}{a_n} \int_0^\infty Q_n(p) \nu(z) M\left( \overset{0}{\xi}(t_1) \overset{0}{\xi}(t_2 - z) \right) dz = \\ &= \frac{b_n}{a_n} \int_0^\infty Q_n(p) \nu(z) K(t_1, t_2 - z) dz = \frac{b_n}{a_n} \int_0^\infty Q_n(p) \nu(z) K(\tau - z) dz \end{aligned}$$

і аналогічно

$$R_{\eta_2\eta_1}(\tau) = \frac{b_n}{a_n} \int_0^\infty Q_n(p) \nu(z) K(\tau - z) dz,$$

матимемо

$$K_\eta(\tau) = \left( \frac{b_n}{a_n} \right)^2 K(\tau) + \int_0^\infty \int_0^\infty Q_n(p') \nu(z') Q_n(p'') \nu(z'') K(\tau + z' - z'') dz' dz'' +$$



$$+ \frac{b_n}{a_n} \int_0^{\infty} Q_n(p) \nu(z) (K(\tau - z) + K(\tau + z)) dz.$$

Викладений метод непридатний в разі  $m > n$ . Наприклад, для рівняння

$$a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \zeta(t), \quad \zeta(t) = Q_2(p) \xi(t) \equiv b_2 \xi''(t) + b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t)$$

після інтегрувань частинами маємо

$$\eta(t) = \frac{1}{a_1} (b_2 \xi'(t) + (b_1 + b_2) \xi(t)) + \int_0^{\infty} Q_2(p) \nu(z) \cdot \xi(t - z) dz. \quad (9.28)$$

Позаінтегральний член містить похідну  $\xi'(t)$ , а вона за умови не існує.

Зауважимо, що формула (9.28) була б застосовною в разі диференційовності випадкової функції  $\xi(t)$ .

Приклад 9. 8. Знайти дисперсію стаціонарного розв'язку рівняння

$$\eta''(t) + 5\eta'(t) + 6\eta(t) = \xi'(t)$$

якщо стаціонарна недиференційовна випадкова функція  $\xi(t)$  має кореляційну функцію

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0.$$

Розв'язання. Тут  $Q_1(p)\xi(t) = \xi'(t)$ . З прикладу 7.6 маємо

$$\nu(z) = e^{-2z} - e^{-3z},$$

звідки

$$Q_1(p)\nu(z) = \nu'(z) = 3e^{-3z} - 2e^{-2z},$$

і по формулах (9.24), (9.26)

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_0^{\infty} (3e^{-3z} - 2e^{-2z}) \xi(t - z) dz,$$

$$\begin{aligned} K_{\eta}(\tau) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (3e^{-3z'} - 2e^{-2z'}) (3e^{-3z''} - 2e^{-2z''}) K(\tau + z' - z'') dz' dz'' = \\ &= \sigma^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (3e^{-3z'} - 2e^{-2z'}) (3e^{-3z''} - 2e^{-2z''}) e^{-\alpha|\tau + z' - z''|} dz' dz''. \end{aligned}$$

Дисперсія стаціонарного розв'язку (для великих  $t$ ) дається подвійним інтегралом

$$D_\eta = K_\eta(0) = \sigma^2 \int_0^\infty \int_0^\infty (3e^{-3z'} - 2e^{-2z'}) (3e^{-3z''} - 2e^{-2z''}) e^{-\alpha|z' - z''|} dz' dz'',$$

котрий обчислюється (при  $\alpha \neq 2, \alpha \neq 3$ ) як і інтеграл в прикладі 7.9 (див. рис. 7.9):

$$\begin{aligned} D_\eta &= \sigma^2 \left( \int_0^\infty (3e^{-3z'} - 2e^{-2z'}) e^{\alpha z'} dz' \int_{z''}^\infty (3e^{-3z'} - 2e^{-2z'}) e^{-\alpha z'} dz' + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty (3e^{-3z''} - 2e^{-2z''}) e^{-\alpha z''} dz'' \int_0^{z''} (3e^{-3z'} - 2e^{-2z'}) e^{\alpha z'} dz' \right) = \\ &= \sigma^2 \left( \frac{\alpha}{10(2+\alpha)(3+\alpha)} + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-3)}{10(\alpha^2-4)(\alpha^2-9)} \right) = \frac{\sigma^2 \alpha}{5(2+\alpha)(3+\alpha)}. \end{aligned}$$

Цей результат залишається вірним і при  $\alpha = 2, \alpha = 3$ .

Приклад 9.10. Розглянемо рівняння

$$\eta''(t) + 5\eta'(t) + 6\eta(t) = \zeta(t), \quad \zeta(t) = Q_2(p)\xi(t) \equiv 2\xi''(t) - 4\xi'(t) + 5\xi(t)$$

з тією ж випадковою функцією  $\xi(t)$  і з тією ж лівою частиною, що й в попередньому прикладі. Тут

$$Q_2(p)v(z) = 2v''(z) - 4v'(z) + 5v(z) = 21e^{-2z} - 35e^{-3z}.$$

Застосовуючи формули (9.25), (9.27) при  $n = 2, a_2 = 1, b_2 = 2$ , маємо

$$\begin{aligned} \eta(t) &= 2\xi(t) + \int_0^\infty (21e^{-2z} - 35e^{-3z}) \xi(t-z) dz, \\ K_\eta(\tau) &= 4K(\tau) + \int_0^\infty \int_0^\infty (21e^{-2z'} - 35e^{-3z'}) (21e^{-2z''} - 35e^{-3z''}) K(\tau + z' - z'') dz' dz'' + \\ &\quad + 2 \int_0^\infty (21e^{-2z} - 35e^{-3z}) (K(\tau - z) + K(\tau + z)) dz, \end{aligned}$$

зокрема, з урахуванням парності  $K(z)$ ,

$$\begin{aligned} D_\eta = K_\eta(0) &= 4\sigma^2 + \int_0^\infty \int_0^\infty (21e^{-2z'} - 35e^{-3z'}) (21e^{-2z''} - 35e^{-3z''}) K(z'' - z') dz' dz'' + \\ &\quad + 4 \int_0^\infty (21e^{-2z} - 35e^{-3z}) K(z) dz = \frac{\sigma^2 (24\alpha^2 + 29\alpha + 25)}{6(\alpha + 2)(\alpha + 3)} < 4\sigma^2. \end{aligned}$$

## РОЗДІЛ 10

## ДЕЛЬТА - ФУНКЦІЯ ТА ДЕЯКІ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

## 10.1. ПОНЯТТЯ ПРО ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЮ

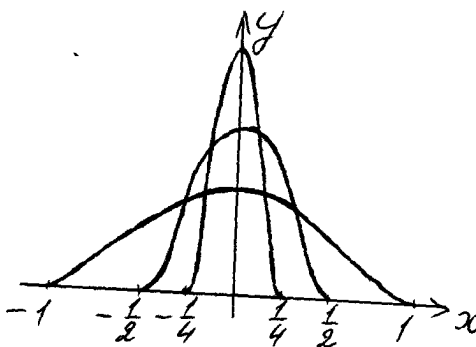
В багатьох прикладних дослідженнях з успіхом використовується так звана  $\delta$ -функція (дельта-функція), назву якої нерідко поєднують (історично не зовсім слушно) з ім'ям Поля Адрієна Моріса Дірака, англійського фізика-теоретика, одного із засновників квантової механіки, лауреата Нобелівської премії 1933 року.  $\delta$ -функція є однією з найпростіших узагальнених функцій сучасної математики.

Нехай  $\delta_\varepsilon(x)$  - деяка неперервна невід'ємна функція, котра тотожно дорівнює нулю поза інтервалом  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  і графік якої разом з віссю  $Ox$  утворює криволінійну трапецію одиничної площі,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x) dx = 1. \quad (10.1)$$

В разі потреби вимагають, щоб  $\delta_\varepsilon(x)$  мала похідні до певного порядку. Як

приклад функції такого гатунку назвемо "шапочку" (рис. 10.1)



$$\omega(x)_\varepsilon = \begin{cases} Ce^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases} \quad (10.2)$$

де множник  $C$  визначається умовою (10.1).

Рис. 10.1. «Шапочка»

Неважно переконатись, що для всіх  $x$  "шапочка" неперервна разом з похідними будь-якого порядку. При  $\varepsilon \rightarrow +0$  її графік необмежено здіймається вздовж осі  $Oy$ , одночасно притискуючись до неї (див. рис. 10.1 при  $\varepsilon=1, \varepsilon=1/2, \varepsilon=1/4$ ).

Нехай тепер  $f(x)$  - довільна функція (спробна функція), неперервна в деякому околі точки  $x = 0$ . Якщо  $\varepsilon \rightarrow +0$ , то на підставі теореми про середнє та рівності (10.1) маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_{\varepsilon}(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) \delta_{\varepsilon}(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x_{\varepsilon}) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_{\varepsilon}(x) dx = |x_{\varepsilon} \in (-\varepsilon, \varepsilon)| = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x_{\varepsilon}) = f(0). \end{aligned}$$

Результат можна подати й таким чином:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^b f(x) \delta_{\varepsilon}(x) dx = \begin{cases} f(0), & 0 \in (a, b), \\ 0, & 0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (10.3)$$

Витлумачимо запроваджений граничний перехід як результат прямування функції  $\delta_{\varepsilon}(x)$  до деякої екзотичної функції  $\delta(x)$  ( $\delta$ -функції Дірака), котра має такі властивості:

$$\text{а) } \delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \neq 0, \\ \infty, & \text{при } x = 0; \end{cases} \quad (10.4)$$

б) для будь-якого інтервалу  $(a, b)$

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \in (a, b), \\ 0, & \text{якщо } 0 \notin (a, b); \end{cases} \quad (10.5)$$

в) для довільної неперервної в околі точки  $x = 0$  спробної функції  $f(x)$

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(0), & \text{якщо } 0 \in (a, b), \\ 0, & \text{якщо } 0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (10.6)$$

Формулі (10.6) можна надати іншого вигляду, а саме

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad (10.7)$$

бо, звичайно,  $0 \in (-\infty, \infty)$ . За різних обставин одна з формул (10.6), (10.7) може виявитись зручнішою другої.

Звичайно, визначення  $\delta$ -функції рівностями (10.4) - (10.7) не є математично строгим. Проте на рівні найпростіших застосувань послуговуватися ним припустимо. Можна було б говорити про  $\delta(x)$  як слабку границю функції  $\delta_{\varepsilon}(x)$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , якби такий тип граничного переходу вивчався у вузлі. Формула (10.5) є частинним випадком формул (10.6), (10.7). Останні визначають  $\delta$ -функцію за її дією на неперервну спробну функцію  $f(x)$ . З характеру введення  $\delta$ -функції випливає її парність в розумінні збігу дій  $\delta(x)$  та  $\delta(-x)$  на спробну функцію

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = \int_a^b f(x)\delta(-x)dx = \begin{cases} f(0), & \text{якщо } 0 \in (a,b), \\ 0, & \text{якщо } 0 \notin (a,b). \end{cases} \quad (10.8)$$

Аналогічно вводиться  $\delta$ -функція  $\delta(x - x_0)$  (зсув  $\delta(x)$ ) як така, що має властивості

$$\text{а) } \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \neq x_0, \\ \infty, & \text{при } x = x_0; \end{cases} \quad (10.9)$$

б)

$$\int_a^b \delta(x - x_0)dx = \int_a^b \delta(x_0 - x)dx = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_0 \in (a,b), \\ 0, & \text{якщо } x_0 \notin (a,b); \end{cases} \quad (10.10)$$

в) для будь-якої неперервної в околі точки  $x_0$  спробної функції  $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \int_a^b f(x)\delta(x_0 - x)dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{якщо } x_0 \in (a,b), \\ 0, & \text{якщо } x_0 \notin (a,b). \end{cases} \quad (10.11)$$

або

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x_0 - x)dx = f(x_0). \quad (10.12)$$

Приклад 10.1. Згідно з формулою (10.11)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \cdot \delta(x)dx = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \delta(\pi - x)dx = 0, \quad \text{бо } \pi \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Дельта-функцію часто називають імпульсною, або ж одиничним імпульсом. Фізичні передумови цього будуть з'ясовані нижче.

## 10.2. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЇ

### 10.2.1. Лінійна заміна змінної

Візьмемо спочатку функцію  $\delta_\varepsilon(kx + l)$  та неперервну спробну функцію  $f(x)$  і запровадимо в інтегралі

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(kx + l) dx$$

заміну змінної  $kx + l = z$ . Перейдемо до границі при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . З урахуванням, як і вище, теореми про середнє та формули (10.1) при  $k > 0$  дістанемо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(kx + l) dx &= \left| \begin{array}{l} kx + l = z \quad x = -\infty \quad \infty \\ dx = \frac{1}{k} dz \quad z = -\infty \quad \infty \end{array} \right| = \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{z-l}{k}\right) \delta_\varepsilon(z) dz = \\ &= \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(\frac{z-l}{k}\right) \delta_\varepsilon(z) dz = \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f\left(\frac{z_\varepsilon - l}{k}\right) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(z) dz = \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f\left(\frac{z_\varepsilon - l}{k}\right) = \frac{1}{k} f\left(-\frac{l}{k}\right), \end{aligned}$$

де  $z_\varepsilon$  - якась точка з інтервала  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Аналогічно, якщо  $k < 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(kx + l) dx = -\frac{1}{k} f\left(-\frac{l}{k}\right).$$

Загалом, для будь-якого сталого  $k \neq 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(kx + l) dx = \frac{1}{|k|} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(\frac{z-l}{k}\right) \delta_\varepsilon(z) dz = \frac{1}{|k|} f\left(-\frac{l}{k}\right).$$

Якщо тепер витлумачити останню формулу як результат прямування  $\delta_\varepsilon(kx + l)$  до  $\delta(kx + l)$ , зможемо записати

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(kx + l) dx = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{z-l}{k}\right) \delta(z) dz = \frac{1}{|k|} f\left(-\frac{l}{k}\right). \quad (10.13)$$

Згідно з формулою (10.13) перехід від лівого інтеграла до правого можна здійснити формальною заміною змінної  $kx + l = z$  не вдаючись до граничного переходу.

Приклад 10.2. Виведемо формулу (10.12), скориставшись лінійною заміною змінної та формулою (10.7).

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx &= \left| \begin{array}{l} x-x_0=z \quad x=-\infty \quad \infty \\ dx=dz \quad z=-\infty \quad \infty \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+z)\delta(z)dz = f(x_0); \\ \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x_0-x)dx &= \left| \begin{array}{l} x_0-x=z \quad x=-\infty \quad \infty \\ dx=-dz \quad z=\infty \quad -\infty \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0-z)\delta(z)dz = f(x_0). \end{aligned}$$

### 10.2.2. Диференціювання дельта-функції

Припустимо, що спробна функція  $f(x)$  та функція  $\delta_\varepsilon(x)$  мають неперервні похідні до  $n$ -го порядку. По  $n$ -разовому інтегруванні частинами отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\delta_\varepsilon(x)dx.$$

Позаінтегральні члени відсутні внаслідок анулювання функції  $\delta_\varepsilon(x)$  та всіх її похідних при  $|x| > \varepsilon$ . Спрямовуючи  $\varepsilon$  до нуля, доходимо такого результату  $(-1)^n f^{(n)}(0)$ . Це дає нам нагоду визначити похідну  $n$ -го порядку від  $\delta$ -функції такою формулою

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\delta(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(0). \quad (10.14)$$

Відповідно до неї похідна  $\delta^{(n)}(x)$  від  $\delta$ -функції  $\delta(x)$  є функція, яка на спробну функцію  $f(x)$  діє так само, як  $\delta(x)$  на  $(-1)^n f^{(n)}(x)$ .

Приклад 10.3. За формулою (10.14)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \cdot \delta^{(n)}(x)dx &= (-1)^n \sin^{(n)} x \Big|_{x=0} = (-1)^n \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^x \cdot \delta^{(n)}(x)dx &= (-1)^n (e^x)^{(n)} \Big|_{x=0} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Послідовне використання лінійної заміни змінної, формул (10.14) та (10.7) приводить до визначення похідних від  $\delta(x-x_0)$ ,  $\delta(x_0-x)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x-x_0)\delta(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0), \quad (10.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x_0 - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) \delta(x_0 - x) dx = f^{(n)}(x_0). \quad (10.16)$$

Так, до формули (10.16) веде така низка перетворень

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x_0 - x) dx &= \left| \begin{array}{ll} x_0 - x = z, & dx = -dz, \\ x = -\infty & x = \infty \\ z = \infty & z = -\infty \end{array} \right| = - \int_{\infty}^{-\infty} f(x_0 - z) \delta^{(n)}(z) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 - z) \delta^{(n)}(z) dz = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n f(x_0 - z)}{\partial z^n} \delta(z) dz = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x_0 - z) \delta(z) dz = \\ &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Можливий інший шлях - з використанням формул (10.14), (10.12). Наприклад,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x_0 - x) dx &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial^n \delta(x_0 - x)}{\partial x^n} dx = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) \delta(x_0 - x) dx = \\ &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Звернімо увагу, що формули

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x_0 - x) dx = f^{(n)}(x_0)$$

можна отримати суто формально, а саме, продиференціювавши по  $x_0$  під знаком інтеграла в формулі (10.12).

Якщо замість нескінченного інтервалу  $(-\infty, \infty)$  взяти скінченний інтервал  $(a, b)$ , то за аналогією до формул (10.11), (10.12) формули (10.15), (10.16) наберуть вигляду

$$\int_a^b f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0), & \text{якщо } x_0 \in (a, b), \\ 0, & \text{якщо } x_0 \notin (a, b), \end{cases} \quad (10.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x_0 - x) dx = \begin{cases} f^{(n)}(x_0), & \text{якщо } x_0 \in (a, b), \\ 0, & \text{якщо } x_0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (10.18)$$

Приклад 10.4. Формули (10.12), (10.16) дозволяють зобразити лінійний диференціальний оператор

$$L[y(t)] = Q_n(p)y(t) = a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t)$$



інтегралом, що містить такий же оператор від  $\delta$ -функції

$$L[y(t)] \equiv L_t[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t') L_t[\delta(t-t')] dt'. \quad (10.19)$$

Справді

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t') \delta(t-t') dt',$$

$$y'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t') \delta'(t-t') dt',$$

$$y''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t') \delta''(t-t') dt',$$

.....

$$y^{(n-1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t') \delta^{(n-1)}(t-t') dt',$$

$$y^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t') \delta^{(n)}(t-t') dt',$$

Залишається знайти суму добутків цих інтегралів на  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$  відповідно.

Формула залишиться справедливою, якщо інтеграли брати по будь-якому інтервалу  $(a, b)$ ,  $a \geq -\infty, b \leq \infty$ , але за умови, що  $t \in (a, b)$ .

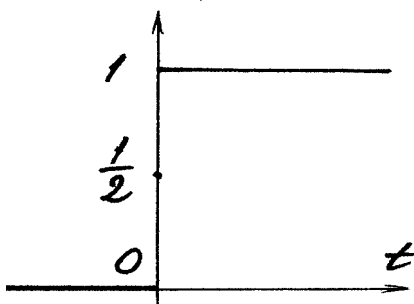


Рис.10.2. Функція

Хевісайда

Приклад 10. 5. Функція

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (10.20)$$

(рис. 10.2) називається одиничною або одиничною сходиною, або, нарешті, функцією Хевісайда - за прізвиськом англійського інженера й фізика Олівера Хевісайда (1850- 1925), одного із засновників опе-

раційного числення. В точці  $t = 0$  значення функції  $I(t)$  можна визначати довільно (наприклад, покладаючи  $I(0) = 1/2$ , рис. 10.2) або взагалі не визначати.

Виявляється, що між функцією Хевісайда та  $\delta$ -функцією існує найтісніший зв'язок. Справді, з огляду на формули (10.5), (10.20)

$$I(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt'. \quad (10.21)$$

Звідси випливає, що похідна від функції Хевісайда дорівнює  $\delta$ -функції,

$$I'(t) = \delta(t) \quad (10.22)$$

в розумінні однакової дії  $I(t)$  та  $\delta(t)$  на спробну функцію (яку ми додатково вважатимемо нескінченно малою при  $t \rightarrow +\infty$ ):

$$а) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0).$$

$$б) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) I'(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) I(t) dt = - \int_0^{\infty} f'(t) dt = -f(t) \Big|_0^{\infty} = f(0).$$

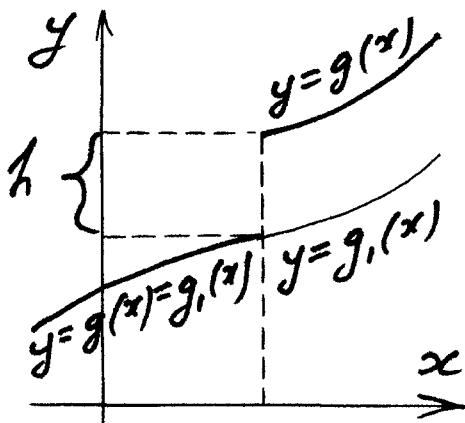


Рис. 10.3. Функція з

стрибком

Аналогічно похідна від зсуву  $I(t - t_0)$  функції Хевісайда дорівнює від-повідному зсувові  $\delta$ -функції,

$$I'(t - t_0) = \delta(t - t_0) \quad (10.23)$$

Приклад 10.6. Нехай функція  $g(x)$  (рис. 10.3) має похідні в усіх точках деякого проміжку за винятком точки  $x_0$  де зазнає стрибка  $h$ . Похід-

на такої функції дорівнює

$$g'(x) = g_1'(x) + h\delta(x - x_0), \text{ де}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{при } x < x_0, \\ g(x) - h & \text{при } x > x_0 \end{cases}$$

неперервна допоміжна функція, яку утворено зміщенням правої частини графіка функції  $g(x)$  (для  $x > x_0$ ) на  $-h$  вздовж осі  $Oy$ . Дійсно, оскільки тут

$$g(x) = g_1(x) + hI(x - x_0),$$

на підставі рівності (10.23) маємо

$$g'(x) = g_1'(x) + hI'(x) = g_1'(x) + h\delta(x - x_0).$$

### 10.3. ДЕЯКІ ФІЗИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ

Приклад 10.7. Густина маси  $m$ , яка зосереджена в одній точці  $x = x_0$  осі  $Ox$ , дорівнює  $\gamma(x) = m\delta(x - x_0)$ .

Дійсно, знаходячи масу, зосереджену на осі, за допомоги відомої формули при лінійній густині  $\gamma(x) = m\delta(x - x_0)$ , маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} m\delta(x - x_0) dx = m.$$

Густина системи матеріальних точок  $x_1, x_2, \dots, x_n$  осі  $Ox$  з масами  $m_1, m_2, \dots, m_n$  дорівнює

$$\gamma(x) = m_1\delta(x - x_1) + m_2\delta(x - x_2) + \dots + m_n\delta(x - x_n),$$

бо сумарна маса системи дорівнює

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) dx = \sum_{k=1}^n m_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_k) dx = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Приклад 10.8. Охолодження однорідного тонкого стрижня, теплоізованого збоку, описується задачею Коші для одновимірного рівняння теплопровідності

$$\left. \begin{aligned} u'_t &= a^2 u''_{xx}, & -\infty < x < \infty, & \quad t > 0, & \quad a > 0, \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Тут  $u(x, t)$  - температура стрижня в поперечному перерізі з абсцисою  $x$  в момент часу  $t$ , а  $f(x)$  - початкова температура в цьому перерізі. Відомо, що розв'язок задачі (10.24) дається формулою

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (10.25)$$

За допомоги  $\delta$ -функції можна з'ясувати фізичний сенс розв'язку.

Припустимо, що початкова температура дорівнює

$$u(x, 0) = f(x)\delta(x - x_0). \quad (10.26)$$

Це значить, що в початковий момент в точці  $x = x_0$  "включилося" джерело тепла, і на малій ділянці  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  стрижня за рахунок зміни температури від 0 до  $f(x)\delta(x - x_0)$  виділилася кількість тепла

$$Q = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} c\gamma f(x)\delta(x - x_0)dx = c\gamma f(x_0),$$

де  $\gamma$  - стала густина стрижня. Результатом дії миттєвого точкового джерела є розв'язок задачі (10.24), який на підставі формул (10.25), (10.26), (10.12) дорівнює

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(\xi - x_0)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{f(x_0)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \quad (10.27)$$

Розв'язок (10.25) вихідної задачі Коші є результатом підсумовування внесків всіх точкових джерел.

