

Сименко О.В., к.т.н.

Донецький національний технічний університет

Красноармійський індустріальний інститут

м. Красноармійськ, Україна

## ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПРОСТОРОВИМИ СПІРАЛЯМИ І СПІРАЛЬНІ ПОВЕРХНІ

*Анотація* –Пропонується спосіб конструювання спіральних поверхонь, каркас яких складають промені, що проєкціюють довільну лінію.

*Аннотация* – Е.В.Сименко. Проецирование пространственными спиралями и спиральные поверхности. Предлагается способ конструирования спиральных поверхностей, каркас которых состоит из лучей, проецирующих произвольную линию.

*Annotation* – O.Simenko. By spatial spirals the projection and spiral surfaces. The method of constructing of spiral surfaces offered, framework of which consists of rays mapping an arbitrary line.

**Постановка проблеми.** Формоутворення поверхонь аналітичними методами та їх візуалізація засобами комп'ютерної графіки – одна з актуальних проблем прикладної геометрії в зв'язку з використанням таких методів у автоматизованих системах наукових досліджень, проектування, вироблення на обладнанні з ЧПК.

**Аналіз останніх досліджень.** Конструктивні питання спіральньо-гвинтового проєкціювання розглянуто в роботах [1, 3]. Аналітичні моделі поверхонь, що несуть на собі сім'ю спіральних просторових ліній, розглядалися у роботах [2, 4].

**Постановка завдання.** Ціль статті – розробити аналітичну інтерпретацію способу формоутворення поверхонь проєкціюванням просторовими спіралями деякої лінії з позиції загальної теорії аналітичного формоутворення.

**Основна частина.** Параметричні рівняння конгруенції просторових спіралей запишемо у вигляді

$$x = ve^{ht} \cos(u + \omega t), \quad y = ve^{ht} \sin(u + \omega t), \quad z = ce^{ht},$$

де  $t, u, v$  – параметри конгруенції,  $h, \omega, c$  – сталі параметри.

Геометричний та кінематичний зміст параметрів:  $t$  – параметр обертального руху,  $u$  – кутова початкова фаза обертання,  $v$  – параметр форми конуса інцидентності просторової спіралі. Сутність сталих параметрів:  $\omega$  – кутова швидкість обертання,  $h$  – коефіцієнт відношення наступного до попереднього кроку спіралі,  $c$  – коефіцієнт впливу на величину кроку.

Піднесемо до квадрату обидві частини рівностей (1) і знайдемо

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{v^2}{c^2}. \quad (2)$$

Позначимо

$$\frac{v}{c} = \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

та з врахуванням цього позначення приведемо (2) до вигляду

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (4)$$

З рівняння (4) випливає, що лінії конгруенції (1) належать конусам зі спільною вершиною у початку координат та зі змінним (бо змінне  $v$  у (3)) кутом  $\alpha$  нахилу твірної до осі.

Знайдемо відношення

$$\frac{z_{t=t_1+2\pi}}{z_{t=t_1}} = \frac{c e^{ht_1} e^{2\pi h}}{c e^{ht_1}} = e^{2\pi h}. \quad (5)$$

Оскільки  $h = \text{const}$ , властивістю спіральних просторових ліній є сталість відношення наступного до попереднього кроку, про що свідчить рівність (5). Вони проєкціюються ортогональним проєкціюванням на площину, перпендикулярну осі  $OZ$ , логарифмічними спіралями. Вони перетинають твірні конуса інцидентії під однаковим кутом і мають однаковий нахил до площини, перпендикулярної осі  $OZ$ .

Визначимо особливі точки параметризації простору конгруенцією (1). З умови

$$\frac{D(x, y, z)}{D(t, u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

для функцій (1)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(t, u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial z}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) = -vhce^{3ht} = 0$$

впливає, що тільки точки осі  $OZ$ , для яких  $v = 0$ ,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = ce^{ht}$$

є особливими точками параметризації.

Далі покажемо, що конгруенцію (1) можна застосувати в якості апарату криволінійного проєкціювання. Для цього необхідно довести, що через довільну точку  $M(x_M, y_M, z_M)$ , що не належить осі  $OZ$ , проходить єдина просторова спіраль конгруенції (1) при фіксованих значеннях  $h, \omega, c$ , що еквівалентно однозначному розв'язанню рівнянь (1) відносно  $t, u, v$ . Власне, в точках  $M$ , що не належать осі  $OZ$ , таке розв'язання можливе.

З третього рівняння (1) знаходимо:

$$t_M = \frac{\ln z_M - \ln c}{h}. \quad (6)$$

З перших двох рівнянь (1)  $\frac{y_M}{x_M} = tg u_M + \omega t_M$ , звідки з врахуванням (6)

$$u_M = \arctg \frac{y_M}{x_M} - \omega \frac{\ln z_M - \ln c}{h}. \quad (7)$$

Нарешті, з перших двох рівнянь (1) з врахуванням (6)

$$v_M = \frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{e^{\frac{\ln z_M}{c}}} = \frac{c\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{z_M}. \quad (8)$$

Сукупність рівнянь (1), (6), (7), (8) дозволяє представляти параметричними рівняннями лінії та поверхні як в прямокутних декартових координатах, так і в параметрах конгруенції.

Щоб отримати параметричні рівняння променя конгруенції, що проєкціює точку  $M$ , необхідно до рівнянь (1) замість  $v$  та  $u$  підставити їхні вирази (7), (8), лишивши параметр  $t$  вільним:

$$\begin{aligned} x &= \frac{c\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{z_M} e^{ht} \cos(\operatorname{arctg} \frac{y_M}{x_M} - \omega \frac{\ln z_M - \ln c}{h} + \omega t), \\ y &= \frac{c\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{z_M} e^{ht} \sin(\operatorname{arctg} \frac{y_M}{x_M} - \omega \frac{\ln z_M - \ln c}{h} + \omega t), \\ z &= ce^{ht}. \end{aligned} \quad (9)$$

Параметричні рівняння поверхні як сім'ї просторових спіралей конгруенції (1), що проєкціюють лінію

$$x = f(w), \quad y = \varphi(w), \quad z = \psi(w) \quad (10)$$

отримаємо підстановкою правих частин (10) замість  $x_M$ ,  $y_M$ ,  $z_M$  до (9):

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{f^2(w) + \varphi^2(w)}}{\psi(w)} ce^{ht} \cos(\operatorname{arctg} \frac{\varphi(w)}{f(w)} - \omega \frac{\ln \psi(w) - \ln c}{h} + \omega t), \\ y &= \frac{\sqrt{f^2(w) + \varphi^2(w)}}{\psi(w)} ce^{ht} \sin(\operatorname{arctg} \frac{\varphi(w)}{f(w)} - \omega \frac{\ln \psi(w) - \ln c}{h} + \omega t), \\ z &= ce^{ht