Приклад 10.9. Розглянемо задачу про коливання однорідної нескінченної струни. Якщо  $u(x, t)$  - відхилення точки струни з абсцисою  $x$  від стану рівноваги (осі  $Ox$ ) в момент часу  $t$ , то знаходження функції  $u(x, t)$  зводиться до розв'язання задачі Коші для рівняння коливань струни

$$\left. \begin{aligned} u''_{tt} &= a^2 u''_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad a > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u'_t(x, 0) = g(x). \end{aligned} \right\} \quad (10.28)$$

Її розв'язок дається відомою формулою

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi, \quad (10.29)$$

вперше знайденою французьким математиком, механіком і філософом Жаном Лероном Даламбером (1717 - 1783). Функція  $f(x)$  визначає початкову форму струни, а  $g(x)$  - її початкову швидкість.

Нехай струна виводиться з стану рівноваги ( $f(x) \equiv 0$ ) за рахунок початкової швидкості

$$u'_t(x, 0) = g(x)\delta(x - x_0).$$

На підставі формули (10.29)

$$u = u(x, x_0, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) \delta(\xi - x_0) d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2a} g(x_0), & x - at < x_0 < x + at, \\ 0, & x_0 < x - at, \quad x_0 > x + at. \end{cases}$$

Функція  $u(x, x_0, t)$  відмінна від нуля тільки в області  $D$  площини  $xOt$ , утвореній променями (характеристиками)  $\xi - at = x_0, \xi + at = x_0$ , що виходять з точки  $(x_0, 0)$  (рис. 10.4). Знайдений розв'язок витлумачується як результат дії імпульса, котрий отримала струна в початковий момент завдяки початковій швидкості, наданій їй в точці  $x_0$ . Саме, якщо  $F$  - сила, яка подіяла на струну в точці  $x_0$  в момент  $t=0$ , то її імпульс на нескінченно малому інтервалі  $(x_0 - \frac{1}{2} dx, x_0 + \frac{1}{2} dx)$  дорівнює  $dI = Fdt = \gamma dx g(x) \delta(x - x_0)$ , а на невеличкій ділянці, захопленої імпульсом,

$$I = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma g(x) \delta(x - x_0) dx = \gamma g(x_0)$$

( $\gamma$  - густина струни). Формула (10.29) дає результат дії всіх імпульсів, які було надано струні в початковий момент.

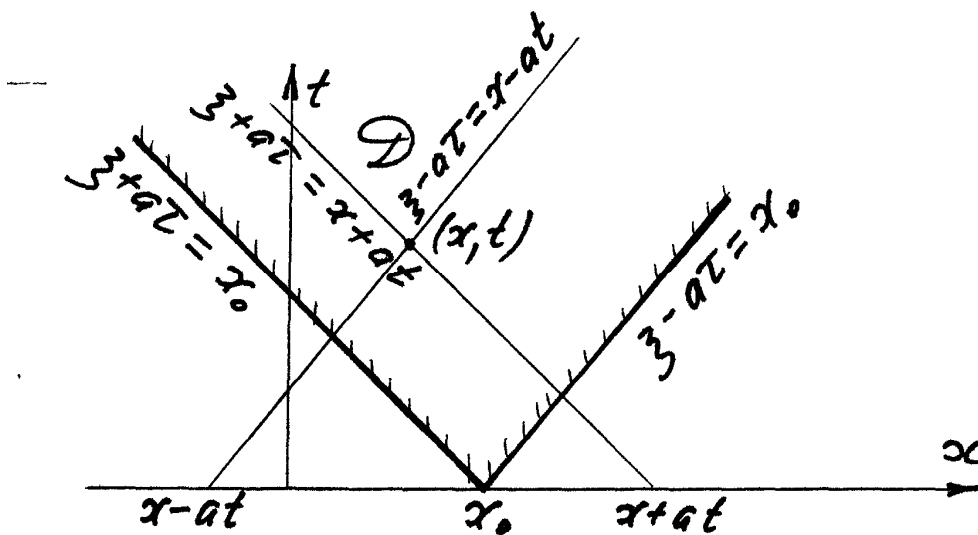
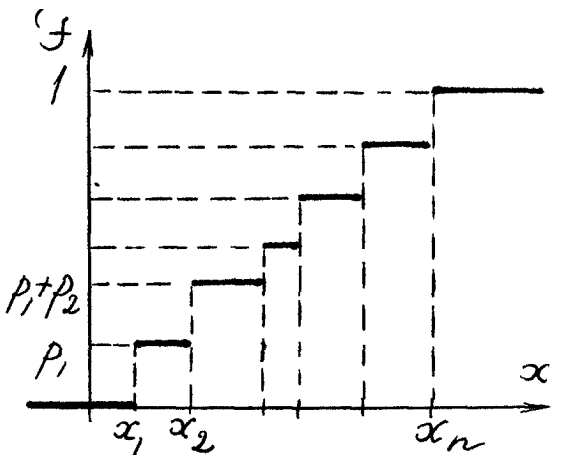


Рис. 10.4. Коливання струни під дією імпульса

## 10.4. НАЙПРОСТІШІ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Приклад 10.10 (узагальнення поняття щільності ймовірності для випадку дискретної випадкової величини). Нехай  $\xi$  - дискретна випадкова величина, яка може набувати значень  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  з імовірностями  $p_1, p_2, \dots, p_n$  відпо-



відно. На рис.10.5 зображено графік її функції розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3, \\ \dots & \dots \\ 1 & x > x_n. \end{cases}$$

Рис. 10.5. Дискретна випадкова величина разом

Одинична Функція Хевісайда дозволяє зобразити  $F(x)$  єдиним аналітичним ви-

$$F(x) = p_1(I(x - x_1) - I(x - x_2)) + (p_1 + p_2)(I(x - x_2) - I(x - x_3)) + \dots + (p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1})(I(x - x_{n-1}) - I(x - x_n)) + (p_1 + p_2 + \dots + p_n)I(x - x_n),$$

або просто

$$F(x) = p_1 I(x - x_1) + p_2 I(x - x_2) + \dots + p_n I(x - x_n) = \sum_{k=1}^n p_k I(x - x_k).$$

Тепер за формулою (10.23) знаходимо щільність ймовірності

$$f(x) = F'(x) = p_1 \delta(x - x_1) + p_2 \delta(x - x_2) + \dots + p_n \delta(x - x_n) = \sum_{k=1}^n p_k \delta(x - x_k). \quad (10.30)$$

Формула (10.30) узагальнює поняття щільності ймовірності на випадок дискретної випадкової величини. Щоб таке узагальнення було слушним, треба забезпечити справедливість формул

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (10.31)$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \quad (10.32)$$

для будь-яких  $x, \alpha, \beta$ . Достатньо вважати, що

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} f(t) dt \quad (10.33)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} f(x) dx \quad (10.34)$$

Без такої обережності можна припуститися помилок.

Приклад 10.11 (щільність ймовірності функції від випадкової величини).

Нехай випадкова величина  $\eta$  є функцією випадкової величини  $\xi$ , тобто  $\eta = \varphi(\xi)$ . Для будь-якого значення  $\xi = x$  величина  $\eta$  з імовірністю 1 набуває єдиного значення  $\eta = \varphi(x)$ . За формулою (10.30) умовна щільність ймовірності випадкової величини  $\eta$  (за умови  $\xi = x$ ) дорівнює

$$f_{\eta}(y/x) = 1 \cdot \delta(y - \varphi(x)) = \delta(y - \varphi(x)). \quad (10.35)$$

Тоді двовимірна щільність ймовірності двовимірної випадкової величини  $(\xi, \eta)$  дорівнює

$$f(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y/x) = f_{\xi}(x) \delta(y - \varphi(x)), \quad (10.36)$$

а відтак щільність ймовірності (безумовна) випадкової величини  $\eta$  визначається формулою

$$f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) \delta(y - \varphi(x)) dx. \quad (10.37)$$

Якщо, наприклад,  $\eta = \xi$  (тобто  $\varphi(\xi) = \xi$ ), то за формулою (10.36) двовимірна щільність ймовірності випадкової величини  $(\xi, \xi)$  дорівнює

$$f(x, y) = f_{\xi}(x) \delta(y - x). \quad (10.38)$$

Розглянемо ще випадок, коли  $\eta$  - лінійна функція від  $\xi$ ,  $\eta = k\xi + b$ , а щільність ймовірності  $f(x)$  випадкової величини  $\xi$  відома.

Згідно з формулою (10.37)

$$f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(y - kx - b) dx,$$

і по лінійній заміні змінної  $y - kx - b = z$ ,  $x = (y - b - z)/k$ , на підставі формули (10.13) дістаємо

$$f_{\eta}(y) = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y - b - z}{k}\right) \delta(z) dz = \frac{1}{|k|} f\left(\frac{y - b}{k}\right).$$

## 10.5. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Приклад 10.12. В п. 1.2 ми говорили про двовимірну щільність ймовірності  $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$  випадкової функції  $\xi(t)$  за ситуації, коли  $t_2 \rightarrow t_1$ . Зараз ми в змозі висловити точне твердження, а саме:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1; t_1) \delta(x_2 - x_1). \quad (10.39)$$

Дійсно, якщо  $t_1$  та  $t_2$  збігаються, то збігаються випадкові величини (перерізи)  $\xi(t_1), \xi(t_2)$ . Тоді щільність ймовірності двовимірної випадкової величини  $(\xi(t_1), \xi(t_2))$  знаходиться по формулі (10.38), а це й дає формулу (10.39).

Дякуючи формулі (10.39), ми маємо можливість вивести формулу (2.9) для обчислення дисперсії випадкової функції, виходячи з формули (2.16), яка дає кореляційну функцію. Саме,

$$\begin{aligned} D(t) = K(t, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m(t))(x_2 - m(t)) f(x_1, x_2; t, t) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m(t)) f(x_1; t) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - m(t)) \delta(x_2 - x_1) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m(t))^2 f(x_1; t) dx_1, \end{aligned}$$

що й вимагалось.

Приклад 10.13. В прикладі 5.2 ми з'ясували, що пуассонівський та вінерівський (п.п. 3.4, 3.7) випадкові процеси не є диференційовними. Дельта-функція дозволяє говорити про узагальнення поняття похідної та знаходження відповідної кореляційної функції. Так, для пуассонівського процесу з кореляційною функцією  $K = \lambda \min\{t_1, t_2\}$  (див. формулу (3.7) з п. 3. 4)



$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \begin{cases} \lambda & \text{при } t_1 < t_2 \ (\tau = t_2 - t_1 > 0), \\ 0 & \text{при } t_1 > t_2 \ (\tau < 0), \end{cases}$$

або

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \lambda I(\tau) = \lambda I(t_2 - t_1).$$

Застосовуючи тепер формулу (10.21), дістаємо

$$\frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \lambda I'(\tau) = \lambda \delta(\tau) = \lambda \delta(t_2 - t_1),$$

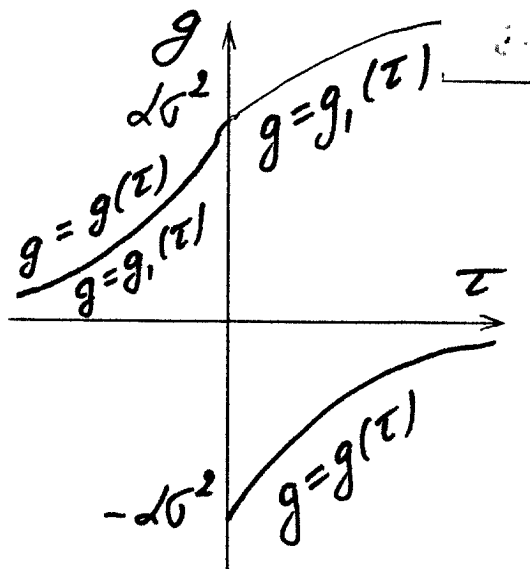
тобто пуассонівський процес має похідну в узагальненому розумінні з кореляційною функцією  $\lambda \delta(t_2 - t_1)$ . Для вінерівського процесу узагальнена таким чином похідна має кореляційну функцію  $\sigma^2 \delta(t_2 - t_1)$ .

Приклад 10.14. Знайдемо кореляційну функцію узагальненої похідної стаціонарної випадкової функції з кореляційною функцією

$$K(\tau) = K_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0.$$

Недиференційовність випадкової функції встановлено в прикладі 8.14. З міркувань прикладу видно, що функція

$$g(\tau) = K'(\tau) = \begin{cases} \alpha \sigma^2 e^{\alpha\tau} & \text{при } \tau < 0, \\ -\alpha \sigma^2 e^{-\alpha\tau} & \text{при } \tau > 0 \end{cases}$$



має похідні в усіх точках  $\tau \neq 0$ , а в точці  $\tau = 0$  зазнає стрибка

$$h = K'(+0) - K'(-0) = (-\alpha\sigma^2) - \alpha\sigma^2 = -2\alpha\sigma^2.$$

Нехай

$$g_1(\tau) = \begin{cases} g(\tau) & \text{при } \tau < 0, \\ g(\tau) - h = g(\tau) + 2\alpha\sigma^2 & \text{при } \tau > 0. \end{cases}$$

Згідно з прикладом 10.6 похідна функції

$$g(\tau) \text{ дорівнює } g'(\tau) = K''(\tau) = g_1'(\tau) +$$

$$+ h\delta(\tau) = g_1'(\tau) - 2\alpha\sigma^2\delta(\tau). \text{ Оскільки (при}$$

Рис. 10.6. До прикладу 10.14

$\tau \neq 0$ )

$$g'_1(\tau) = g'(\tau) = \alpha^2 \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} = \begin{cases} \alpha^2 \sigma^2 e^{\alpha\tau} & \text{при } \tau < 0, \\ \alpha^2 \sigma^2 e^{-\alpha\tau} & \text{при } \tau > 0, \end{cases}$$

маємо

$$K''(\tau) = \alpha^2 \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} - 2\alpha\sigma^2 \delta(\tau).$$

Тому кореляційна функція узагальненої похідної вихідної випадкової функції дорівнює

$$K_{\xi'}(\tau) = -K''(\tau) = -\alpha^2 \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} + 2\alpha\sigma^2 \delta(\tau).$$

Приклад 10.15 (вагова функція як фундаментальний розв'язок). Стійка лінійна динамічна система характеризується диференціальним рівнянням (8.17) з сталими коефіцієнтами

$$P_n(p)\eta(t) = \zeta(t), \quad \zeta(t) = Q_m(p)\xi(t).$$

Розв'язок рівняння для великих значень  $t$  дається формулами (7.15) або (7.16).

Знайдемо розв'язок  $\eta_\delta(t)$  рівняння

$$P_n(p)\eta(t) = \delta(t) \tag{10.40}$$

з вільним членом  $\delta(t)$ .

Користуючись формулами (7.16) і (10.6), при  $t > 0$  отримуємо

$$\eta_\delta(t) = \int_{-\infty}^t v(t-t')\delta(t')dt' = v(t). \tag{10.41}$$

Функція  $\eta_\delta(t)$ , що задовольняє рівняння (10.40), називається фундаментальним розв'язком рівняння

$$P_n(p)\eta(t) = \zeta(t), \quad \zeta(t) = Q_m(p)\xi(t).$$

Ми бачимо, що таким фундаментальним розв'язком є вагова функція. Маючи фундаментальний розв'язок, ми знаходимо розв'язок вихідного рівняння

$$\eta(t) = \eta_{н.н.}(t) = \int_{-\infty}^t \eta_\delta(t-t')\zeta(t')dt'.$$

Фундаментальні розв'язки широко використовуються в сучасній математиці.

## 10.6. БІЛИЙ ШУМ

Випадкова функція  $\tilde{\xi}(t)$  називається білим шумом, якщо її математичне сподівання дорівнює нулю, а кореляційна функція визначається формулою

$$K(t_1, t_2) = G(t_1)\delta(t_2 - t_1). \quad (10.42)$$

Функція  $G(t_1)$  називається інтенсивністю білого шуму.

За властивостями  $\delta$ -функції праву частину формули

можна взяти у вигляді  $G(t_2)\delta(t_2 - t_1)$  або більш симетрично

$\sqrt{G(t_1)G(t_2)}\delta(t_2 - t_1)$ . При  $G = \text{const} = A$  білий шум називається стаціонарним, його кореляційна функція дається формулою

її кореляційна функція дається формулою

$$K(\tau) = A\delta(\tau) \quad (10.43)$$

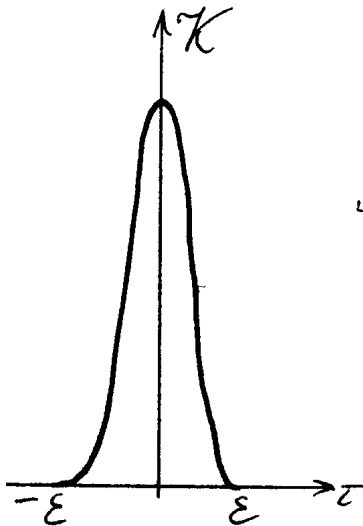


Рис. 10.7

До стаціонарного білого шуму можна прийти через

розгляд центрованої випадкової функції  $\tilde{\xi}_\varepsilon(t)$ , кореляційна функція  $K_\varepsilon(\tau)$  якої дорівнює нулю поза інтервалом  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  і графік якої утворює криволінійну трапецію площі, яка дорівнює

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} K_\varepsilon(\tau) d\tau = A,$$

(рис. 10.7). При  $\varepsilon \rightarrow +0$  функція  $\tilde{\xi}_\varepsilon(t)$  прямує до білого шуму.

З означення білого шуму випливає, що його дисперсія нескінченна, а всі різні перерізи (ординати) парами некорельовані ( $K(t_1, t_2) = 0$  при  $t_1 \neq t_2$ ,  $K(t_1, t_2) = \infty$  при  $t_1 = t_2$ ). Про ще одну властивість, яка, до речі, виправдовує сам термін "білий шум", ми скажемо згодом. Реально білого шуму не існує, але багато реальних випадкових процесів можна з великою точністю трактувати як білий шум.

Приклад 10.16. Розглянемо питання про проходження білого шуму через стійку лінійну динамічну систему, дія якої зображається диференціальним рівнянням

$$P_n(p)\eta(t) \equiv a_n \eta^{(n)}(t) + a_{n-1} \eta^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \eta'(t) + a_0(t) \eta(t) = \tilde{\xi}(t), \quad (10.44)$$

з сталими коефіцієнтами. Розв'язок рівняння для великих значень  $t$  дається формулами (7.15) або (7.16). Взявши для визначеності першу, матимемо

$$\eta(t) = \int_0^{\infty} \nu(z) \tilde{\xi}(t-z) dz. \quad (10.45)$$

Внаслідок центрованості білого шуму, а отже й розв'язку, йдеться про відшукування тільки кореляційної функції  $K_\eta(t_1, t_2)$ . На підставі результатів прикладу 6.11 та формул (10.42), (10.11) при  $\tau = t_2 - t_1 > 0$  отримуємо

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \nu(z') \nu(z'') K(t_1 - z', t_2 - z'') dz' dz'' = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \nu(z') \nu(z'') G(t_1 - z') \delta((t_2 - z'') - (t_1 - z')) dz' dz'' = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \nu(z') \nu(z'') G(t_1 - z') \delta((\tau + z') - z'') dz' dz'' = \\ &= \int_0^{\infty} \nu(z') G(t_1 - z') dz' \int_0^{\infty} \nu(z'') \delta((\tau + z') - z'') dz'' = \left| \begin{array}{l} \tau > 0 \\ (\tau + z') \in (0, \infty) \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\infty} \nu(z') \nu(\tau + z') G(t_1 - z') dz'. \end{aligned}$$

В разі  $t_1 > t_2$  ( $\tau = t_2 - t_1 < 0$ )

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= \int_0^{\infty} \nu(z'') dz'' \int_0^{\infty} \nu(z') G(t_1 - z') \delta((z'' - \tau) - z') dz' = \left| (z'' - \tau) \in (0, \infty) \right| = \\ &= \int_0^{\infty} \nu(z'') \nu(z'' - \tau) G(t_2 - z'') dz''. \end{aligned}$$

Остаточню

$$K_{\eta}(t_1, t_2) \begin{cases} \int_0^{\infty} v(z)v(\tau+z)G(t_1-z)dz, & t_1 < t_2, \tau > 0, \\ \int_0^{\infty} v(z)v(z-\tau)G(t_2-z)dz, & t_1 > t_2, \tau < 0. \end{cases} \quad (10.46)$$

Дисперсія розв'язку дорівнює

$$D_{\eta}(t) = K_{\eta}(t, t) = \int_0^{\infty} v^2(z)G(t-z)dz. \quad (10.47)$$

Якщо білий шум стаціонарний ( $G \equiv \text{const} = A$ )

$$K_{\eta}(\tau) = A \int_0^{\infty} v(z)v(z+|\tau|)dz, \quad (10.48)$$

$$D_{\eta} = K_{\eta}(0) = A \int_0^{\infty} v^2(z)dz, \quad (10.49)$$

і отже розв'язок  $\eta(t)$  є стаціонарним. В загальному випадку це не так, про що свідчать формули (10.46), (10.47).

Приклад 10.17. Якщо стаціонарний білий шум надходить на вхід стійкої лінійної динамічної системи першого порядку з характеризуючим її рівнянням

$$a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \tilde{\xi}(t), \quad a_0, a_1 - \text{const}, \quad a_0 a_1 > 0, \quad (10.50)$$

то (див. п. 7.2)

$$v(z) = \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1} z},$$

і по формулі (10.48)

$$\begin{aligned} K_{\eta}(\tau) &= \frac{A}{a_1^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_0}{a_1} z} e^{-\frac{a_0}{a_1}(z+|\tau|)} dz = \frac{A}{a_1^2} e^{-\frac{a_0}{a_1} |\tau|} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2a_0}{a_1} z} dz = \\ &= -\frac{A}{a_1^2} e^{-\frac{a_0}{a_1} |\tau|} \cdot \frac{a_1}{2a_0} e^{-\frac{2a_0}{a_1} z} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{2a_0 a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1} |\tau|}. \end{aligned}$$

Отже,

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|}, \quad (10.51)$$

де позначено  $\sigma^2 = A/(2a_0 a_1)$ ,  $\alpha = a_0 / a_1$ .

Кореляційну функцію вигляду (10.51) ми були зустрічали багато разів (див. пп. 3.5, 7.2, 8.3, 9.1 - 9.4). Тепер ми побачили, що таку кореляційну функцію має випадкова функція на виході стійкої лінійної динамічної системи першого порядку, якщо на вхід її надходить стаціонарний білий шум.

Приклад 10.18. Нехай на вхід стійкої лінійної динамічної системи другого порядку, з якою ми мали справу в п. 9.3, надходить стаціонарний білий шум. Знайдемо кореляційну функцію, дисперсію та нормовану кореляційну функцію стаціонарної випадкової функції на виході.

Тут йдеться про диференціальне рівняння

$$\eta''(t) + 2h\eta'(t) + k^2\eta(t) = \tilde{\xi}(t), \quad (10.52)$$

Причому  $h, k$  - сталі,  $0 < h < k$ ,  $k^2 - h^2 = \omega_0^2$ ,

$$K_{\tilde{\xi}}(\tau) = K(\tau) = A\delta(\tau), \quad v(z) = \frac{1}{\omega_0} e^{-hz} \sin \omega_0 z.$$

За формулою (10.48)

$$\begin{aligned} K_{\eta}(\tau) &= \frac{A}{2\omega_0} \int_0^{\infty} e^{-hz} \sin \omega_0 z \cdot e^{-h(z+|\tau|)} \sin \omega_0(z+|\tau|) dz = \\ &= \frac{A}{2\omega_0} e^{-h|\tau|} \int_0^{\infty} e^{-2hz} \sin \omega_0 z \cdot \sin \omega_0(z+|\tau|) dz = \\ &= \frac{A}{2\omega_0} e^{-h|\tau|} \int_0^{\infty} e^{-2hz} (\cos \omega_0 z - \cos \omega_0(2z+|\tau|)) dz = \\ &= \frac{A}{2\omega_0} e^{-h|\tau|} \left( \cos \omega_0 z \int_0^{\infty} e^{-2hz} dz - \int_0^{\infty} e^{-2hz} \cos \omega_0(2z+|\tau|) dz \right) = \\ &= \frac{A}{2\omega_0} e^{-h|\tau|} \left( -\frac{1}{2h} \cos \omega_0 \tau \cdot e^{-2hz} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-2hz}}{(2h)^2 + (2\omega_0)^2} (-2h \cos(2\omega_0 z + \omega_0 |\tau|) + \right. \\ &+ \left. 2\omega_0 \sin(2\omega_0 z + \omega_0 |\tau|)) \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{A}{4\omega_0} e^{-h|\tau|} \left( \frac{\cos \omega_0 \tau}{h} + \frac{-h \cos \omega_0 \tau + \omega_0 \sin \omega_0 |\tau|}{h^2 + \omega_0^2} \right) = \\ &= \frac{A}{4\omega_0} e^{-h|\tau|} \cdot \frac{(h^2 - k^2) \cos \omega_0 \tau + h\omega_0 \sin \omega_0 |\tau|}{hk^2} = A e^{-h|\tau|} \cdot \frac{\omega_0^2 \cos \omega_0 \tau + h\omega_0 \sin \omega_0 |\tau|}{4hk^2 \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Отже, шукана кореляційна функція дорівнює

$$K_{\eta}(\tau) = \frac{A}{4hk^2} e^{-h|\tau|} \cdot \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right),$$

звідки знаходимо дисперсію

$$D_{\eta} = K_{\eta}(0) = \frac{A}{4hk^2}$$

та нормовану кореляційну функцію

$$r_{\eta}(\tau) = \frac{K_{\eta}(\tau)}{D_{\eta}} = e^{-h|\tau|} \cdot \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Позначаючи  $\frac{A}{4hk^2} = \sigma^2$ ,  $h = \alpha$ ,  $\omega_0 = \beta$  ( $\alpha > 0$ ),

дістанемо

$$K_{\eta}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cdot \left( \cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right), \quad (10.53)$$

тобто кореляційну функцію випадкової функції, про яку йшлося в пп. 8.3 (приклад 8.15), 9.3 (приклад 9.5).

Приклад 10.19 (інтегральне канонічне зображення випадкової функції).  
Нехай випадкову функцію  $\xi(t)$  можна зобразити формулою

$$\xi(t) = m(t) + \int_a^b \tilde{\xi}(\omega) x(t, \omega) d\omega,$$

де  $(a, b)$  - деякий інтервал (скінченний або ні),  $\tilde{\xi}(\omega)$  білий шум з інтенсивністю  $G$ , тобто

$$K(\omega_1, \omega_2) = K_{\tilde{\xi}}(\omega_1, \omega_2) = G(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1),$$

а  $x(t, \omega)$  - невиндкова функція двох змінних. Необхідно знайти кореляційну функцію  $K_{\xi}(t_1, t_2)$  функції  $\xi(t)$ .

Розв'язання.

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = M \left( \overset{0}{\xi}(t_1) \overset{0}{\xi}(t_2) \right) = M \left( \int_a^b \tilde{\xi}(\omega') x(t_1, \omega') d\omega' \int_a^b \tilde{\xi}(\omega'') x(t_2, \omega'') d\omega'' \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \int_a^b x(t_1, \omega') x(t_2, \omega'') K_{\xi}(\omega', \omega'') d\omega' d\omega'' = \\
&= \int_a^b \int_a^b x(t_1, \omega') x(t_2, \omega'') G(\omega') \delta(\omega'' - \omega') d\omega' d\omega'' = \\
&= \int_a^b \int_a^b x(t_1, \omega') x(t_2, \omega'') G(\omega') \delta(\omega'' - \omega') d\omega' d\omega'' = \\
&= \int_a^b x(t_1, \omega') G(\omega') d\omega' \int_a^b x(t_2, \omega'') \delta(\omega'' - \omega') d\omega'' = \int_a^b G(\omega') x(t_1, \omega') x(t_2, \omega') d\omega', \\
&K_{\xi}(t_1, t_2) = \int_a^b G(\omega) x(t_1, \omega) x(t_2, \omega) d\omega \tag{10.55}
\end{aligned}$$

Зокрема, для випадку стаціонарного білого шуму

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = A \int_a^b x(t_1, \omega) x(t_2, \omega) d\omega$$

Формули (10.54), (10.55) називаються відповідно інтегральними канонічними зображеннями випадкової функції та її кореляційної функції. Ми довели, що з (10.54) випливає (10.55). Можна показати (див., наприклад, [9, розділ 9]), що й навпаки, формула (10.55) спричиняє (10.54).



## РОЗДІЛ 11

## КОМПЛЕКСНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ

## 11.1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Дотепер йшлося тільки про дійсні випадкові функції. В наступному нам знадобиться більший рівень загальності.

Комплексною випадковою величиною називається величина вигляду

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad (11.1)$$

де  $\xi_1 = \operatorname{Re}\xi$ ,  $\xi_2 = \operatorname{Im}\xi$  - дійсні випадкові величини (дійсна та уявна частини  $\xi$  відповідно). Математичне сподівання величини  $\xi$  визначимо формулою

$$m_\xi = m = M(\xi) = M(\xi_1) + iM(\xi_2) = m_1 + im_2, \quad (11.2)$$

звідки

$$\overset{0}{\xi} = \xi - m = (\xi_1 - m_1) + i(\xi_2 - m_2) = \overset{0}{\xi}_1 + i\overset{0}{\xi}_2. \quad (11.3)$$

Кореляційні моменти комплексних випадкових величин даються формулами

$$K_{\xi\eta} = K(\xi, \eta) = M\left(\begin{matrix} \bar{0} & 0 \\ \xi & \eta \end{matrix}\right), \quad K_{\eta\xi} = K(\eta, \xi) = M\left(\begin{matrix} \bar{0} & 0 \\ \eta & \xi \end{matrix}\right), \quad (11.4)$$

де  $\bar{\overset{0}{\xi}}, \bar{\overset{0}{\eta}}$  - комплексноспряжені з  $\overset{0}{\xi}, \overset{0}{\eta}$  ( $\bar{\overset{0}{\xi}} = \overset{0}{\xi}_1 - i\overset{0}{\xi}_2$ ,  $\bar{\overset{0}{\eta}} = \overset{0}{\eta}_1 - i\overset{0}{\eta}_2$ ). Покладаючи в в будь-якій з формул (11.4)  $\eta = \xi$ , отримуємо дисперсію комплексної випадкової величини як математичне сподівання квадрата модуля центрованої величини  $\overset{0}{\xi}$ ,

$$D_\xi = D = M\left(\left|\overset{0}{\xi}\right|^2\right) = M(|\xi - m|^2) \quad (11.5)$$

Завдання 11.1. Пересвідчіться в справедливості формул

$$D_\xi = D_{\xi_1} + D_{\xi_2}, \quad K_{\xi\eta} = \overline{K_{\eta\xi}} = K_{\xi_1\eta_1} + K_{\xi_2\eta_2} + i(K_{\xi_1\eta_2} - K_{\xi_2\eta_1})$$

Комплексною випадковою функцією називається функція вигляду

$$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t), \quad (11.6)$$

з дійсною та уявною частинами  $\operatorname{Re} \xi(t) = \xi_1(t)$ ,  $\operatorname{Im} \xi(t) = \xi_2(t)$ . Характеристики  $\xi(t)$  визначаються формулами, аналогічними (11.2) - (11.5),

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) = M\left(\overline{\xi^0(t_1)} \xi^0(t_2)\right), \quad (11.8)$$

$$D_{\xi}(t) = D(t) = K(t, t) = M\left(\left|\xi^0(t)\right|^2\right), \quad (11.9)$$

де

$$\xi^0(t) = \xi(t) - m(t) = \xi_1^0(t) + i\xi_2^0(t).$$

Завдання 11.2 . Доведіть справедливість формул

$$D_{\xi}(t) = D_{\xi_1}(t) + D_{\xi_2}(t) = D_1(t) + D_2(t), \quad D_i(t) = D_{\xi_i}(t),$$

$$K(t_1, t_2) = \overline{K(t_2, t_1)} = K_{\xi_1}(t_1, t_2) + K_{\xi_2}(t_1, t_2) + i(R_{\xi_1\xi_2}(t_1, t_2) - R_{\xi_2\xi_1}(t_1, t_2)).$$

Друга формула свідчить, що для некорельованих  $\xi_1(t), \xi_2(t)$

$$K(t_1, t_2) = K_{\xi_1}(t_1, t_2) + K_{\xi_2}(t_1, t_2).$$

Завдання 11.3. Доведіть неприпустимість визначення дисперсій комплексних випадкових величини й функції формулами

$$M\left(\xi^{0^2}\right), \quad M\left(\xi^0(t)\right).$$

Вказівка. Величини  $\xi^{0^2}, \xi^0(t)$ , взагалі кажучи, комплексні.

Якщо випадкова функція дійсна, формули (11.8), (11.9) переходять відповідно в (2.14), (2.15).

З'ясуємо вигляд властивостей кореляційної функції комплексної випадкової функції в порівнянні з властивостями 1 - 5 п. 2.3.

1.  $K(t_1, t_2) = \overline{K(t_2, t_1)}$  (див. завдання 11.2).

2. Залишається без змін.

3.  $K_{\varphi(t)\xi(t)}(t_1, t_2) = \overline{\varphi(t_1)}\varphi(t_2)K(t_1, t_2)$ .

$$4. \quad |K(t_1, t_2)| \leq \sigma(t_1)\sigma(t_2) = \sqrt{K(t_1, t_1)K(t_2, t_2)}. \quad (11.10)$$

$$5. \quad \int_a^b \int_a^b \overline{\varphi(t_1)}\varphi(t_2)K(t_1, t_2)dt_1dt_2 \geq 0. \quad (11.11)$$

Справедливість формули (11.11) є необхідною умовою того, щоб функція  $K(t_1, t_2)$  могла бути кореляційною.

Все викладене щодо кореляційної функції дійсної випадкової функції залишається справедливим для комплексної функції з очевидними уточненнями в випадках, коли застосовують властивості 1, 3. Якщо, зокрема, комплексну випадкову функцію зображено канонічним розкладом

$$\xi(t) = m(t) + \sum_k U_k \varphi_k(t), \quad M(U_k) = 0, \quad M(\overline{U_k}U_l) = 0, \quad k \neq l, \quad (11.12)$$

то її кореляційна функція має канонічний розклад

$$K(t_1, t_2) = \sum_k \overline{\varphi_k(t_1)}\varphi_k(t_2)D_k, \quad D_k = D(U_k). \quad (11.13)$$

Навпаки, з справедливості формули (11.13) (з  $D_k \geq 0$ ) випливає існування канонічного розкладу (11.12) для випадкової функції  $\xi(t)$ . Покладаючи в формулі (11.13)  $t_1 = t_2 = t$ , знайдемо дисперсію

$$D = K(t, t) = \sum_k |\varphi_k(t)|^2 D_k. \quad (11.14)$$

Для стаціонарної комплексної випадкової функції (пор. п. 8.1)

$$K(\tau) = \overline{K(-\tau)},$$

$$|K(\tau)| \leq \sigma^2 = K(0),$$

$$\int_a^b \int_a^b \overline{\varphi(t_1)}\varphi(t_2)K(t_2 - t_1)dt_1dt_2 \geq 0. \quad (11.15)$$

Взаємна кореляційна функція ВКФ двох комплексних випадкових функцій  $\xi(t), \eta(t)$  визначається формулою

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = M\left(\overline{\xi(t_1)}\xi(t_2)\right), \quad (11.16)$$

яка для дійсних функцій збігається з формулою (2.27) п. 2.5. З поданих там властивостей 1 - 4 ВКФ властивості 2, 4 не змінюються, а 1, 3 дещо переформулюються. Саме,

$$1. \quad R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \overline{R_{\eta\xi}(t_2, t_1)},$$

тобто при одночасній зміні місцями індексів і аргументів ВКФ змінюється на комплексноспряжену.

3. Якщо  $\xi_1(t) = \varphi(t)\xi(t)$ ,  $\eta_1(t) = \phi(t)\eta(t)$ , де  $\varphi(t), \phi(t)$  не випадкові комплексні функції, то

$$R_{\xi_1\eta_1}(t_1, t_2) = \overline{\varphi(t_1)\phi(t_2)} R_{\xi\eta}(t_1, t_2).$$

Для ВКФ комплексних випадкових функцій є справедливим все висловлене в розділі 2, за винятком очевидних змін, коли застосовуються властивості 1, 3. Зокрема, для стаціонарно зв'язаних випадкових функцій (п. 8.2) формула (8.8) (властивість 1) набуває вигляду

$$R_{\eta\xi}(-\tau) = \overline{R_{\xi\eta}(\tau)}. \quad (11.17)$$

## 11.2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІЗУ КОМПЛЕКСНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Підґрунтям аналізу дійсних випадкових величин і функцій (див. розділи 4 - 6) були умови (4.1), (4.5) скінченності математичного сподівання квадрата випадкової величини й самої величини, нерівності (4.3), (4.6) Коші-Буняковського та трикутника. Аналіз комплексних випадкових величин і функцій цілком аналогічно побудований на нерівностях

$$M(|\xi|^2) < \infty, \quad (11.18)$$

$$|M(\bar{\xi}\eta)| \leq \sqrt{M(|\xi|^2)} \sqrt{M(|\eta|^2)}, \quad (11.19)$$

$$\sqrt{M(|\xi + \eta|^2)} \leq \sqrt{M(|\xi|^2)} + \sqrt{M(|\eta|^2)}, \quad (11.20)$$

$$|M(\xi)| \leq \sqrt{M(|\xi|^2)}. \quad (11.21)$$

Ми обмежимося деякими важливими формулами, котрі мають дещо інший вигляд порівнянно з попередніми.

Якщо

$$\zeta(t) = L[\xi(t)] = P_n(p)\xi(t) = \sum_{k=0}^n a_k(t)\xi^{(k)}(t) \quad (11.22)$$

лінійний диференціальний оператор від комплексної випадкової функції  $\xi(t)$  з комплексними коефіцієнтами  $a_k(t)$ , то його кореляційна функція дається формулою

$$K_\zeta(t_1, t_2) = K_{P_n(p)\xi(t)}(t_1, t_2) = \sum_{k,l=0}^n \overline{a_k(t_1)} a_l(t_2) \frac{\partial^{k+l} K(t_1, t_2)}{\partial t_1^k \partial t_2^l}, \quad (11.23)$$

аналогічною (5.23). Зокрема, для випадку стаціонарної функції та сталих коефіцієнтів,

$$\zeta(t) = L[\xi(t)] = \sum_{k=0}^n a_k \xi^{(k)}(t) \quad (11.24)$$

маємо

$$K_\zeta(\tau) = K_{P_n(p)\xi(t)}(\tau) = \sum_{k,l=0}^n (-1)^k \overline{a_k} a_l K^{(k+l)}(\tau). \quad (11.25)$$

Остання формула різниться від (8.16) тільки множниками  $\overline{a_k}$ .

Нехай

$$\eta(t) = \int_a^t p(t, t') \xi(t') dt' \quad (11.26)$$

інтегральне перетворення комплексної випадкової функції з не випадковим комплексним множником  $p(t, t')$ . Тим же методом, що й в прикладі 6.9 (див. п. 6.4.2), легко отримати

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \overline{p(t_1, t')} p(t_2, t'') K(t', t'') dt' dt''. \quad (11.27)$$

Припустимо, що комплексна випадкова функція  $\xi(t)$  має інтегральне зображення

$$\xi(t) = m(t) + \int_a^b \tilde{\xi}(\omega)x(t, \omega)d\omega, \quad (11.28)$$

де  $(a, b)$  - деякий інтервал,  $\tilde{\xi}(\omega)$  - білий шум з інтенсивністю  $G$ , а  $x(t, \omega)$  - комплекснозначна не випадкова функція. За аналогією до прикладу 10.19 з п. 10.5 дістанемо інтегральне зображення кореляційної функції

$$K(t_1, t_2) = \int_a^b G(\omega)\overline{x(t_1, \omega)}x(t_2, \omega)d\omega. \quad (11.29)$$

Формули (11.28), (11.29) є наслідками одна другої, як і формули (10.54), (10.55) в прикладі 10.19.

## РОЗДІЛ 12

# ЕЛЕМЕНТИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ ЧАСТИНА ПЕРША: ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ З ДИСКРЕТНИМ СПЕКТРОМ

## 12.1. ЗАУВАЖЕННЯ ПРО РЯДИ ФУР'Є

Нехай  $f(t)$  - дійсна або комплексна функція дійсної змінної  $t$ , періодична з періодом  $2l$  або задана на інтервалі  $(-l, l)$ . Якщо вона розкладається в ряд (ряд Фур'є)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{l} t},$$

то коефіцієнти (коефіцієнти Фур'є)  $c_n$  обчислюються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t') e^{-i \frac{n\pi}{l} t'} dt'.$$

Якщо ввести позначення

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \omega_n = n\omega_1 = \frac{n\pi}{l}, \quad (12.1)$$

можна записати

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad (12.2)$$

$$c_n = c(\omega_n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t') e^{-i\omega_n t'} dt'. \quad (12.3)$$

Ряд Фур'є (12.2), (12.3) називається спектральним розкладом функції  $f(t)$  по комплексних гармоніках

$$e^{i\omega_n t} = \cos \omega_n t + i \sin \omega_n t$$

з частотами (хвильовими числами)  $\omega_n$  та амплітудами  $|c_n| = |c(\omega_n)|$ . Сукупність  $\{c_n = c(\omega_n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  всіх коефіцієнтів спектрального розкладу називається спектром функції, сукупність усіх амплітуд - амплітудним, всіх хвильових чисел - частотним спектрами. Що тут йдеться про (дискретні) послідовності чисел, то кажуть, що функція має дискретний спектр.

Якщо функція  $f(t)$  - дійсна парна, то завдячуючи формулі Ейлера (Ойлера)

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

можна перетворити спектральний розклад (12.2), (12.3) в розклад по косинусам

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \omega_n t, \quad (12.4)$$

$$a_0 = a(\omega_0) = a(0) = \frac{1}{l} \int_0^l f(t') dt', \quad a_n = a(\omega_n) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t') \cos \omega_n t' dt', \quad (12.5)$$

причому  $a_0 = c_0, c_{-n} = c_n, a_n = 2c_n$ . Слушно говорити про спектральний розклад дійсної парної функції по гармоніках  $\cos \omega_n t$  з дискретним спектром  $\{a_n = a(\omega_n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , амплітудним  $\{|a_n| = |a(\omega_n)|, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  та частотним  $\{\omega_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  спектрами.

## 12.2. СПЕКТРАЛЬНИЙ РОЗКЛАД СТАЦІОНАРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ НА СКІНЧЕНОМУ ЧАСОВОМУ ВІДТИНКУ

Нехай  $\xi(t)$  - стаціонарна, взагалі кажучи, комплексна випадкова функція, задана на інтервалі  $(0, l)$ . Її кореляційна функція  $K(\tau)$  буде визначена на інтервалі  $(-l, l)$ , оскільки з нерівностей  $0 < t_1 < l, 0 < t_2 < l$  випливає  $-l < t_2 - t_1 < l$ , або ж  $-l < \tau < l$ . Якщо періодичне продовження  $K^*(\tau)$  функції  $K(\tau)$  задовольняє відомі умови теореми Діріхле й неперервне, кореляційна функція



розкладається в ряд Фур'є. На підставі формул (12.2), (12.3) отримуємо спектральний розклад  $K(\tau)$  по комплексних гармоніках

$$K(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\omega_n \tau}, \quad (12.6)$$

$$d_n = d(\omega_n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l K(\tau') e^{-i\omega_n \tau'} d\tau'. \quad (12.7)$$

Спектр кореляційної функції  $K(\tau)$  збігається з її амплітудним спектром, про що свідчить наступна

Теорема. Коефіцієнти (12.7) спектрального розкладу (12.6) - дійсні невід'ємні.

Доведення. Розглянемо допоміжну величину

$$\phi_n = \frac{1}{4l^2} \int_{-l}^l \int_{-l}^l K(t_2 - t_1) \overline{e^{-i\omega_n t_1}} e^{-i\omega_n t_2} dt_1 dt_2 \geq 0,$$

невід'ємну на підставі умови (11.15). Маємо

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{1}{4l^2} \int_{-l}^l dt_1 \int_{-l}^l K^*(t_2 - t_1) e^{-i\omega_n(t_2 - t_1)} dt_2 = |t_2 - t_1 = z| = \frac{1}{4l^2} \int_{-l}^l dt_1 \int_{-l-t_1}^{l-t_1} K^*(z) e^{-i\omega_n z} dz = \\ &= \frac{1}{4l^2} \int_{-l}^l dt_1 \int_{-l}^l K^*(z) e^{-i\omega_n z} dz = \frac{1}{4l^2} \int_{-l}^l dt_1 \int_{-l}^l K(z) e^{-i\omega_n z} dz = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dt_1 \frac{1}{2l} \int_{-l}^l K(z) e^{-i\omega_n z} dz = d_n \geq 0, \end{aligned}$$

звідки  $d_n = d(\omega_n) \geq 0$ . При доведенні ми скористалися формулою (12.7) та періодичністю функції  $K^*(\tau)$ , внаслідок чого замість інтеграла по інтервалу  $(-l-t_1, l-t_1)$  взяли інтеграл по  $(-l, l)$ .

Оскільки  $\tau = t_2 - t_1$ , перепишемо формулу (12.6) у вигляді

$$K(\tau) = K(t_2 - t_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\omega_n(t_2 - t_1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \overline{e^{i\omega_n t_1}} e^{i\omega_n t_2}. \quad (12.8)$$

Доходимо канонічного розкладу кореляційної функції стаціонарної випадкової функції з координатними функціями  $e^{i\omega_n t}$ . На підставі сказаного в п. 11.1 (див. формули (11.12), (11.13)) існує канонічний розклад самої випадкової функції

$$\xi(t) = m_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{i\omega_n t}, \quad (12.9)$$

де  $U_n$  - деякі центровані парами некорельовані випадкові величини з дисперсіями  $D(U_n) = d_n \geq 0$ . Формулу (12.9) називають також спектральним розкладом випадкової функції з дискретним спектром, що збігається з спектром дисперсій та амплітудним спектром  $\{d_n = d(\omega_n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Дисперсія випадкової функції

$$D = K(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \quad (12.10)$$

дорівнює сумі ряду з членами - ординатами спектра дисперсій.

Нехай тепер стаціонарна випадкова функція  $\xi(t)$  дійсна. Тоді її кореляційна функція  $K(\tau)$  також дійсна (і парна). Згідно зі сказаним у п. 12.1 формули (12.6), (12.7) можна замінити формулами спектрального розкладу по косинусах

$$K(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \omega_n \tau, \quad (12.11)$$

$$D_0 = D(\omega_0) = \frac{1}{l} \int_0^l K(\tau') d\tau', \quad D_n = D(\omega_n) = \frac{2}{l} \int_0^l K(\tau') \cos \omega_n \tau' d\tau', \quad (12.12)$$

причому  $D_0 = d_0$ , а  $D_n = 2d_n$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Спектри дисперсій  $\{d_n = d(\omega_n)\}$  та  $\{D_0 = d_0, D_n = 2d_n\}$  функції  $\xi(t)$  показано на рис. 12.1. Виходячи, як і вище, з рівності  $\tau = t_2 - t_1$ , можна подати спектральний розклад (12.11), (12.12) у вигляді канонічного

$$K(\tau) = K(t_2 - t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_n \cos \omega_n t_1 \cos \omega_n t_2 + D_n \sin \omega_n t_1 \sin \omega_n t_2) \quad (12.13)$$

з координатними функціями  $\cos \omega_n t, \sin \omega_n t$ . Відповідний канонічний розклад випадкової функції

$$\xi(t) = m_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (U_n \cos \omega_n t + V_n \sin \omega_n t), \quad (12.14)$$

де  $U_n, V_n$  - центровані парами некорельовані випадкові величини з дисперсіями  $D(U_n) = D(V_n) = D_n$ .

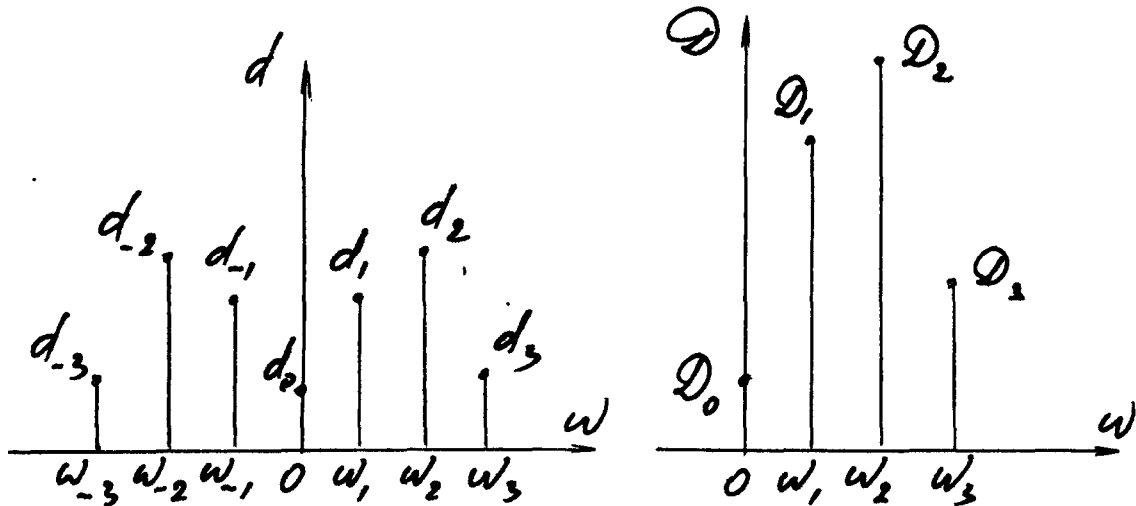


Рис. 12.1. Спектр дійсної стаціонарної випадкової функції

### 12.3. ПЕРЕТВОРЕННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ З ДИСКРЕТНИМ СПЕКТРОМ ЛІНІЙНОЮ ДИНАМІЧНОЮ СИСТЕМОЮ

Звернімось до розгляду стійкої лінійної динамічної системи, дія якої описується лінійним диференціальним рівнянням з сталими комплексними, взагалі кажучи, коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \eta^{(k)}(t) &\equiv a_n \eta^{(n)}(t) + a_{n-1} \eta^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \\ &= b_m \xi^{(m)}(t) + b_{m-1} \xi^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t) \equiv \sum_{l=0}^m b_l \xi^{(l)}(t), \end{aligned} \quad (12.15)$$

або

$$P_n(p)\eta(t) = Q_m(p)\xi(t),$$

де  $p = d/dt$  - оператор диференціювання, а

$$P_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k p^k,$$

$$Q_m(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = \sum_{l=0}^m b_l p^l.$$

Нас цікавитимуть стаціонарні розв'язки рівняння.

З'ясуємо спочатку, яким чином перетворюється системою гармоніка

$$\xi(t) = Ue^{i\omega t} \quad (12.16)$$

з частотою  $\omega$  і амплітудою  $|U|$ , де  $U$  - випадкова величина, яку без обмеження загальності можна вважати центрованою ( $M(U) = 0$ ).

Розв'язок рівняння (12.15) шукатимемо у вигляді

$$\eta(t) = AUe^{i\omega t} \quad (12.17)$$

з поки ще невідомою сталою  $A$ . Для її відшукування підставимо функції (12.16), (12.17) в рівняння. Матимемо

$$\sum_{k=0}^n a_k (AUe^{i\omega t})^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^m b_l (Ue^{i\omega t})^{(l)}$$

$$A \left( \sum_{k=0}^n a_k (i\omega)^k \right) Ue^{i\omega t} = \left( \sum_{l=0}^m b_l (i\omega)^l \right) Ue^{i\omega t},$$

і по діленні обох частин на  $Ue^{i\omega t}$

$$A \sum_{k=0}^n a_k (i\omega)^k = \sum_{l=0}^m b_l (i\omega)^l,$$

або

$$AP_n(i\omega) = Q_m(i\omega),$$

звідки

$$A = \Phi(i\omega) = \frac{Q_m(i\omega)}{P_n(i\omega)},$$

$$\eta(t) = Ve^{i\omega t} = \Phi(i\omega)Ue^{i\omega t}. \quad (12.18)$$

Виявляється, що результатом проходження гармоніки (12.16) через динамічну систему є також гармоніка з тією ж частотою  $\omega$  та амплітудою  $|V|$ , де

$$V = \Phi(i\omega)U \quad (12.19)$$

центрована випадкова величина. Дисперсія останньої, очевидно, дорівнює

$$D(V) = D_V = |\Phi(i\omega)|^2 D_U = |\Phi(i\omega)|^2 D(U). \quad (12.20)$$

Відношення

$$\Phi(p) = \frac{Q_m(p)}{P_n(p)} \quad (12.21)$$

називається передаточною функцією, або ж передаточною характеристикою динамічної системи з рівнянням (12.15). Значення  $\Phi(i\omega)$  передаточної функції при  $p = i\omega$  називається частотною характеристикою, а її модуль  $|\Phi(i\omega)|$  коефіцієнтом підсилення. Зсув фази гармоніки (12.16) визначається відношенням дійсної та уявної частин частотної характеристики.

Нехай тепер на вхід динамічної системи надходить стаціонарна випадкова функція, зображена своїм канонічним розкладом (12.9)

$$\xi(t) = m_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{i\omega_n t}, \quad D(U_n) = d_n.$$

Математичне сподівання стаціонарного розв'язку рівняння (12.15) дається формулою (8.18). Канонічний розклад розв'язку знаходимо, підсумовуючи результати перетворення системою кожної гармоніки  $U_n e^{i\omega_n t}$ . Згідно з формулами (12.18), (12.20)

$$\eta(t) = m_\eta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{i\omega_n t} = \frac{b_0}{a_0} m_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \Phi(i\omega_n) e^{i\omega_n t}, \quad (12.22)$$

$$D(V_n) = D(U_n \Phi(i\omega_n)) = |\Phi(i\omega_n)|^2 D(U_n) = |\Phi(i\omega_n)|^2 d_n. \quad (12.23)$$

Канонічний розклад кореляційної функції розв'язку дорівнює

$$K_\eta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(V_n) e^{i\omega_n \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega_n)|^2 d_n e^{i\omega_n \tau}. \quad (12.24)$$

## РОЗДІЛ 13

# ЕЛЕМЕНТИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ ЧАСТИНА ДРУГА: ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ З НЕПЕРЕРВНИМ СПЕКТРОМ

В попередньому розділі йшлося про випадкові функції, визначені на скінченному проміжку. На часі основний випадок нескінченних областей визначення.

### 13.1. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ ПРО ІНТЕГРАЛ І ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

#### 13.1.1. Інтеграл Фур'є

В п. 12.1 ми мали справу з спектральним розкладом (12.2), (12.3) комплексної, зокрема дійсної, функції  $f(t)$  дійсного аргумента  $t$ , періодичної з періодом  $2l$  або заданої на інтервалі  $(-l, l)$ . З'ясуємо, у що переходить спектральний розклад при  $l \rightarrow \infty$ .

Оскільки

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = n\omega_1 - (n-1)\omega_1 = \omega_1 = \frac{\pi}{l},$$

з формул (12.2), (12.3) випливає рівність

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-l}^l f(t') e^{-i\omega_n t'} dt' \right) e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{l} \left( \int_{-l}^l f(t') e^{-i\omega_n t'} dt' \right) e^{i\omega_n t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n \int_{-l}^l f(t') e^{-i\omega_n t'} dt'. \end{aligned}$$

Природно припустити, що при  $l \rightarrow \infty$  доходимо такого результату

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt', \quad (13.1)$$

в якому мається на увазі головне значення зовнішнього інтеграла.

Вираз

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{i\omega(t-t')} dt' d\omega \quad (13.2)$$

називається інтегралом Фур'є функції  $f(t)$ , а формула (13.1) - зображенням функції її інтегралом Фур'є, або просто інтегральним зображенням.

Теорема 13.1. Якщо дійсна функція  $f(t)$

а) абсолютно інтегровна на інтервалі  $(-\infty, \infty)$ , тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty; \quad (13.3)$$

б) обмежена на  $(-\infty, \infty)$ ;

в) кусково-монотонна на кожному скінченному інтервалі, то інтеграл Фур'є збігається для всіх  $t$ , причому

$$\Psi(t) = \begin{cases} f(t), & \text{якщо } f(t) \text{ неперервна в точці } t, \\ \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}, & \text{якщо } t \text{ - точка розриву.} \end{cases} \quad (13.4)$$

У випадку комплексної функції (дійсної змінної  $t$ ) теорему слід застосувати до дійсної та уявної частин функції.

### 13.1.2. Пряме й обернене перетворення Фур'є.

З формули (13.1) видно, що за умови

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' = F[f(t)] \quad (13.5)$$

функція  $f(t)$  зображається інтегралом

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (13.6)$$

Формула (13.5) визначає (пряме) перетворення Фур'є, а (13.6) - обернене перетворення Фур'є. Кажуть також про спектральний розклад (13.6) функції  $f(t)$  по комплексних гармоніках  $e^{i\omega t}$  з частотами (хвильовими числами)  $\omega$ , що неперервно заповнюють інтервал  $(-\infty, \infty)$ , та амплітудами  $|S(\omega)|$ . Функція  $S(\omega)$ , котра визначає перетворення Фур'є, називається спектральною щільністю (частото спектральною функцією), або спектром, її модуль  $|S(\omega)|$  - амплітудним спектром функції  $f(t)$ . На відміну від розділу 12 ми маємо тут неперервний спектр.

Очевидною є інтегровність, не обов'язково абсолютна, спектральної щільності, бо

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = f(0) \neq \infty.$$

Якщо  $f(t)$  - дійсна парна функція, то її спектральна щільність також є дійсною парною, а формули (13.5), (13.6) переходять у формули

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (13.7)$$

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (13.8)$$

прямого й оберненого косинус-перетворення Фур'є.

В формулах (13.7), (13.8) інтеграли розповсюджуються на додатні півосі. Тому доречно запровадити нову функцію

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega), & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases} \quad (13.9)$$

значення якої при  $\omega < 0$  тотожно дорівнюють нулю, а при  $\omega \geq 0$  є подвоєними значеннями  $S(\omega)$ . Формули (13.7), (13.8) набудуть дещо іншого вигляду,

$$S_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (13.10)$$



$$f(t) = \int_0^{\infty} S_1(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (13.11)$$

Функцію  $S_1(\omega)$  також називають спектральною щільністю.

Приклад 13.1. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{t_0}, & |t| \leq t_0, \\ 0, & |t| > t_0 > 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція  $f(t)$  - парна, а тому згідно формулі (13.7) по інтегруванні частинами

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{t_0} \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \cos \omega t dt = \left. \begin{array}{l} u = 1 - \frac{t}{t_0} \\ dv = \cos \omega t dt \end{array} \right| = \frac{1 - \cos \omega t_0}{\pi \omega^2 t_0}.$$

Скориставшись формулою (13.10), мали б

$$S_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = 2S(\omega) = \frac{2(1 - \cos \omega t_0)}{\pi \omega^2 t_0}.$$

Приклад 13.2. Відновити функцію  $f(t)$  по її перетворенню Фур'є

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{D}{\pi \alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Розв'язання. Послугуючись формулою (13.6) та відомим інтегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2+Bx+C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2+4AC}{4A}}, \quad A > 0, \quad (13.12)$$

знаходимо

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \sqrt{\frac{D}{\pi \alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha} + i\omega t} d\omega = \left. \begin{array}{l} A = \frac{1}{4\alpha}, \quad B = it, \\ C = 0, \quad B^2 = -t^2 \end{array} \right| = \\ &= \sqrt{\frac{D}{\pi \alpha}} \sqrt{4\pi \alpha} e^{-\alpha t^2} = 2\sqrt{D} e^{-\alpha t^2}. \end{aligned}$$

Інтеграл (13.12) можна обчислити, послідовно покладаючи  $\sqrt{Ax} = t$ , доповнюючи в показнику степеня до повного квадрата, виносячи сталий множ-

ник за знак інтеграла, в решті-решт зводячи інтеграл, що залишився, до інтеграла Пуассона заміною  $t - \frac{B}{2\sqrt{A}} = z$ .

Приклад 13.3. Перетворення Фур'є та інтегральне зображення  $\delta$ -функції  $\delta(t)$  є

$$S_{\delta}(\omega) = F[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}, \quad (13.13)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega. \quad (13.14)$$

Зрозуміло, формули (13.13), (13.14) слід тлумачити суто формально. Друга з них наголошує на "узагальненому" характерові  $\delta$ -функції, оскільки фігуруючий там інтеграл розбігається. Після формального диференціювання по  $t$  під знаком інтеграла отримуємо інтегральне зображення похідної від  $\delta$ -функції

$$\delta^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} (i\omega)^n d\omega.$$

Приклад 13.4. Знайдемо перетворення Фур'є лінійного диференціального оператора від зсуву  $\delta(t - t_0)$   $\delta$ -функції

$$\begin{aligned} L[\delta(t - t_0)] &= \sum_{k=0}^n a_k \delta^{(k)}(t - t_0) = P_n(p) \delta(t - t_0) = \\ &= a_n \delta^{(n)}(t - t_0) + a_{n-1} \delta^{(n-1)}(t - t_0) + \dots + a_1 \delta'(t - t_0) + a_0 \delta(t - t_0) \end{aligned}$$

для випадку сталих коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

По формулі (10.15)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = (-1)^k \left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{-i\omega t} \right|_{t=t_0} = (i\omega)^k e^{-i\omega t_0},$$

тому

$$\begin{aligned} F[L[\delta(t - t_0)]] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \delta^{(k)}(t - t_0) \right) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k \int_{-\infty}^{\infty} (\delta^{(k)}(t - t_0)) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k (i\omega)^k e^{-i\omega t_0} = \frac{1}{2\pi} P_n(i\omega) e^{-i\omega t_0}. \end{aligned}$$

### 13.1.3. Деякі властивості перетворення Фур'є.

Перш за все сформулюємо три важливі положення, що зв'язують дійсну функцію  $f(t)$  та її спектральну щільність  $S(\omega)$ .

Теорема 13.2. Якщо спектральна щільність  $S(\omega)$  абсолютно інтегровна на  $(-\infty, \infty)$ , то функція  $f(t)$  неперервна на  $(-\infty, \infty)$ , причому  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ .

Теорема 13.3. Якщо функція  $\omega^n S(\omega)$  є абсолютно інтегровою на інтервалі  $(-\infty, \infty)$ , то функція  $f(t)$  має на  $(-\infty, \infty)$  послідовні похідні до  $n$ -го порядку включно й всі вони прямують до нуля при  $t \rightarrow \infty$ .

Теорема 13.4. Якщо функції  $S(\omega), S'(\omega), \dots, S^{(n-1)}(\omega)$  нескінченно малі при  $\omega \rightarrow \pm\infty$ , а похідна  $S^{(n)}(\omega)$  абсолютно інтегровна на  $(-\infty, \infty)$ , то  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^n f(t) = 0$ .

Перелічимо тепер ті з властивостей перетворення Фур'є, які нам згодом знадобляться.

1. Перетворення Фур'є суми функцій дорівнює сумі перетворень Фур'є доданків,

$$F[f(t) + g(t)] = F[f(t)] + F[g(t)]$$

2. Сталий множник можна винести за знак перетворення Фур'є,

$$F[Cf(t)] = CF[f(t)]$$

Властивості 1, 2 встановлюють лінійність перетворення Фур'є.

3. Перетворення Фур'є похідних.

$$F[f'(t)] = i\omega F[f(t)], \quad F[f''(t)] = (i\omega)^2 F[f(t)], \dots \quad (13.15)$$

Перетворення Фур'є похідної зводиться до множення на  $i\omega$  перетворення Фур'є вихідної функції. Щодо функцій  $f(t), f'(t), \dots$  припустимо виконання умов теореми 13.1 (між іншим це спричиняє інтегровність  $S(\omega), \omega S(\omega), \dots$  на  $(-\infty, \infty)$ ). Формули (13.15) доводяться інтегруванням частинами, анулювання позаінтегральних членів забезпечується, згідно з теоремами 13.2,

13.3, додатковим припущенням про абсолютну інтегровність на  $(-\infty, \infty)$  функцій  $S(\omega)$ ,  $\omega S(\omega)$ , ... .

### 13.1.4. Перетворення Фур'є та лінійні диференціальні рівняння

В багатьох питаннях науки й техніки зустрічається лінійне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку з сталими коефіцієнтами

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 x'(t) + b_0 x(t), \end{aligned} \quad (13.16)$$

де  $x(t)$  - відома  $m$  разів неперервно диференційовна функція, а  $y(t)$  - шукана функція. В операторній формі рівняння переписується так

$$P_n(p)y(t) = Q_m(p)x(t),$$

де 
$$p = \frac{d}{dt},$$

$$P_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0, \quad Q_m(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0$$

(пор. пп. 7.1, 12.3).

Застосуємо до обох частин рівняння перетворення Фур'є. З урахуванням властивостей 1-3 отримаємо

$$\begin{aligned} (a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 i\omega + a_0) F[y(t)] = \\ = (b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_1 i\omega + b_0) F[x(t)], \end{aligned}$$

або в операторній формі

$$P_n(i\omega)F[y(t)] = Q_m(i\omega)F[x(t)].$$

Перетворення Фур'є шуканої функції визначається формулою

$$F[y(t)] = \Phi(i\omega)F[x(t)] = \frac{Q_m(i\omega)}{P_n(i\omega)}F[x(t)], \quad (13.17)$$

де

$$\Phi(i\omega) = \frac{Q_m(i\omega)}{P_n(i\omega)}$$

знана нами частотна характеристика (див. п. 12.3).

Нехай всі корені характеристичного рівняння, яке відповідає рівнянню (13.16), від'ємні або мають від'ємні дійсні частини. Як було встановлено в п. 7.2, для великих значень  $t$  розв'язок рівняння можна зобразити за допомогою вагової функції,

$$y(t) = y_{н.н.}(t) = \int_0^{\infty} v(t')\zeta(t-t')dt',$$

де  $\zeta(t) = Q_m(p)\xi(t)$  - права частина рівняння, а  $y_{н.н.}(t)$  - розв'язок, що задовольняє нульові початкові умови. Застосуємо до обох частин останньої рівності перетворення Фур'є. Дістанемо

$$\begin{aligned} F[y(t)] &= F[y_{н.н.}(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \int_0^{\infty} v(t')\zeta(t-t')dt' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} v(t')dt' \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(t-t')e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} v(t')e^{-i\omega t'} dt' \cdot F[\zeta(t)] = \\ &= \int_0^{\infty} v(t')e^{-i\omega t'} dt' \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(t_1)e^{-i\omega t_1} dt_1 = \int_0^{\infty} v(t')e^{-i\omega t'} dt' \cdot F[\zeta(t)]. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$F[y(t)] = \int_0^{\infty} v(t')e^{-i\omega t'} dt' \cdot F[\zeta(t)] = \int_0^{\infty} v(t')e^{-i\omega t'} dt' \cdot Q_m(i\omega)F[x(t)], \quad (13.18)$$

тобто для знаходження перетворення Фур'є розв'язку  $y(t)$  рівняння (13.16) можна перетворення Фур'є його правої частини помножити на інтеграл

$$\int_0^{\infty} v(t)e^{-i\omega t} dt = 2\pi F[v(t)] \quad (13.19)$$

Останній з точністю до множника  $2\pi$  збігається з перетворенням Фур'є вагової функції, якщо вважати її тотожно рівною нулеві при  $t < 0$ . Порівняння правих частин рівностей (13.17), (13.18) показує, що

$$\int_0^{\infty} v(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{P_n(i\omega)} = \frac{1}{a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 i\omega + a_0}. \quad (13.20)$$

Згодом ми матимемо нагоду скористатися цим результатом.

## 13.2. СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ З НЕПЕРЕРВНИМ СПЕКТРОМ

### 13.2.1. Спектральний розклад кореляційної функції

Нехай  $\xi(t)$  - стаціонарна випадкова функція, визначена на нескінченному інтервалі  $(-\infty, \infty)$ . Розклад її кореляційної функції  $K(\tau)$  в ряд Фур'є загалом неможливий, проте можна ставити стосовно  $K(\tau)$  питання про пряме й обернене перетворення Фур'є, за головної умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(\tau)| d\tau < \infty. \quad (13.21)$$

Ми виходимо з спектрального розкладу (12.6), (12.7) кореляційної функції по гармоніках  $e^{i\omega_n \tau}$  з невід'ємними (за теоремою п. 12.2) коефіцієнтами (амплітудами)  $d_n$ , які утворюють ряд (12.10) з сумою  $D$  - дисперсією випадкової функції. Запровадимо в формулах (12.6), (12.7) граничний перехід при  $l \rightarrow \infty$ , беручи, як і в п. 13.1, до уваги, що для будь-якого  $n$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{l}.$$

Введімо в ужиток величину

$$S_l(\omega_n) = \frac{d_n}{\Delta\omega},$$

яку можна назвати середньою щільністю дисперсії випадкової функції на проміжку  $[\omega_n, \omega_{n+1})$ . Згідно з формулою (12.7)

$$S_l(\omega_n) = \frac{d_n}{\Delta\omega} = \frac{d_n}{\pi} l = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l K(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau, \quad S_l(\omega_n) \geq 0,$$

а з формулою (12.6) –

$$K(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_l(\omega_n) e^{i\omega_n \tau} \Delta\omega.$$

Якщо тепер  $l \rightarrow \infty$ , отримаємо

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau, \quad (13.22)$$

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega. \quad (13.23)$$

Функція  $S(\omega)$  в формулі (13.22) визначає перетворення Фур'є кореляційної функції  $K(\tau)$  стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$ . Дещо змінюючи термінологію п. 13.2, називатимемо  $S(\omega)$  спектральною щільністю випадкової функції. Кореляційна функція  $K(\tau)$  відновлюється по відомій спектральній щільності за допомогою оберненого перетворення Фур'є (13.23). Формули (13.22), (13.23) засвідчують, що для стаціонарної випадкової функції задання кореляційної функції рівнозначне заданню її спектральної щільності.

Спектральна щільність є дійсною невід'ємною функцією незалежно від того, чи є відповідна випадкова функція дійсною або комплексною. Слушність твердження впливає з попередніх міркувань, оскільки, як ми бачили,

$$S_l(\omega_n) \geq 0.$$

Формула (13.23) називається спектральним розкладом кореляційної функції стаціонарної випадкової функції по гармоніках  $e^{i\omega \tau}$  з неперервним спектром  $S(\omega)$ . Покладаючи  $\tau = 0$ , знаходимо дисперсію випадкової функції

$$D = K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (13.24)$$

Що ми розглядаємо випадкові функції тільки з скінченними дисперсіями, то з формули (13.24) випливає інтегровність (фактично абсолютна) спектральної щільності на  $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega < \infty. \quad (13.25)$$

На підставі теореми 13.3 це означає неперервність кореляційної функції на  $(-\infty, \infty)$  та прямування її до нуля при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ .

До поняття спектральної щільності можна прийти іншим шляхом, заснованим на формулі (12.10) для обчислення дисперсії випадкової функції з дискретним спектром. Задля цього уявімо собі ступінчасту функцію  $S_l(\omega)$ , значення якої на кожному проміжку  $[\omega_n, \omega_{n+1})$  дорівнює

$$S_l(\omega_n) = \frac{d_n}{\Delta\omega}.$$

Графік функції породжує нескінченну систему прямокутників з основами  $\Delta\omega$  й висотами  $S_l(\omega_n)$ , сумарна площа яких дорівнює дисперсії  $D$ . Формулі (12.10) можна тепер надати вигляду

$$D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_l(\omega_n) \Delta\omega /$$

При  $l \rightarrow \infty$  маємо  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , і графік функції  $S_l(\omega)$  наближається до графіка деякої невід'ємної функції  $S(\omega)$  таким чином, що

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega.$$

Ця функція  $S(\omega)$  й є спектральною щільністю випадкової функції (докладніше див. [1, п. 17.3]).

### 13.2.2. Випадок дійсної випадкової функції.

Якщо стаціонарна випадкова функція  $\xi(t)$  - дійсна, то її спектральна щільність є парною,

$$S(-\omega) = S(\omega),$$



а формули (13.22), (13.23) можна переписати в дійсній формі (пряме та обернене косинус-перетворення Фур'є кореляційної функції)

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (13.28)$$

$$K(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (13.29)$$

Інтеграли беруться тут тільки для невід'ємних значень аргументів, тому ми можемо, за аналогією до п. 13.2, ввести нову функцію  $S_1(\omega)$ , яку також називатимемо спектральною щільністю,

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega), & \omega \geq 0, \\ 0 & \omega < 0. \end{cases} \quad (13.30)$$

Стосовно  $S_1(\omega)$  формули (13.28), (13.29) набудуть вигляду

$$S_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (13.31)$$

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} S_1(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (13.32)$$

При  $\tau = 0$  отримуємо формулу для обчислення дисперсії

$$D = K(0) = \int_0^{\infty} S_1(\omega) \tau d\omega. \quad (13.33)$$

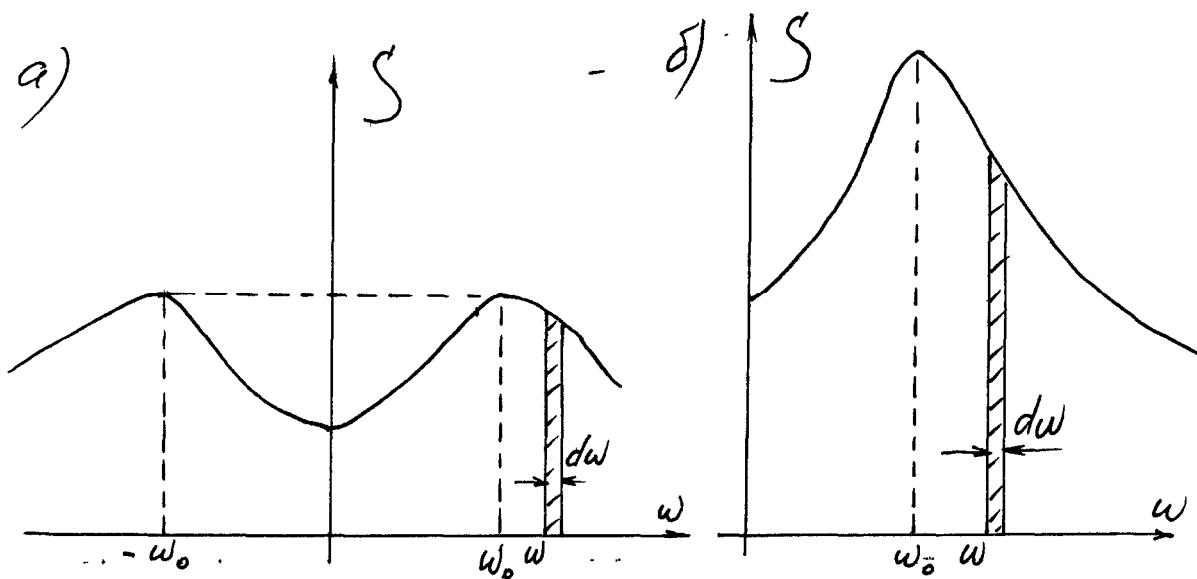


Рис. 13.1. Спектральна щільність дійсної стаціонарної випадкової функції

Один з можливих варіантів графіків функцій  $S(\omega), S_1(\omega)$  для дійсної стаціонарної випадкової функції зображено на рис. 13.1. На графіках можна спостерігати збільшення значущості частот  $\omega$  при зміні  $\omega$  від 0 до  $\omega_0$ , зменшення їх значущості з збільшенням  $\omega$  від  $\omega_0$  до  $\infty$ . Частота  $\omega_0$ , в якій спектральна щільність набуває максимуму, є найважливішою. Площі фігур між кривими  $S = S(\omega), S = S_1(\omega)$  та віссю  $\omega$  на підставі формул (13.24), (13.33) дорівнюють дисперсії випадкової функції  $\xi(t)$ . Якщо взяти, наприклад, на рис. 13.1а нескінченно малий інтервал частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ , то площа нескінченно малого прямокутника з основою  $d\omega$  й висотою  $S(\omega)$  (заштриховано на рис.) дорівнює нескінченно малому елементові дисперсії,  $dD = S(\omega)d\omega$ , звідки

$$S(\omega) = \frac{dD}{d\omega}.$$

Ми доходимо простого тлумачення спектральної щільності як щільно-сті роз-поділу дисперсії по частотах неперервного спектра. Аналогічну обставину можна углядіти з рис. 13.1б.

Приклад 13.5. Чи може функція

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{D_0}{\pi\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0,$$

бути спектральною щільністю дійсної стаціонарної випадкової функції? Як-що так, знайти кореляційну функцію й дисперсію останньої.

Розв'язання.  $S(\omega)$  - додатна парна функція. На підставі прикладу 13.2

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2\sqrt{D_0} e^{-\alpha\tau^2},$$

зокрема при  $\tau = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = 2\sqrt{D_0} < \infty.$$

Отже, функція  $S(\omega)$  інтегровна на інтервалі  $(-\infty, \infty)$  і може бути спектральною щільністю. За формулами (13.23), (13.24)

$$K(\tau) = 2\sqrt{D_0}e^{-\alpha\tau^2}, \quad D = K(0) = 2\sqrt{D_0}.$$

Часто-густо послуговуються нормованою спектральною щільністю

$$s(\omega) = \frac{S(\omega)}{D}, \quad (13.34)$$

котра з нормованою кореляційною функцією

$$r(\tau) = \frac{K(\tau)}{D}$$

(див. п. 8.1) пов'язана такими ж формулами, що й  $S(\omega), K(\tau)$ ,

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (13.35)$$

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (13.36)$$

В разі дійсності випадкової функції  $\xi(t)$

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (13.37)$$

$$r(\tau) = 2 \int_0^{\infty} s(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (13.38)$$

Якщо за спектральну щільність береться функція  $S_1(\omega)$ , визначена формулою (13.30), то замість формул (13.34), (13.37), (13.38) послуговуються наступними

$$s_1(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{D} = \begin{cases} 2s(\omega), & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases} \quad (13.39)$$

$$s_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (13.40)$$

$$r(\tau) = \int_0^{\infty} s_1(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (13.41)$$

Приклад 13.6. Нормована кореляційна функція стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$  дорівнює

$$r(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} & \text{при } |\tau| \leq \tau_0, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_0 > 0. \end{cases}$$

Знайти нормовану спектральну щільність  $s_1(\omega)$ .

Розв'язання. Користуючись формулою (13.41) та результатом обчислень прикладу 13.1, отримуємо

$$s_1(\omega) = \frac{2(1 - \cos \omega \tau_0)}{\pi \tau_0 \omega^2} = \frac{4 \sin^2 \frac{\omega \tau_0}{2}}{\pi \tau_0 \omega^2}.$$

Графік функції  $s_1(\omega)$  зображено на рис. 13.2 б. Тут

$$s_1(+0) = \lim_{\omega \rightarrow +0} s_1(\omega) = \left| \sin \frac{\omega \tau_0}{2} \approx \frac{\omega \tau_0}{2} \right| = \lim_{\omega \rightarrow +0} \frac{4 \left( \frac{\omega \tau_0}{2} \right)^2}{\pi \tau_0 \omega^2} = \frac{\tau_0}{\pi}.$$

$s_1(\omega)$  анулюється в точках  $\omega_{2n} = \frac{\pi}{\tau_0} \cdot 2n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в точках  $\omega_{2n+1} = \frac{\pi}{\tau_0} (2n + 1)$ ,

$n = 1, 2, \dots$ , має локальні максимуми, які дорівнюють

$$\frac{4}{\pi \tau_0 \omega_{2n+1}^2} = \frac{4}{\pi^3 (2n + 1)^2}$$

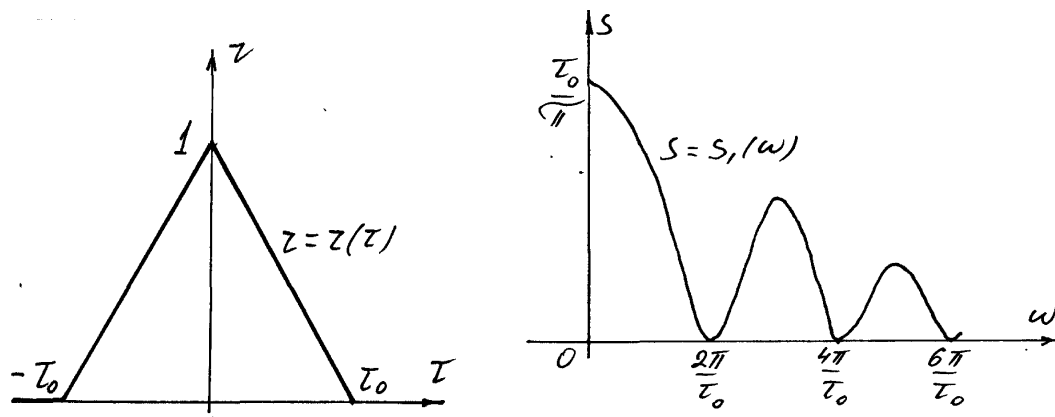


Рис. 13.2. До прикладу 13.6

і швидко зменшуються з зростанням  $n$  (при фіксованому  $\tau_0$ ). Якщо вважати  $s_1(0) = s_1(+0)$ , то  $s_1(\omega)$  має при  $\omega = 0$  абсолютний максимум  $\tau_0/\pi$ , який прямує

до  $\infty$  при  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Площа фігури, обмеженої кривою  $s = s_1(\omega)$  та віссю  $\omega$ , дорівнює одиниці, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} s_1(\omega) d\omega = r(0) = 1.$$

При  $\tau_0 \rightarrow \infty$  крива  $s = s_1(\omega)$  необмежено стискується вздовж осі  $\omega$ , а та її частина, що відповідає  $\omega \in (0, 2\pi/\tau_0)$  необмежено витягується вздовж осі  $s$ . Нормована кореляційна функція  $r(\tau)$  при цьому прямує до одиниці.

Можна сказати, що як границю при  $\tau_0 \rightarrow \infty$  маємо випадкову функцію з спектральною щільністю  $s_1(\omega) = \delta(\omega)$  та нормованою кореляційною функцією  $r(\tau) = \text{const} = 1$ . Припустимим є ще таке тлумачення: при  $\tau_0 \rightarrow \infty$  випадкова функція перетворюється в звичайну випадкову величину, а спектр  $s_1(\omega)$  стає дискретним з однією єдиною частотою  $\omega = 0$ .

### 13.2.3. Стаціонарний білий шум.

Стаціонарним ми в п. 10.6 назвали білий шум з сталою інтенсивністю  $A$ , тобто випадкову функцію  $\tilde{\xi}(t)$  з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією

$$K_{\tilde{\xi}}(\tau) = A\delta(\tau).$$

Спектральна щільність білого шуму є сталою величиною,

$$S_{\tilde{\xi}}(\omega) = c = \frac{A}{2\pi}, \quad A = 2\pi c,$$

що впливає з формул (13.22), (10.7).

Можна було б поставити задачу про знаходження кореляційної функції стаціонарної центрованої випадкової функції з сталою спектральною щільністю  $c$ . Тоді за формулами (13.23), (13.14) мали б

$$K_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} c e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi c \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi c \delta(\tau).$$

Отже, стаціонарний білий шум має кореляційну функцію

$$K_{\xi}(\tau) = A\delta(\tau) = 2\pi c\delta(\tau) \quad (13.42)$$

з сталою інтенсивністю  $A = 2\pi c$  та сталою спектральною щільністю

$$S_{\xi}(\omega) = c = \frac{A}{2\pi}, \quad A = 2\pi c, \quad (13.43)$$

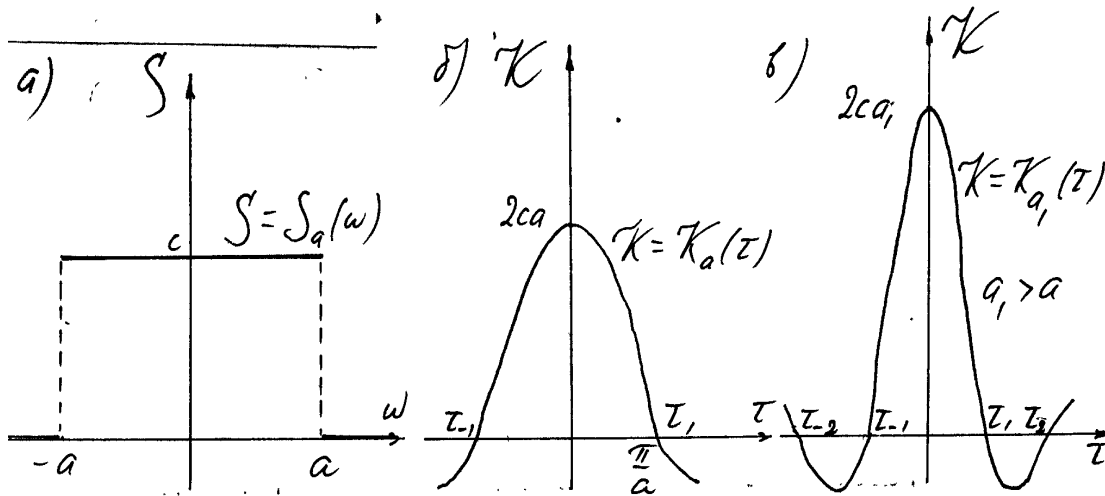


Рис. 13.3. До поняття стаціонарного білого шуму

Остання формула свідчить, що в спектрі білого шуму (його часто називають білим спектром) всі частоти цілком рівноправні, і цим він нагадує біле світло, де спектральний склад приблизно однорідний. Формула (13.42) (як і раніше (10.43)) свідчить про некорельованість різних (при  $\tau = t_2 - t_1 \neq 0$ ) перерізів (ординат) білого шуму (здебільшого вони просто незалежні), а також про нескінченність його дисперсії. Фізичні процеси подібного гатунку вперше привернули до себе увагу в радіотехніці, де їх наявність спричиняє виникнення паразитних шумів в лініях радіопередач. Саме цими причинами зумовлений дещо дивний термін "білий шум".

Реально білого шуму не існує. Про це свідчить, по-перше, наявність  $\delta$ -функції в формулі (13.42) для кореляційної функції. По-друге, реальні фізичні процеси ніколи не мають нескінченної дисперсії. Поняття білого шуму - це

вдала абстракція для випадкової функції, спектральна щільність якої на доволі великому інтервалі частот є сталою або неістотно відрізняється від сталої. Таку функцію звичайно й вважають наближено білим шумом. Можливі й інші висловлювання на кшталт: властивості випадкової функції близькі до властивостей білого шуму, функція "поводить себе" як білий шум. Ми розглянемо це питання докладніше.

Нехай  $\xi_a(t)$  - випадкова функція з спектральною щільністю

$$S_a(\omega) = \begin{cases} c, & |\omega| < a, \quad a > 0, \\ 0, & |\omega| > a \end{cases}$$

(рис. 13.3 а). Її кореляційна функція дорівнює

$$K_a(\tau) = \begin{cases} \frac{2c \sin a\tau}{\tau}, & \tau \neq 0, \\ 2ac, & \tau = 0 \end{cases}$$

(рис. 13.3 б), бо при  $\tau \neq 0$  за формулою (13.23)

$$K_a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = c \int_{-a}^a e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{c}{i\tau} (e^{ia\tau} - e^{-ia\tau}) = \frac{2c \sin a\tau}{\tau},$$

а при  $\tau = 0$  можна покласти

$$K_a(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} K_a(\tau) = 2c \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin a\tau}{\tau} = |\sin a\tau \approx a\tau| = 2ac.$$

Нехай тепер  $a$  необмежено зростає. Функція  $\xi_a(t)$  прямуватиме до білого шуму з сталою спектральною щільністю  $c$ , а її кореляційна функція – до  $2\pi c \delta(\tau)$ .

Пересвідчимося в прямуванні  $K_a(\tau)$  до  $2\pi c \delta(\tau)$ . Якщо  $\tau = 0$ , то маємо  $\lim_{a \rightarrow \infty} K_a(0) = \infty$ . При  $\tau \rightarrow \pm\infty$  і будь-якому фіксованому  $a$   $K_a(\tau)$  прямує до нуля.

$K_a(\tau)$  анулюється в точках  $\tau_n = \frac{\pi}{a}n$ , які при  $a \rightarrow \infty$  швидко рухаються в напрямку початку координат. Все це означає, що при  $a \rightarrow \infty$  графік кореляційної функції  $K_a(\tau)$ : а) стискується вздовж осі  $\tau$  в напрямку осі  $K$ ; б) частиною, яка приходиться на інтервал  $(\tau_{-1}, \tau_1)$ , притискується до осі  $K$ , одно-

часно витягуючись вздовж неї; в) необмежено притискується до осі  $\tau$  для точок, що лежать поза будь-якого малого околу точки  $\tau = 0$ . Зважаючи, крім того, на те, що на підставі формули (13.22)

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_a(\tau) d\tau = 2\pi S_a(0) = 2\pi c,$$

висновуємо, що функція

$$\delta_a(\tau) = \frac{1}{2\pi c} K_a(\tau)$$

при  $a \rightarrow \infty$  прямує до  $\delta$ -функції  $\delta(\tau)$ , а отже  $K_a(\tau)$  - до  $2\pi c\delta(\tau)$ , що й стверджувалося.

### 13.2.4. Інтегральне зображення стаціонарної випадкової функції

За допомоги стаціонарного білого шуму можна дістати інтегральне зображення стаціонарної випадкової функції. З цією метою перепишемо формулу (13.23), яка зображає кореляційну функцію  $K(\tau)$  інтегралом від спектральної щільності  $S(\omega)$ , таким чином

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega\tau_1} e^{i\omega\tau_2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau_1} e^{i\omega\tau_2} d\omega. \quad (13.44)$$

Отримуємо інтегральне зображення кореляційної функції, яке збігається з зображенням (11.29), якщо покласти

$$G(\omega) = S(\omega), \quad x(t, \omega) = e^{i\omega t}, \quad a = -\infty, \quad b = \infty.$$

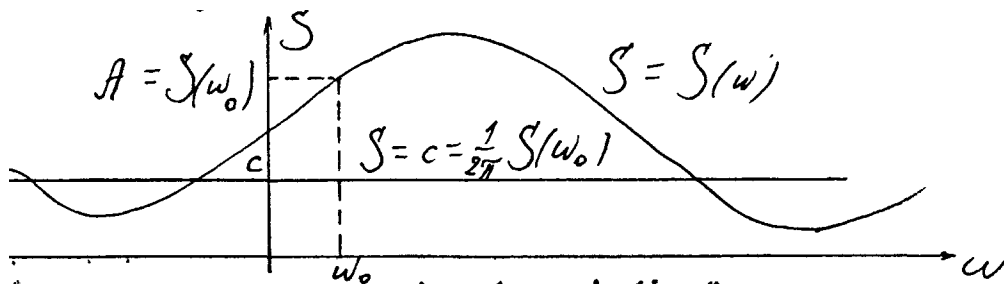


Рис. 13.4. Спектральна щільність і білий шум



Згідно з сказаним в п. 11.2 необхідною й достатньою умовою існування інтегрального зображення (11.29) кореляційної функції є існування інтегрального зображення (11.28) випадкової функції. Звідси випливає, що інтегральне зображення (13.44) кореляційної функції стаціонарної випадкової функції є можливим за й лише за умови існування інтегрального зображення самої функції

$$\xi(t) = m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (13.45)$$

Тут  $\tilde{\xi}(t)$  - білий шум з інтенсивністю  $S(\omega)$ , сталою для будь-якого конкретного значення  $\omega$ . Отже, кожній частоті  $\omega_0$  відповідає стаціонарний білий шум  $\tilde{\xi}$  з сталими інтенсивністю  $A = S(\omega_0)$  та спектральною щільністю  $c = \frac{1}{2\pi} S(\omega_0)$  (рис. 13.4). Формули (13.44) та (13.45) є результатами підсумовування "дій" всіх таких білих шумів.

### 13.2.5. Поняття про інтеграл Стільтєса.

Нехай на відрізку  $[a, b]$  задано дві обмежені функції  $f(x)$  та  $g(x)$ . Виконуючи розбиття відрізка точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad (13.46)$$

на неперетинні частини  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  та беручи на кожній частині по точці  $\bar{x}_k$ , утворимо інтегральну суму

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \Delta g(x_k), \quad \Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1}).$$

Границя її при прямуванні до нуля величини  $\lambda = \max_k \Delta x_k$ ,  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  називається інтегралом Стільтєса функції  $f(x)$  по функції  $g(x)$  і позначається

$$\int_a^b f(x)dg(x) = (S)\int_a^b f(x)dg(x) = \mathcal{S}_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma. \quad (13.47)$$

Інтеграл (13.47) ввів у вжиток нідерландський математик Томас Йоаннес Стілтєс (1856 - 1894). При  $g(x) = x$  інтеграл Стілтєса збігається з звичайним визначеним інтегралом, або інтегралом Рімана, на ім'я відомого німецького математика Георга Фрідріха Бернгарда Рімана (1826 - 1866).

Теорема 13.5. Якщо на відрізку  $[a, b]$  функція  $f(x)$  неперервна, а  $g(x)$  монотонна (або може бути зображеною як різниця двох монотонних функцій), то інтеграл (13.47) існує.

Інтеграл Стілтєса має властивості лінійності по обох функціях  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))dg(x) &= C_1 \int_a^b f_1(x)dg(x) + C_2 \int_a^b f_2(x)dg(x), \\ \int_a^b f(x)d(C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)) &= C_1 \int_a^b f(x)dg_1(x) + C_2 \int_a^b f(x)dg_2(x), \end{aligned}$$

а також властивість адитивності по відрізку  $[a, b]$ ,

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x),$$

якщо  $c \in (a, b)$  і існує інтеграл ліворуч (цікаво, що існування обох (!) інтегралів правої частини не забезпечує, взагалі кажучи, існування інтеграла лівої).

Теорема 13.6. Якщо в умовах теореми 13.5 похідна  $g'(x)$  абсолютно інтегровна, то

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Приклад 13.7. Вздовж відрізка  $[a, b]$  осі  $Ox$  розміщено маси, які як зосереджені в окремих точках, так і розподілені неперервно. Знайти статичний момент і момент інерції цих мас відносно початку координат.

Розв'язання. Нехай  $g(x)$  - сума всіх мас, які розташовані на відрізку  $[a, x]$ . Очевидно, функція  $g(x)$  не спадає. Вчиняючи розбиття (13.46) відрізка  $[a, b]$  та враховуючи, що на проміжках  $[x_0, x_1], (x_{k-1}, x_k], k = \overline{2, n}$  зосереджені маси  $\Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1}), k = \overline{1, n}$ , знаходимо наближені значення моментів, які нас цікавлять, спочатку для проміжків  $[x_0, x_1], (x_{k-1}, x_k], k = \overline{2, n}$ , а відтак і для всього відрізка  $[a, b]$

$$\begin{aligned} \Delta K_{O,k} &\cong \overline{x_k} \Delta g(x_k), & \Delta J_{O,k} &\cong \overline{x_k}^2 \Delta g(x_k), \\ K_O &\cong \sigma_1 = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} \Delta g(x_k), & J_O &\cong \sigma_2 = \sum_{k=1}^n \overline{x_k}^2 \Delta g(x_k). \end{aligned}$$

Нарешті,

$$K_O = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_1 = \int_a^b x dg(x), \quad J_O = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_2 = \int_a^b x^2 dg(x).$$

Обидва інтеграли, з огляду на теорему 13.5, існують.

Щойно йшлося про інтеграл Стільтєса на скінченному відрізку. Граничним переходом можна визначити інтеграл на нескінченному інтервалі, наприклад,

$$\int_a^{\infty} f(x) dg(x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dg(x).$$

### 13.2.6. Спектральний розклад стаціонарної випадкової функції.

Наявність інтеграла Стільтєса дозволяє отримати інтегральне зображення стаціонарної випадкової функції, відмінне від (13.45).

Повернімось спочатку до спектрального розкладу (12.9) стаціонарної випадкової функції, визначеної на скінченному проміжку  $[0, l]$  по гармоніках

$e^{i\omega_n t}$  з комплексними амплітудами  $U_n$  - центрованими парами некорельованими випадковими величинами. Дискретний спектр дисперсій  $d_n = d(\omega_n) = D(U_n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , визначається формулою (12.7), а сума ряду з членами - дисперсіями  $d_n$  дорівнює, відповідно формулі (12.10), дисперсії  $D$  випадкової функції.

Припустимо, що кількість частот  $\omega_n$  і, відповідно, комплексних амплітуд  $U_n$  необмежено збільшується, а дискретний спектр, без зміни сумарної дисперсії, наближається до неперервного. Питається, до чого тоді прямуватиме розклад (12.9) ?

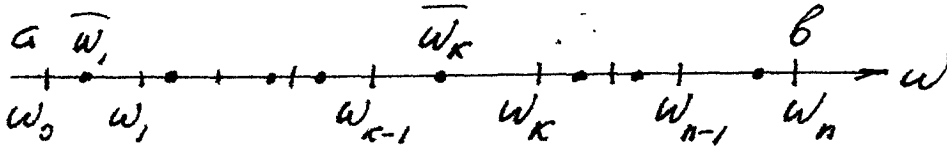


Рис. 13.5. Розбиття відрізка частотної осі

Візьмемо скінченний відрізок  $[a, b]$  частотної осі  $\omega$  і розіб'ємо його на неперетинні проміжки  $[\omega_0, \omega_1]$ ,  $[\omega_1, \omega_2]$ ,  $[\omega_2, \omega_3]$ , ...,  $[\omega_{n-1}, \omega_n]$ . Введемо випадкову величину  $g(\omega)$  - суму всіх амплітуд, які припадають на відрізок  $[a, \omega]$ , тоді сума всіх амплітуд на частковому проміжку  $[\omega_{k-1}, \omega_k]$  дорівнює  $\Delta g(\omega_k) = g(\omega_k) - g(\omega_{k-1})$ . За сенсом розкладу (12.9) випадкові величини  $\Delta g(\omega_k)$  є центрованими ( $M(\Delta g(\omega_k)) = 0$ , а отже  $M(g(\omega))$ ), а для різних проміжків - парами некорельованими, тобто  $M(\overline{\Delta g(\omega_k) \Delta g(\omega_l)}) = 0$  при  $k \neq l$ .

Вважатимемо частоти на кожному інтервалі приблизно рівними й рівними якійсь одній частоті ( $\bar{\omega}_k$  на  $k$ -му проміжку). В такому разі частина спектрального розкладу (12.9), що відповідає відріжку  $[a, b]$ , може бути наближено замінена сумою

$$\sigma_{[a,b]} = \sum_{k=1}^n e^{i\bar{\omega}_k t} \Delta g(\omega_k),$$

яка, очевидно, є інтегральною для інтеграла Стілтєса від гармоніки  $e^{i\omega t}$  по функції  $g(\omega)$  на  $[a, b]$ .

Уявімо, нарешті, граничний перехід (в с.к.), коли  $\lambda = \max_k \Delta\omega_k$  прямує до нуля,  $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$ , а дискретний спектр переходить в неперервний. Мабуть, ми маємо підстави очікувати на появу результату

$$\xi(t) = m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dg(\omega) \quad (13.48)$$

за додаткових умов  $M(g(\omega)) = 0, M(\overline{dg(\omega_1)} dg(\omega)) = 0$  при  $\omega_1 \neq \omega$ . І дійсно, як доводиться в більш ґрунтовних курсах теорії випадкових функцій, розклад (13.48), за основної умови (13.21), є справедливим. Він відіграє фундаментальну роль в сучасній теорії випадкових функцій і називається спектральним розкладом стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$ . Під  $g(\omega)$  тут розуміється деяка центрована випадкова функція, диференціали котрої задовольняють умову

$$M(\overline{dg(\omega_1)} dg(\omega)) = S(\omega) \delta(\omega - \omega_1) d\omega d\omega_1. \quad (13.49)$$

Між спектральним розкладом (13.48) і виведеним в п. 13.2.4 розкладом (13.45) існує найтісніший зв'язок. Це видно хоча б з того, що випадкові функції  $\tilde{\xi}(\omega) d\omega$  в (13.45) і  $dg(\omega)$  в (13.48) мають одну й ту ж кореляційну функцію, а саме  $S(\omega) \delta(\omega - \omega_1) d\omega d\omega_1$ . Перевірте!

Приклад 13.8. Вивести з спектрального розкладу (13.48) стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$  спектральний розклад (13.23) її кореляційної функції.

Розв'язання. Для будь-якого  $t$

$$\begin{aligned} K(\tau) &= M\left(\overline{\xi(t)} \xi(t+\tau)\right) = M\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dg(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1(t+\tau)} dg(\omega_1)\right) = \\ &= M\left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{i\omega t} dg(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1(t+\tau)} dg(\omega_1)\right) = M\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{i\omega_1(t+\tau)} \overline{dg(\omega)} dg(\omega_1)\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{i\omega_1(t+\tau)} M(\overline{dg(\omega)} dg(\omega_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{i\omega_1(t+\tau)} S(\omega) \delta(\omega - \omega_1) d\omega d\omega_1 = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1(t+\tau)} \delta(\omega - \omega_1) d\omega_1 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t} e^{i\omega(t+\tau)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

що й вимагалось. При перетвореннях ми скористалися спектральним розкладом (13.48) центрованої випадкової функції  $\xi(t)$ , замінили добуток інтегралів подвійним інтегралом, внесли математичне сподівання під знак інтеграла, застосували формулу (13.49), а по поданні подвійного інтеграла повторним - формулу (10.11).

### 13.2.7. Наступні приклади

Приклад 13. 9. Нехай стаціонарна випадкова функція  $\xi(t)$  має кореляційну функцію

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0. \quad (13.50)$$

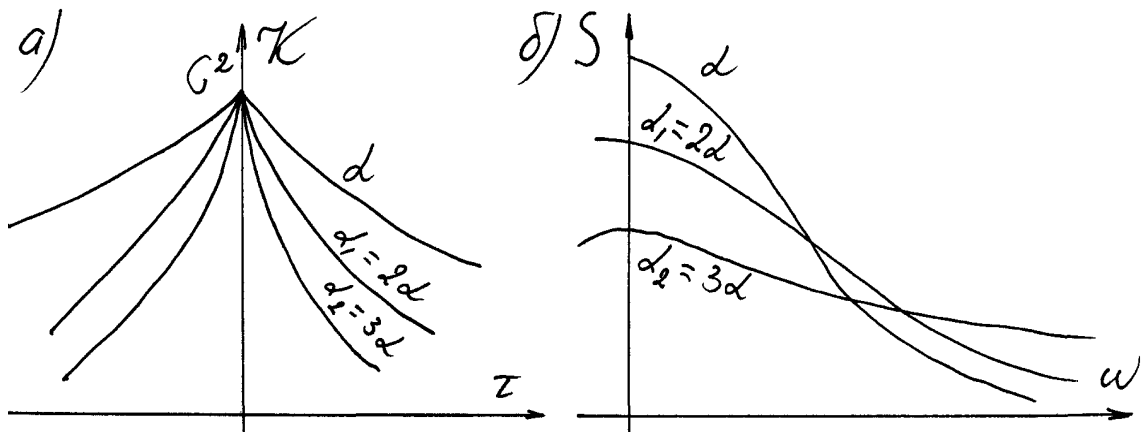


Рис. 13.6. До прикладу 13.9

Тут  $\sigma^2 = K(0) = D$  - дисперсія, а параметр  $\alpha$  характеризує швидкість послаблення кореляційного зв'язку між перерізами  $\xi(t_1), \xi(t_2)$  випадкової функції при зростанні змінної  $\tau = t_2 - t_1$ , тобто при віддаленні перерізів один від одного. Графік функції  $K(\tau)$  (рис. 13.6 а) має кут в точці  $(0, \sigma^2)$ , що відповідає

відсутності похідної  $K'(0)$  і, отже, недиференційовності випадкової функції (див. приклад 8.14). Спектральну щільність  $S(\omega)$  знаходимо по формулі (13.22)

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left( \frac{1}{\alpha-i\omega} e^{(\alpha-i\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{\alpha+i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left( \frac{1}{\alpha-i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega} \right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 - (i\omega)^2} = \frac{\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Остаточно

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (13.51)$$

(рис. 13.6 б). Функція  $S(\omega)$  має максимум  $\frac{\sigma^2}{\pi\alpha}$  при  $\omega = 0$ , котрий прямує до нескінченності при  $\alpha \rightarrow 0$  і до нуля при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

При відшуканні спектральної щільності ми мимохідь дійшли формули

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau} d\tau = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (13.52)$$

яка знадобиться нам нижче.

Проаналізуємо поведінку функцій  $K(\tau), S(\omega)$  зі зміною параметра  $\alpha$ , обмежуючись невід'ємними значеннями  $\tau, \omega$  (нагадаємо, що  $K(\tau), S(\omega)$  парні).

Якщо  $\alpha \rightarrow 0$ , спадання кореляційної функції сповільнюється, і кореляційний зв'язок між різними перерізами випадкової функції збільшується. Графік кореляційної функції наближається до прямої  $K = \sigma^2$ , а графік спектральної щільності при  $\omega = 0$  наближається до осі  $\omega$  ( $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S(\omega) = 0$  при будь-якому  $\omega \neq 0$ ), одночасно витягуючись вздовж осі  $S$ ,

$$\max S(\omega) = S(0) = \frac{\sigma^2}{\pi\alpha} \rightarrow \infty.$$

В спектрі випадкової функції посилюється роль низьких частот. Кінець кінцем випадкова функція вироджується в випадкову величину, яка має дискретний

спектр з однією частотою  $\omega = 0$ , графік її кореляційної функції збігається з прямою  $K = \sigma^2$ , а нормована спектральна щільність  $s(\omega) = S(\omega)/D$  перетворюється в  $\delta$ -функцію  $\delta(\omega)$ . В останньому можна впевнитись суто формально: якщо  $K(\tau) = \text{const} = \sigma^2$ , то за формулами (13.22) та (13.14)

$$s(\omega) = \frac{S(\omega)}{\sigma^2} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-i\omega\tau} d\tau = \left| \tau = -\tau_1 \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau_1} d\tau_1 = \delta(\omega).$$

Нехай тепер  $\alpha \rightarrow \infty$ . Спадання при ( $\tau > 0$ ) кореляційної функції підсилюється (див. на рис. 13.6 а випадки  $\alpha, \alpha_1 = 2\alpha, \alpha_2 = 3\alpha$ ), відповідно кореляційна залежність між різними перерізами випадкової функції послаблюється.

Графік спектральної щільності стає все більш пологим, максимум  $\frac{\sigma^2}{\pi\alpha}$  зменшується, а значення  $S(\omega)$  при  $\omega \neq 0$  збільшуються, оскільки площа фігури між віссю  $\omega$  та кривою  $S = S(\omega)$  весь час залишається сталою й рівною дисперсії  $D = \sigma^2$ . Тому при великих значеннях  $\alpha$  на досить широкому інтервалі  $(-a, a)$  значень  $\omega$  спектральну щільність можна наближено вважати сталою

$$S(\omega) \cong \text{const} = c = \frac{\sigma^2}{\pi\alpha},$$

а випадкову функцію  $\xi(t)$  як таку, що має властивості білого шуму.

Ми вважали дисперсію  $\sigma^2$  сталою. Нехай тепер  $\sigma^2$  прямує до нескінченності, але так, щоб (при  $\alpha \rightarrow \infty$ ) величина  $c = \frac{\sigma^2}{\pi\alpha}$  залишалася сталою. Внаслідок граничного переходу прийдемо до "чистого" білого шуму. Дійсно, в цьому випадку  $K(0) = \sigma^2 \rightarrow \infty, K(\tau) \rightarrow 0$  для будь-якого  $\tau \neq 0$ , а інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi c} K(\tau) d\tau = 1,$$

бо

$$\frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} d\tau = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} d\tau = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{\alpha}{\alpha} = 1.$$



Згідно з п. 10.1 це значить, що при  $\alpha \rightarrow \infty$  функція  $\frac{1}{2\pi\sigma}K(\tau)$  прямує до  $\delta(\tau)$ , а отже кореляційна функція  $K(\tau)$  - до  $2\pi\sigma\delta(\tau)$ , тобто до кореляційної функції стаціонарного білого шуму.

Частинними випадками розглянутої випадкової функції є функції, про які ми були говорили в п. 3.5, зокрема телеграфний сигнал ( $\alpha = 2\lambda$ ). При значній інтенсивності  $\lambda$  телеграфний сигнал виявляє властивості білого шуму.

Приклад 13.10. Розглянемо стаціонарну випадкову функцію з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0, \quad (13.53)$$

яка від (13.50) відрізняється множником  $\cos \beta\tau$ . Оскільки

$$\cos \beta\tau = \frac{1}{2}(e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}), \quad K(\tau) = \frac{1}{2}\sigma^2(e^{-\alpha|\tau|+i\beta\tau} + e^{-\alpha|\tau|-i\beta\tau}),$$

на підставі формули (13.22) маємо

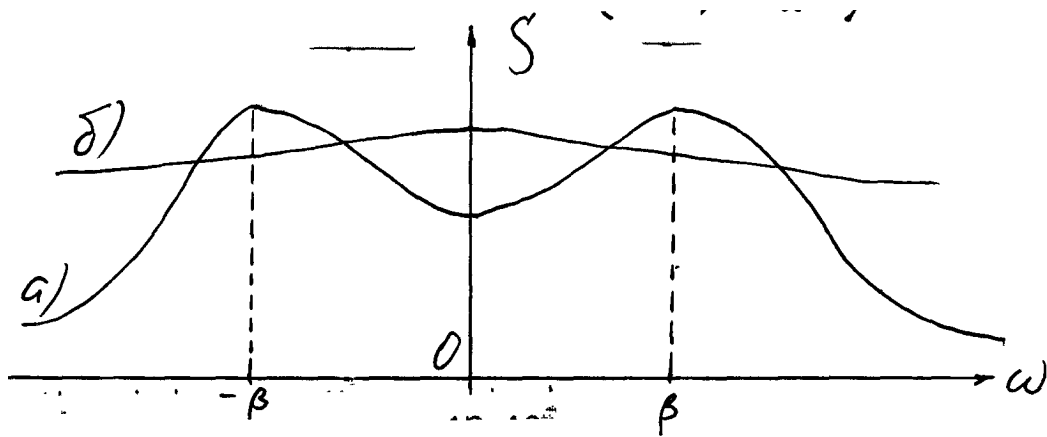


Рис. 13.7. До прикладу 13.10

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i(\omega-\beta)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i(\omega+\beta)\tau} d\tau \right),$$

а інтеграли обчислюються по формулі (13.52), якщо послідовно замінювати в ній  $\omega$  на  $\omega - \beta$  та  $\omega + \beta$ . Таким чином,

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left( \frac{\alpha}{(\omega - \beta)^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha}{(\omega + \beta)^2 + \alpha^2} \right) \quad (13.54)$$

Характер випадкової функції залежить, крім  $\sigma$ , ще від двох параметрів  $\alpha$  та  $\beta$ . Якщо значення  $\alpha$  достатньо малі, то в "поведінці" кореляційної функції переважають періодичні коливання з частотою  $\beta$ , перерізи випадкової функції, які взято через проміжки часу  $\tau = \frac{2\pi}{\beta}$ , визначають найбільше значення  $K(\tau)$  і тому пов'язані сильною кореляційною залежністю. Випадкова функція має реалізації, схожі на гармонічні коливання. Її спектральна щільність має найбільші значення в точках  $\omega = \pm\beta$  (рис. 13.7, крива а)), тобто в спектрі випадкової функції найбільш значущими є частоти, які є близькими до  $\omega = \pm\beta$ .

Якщо значення параметра  $\alpha$  достатньо великі, в поведінці кореляційної функції переважає спадання, і на доволі великому інтервалі частот  $(-a, a)$  значення спектральної щільності можна вважати майже одними й тими ж і рівними  $\frac{\sigma^2}{\pi\alpha}$  (рис. 13.7, крива б)), тобто випадкову функцію можна наближено вважати білим шумом.

Приклад 13.11. Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції має вигляд

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \alpha > 0. \quad (13.55)$$

Роль параметра  $\alpha$  тут така ж, як і в двох попередніх прикладах. Відношення параметрів  $\alpha/\beta$  визначає "ступінь нерегулярності" [4, с. 114] випадкової функції: при малих  $\alpha/\beta$  маємо випадкову функцію прикладу 13.10, при помітних значеннях  $\alpha/\beta$  картина ускладнюється, зокрема практично відсутня періодичність з частотою  $\beta$ . Спектральна щільність знаходиться таким же чином, як і в прикладах 13.9, 13.10. Вона дорівнює сумі двох виразів, один з яких дається формулою (13.54), а другий дорівнює

$$\frac{\alpha\sigma^2}{2\pi\beta} \left( \frac{\alpha - i\beta}{\omega^2 + (\alpha - i\beta)^2} - \frac{\alpha + i\beta}{\omega^2 + (\alpha + i\beta)^2} \right).$$

Після деяких перетворень отримуємо

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = \frac{2\sigma^2\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2} \quad (13.56)$$

Приклад 13.12. Спектральна щільність стаціонарної випадкової функції з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|), \quad \alpha > 0, \quad (13.57)$$

дорівнює

$$S(\omega) = \frac{2\alpha^3\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{1}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}. \quad (13.58)$$

Довести це нескладно, якщо в отриманих за допомогою формули (13.22) інтегралах

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^{-(\alpha-i\omega)\tau} (1 - \alpha\tau) d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} (1 + \alpha\tau) d\tau \right)$$

проінтегрувати частинами (в першому  $u = 1 - \alpha\tau$ , в другому  $u = 1 + \alpha\tau$ ).

До формул (13.57), (13.58) можна прийти інакше, а саме перейти в формулах (13.55), (13.56) до границі при  $\beta \rightarrow 0$ . Ще один спосіб подано в книзі [7, № 891].

Приклад 13.13. Доведіть, що спектральні щільності стаціонарних випадкових функцій з кореляційними функціями

$$K_1(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}, \quad K_2(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2} \cos \beta\tau$$

відповідно дорівнюють

$$S_1(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}, \quad S_2(\omega) = \frac{\sigma^2}{4\alpha\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{(\omega+\beta)^2}{4\alpha^2}} + e^{-\frac{(\omega-\beta)^2}{4\alpha^2}} \right).$$

Приклад 13.14. Відшукати спектральну щільність стаціонарної випадкової функції з кореляційною функцією вигляду

$$K(\tau) = P_n(p)\delta(\tau) = \sum_{k=0}^n a_k \delta^{(k)}(\tau) = a_n \delta^{(n)}(\tau) + a_{n-1} \delta^{(n-1)}(\tau) + \dots + a_1 \delta'(\tau) + a_0 \delta(\tau),$$

де  $a_k, k = \overline{0, n}$ , - сталі коефіцієнти.

Розв'язання. Якщо скористатись формулами (13.22) та (10.14), матимемо

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \delta^{(k)}(\tau) \right) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k \left( e^{-i\omega\tau} \right)^{(k)} \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k (-i\omega)^k = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k (i\omega)^k = \frac{1}{2\pi} P_n(i\omega). \end{aligned}$$

Але простіше зважити на результат прикладу 13.4, поклавши там  $t = \tau, t_0 = 0$ .

### 13.2.8. Спектральна щільність похідної від стаціонарної випадкової функції

Якщо  $S(\omega)$  - спектральна щільність диференційовної стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$ , то спектральна щільність її похідної  $\xi'(t)$  дорівнює

$$S_{\xi'}(\omega) = \omega^2 S(\omega). \quad (13.59)$$

Доведення формули (13.59) здійснимо декількома способами.

1-й спосіб заснований на формулі (13.22) та властивостях перетворення Фур'є. Якщо  $K(\tau)$  - кореляційна функція випадкової функції  $\xi(t)$ , то

$$S_{\xi'}(\omega) = F[K_{\xi'}(\tau)] = F[-K''(\tau)] = -(i\omega)^2 F[K(\tau)] = \omega^2 S(\omega).$$

2-й спосіб. Як доведено в п. 8.3, похідна  $\xi'(t)$  є стаціонарною випадковою функцією. Тому на підставі формули (13.23), з одного боку повинні мати

$$K_{\xi'}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi'}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega;$$

з іншого боку, після подвійного диференціювання по  $t$  під знаком інтеграла в формулі (13.23) (в припущенні законності такого диференціювання)

$$K_{\xi'}(\tau) = -K''(\tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^2 S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Порівнюючи обидва результати, з урахуванням єдиності зображення функції її інтегралом Фур'є, висновуємо, що

$$S_{\xi'}(\omega) = \omega^2 S(\omega).$$

Наступні два способи також потребують припущення про можливість диференціювання під знаком інтеграла.

3-й спосіб. Виходячи з інтегрального зображення (13.45) випадкової функції, обчислюємо спочатку її похідну,

$$\xi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) i\omega e^{i\omega t} d\omega.$$

Далі знаходимо кореляційну функцію похідної, для чого застосовуємо формули (11.28), (11.29) (при  $x(t, \omega) = i\omega e^{i\omega t}$ ,  $G(\omega) = S(\omega)$ ,  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ ). Маємо

$$\begin{aligned} K_{\xi'}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \overline{i\omega e^{i\omega t_1}} i\omega e^{i\omega t_2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) (-i\omega)(i\omega) e^{-i\omega t_1} e^{i\omega t_2} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega. \end{aligned}$$

З огляду на формулу (13.23) доходимо, як і вище, висновку про справедливість формули (13.59).

4-й спосіб аналогічний попередньому, тільки тут ми послуговуємось спектральним розкладом (13.48), а відтак формулами (11.8), (13.49), (10.12). Саме,

$$\begin{aligned} \xi'(t) &= \xi'^0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega t})'_t dg(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega t} dg(\omega), \\ K_{\xi'}(\tau) &= M\left(\overline{\xi'^0(t)} \xi'^0(t+\tau)\right) = M\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega t} dg(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega_1 e^{i\omega_1(t+\tau)} dg(\omega_1)\right) = \\ &= M\left(\int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) e^{-i\omega t} \overline{dg(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega_1 e^{i\omega_1(t+\tau)} dg(\omega_1)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\omega_1 e^{-i\omega t} e^{i\omega_1(t+\tau)} M(\overline{dg(\omega)} dg(\omega_1)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\omega_1 e^{-i\omega t} e^{i\omega_1(t+\tau)} S(\omega) \delta(\omega - \omega_1) d\omega d\omega_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1 e^{i\omega_1(t+\tau)} \delta(\omega - \omega_1) d\omega_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) e^{-i\omega t} e^{i\omega(t+\tau)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega, \quad S_{\xi'}(\omega) = \omega^2 S(\omega). \end{aligned}$$

Формулу (13.59) доведено. Зауважимо, що функція  $\omega^2 S(\omega)$ , як спектральна щільність, повинна бути інтегрованою на  $(-\infty, \infty)$  (фактично абсолютно, бо  $S(\omega) > 0$ ), тобто задовольняти умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) d\omega < \infty. \quad (13.60)$$

Нерівність (13.60) є необхідною умовою диференційовності стаціонарної випадкової функції. Деякі автори (наприклад, [4, с.103]) вважають її також достатньою умовою диференційовності. Як на наш погляд, беззаперечно погодитись з цим не можна. Дійсно, нерівність (13.60) спричиняє, згідно з теоремою 13.3, існування на  $(-\infty, \infty)$  похідних  $K'(\tau), K''(\tau)$  кореляційної функції  $K(\tau)$ , тобто виконання необхідної умови диференційовності  $\xi(t)$ . Але чи виконується при цьому достатня умова, тобто (див, теорему 5.5) чи існує границя

$$A = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{1}{h_1 h_2} (K(h_2 - h_1) - K(h_1) - K(h_2) + K(0)),$$

сказати без додаткових досліджень не можна. В тому частинному випадку, коли похідні  $K'(\tau), K''(\tau)$  неперервні на деякому інтервалі, похідна  $\xi'(t)$  існує й є неперервною (за теоремою 8.1), а границя  $A = K''(0)$ , проте тут нема потреби послуговуватись умовою (13.60).

І все ж умова (13.60), внаслідок простоти її перевірки, є корисною. По-перше, якщо вона не виконується, це свідчить про недиференційовність відповідної випадкової функції. В разі ж її виконання ми отримуємо вагомий аргумент на користь гіпотези про існування похідної.

Якщо стаціонарна випадкова функція має похідні порядку вище першого, то за допомоги формули (13.59) ми в змозі знайти їх спектральні щільності. Наприклад, в разі існування  $\xi''(t)$

$$S_{\xi'}(\omega) = \omega^2 S_{\xi''}(\omega) = \omega^2 (\omega^2 S(\omega)) = \omega^4 S(\omega).$$

Взагалі,

$$S_{\xi^{(n)}}(\omega) = \omega^{2n} S(\omega) \quad (13.61)$$

з відповідною необхідною умовою існування  $\xi^{(n)}(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} S(\omega) d\omega < \infty. \quad (13.62)$$

Приклад 13.15. Випадкові функції з прикладів 13.9, 13.10 (або ж прикладу 8.14) недиференційовні, бо для їхніх спектральних щільностей (13.50), (13.54) функції  $\omega^2 S(\omega)$  не є інтегровними на  $(-\infty, \infty)$ , прямуючи відповідно до  $\frac{\sigma^2}{\pi}, \frac{\sigma^2}{2\pi}$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . Як бачимо, міркування тут значно простіші від тих, які були використані в прикладі 8.14.

Приклад 13.16. Випадкові функції прикладів 13.11, 13.12 не мають похідних другого й вищих порядків, а перші похідні можуть мати (і дійсно мають, навіть неперервні, див. приклад 8.15), бо для них функції  $\omega^2 S(\omega)$  інтегровні на  $(-\infty, \infty)$ , а  $\omega^{2n} S(\omega)$  при  $n > 1$  - ні. Так, для спектральної щільності (13.56), очевидно,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\omega^2 S(\omega) \div \omega^{-2}) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^4 S(\omega) = \frac{2}{\pi} \sigma^2 \alpha (\alpha^2 + \beta^2),$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\omega^4 S(\omega) \div \omega^{-1}) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^5 S(\omega) = \infty.$$

Внаслідок збіжності інтеграла

$$\int_a^{\infty} \omega^{-2} d\omega, \quad a > 0,$$

і розбіжності інтеграла

$$\int_a^{\infty} \omega^{-1} d\omega, \quad a > 0$$

це означає інтегровність  $\omega^2 S(\omega)$  і неінтегровність  $\omega^4 S(\omega)$ .

Приклад 13.17. Випадкові функції прикладу 13.13 можуть бути (і є, див. приклад 8.15) нескінченно диференційовними, оскільки для них функції  $\omega^{2n} S(\omega)$  інтегровні на  $(-\infty, \infty)$  для будь-якого  $n$ . Ба більше, нам взагалі нема

потреби посилатися тут на результат прикладу 8.15. Справді, для будь-якого натурального  $n$  абсолютна збіжність на  $(-\infty, \infty)$  функції  $\omega^{2n+1}S(\omega)$  забезпечує, за теоремою 13.3, існування для всіх  $\tau$  похідних від кореляційної функції  $K(\tau)$  до порядку  $2n+1$ , а отже й їх неперервність до порядку  $2n$  включно. Згідно з теоремою 8.1 це означає існування неперервних похідних випадкової функції до  $n$ -го порядку, а через довільність  $n$  - довільного порядку.

На жаль, міркування на кшталт щойно наведених не можна застосувати до випадкових функцій прикладів 13.11, 13.12, оскільки тут функції  $\omega^3 S(\omega)$  на  $(-\infty, \infty)$  не інтегровні (інтеграли від них існують тільки в розумінні головного значення). Що ж стосується умови (13.60), то вона виявилася не тільки необхідною, але й достатньою для існування похідної першого порядку.

Цікаво було б віднайти клас стаціонарних випадкових функцій, стосовно яких умови (13.60), (13.62) є достатніми для існування похідної того чи іншого порядку.

### 13.2.9. Спектральна щільність лінійного диференціального оператора з сталими коефіцієнтами

Ми вже не раз мали нагоду зустрітися з лінійним диференціальним оператором

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= L[\xi(t)] = P_n(p)\xi(t) = \sum_{k=0}^n a_k \xi^{(k)}(t) = \\ &= a_n \xi^{(n)}(t) + a_{n-1} \xi^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \xi'(t) + a_0 \xi(t) \end{aligned} \quad (13.63)$$

з сталими коефіцієнтами від стаціонарної  $n$  разів диференційовної випадкової функції. Доведемо, що його спектральна щільність дорівнює

$$S_\zeta(\omega) = S_{P_n(p)\xi(t)}(\omega) = |P_n(i\omega)|^2 S(\omega), \quad (13.64)$$

тобто добуткові квадрата модуля значення многочлена



$$P_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

в точці  $i\omega$  на спектральну щільність  $S(\omega)$  вихідної випадкової функції  $\xi(t)$ .

Перший спосіб доведення є, мабуть, найпростішим. Згідно з формулою (11.25) кореляційна функція оператора (13.63) дорівнює

$$K_\zeta(\tau) = K_{P_n(p)\xi(t)}(\tau) = \sum_{k,l=0}^n (-1)^k \overline{a_k} a_l K^{(k+l)}(\tau).$$

Скористаємося тепер формулою (13.22), властивостями перетворення Фур'є та виконаємо деякі перетворення. Матимемо

$$\begin{aligned} S_\zeta(\omega) &= S_{P_n(p)\xi(t)}(\omega) = F \left[ \sum_{k,l=0}^n (-1)^k \overline{a_k} a_l K^{(k+l)}(\tau) \right] = \sum_{k,l=0}^n (-1)^k \overline{a_k} a_l F[K^{(k+l)}(\tau)] = \\ &= \sum_{k,l=0}^n (-1)^k \overline{a_k} a_l (i\omega)^{k+l} F[K(\tau)] = \left( \sum_{k,l=0}^n \overline{a_k} (-i\omega)^k a_l (i\omega)^l \right) S(\omega) = \\ &= \left( \sum_{k,l=0}^n \overline{a_k} (i\omega)^k a_l (i\omega)^l \right) S(\omega) = \left( \sum_{k=0}^n \overline{a_k} (i\omega)^k \cdot \sum_{l=0}^n a_l (i\omega)^l \right) S(\omega) = \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \overline{a_k} (i\omega)^k \cdot \sum_{l=0}^n a_l (i\omega)^l \right) S(\omega) = \overline{P_n(i\omega)} \cdot P_n(i\omega) S(\omega) = |P_n(i\omega)|^2 S(\omega), \end{aligned}$$

що й вимагалось.

Дамо ще два способи виведення формули (13.64). Один з них заснований на формулі (13.45), яка дає інтегральне зображення стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$  за допомоги білих шумів. В третьому способі використовується спектральний розклад (13.48) функції у вигляді інтеграла Стілт'єса. В припущенні законності диференціювання по  $t$  під знаком інтеграла знаходиться інтегральне зображення, а далі кореляційна функція оператора (13.63). Отриманий результат порівнюється з формулою

$$K_\zeta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (13.65)$$

аналогічною (13.23). Справедливість формули (13.64) спричиняється стаціонарністю випадкової функції  $\zeta(t) = P_n(p)\xi(t)$ .

Другий спосіб. Диференціюючи в формулі (13.45)  $n$  разів під знаком інтеграла, знайдемо інтегральні зображення похідних  $\xi^{(k)}(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , і підставимо їх, разом з зображенням (13.45) самої функції, в формулу (13.63),

$$\begin{array}{l|l} \xi(t) = m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega & a_0 \\ \xi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) i\omega e^{i\omega t} d\omega & a_1 \\ \xi''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) (i\omega)^2 e^{i\omega t} d\omega & a_2 \\ \dots & \dots \\ \xi^{(n-1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) (i\omega)^{n-1} e^{i\omega t} d\omega & a_{n-1} \\ \xi^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) (i\omega)^n e^{i\omega t} d\omega & a_n \end{array}$$

$$\zeta(t) = P_n(p)\xi(t) = a_0 m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) P_n(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (13.66)$$

Інтегральне зображення оператора (13.63) знайдено. Між іншим, звідси видно, що математичне сподівання оператора  $\zeta(t)$  дорівнює

$$m_\zeta = a_0 m_0 \quad (13.67)$$

Для відшукування кореляційної функції  $K_\zeta(\tau)$  скористаймося формулами (11.28), (11.29) при

$$a = -\infty, b = \infty, G(\omega) = S(\omega), x = P_n(i\omega) e^{i\omega t},$$

звідки

$$\begin{aligned} K_\zeta(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \overline{P_n(i\omega) e^{i\omega t_1}} P_n(i\omega) e^{i\omega t_2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \overline{P_n(i\omega)} P_n(i\omega) e^{-i\omega t_1} e^{i\omega t_2} d\omega, \\ K_\zeta(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} |P_n(i\omega)|^2 S(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega. \end{aligned} \quad (13.68)$$

Порівнюючи (13.65), (13.68), доходимо формули (13.64).

Третій спосіб. Згідно з формулою (13.48)

$$\begin{array}{l|l}
 \xi(t) = m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dg(\omega) & a_0 \\
 \xi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega t} dg(\omega) & a_1 \\
 \xi''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^2 e^{i\omega t} dg(\omega) & a_2 \\
 \dots & \dots \\
 \xi^{(n-1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^{n-1} e^{i\omega t} dg(\omega) & a_{n-1} \\
 \xi^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^n e^{i\omega t} dg(\omega) & a_n
 \end{array}$$

$$\zeta(t) = P_n(p)\xi(t) = a_0 m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} P_n(i\omega) e^{i\omega t} dg(\omega). \quad (13.69)$$

Далі

$$\begin{aligned}
 K_\zeta(\tau) &= M\left(\overline{\zeta(t)}\zeta(t+\tau)\right) = M\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} P_n(i\omega) e^{i\omega t} dg(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(i\omega_1) e^{i\omega_1(t+\tau)} dg(\omega_1)\right) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{P_n(i\omega)} e^{-i\omega t} P_n(i\omega_1) e^{i\omega_1(t+\tau)} M(dg(\omega) dg(\omega_1)) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{P_n(i\omega)} S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} P_n(i\omega_1) e^{i\omega_1(t+\tau)} \delta(\omega - \omega_1) d\omega_1 = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{P_n(i\omega)} P_n(i\omega) S(\omega) e^{-i\omega t} e^{i\omega(t+\tau)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |P_n(i\omega)|^2 S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.
 \end{aligned}$$

Знов прийшли до формули (13.68), а отже й до (13.64).

Приклад 13.18. Інтегральне зображення, спектральний розклад, спектральна щільність та кореляційна функція оператора першого порядку

$$\zeta(t) = a_1 \xi'(t) + a_0 \xi(t), \quad P_1(p) = a_1 p + a_0,$$

на підставі формул (13.66), (13.69), (13.64), (13.68) відповідно є

$$\zeta(t) = a_0 m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) (a_1 i\omega + a_0) e^{i\omega t} d\omega = a_0 m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} (a_1 i\omega + a_0) e^{i\omega t} dg(\omega),$$

$$S_\zeta(\omega) = |a_1 i\omega + a_0|^2 S(\omega) = (a_1^2 \omega^2 + a_0^2) S(\omega),$$

$$K_{\zeta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (a_1^2 \omega^2 + a_0^2) S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Приклад 13.19. Для оператора другого порядку аналогічно

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= a_2 \xi''(t) + a_1 \xi'(t) + a_0 \xi(t) = \\ &= a_0 m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) (a_0 - a_2 \omega^2 + a_1 i \omega) e^{i\omega t} d\omega = a_0 m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} (a_0 - a_2 \omega^2 + a_1 i \omega) e^{i\omega t} dg(\omega), \end{aligned}$$

$$S_{\zeta}(\omega) = |a_0 - a_2 \omega^2 + a_1 i \omega|^2 S(\omega) = ((a_0 - a_2 \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2) S(\omega),$$

$$K_{\zeta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} ((a_0 - a_2 \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2) S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Приклад 13.20. Знайти інтегральне зображення, спектральний розклад і характеристики лінійного диференціального оператора з змінними коефіцієнтами від стаціонарної випадкової функції  $\xi(t)$ ,

$$\zeta(t) = P_n(p, t) \xi(t) = a_n(t) \xi^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) \xi^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) \xi'(t) + a_0(t) \xi(t).$$

Тут запроваджено позначення

$$p = \frac{d}{dt}, \quad P_n(p, t) = a_n(t) p^n + a_{n-1}(t) p^{n-1} + \dots + a_1(t) p + a_0(t).$$

Вказівка. Розмірковуючи таким же чином, як при виведенні формули (13.66) з формул (13.45), (13.63) та формули (13.69) з формул (13.48), (13.63), отримаємо

$$\zeta(t) = P_n(p, t) \xi(t) = a_0 m_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) P_n(i\omega, t) e^{i\omega t} d\omega,$$

$$\zeta(t) = P_n(p, t) \xi(t) = a_0 m_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} P_n(i\omega, t) e^{i\omega t} dg(\omega),$$

$$m_{\zeta} = a_0(t) m_0.$$

Далі, наприклад, за формулами (11.28), (11.29) при

$$a = -\infty, b = \infty, G(\omega) = S(\omega), x(t, \omega) = P_n(i\omega, t) e^{i\omega t}$$

матимемо

$$K_{\zeta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \overline{P_n(i\omega, t_1)} P_n(i\omega, t_2) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

зокрема

$$D_{\zeta}(t) = K_{\zeta}(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |P_n(i\omega, t)|^2 d\omega.$$

Формули для обчислення характеристик оператора  $\zeta(t) = P_n(p, t)\xi(t)$  свідчать про його, взагалі кажучи, нестационарність.

## РОЗДІЛ 14

# СТАЦІОНАРНІ РОЗВ'ЯЗКИ СТІЙКИХ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

### 14.1. ВИПАДОК ДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ НА ВХОДІ.

Нехай маємо стійку лінійну динамічну систему, дія якої характеризується лінійним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами

$$\begin{aligned} a_n \eta^{(n)}(t) + a_{n-1} \eta^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \\ = b_m \xi^{(m)}(t) + b_{m-1} \xi^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t), \end{aligned} \quad (14.1)$$

або ж

$$P_n(p)\eta(t) = Q_m(p)\xi(t),$$

де, як і завжди,  $\xi(t)$  - стаціонарна, тут  $m$  разів диференційовна випадкова функція на вході системи,  $p = d/dt$ , а

$$\begin{aligned} P_n(p) &= a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0, \\ Q_m(p) &= b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0. \end{aligned}$$

Такі системи ми вже були розглядали (пп. 8.1, 8.4, приклади 8.5, 8.17).

Як нам відомо, розв'язок рівняння (14.1) для достатньо великих значень  $t$  є стаціонарним. Його математичне сподівання на підставі прикладу 8.19 дорівнює

$$m_\eta = \frac{b_0}{a_0} m_0, \quad m_0 = m_\xi, \quad (14.2)$$

і йдеться тільки про знаходження спектральної щільності  $S_\eta(\omega)$  та кореляційної функції  $K_\eta(\tau)$ . В розділах 7, 9 ми шукали кореляційну функцію, виходячи з формули для обчислення розв'язку  $\eta(t)$ . Знаючи його кореляційну функцію  $K_\eta(\tau)$ , ми можемо дістати спектральну щільність за формулою (13.22). В цьому

розділі ми запропонуємо зовсім інший підхід, який в ідейному плані виглядає значно простішим, ніж згаданий.

Беручи до уваги, що розв'язок  $\eta(t)$  рівняння (14.1) стаціонарний, знайдемо спектральні щільності лівої й правої частин рівняння. На підставі формули (13. 64)

$$|P_n(i\omega)|^2 S_\eta(\omega) = |Q_m(i\omega)|^2 S(\omega),$$

звідки

$$S_\eta(\omega) = \frac{|Q_m(i\omega)|^2}{|P_n(i\omega)|^2} S(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S(\omega), \quad (14.3)$$

де

$$\Phi(i\omega) = \frac{Q_m(i\omega)}{P_n(i\omega)} \quad (14.4)$$

частотна характеристика рівняння. Маючи спектральну щільність стаціонарного розв'язку, за формулами (13.23), (13.24) знаходимо його кореляційну функцію та дисперсію

$$K_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (14.5)$$

$$D_\eta = K_\eta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 S(\omega) d\omega. \quad (14.6)$$

Дисперсія  $D_\eta$ , характеризуючи величину відхилення реалізації випадкової функції  $\eta(t)$  від її математичного сподівання  $m_\eta$ , оцінює точність роботи динамічної системи і здебільшого становить більший інтерес, ніж кореляційна функція  $K_\eta(\tau)$ . До того ж і технічно обчислити інтеграл (14.6) для знаходження дисперсії набагато легше, ніж інтеграл (14.5).

Крім спектральної щільності та характеристик стаціонарного розв'язку рівняння (14.1) ми можемо знайти інтегральне зображення чи спектральний розклад самого розв'язку. Нехай спочатку

$$\xi(t) = m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (14.7)$$

інтегральне зображення (13.45) випадкової функції  $\xi(t)$ , де  $\tilde{\xi}(\omega)$  - білий шум з інтенсивністю  $S(\omega)$ . Формулу (14.5) для обчислення кореляційної функції ми записуємо у вигляді

$$K_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \overline{\Phi(i\omega) e^{i\omega t_1}} \Phi(i\omega) e^{i\omega t_2} d\omega,$$

звідки вбачаємо застосовність формул (11.28), (11.29), якщо покласти в них

$$a = -\infty, b = \infty, G(\omega) = S(\omega), x(t, \omega) = \Phi(i\omega) e^{i\omega t}.$$

Отримуємо інтегральне зображення розв'язку

$$\eta(t) = \frac{b_0}{a_0} m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega) \Phi(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (14.8)$$

Якщо ж випадкову функцію  $\xi(t)$  задано її спектральним розкладом (13.48)

$$\xi(t) = m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dg(\omega), \quad M(\overline{dg(\omega_1)} dg(\omega)) = S(\omega) \delta(\omega - \omega_1) d\omega d\omega_1, \quad (14.9)$$

то спектральний розклад стаціонарного розв'язку рівняння (14.1) дається формулою

$$\eta(t) = \frac{b_0}{a_0} m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega) e^{i\omega t} dg(\omega). \quad (14.10)$$

Для доведення достатньо знайти кореляційну функцію випадкової функції, визначеної формулою (14.10). Розмірковуючи таким же чином, як і в пп. 13.2.6, 8, 9, дістанемо

$$K_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 S(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega,$$

що збігається з формулою (14.5). Це означає, що функція (14.10) і стаціонарний розв'язок рівняння (14.1) мають одну й ту ж спектральну щільність. Тому вони збігаються на підставі єдиності спектрального розкладу стаціонарної випадкової функції.



Викладений метод дослідження рівняння (14.1) при всій його теоретичній привабливості часто-густо веде до вельми складних інтегралів. Особливо це стосується інтеграла для обчислення кореляційної функції, і тут може зарадити володіння теорією лишків, одним з розділів теорії функцій комплексної змінної.

Приклад 14.1. Знайти характеристики, інтегральне зображення і спектральний розклад стаціонарного розв'язку рівняння

$$a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t) \quad (14.11)$$

з сталими коефіцієнтами  $a_0, a_1, b_0, b_1$  ( $a_0 a_1 > 0$ ), якщо  $\xi(t)$  - стаціонарна (диференційовна) випадкова функція з математичним сподіванням  $m_0$  і кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|), \quad \alpha > 0.$$

Розв'язання. Математичне сподівання  $m_\eta$  дістаємо безпосередньо за формулою (14.2). Знаходячи далі спектральні щільності лівої та правої частин рівняння, маємо

$$|a_1 i\omega + a_0|^2 S_\eta(\omega) = |b_1 i\omega + b_0|^2 S(\omega),$$

звідки

$$\begin{aligned} S_\eta(\omega) &= \frac{|b_1 i\omega + b_0|^2}{|a_1 i\omega + a_0|^2} S(\omega) = \frac{b_1^2 \omega^2 + b_0^2}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2} \cdot \frac{2\alpha^3 \sigma^2}{\pi} \cdot \frac{1}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} = \\ &= \frac{2\alpha^3 \sigma^2}{\pi} \cdot \frac{b_1^2 \omega^2 + b_0^2}{(a_1^2 \omega^2 + a_0^2)(\alpha^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Спектральну щільність  $S(\omega)$  взято з формули (13. 58). Тепер

$$K_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{2\alpha^3 \sigma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_1^2 \omega^2 + b_0^2) e^{i\omega\tau}}{(a_1^2 \omega^2 + a_0^2)(\alpha^2 + \omega^2)^2} d\omega,$$

зокрема

$$D_\eta = K_\eta(0) = \frac{2\alpha^3 \sigma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_1^2 \omega^2 + b_0^2) d\omega}{(a_1^2 \omega^2 + a_0^2)(\alpha^2 + \omega^2)^2} = \frac{\sigma^2 (b_1^2 a_0 \alpha^2 + b_0^2 (a_0 + 2a_1 \alpha))}{a_0 (a_0 + a_1 \alpha)}.$$

Останній інтеграл обчислюється розкладанням підінтегральної функції в суму найпростіших дробів. На жаль, знаходження інтеграла для кореляційної

функції, якщо не володіти теорією лишків, пов'язане з значними складнощами. В прикладі 9.2 ми навели значення  $K_\eta(\tau)$ , яке було отримано з інших, ніж тут, міркувань.

Що стосується інтегрального зображення чи спектрального розкладу стаціонарного розв'язку  $\eta(t)$  рівняння (14.11) при відомих інтегральному зображенні (14.7) та спектральному розкладові (14.9) випадкової функції  $\xi(t)$  на вході, то згідно з формулами (14.4) та (14.8), (14.10) маємо

$$\Phi(\omega) = \frac{b_1 i \omega + b_0}{a_1 i \omega + a_0},$$

$$\eta(t) = \frac{b_0}{a_0} m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_1 i \omega + b_0}{a_1 i \omega + a_0} \tilde{\xi}(\omega) e^{i \omega t} d\omega.$$

Відповідно

$$\eta(t) = \frac{b_0}{a_0} m_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_1 i \omega + b_0}{a_1 i \omega + a_0} e^{i \omega t} dg(\omega).$$

## 14.2. ВИПАДОК НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ НА ВХОДІ.

Метод п. 14.1 незастосовний, якщо випадкова функція  $\xi(t)$  недиференційовна або має недостатню кількість похідних. Справді, ми, наприклад, не маємо права стверджувати, що спектральна щільність правої частини

$$Q_m(p)\xi(t)$$

рівняння (14.1) існує і при тому ж дорівнює

$$|Q_m(i\omega)|^2 S(\omega)$$

І все ж таки вимоги диференційовності  $\xi(t)$  саме до порядку  $m$  часто-густо можна позбутися. Справа в тому, що формули (14.3), (14.5) для обчислення спектральної щільності й кореляційної функції стаціонарного розв'язку  $\eta(t)$  рівняння (14.1) залишаються в силі за слабкішої умови. Такою умовою є інтегровність на  $(-\infty, \infty)$  функції  $|\Phi(i\omega)|^2 S(\omega)$ , тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|Q_m(i\omega)|^2}{|P_n(i\omega)|^2} S(\omega) d\omega < \infty. \quad (14.12)$$

З огляду на формулу (14.6) йдеться про скінченність дисперсії розв'язку рівняння.

Ми покажемо, що умова (14.12) є достатньою для випадку  $n \geq m$ , тобто якщо диференціальний оператор  $P_n(p)\eta(t)$  лівої частини рівняння (14.1) має не менший порядок, ніж оператор  $Q_m(p)\xi(t)$  правої.

Нехай спочатку  $n > m$ . Обмежимося для простоти випадком  $n = 2, m = 1$ , тобто рівнянням

$$P_2(p)\eta(t) \equiv a_2\eta''(t) + a_1\eta'(t) + a_0\eta(t) = b_1\xi'(t) + b_0\xi(t) \equiv Q_1(p)\xi(t), \quad (14.13)$$

В п. 9.4, виходячи з формули (9.23) та інтегруючи частинами, ми були вивели формулу (9.24) для знаходження розв'язку рівняння (14.13), вільну від похідних функції  $\xi(t)$ , а саме

$$\eta(t) = \int_0^{\infty} Q_1(p)\nu(t') \cdot \xi(t - t') dt',$$

Кореляційна функція розв'язку дорівнює

$$K_{\eta}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \overline{Q_1(p)\nu(t')} Q_1(p)\nu(t'') K(\tau + t' - t'') dt' dt'',$$

а оскільки за формулою (13.23)

$$K(\tau + t' - t'') = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega(\tau + t' - t'')} d\omega,$$

заміна кореляційної функції  $K(\tau + t' - t'')$  інтегралом і наступне змінення порядку інтегрування дають

$$\begin{aligned} K_{\eta}(\tau) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \overline{Q_1(p)\nu(t')} Q_1(p)\nu(t'') dt' dt'' \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega(\tau + t' - t'')} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \int_0^{\infty} \overline{Q_1(p)\nu(t')} \cdot e^{-i\omega t'} dt' \int_0^{\infty} Q_1(p)\nu(t'') \cdot e^{i\omega t''} dt'' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \int_0^{\infty} \overline{Q_1(p)\nu(t)} \cdot e^{-i\omega t} dt \int_0^{\infty} Q_1(p)\nu(t) \cdot e^{i\omega t} dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \left| \int_0^{\infty} Q_1(p) v(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \left| \int_0^{\infty} (b_1 v'(t) + b_0 v(t)) e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

По інтегруванню частинами

$$\int_0^{\infty} v'(t) e^{-i\omega t} dt = v(t) e^{-i\omega t} \Big|_0^{\infty} + i\omega \int_0^{\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt = \left. \begin{matrix} v(0) = 0 \\ v(\infty) = 0 \end{matrix} \right| = i\omega \int_0^{\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt$$

маємо

$$K_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left| (b_1 i\omega + b_0) \int_0^{\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left| Q_1(i\omega) \int_0^{\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 e^{i\omega\tau} d\omega$$

Інтеграл під знаком модуля на підставі формули (13. 20) дорівнює

$$\int_0^{\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{P_2(i\omega)} = \frac{1}{a_2(i\omega)^2 + a_1 i\omega + a_0}.$$

Врешті-решт отримуємо

$$K_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left| \frac{Q_1(i\omega)}{P_2(i\omega)} \right|^2 e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |\Phi(i\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Ми дійшли формули (14.5), інтеграл якої за умови (14.12) збігається.

Наслідком є справедливість формули (14. 3).

Ті ж формули (14.3), (14.5) дістаємо в випадку  $n = m$ . Наприклад, при  $n = m = 2$ , тобто якщо йдеться про рівняння

$$\begin{aligned} P_2(p)\eta(t) &\equiv a_2 \eta''(t) + a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \zeta(t), \\ \zeta(t) &= Q_2(p)\xi(t) \equiv b_2 \xi''(t) + b_1 \xi'(t) + b_0 \xi(t), \end{aligned}$$

можна скористатися формулою (9.25) для знаходження стаціонарного розв'язку

$$\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t) = \frac{b_2}{a_2} \xi(t) + \int_0^{\infty} Q_2(p) v(t') \cdot \xi(t - t') dt',$$

права частина якої внаслідок попередніх інтегрувань частинами не містить похідних від функції  $\xi(t)$ . Кореляційна функція розв'язку

$$K_{\eta}(\tau) = K_{\eta_1}(\tau) + K_{\eta_2}(\tau) + R_{\eta_1 \eta_2}(\tau) + R_{\eta_2 \eta_1}(\tau)$$

причому

$$K_{\eta_1}(\tau) = \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 K(\tau),$$

а три наступних доданки перетворюються за тим же принципом, що й у випадку  $n > m$ . Так,

$$\begin{aligned} R_{\eta_2}(\tau) &= \left(\overline{\frac{b_2}{a_2}}\right) \int_0^{\infty} Q_2(p)v(t') \cdot K(\tau - t') dt' = \left(\overline{\frac{b_2}{a_2}}\right) \int_0^{\infty} Q_2(p)v(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega(\tau-t')} d\omega = \\ &= \left(\overline{\frac{b_2}{a_2}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \int_0^{\infty} Q_2(p)v(t') e^{-i\omega t'} dt' = \left(\overline{\frac{b_2}{a_2}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{b_2}{a_2} + \Phi(i\omega)\right) S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= -\left|\frac{b_2}{a_2}\right|^2 K(\tau) + \left(\overline{\frac{b_2}{a_2}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \Phi(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

Тут (і нижче) використано результат

$$\int_0^{\infty} Q_2(p)v(t') e^{-i\omega t'} dt' = -\frac{b_2}{a_2} + \Phi(i\omega),$$

який впливає після інтегрувань частинами, врахування властивостей вагової функції

$$v'(0) = \frac{1}{a_2}, \quad v(0) = 0, \quad v(\infty) = v'(\infty) = 0$$

та послуговування формулою (13.20).

Аналогічно

$$R_{\eta_2\eta_1}(\tau) = -\left|\frac{b_2}{a_2}\right|^2 K(\tau) + \frac{b_2}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \overline{\Phi(i\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Нарешті,

$$\begin{aligned} K_{\eta_2}(\tau) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \overline{Q_2(p)v(t')} Q_2(p)v(t'') K(\tau + t' - t'') dt' dt'' = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \overline{Q_2(p)v(t')} Q_2(p)v(t'') dt' dt'' \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega(\tau+t'-t'')} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \int_0^{\infty} \overline{Q_2(p)v(t')} \cdot e^{-i\omega t'} dt' \int_0^{\infty} Q_2(p)v(t'') \cdot e^{-i\omega t''} dt'' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \overline{\int_0^{\infty} Q_2(p)v(t) \cdot e^{-i\omega t} dt} \int_0^{\infty} Q_2(p)v(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \left| \int_0^{\infty} Q_2(p)v(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} \left| -\frac{b_2}{a_2} + \Phi(i\omega) \right|^2 d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} \left( -\frac{b_2}{a_2} + \Phi(i\omega) \right) \left( -\overline{\left( \frac{b_2}{a_2} \right)} + \overline{\Phi(i\omega)} \right) d\omega = \left| \frac{b_2}{a_2} \right|^2 K(\tau) - \\
&- \frac{b_2}{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \overline{\Phi(i\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega - \left( \frac{b_2}{a_2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \Phi(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |\Phi(i\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega.
\end{aligned}$$

Сума отриманих результатів після простих перетворень дає, як і вище, формулу (14.5), а відтак і (14.3).

Наведені міркування незастосовні, якщо в правій частині рівняння оператор має вищий порядок, аніж в лівій, тобто при  $m > n$ . Це впливає з результатів п. 9.4.

Приклад 14.2 Повернімось до рівняння з сталими коефіцієнтами, яке ми розглядали в прикладі 14.1 (а ще раніше в прикладах 7.5, 9.1, 9.2 та п. 9.2), і нехай тепер на вхід надходить недиференційовна випадкова функція  $\xi(t)$  з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0.$$

(саме з цим випадком ми були зустрілись в п. 9.2).

Частотна характеристика рівняння тут та ж сама, що й в попередньому прикладі, спектральна щільність випадкової функції  $\xi(t)$  дається формулою (13.51), внаслідок чого функція

$$|\Phi(i\omega)|^2 S(\omega) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi} \cdot \frac{b_1^2 \omega^2 + b_0^2}{(a_1^2 \omega^2 + a_0^2)(\alpha^2 + \omega^2)}$$

інтегровна на  $(-\infty, \infty)$ , бо

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (|\Phi(i\omega)|^2 S(\omega) \div \omega^{-2}) = \frac{\sigma^2 \alpha b_1^2}{\pi a_1^2},$$

а інтеграл

$$\int_a^{\infty} \omega^{-2} d\omega, \quad a > 0,$$

збігається. Отже, умова (14.12) виконується, стаціонарний розв'язок рівняння має спектральну щільність  $|\Phi(i\omega)|^2 S(\omega)$ , кореляційна функція розв'язку визначається формулою (14.5), звідки

$$K_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\eta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_1^2 \omega^2 + b_0^2) e^{i\omega\tau}}{(a_1^2 \omega^2 + a_0^2)(\alpha^2 + \omega^2)} d\omega,$$

а дисперсія, по розкладанню підінтегрального дробу в суму найпростіших, дорівнює, як і в п. 9.2,

$$D_{\eta} = K_{\eta}(0) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_1^2 \omega^2 + b_0^2}{(a_1^2 \omega^2 + a_0^2)(\alpha^2 + \omega^2)} d\omega = \frac{\sigma^2 (b_0^2 a_1 + b_1^2 \alpha a_0)}{a_0 a_1 (a_0 + \alpha a_1)}$$

Нехай, наприклад,  $a_1 = 2, a_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 3, \sigma^2 = \alpha = 2$ , тобто йдеться про стаціонарний розв'язок рівняння

$$2\eta'(t) + \eta(t) = \xi'(t) + 3\xi(t), \quad K(\tau) = 2e^{-2|\tau|}.$$

Спектральна щільність розв'язку

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\omega^2 + 9}{(4\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)}$$

дисперсія  $D_{\eta} = 4$ , нормована спектральна щільність

$$s_{\eta}(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\omega^2 + 9}{(4\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)}.$$

Остання має єдиний екстремум, а саме максимум, в точці  $\omega = 0$ , наближено рівний  $\max s_{\eta}(\omega) = s_{\eta}(0) \approx 0.72$ .

Якщо  $a_1 = 3, a_0 = b_0 = 1, b_1 = 4, \sigma^2 = 6, \alpha = 2$ , тобто у випадку рівняння

$$3\eta'(t) + \eta(t) = 4\xi'(t) + \xi(t), \quad K(\tau) = 6e^{-2|\tau|},$$

спектральна щільність, дисперсія та нормована спектральні щільність відповідно дорівнюють

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{16\omega^2 + 1}{(9\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)}, \quad D_{\eta} = 10, \quad s_{\eta}(\omega) = \frac{6}{5\pi} \cdot \frac{16\omega^2 + 1}{(9\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)}.$$

Тут нормована спектральна щільність має вже три локальні екстремуми – мінімум в точці  $\omega = 0, \min s_\eta(\omega) = s_\eta(0) \approx 0.03$  і максимуми в точках  $\omega = \pm\omega_0$ ,  $\omega_0 \approx 0.6, \max s_\eta(\omega) = s_\eta(\pm\omega_0) \approx 0.05$ . Незначна різниця між максимумами та мінімумом свідчить, що на деякому інтервалі частот  $(-a, a)$  розв'язок  $\eta(t)$  виявляє помітні ознаки білого шуму.

Зауважимо, що розв'язок рівняння останнього прикладу не задовольняє умову (13.60), бо інтеграл по  $(-\infty, \infty)$  від функції  $\omega^2 S_\eta(\omega)$  розбігається. Це ще раз (пор. п. 9.2) доводить недиференційовність розв'язку  $\eta(t)$ .

Приклад 14.3. Розгляньмо ще раз приклад 10.17 про дію стаціонарного білого шуму  $\tilde{\xi}(t)$  на стійку лінійну динамічну систему першого порядку, дія якої характеризується диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами

$$a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \tilde{\xi}(t), \quad a_0, a_1 - \text{const}, \quad a_0 a_1 > 0, \quad S_{\tilde{\xi}}(\omega) = c, \quad K_{\tilde{\xi}}(\tau) = 2\pi c \delta(\tau).$$

По формулі (14.3)

$$S_\eta(\omega) = \frac{|Q_m(i\omega)|^2}{|P_n(i\omega)|^2} S_{\tilde{\xi}}(\omega) = \frac{1}{|P_n(i\omega)|^2} S_{\tilde{\xi}}(\omega) = \frac{c}{|a_1 i\omega + a_0|^2} = \frac{c}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2},$$

умова (14.12) тут виконується, бо

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (S(\omega) \div \omega^{-2}) = \frac{c}{a_1^2}.$$

Кореляційна функція стаціонарного розв'язку  $\eta(t)$  дається інтегралом

$$K_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2} d\omega$$

дисперсія дорівнює

$$D_\eta = K_\eta(0) = c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + a_0^2} d\omega = \frac{c}{a_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + (a_0/a_1)^2} d\omega = \frac{c}{a_1^2} \cdot \frac{a_1}{a_0} \operatorname{arctg} \frac{a_1 \omega}{a_0} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi c}{a_0 a_1}.$$

Безпосереднє обчислення інтеграла для кореляційної функції становить значні складнощі (в прикладі 10.17  $K_\eta(\tau)$  знаходиться з інших міркувань). Але в цьому нема потреби: достатньо скористатися результатом прикладу 13.9. За-



ради цього перепишемо вираз для спектральної щільності  $S_\eta(\omega)$  наступним чином

$$S_\eta(\omega) = \frac{c}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2} = \frac{c}{a_1^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2} = \frac{c}{a_0 a_1} \cdot \frac{\frac{a_0}{a_1}}{\omega^2 + \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2} = \frac{c}{a_0 a_1} \cdot \frac{\alpha}{\omega^2 + (\alpha)^2}, \alpha = \frac{a_0}{a_1}.$$

Покладаючи тепер

$$\frac{c}{a_0 a_1} = \frac{\sigma^2}{\pi}, \text{ або } \sigma^2 = \frac{\pi c}{a_0 a_1},$$

на підставі формул (13.50), (13.51) отримаємо

$$K_\eta(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} = \frac{\pi c}{a_0 a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1}|\tau|}, \quad D_\eta = K_\eta(0) = \frac{\pi c}{a_0 a_1}.$$

Виявляється, обчислення інтеграла для дисперсії було зайвим.

Отже, формули (13.50), (13.51) дають при

$$\sigma^2 = \frac{\pi c}{a_0 a_1}, \quad \alpha = \frac{a_0}{a_1}$$

кореляційну функцію та спектральну щільність стаціонарної випадкової функції на виході динамічної системи з характеризуючим її диференціальним рівнянням першого порядку з сталими коефіцієнтами одного знаку

$$a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = \xi(t), \quad a_0, a_1 - \text{const}, \quad a_0 a_1 > 0,$$

якщо на вхід системи надходить стаціонарний білий шум.

Приклад 14.4. Формула (14.3) є незастосовною для дещо складнішого рівняння

$$a_1 \eta'(t) + a_0 \eta(t) = b_1 \tilde{\xi}'(t) + b_0 \tilde{\xi}(t), \quad b_1 \neq 0, \quad a_0, a_1 - \text{const}, \quad a_0 a_1 > 0,$$

з білим шумом на вході.

Дійсно, тут функція

$$|\Phi(i\omega)|^2 S_{\tilde{\xi}}(\omega) = \frac{b_1^2 \omega^2 + b_0^2}{a_1^2 \omega^2 + a_0^2} \cdot c$$

не інтегровна на інтервалі  $(-\infty, \infty)$ , тобто не виконується умова (14.12).

Приклад 14.5. В прикладі 10.18 вже йшлося про проходження стаціонарного білого шуму  $\tilde{\xi}(t)$  через стійку лінійну динамічну систему другого порядку з рівнянням

$$\eta''(t) + 2h\eta'(t) + k^2\eta(t) = \tilde{\xi}(t),$$

де  $h, k$  - сталі,  $0 < h < k$ ,  $k^2 - h^2 = \omega_0^2$ ,  $S_{\tilde{\xi}}(\omega) = \text{const} = c$ ,  $K_{\tilde{\xi}}(\tau) = A\delta(\tau) = 2\pi c\delta(\tau)$ .

Застосування спектральної теорії веде до тих же результатів набагато простіше. Достатньо взяти до уваги, що спектральна щільність стаціонарного розв'язку рівняння знаходиться за формулою

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{1}{|(i\omega)^2 + 2hi\omega + k^2|^2} S_{\tilde{\xi}}(\omega) = \frac{c}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2},$$

бо дріб, що фігурує праворуч, інтегровний на  $(-\infty, \infty)$ , тобто умова (14.12) виконується. Далі, за аналогією до прикладу 14.3 достатньо скористатися результатом прикладу 13.11. Оскільки

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{c}{(h^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} = \frac{c}{h^2 + \omega_0^2} \cdot \frac{h^2 + \omega_0^2}{(\omega^2 - h^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega^2},$$

за формулами (13.55), (13.56), в яких покладаємо

$$\alpha = h, \beta = \omega_0, \frac{2\sigma^2\alpha}{\pi} = \frac{c}{h^2 + \omega_0^2}, \sigma^2 = \frac{\pi c}{2\alpha(h^2 + \omega_0^2)} = \frac{\pi c}{2hk^2},$$

знаходимо кореляційну функцію

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right) = \frac{\pi c}{2hk^2} e^{-h|\tau|} \left( \cos \omega_0\tau + \frac{h}{\omega_0} \sin \omega_0|\tau| \right).$$

Таким чином, якщо через динамічну систему другого порядку, дія якої зображається щойно розглянутим рівнянням, проходить стаціонарний білий шум, то кореляційна функція стаціонарного розв'язку на виході дається формулою (13.55) при

$$\alpha = h, \beta = \omega_0, \sigma^2 = \frac{\pi c}{2hk^2}, \quad k^2 = \omega^2 + h^2.$$

Приклад 14.6. Формули (14.3), (14.5) застосовні, якщо білий шум  $\tilde{\xi}(t)$  проходить через динамічну систему другого порядку з дещо складнішим рівнянням

$$\eta''(t) + 2h\eta'(t) + k^2\eta(t) = b_1\tilde{\xi}'(t) + b_0\tilde{\xi}(t), \quad b_1 \neq 0, \quad b_0, b_1 - \text{const},$$

і незастосовні для випадку рівняння

$$\eta''(t) + 2h\eta'(t) + k^2\eta(t) = b_2\tilde{\xi}''(t) + b_1\tilde{\xi}'(t) + b_0\tilde{\xi}(t), \quad b_2 \neq 0, \quad b_0, b_1, b_2 - \text{const}.$$

# ЛІТЕРАТУРА

## ОСНОВНА

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964, 576 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999, 479 с.
3. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. М.: Высшая школа, 1971, 328 с.
4. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968, 464 с.

## ДОДАТКОВА

5. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1976, 352 с.
6. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: «Вища школа», 1979, 408с.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1999, 400 с.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988, 448 с.
9. Пугачев В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М.: ГИФМЛ, 1960, 883 с.
10. Скороход А. В. Лекції з теорії випадкових процесів. Київ: Либідь, 1990, 168 с.
11. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1965, 512 с.
12. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1978, 224 с.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1.....	4
ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЗАКОНИ ЇХ РОЗПОДІЛУ.....	4
1.1. ВИПАДКОВА ФУНКЦІЯ.....	4
1.2. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ.....	5
РОЗДІЛ 2.....	7
ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ.....	7
2.1. МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ.....	7
2.2. ДИСПЕРСІЯ ТА СЕРЕДНЄ КВАДРАТИЧНЕ ВІДХИЛЕННЯ.....	9
2.3. КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ.....	11
2.4. КАНОНІЧНИЙ РОЗКЛАД ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ.....	16
2.5. ВЗАЄМНА КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ.....	18
2.6. ДОДАВАННЯ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ.....	21
2.7. ОСНОВНА (ПРЯМА) ЗАДАЧА ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....	24
РОЗДІЛ 3.....	25
ПРИКЛАДИ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ.....	25
3.1. ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПЕРЕРІЗАМИ.....	25
3.2. НОРМАЛЬНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ.....	25
3.3. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ.....	26
3.4. ПУАССОНІВСЬКИЙ ПРОЦЕС.....	28
3.5. ТЕЛЕГРАФНИЙ СИГНАЛ.....	33
3.6. МАРКІВСЬКІ ПРОЦЕСИ (ПРОЦЕСИ БЕЗ ПІСЛЯДІЇ).....	35
3.7. ВІНЕРІВСЬКІ ПРОЦЕСИ.....	37
РОЗДІЛ 4.....	41
ВСТУП ДО АНАЛІЗУ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ.....	41
4.1. ДОДАТКОВІ ЗАУВАЖЕННЯ ПРО МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ.....	41
4.2. СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНА ГРАНИЦЯ.....	42
4.3. ВЛАСТИВОСТІ С.К. ГРАНИЦІ.....	44
4.4. С.К. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ.....	46
РОЗДІЛ 5.....	50
С.К. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ.....	50
5.1. СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНА ПОХІДНА.....	50
5.2. ВЛАСТИВОСТІ С.К. ПОХІДНОЇ.....	51
5.3. УМОВИ ІСНУВАННЯ С.К. ПОХІДНОЇ ТА ЇЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	53
5.4. С.К. НЕПЕРЕРВНА ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ.....	57
5.5. С.К. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	58
5.6. ЛІНІЙНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР ВІД ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	60
РОЗДІЛ 6.....	64
С.К. ІНТЕГРОВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ.....	64
6.1. СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНИЙ ІНТЕГРАЛ ВІД ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ.....	64
6.2. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ С.К. ІНТЕГРАЛА.....	65
6.3. ІСНУВАННЯ С.К. ІНТЕГРАЛА.....	67
6.4. ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ. ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ.....	69
6.4.1. С.к. інтеграл з змінною верхньою межею інтегрування.....	69

6.4.2. Інтеграл від добутку випадкової функції на невідповідну	71
6.4.3. Невластиві с.к. інтеграли	73
<b>РОЗДІЛ 7</b>	<b>75</b>
<b>ПРОХОДЖЕННЯ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ ЧЕРЕЗ ЛІНІЙНУ ДИНАМІЧНУ СИСТЕМУ</b>	<b>75</b>
7.1. ЛІНІЙНА ДИНАМІЧНА СИСТЕМА. СТІЙКІСТЬ	75
7.2. ВАГОВА ФУНКЦІЯ	81
<b>РОЗДІЛ 8</b>	<b>88</b>
<b>СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ</b>	<b>88</b>
8.1. СТАЦІОНАРНІСТЬ ТА СТАЦІОНАРНІСТЬ В ШИРОКОМУ РОЗУМІННІ	88
8.2. СТАЦІОНАРНІ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ	94
8.3. ПОХІДНІ ВІД СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ	96
8.4. ЛІНІЙНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР	102
З СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ	102
8.5. ІНТЕГРАЛИ ВІД СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ	103
<b>РОЗДІЛ 9</b>	<b>109</b>
<b>ПРОХОДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ ЧЕРЕЗ СТІЙКУ ЛІНІЙНУ ДИНАМІЧНУ СИСТЕМУ</b>	<b>109</b>
9.1. СТАЦІОНАРНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	109
9.2. ВИПАДОК НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ФУНКЦІЇ НА ВХОДІ	115
9.3. СТАЦІОНАРНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	119
9.4. НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНА ФУНКЦІЯ НА ВХОДІ	125
<b>РОЗДІЛ 10</b>	<b>131</b>
<b>ДЕЛЬТА - ФУНКЦІЯ ТА ДЕЯКІ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ</b>	<b>131</b>
10.1. ПОНЯТТЯ ПРО ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЮ	131
10.2. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЙ	134
10.2.1. Лінійна заміна змінної	134
10.2.2. Диференціювання дельта-функції	135
10.3. ДЕЯКІ ФІЗИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ	139
10.4. НАЙПРОСТІШІ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	142
10.5. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ	144
10.6. БІЛИЙ ШУМ	147
<b>РОЗДІЛ 11</b>	<b>153</b>
<b>КОМПЛЕКСНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ</b>	<b>153</b>
11.1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ	153
11.2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІЗУ КОМПЛЕКСНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ	156
<b>РОЗДІЛ 12</b>	<b>159</b>
<b>ЕЛЕМЕНТИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ</b>	<b>159</b>
<b>ЧАСТИНА ПЕРША: ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ З ДИСКРЕТНИМ СПЕКТРОМ</b>	<b>159</b>
12.1. ЗАУВАЖЕННЯ ПРО РЯДИ ФУР'Є	159
12.2. СПЕКТРАЛЬНИЙ РОЗКЛАД СТАЦІОНАРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ НА СКІНЧЕНОМУ ЧАСОВОМУ ВІДТИНКУ	160
12.3. ПЕРЕТВОРЕННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ З ДИСКРЕТНИМ СПЕКТРОМ ЛІНІЙНОЮ ДИНАМІЧНОЮ СИСТЕМОЮ	163
<b>РОЗДІЛ 13</b>	<b>166</b>
<b>ЕЛЕМЕНТИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ</b>	<b>166</b>

<b>ЧАСТИНА ДРУГА: ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ З НЕПЕРЕРВНИМ СПЕКТРОМ.....</b>	<b>166</b>
<b>13.1. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ ПРО ІНТЕГРАЛ І ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є.....</b>	<b>166</b>
13.1.1. <i>Інтеграл Фур'є.....</i>	<i>166</i>
13.1.2. <i>Пряме й обернене перетворення Фур'є.....</i>	<i>167</i>
13.1.3. <i>Деякі властивості перетворення Фур'є.....</i>	<i>171</i>
13.1.4. <i>Перетворення Фур'є та лінійні диференціальні рівняння.....</i>	<i>172</i>
<b>13.2. СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ З НЕПЕРЕРВНИМ СПЕКТРОМ.....</b>	<b>174</b>
13.2.1. <i>Спектральний розклад кореляційної функції.....</i>	<i>174</i>
13.2.2. <i>Випадок дійсної випадкової функції.....</i>	<i>176</i>
13.2.3. <i>Стаціонарний білий шум.....</i>	<i>181</i>
13.2.4. <i>Інтегральне зображення стаціонарної випадкової функції.....</i>	<i>184</i>
13.2.5. <i>Поняття про інтеграл Стілтєсса.....</i>	<i>185</i>
13.2.6. <i>Спектральний розклад стаціонарної.....</i>	<i>187</i>
<i>випадкової функції.....</i>	<i>187</i>
13.2.7. <i>Наступні приклади.....</i>	<i>190</i>
13.2.8. <i>Спектральна щільність похідної від стаціонарної випадкової функції.....</i>	<i>196</i>
13.2.9. <i>Спектральна щільність лінійного диференціального оператора з сталими коефіцієнтами.....</i>	<i>200</i>
<b>РОЗДІЛ 14.....</b>	<b>206</b>
<b>СТАЦІОНАРНІ РОЗВ'ЯЗКИ СТІЙКИХ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>206</b>
<b>14.1. ВИПАДОК ДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ВИПАДКОВОЇ.....</b>	<b>206</b>
<b>ФУНКЦІЇ НА ВХОДІ.....</b>	<b>206</b>
<b>14.2. ВИПАДОК НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ВИПАДКОВОЇ.....</b>	<b>210</b>
<b>ФУНКЦІЇ НА ВХОДІ.....</b>	<b>210</b>
<b>ЛІТЕРАТУРА.....</b>	<b>220</b>
<b>ОСНОВНА.....</b>	<b>220</b>
<b>ДОДАТКОВА.....</b>	<b>220</b>
<b>ЗМІСТ.....</b>	<b>221</b>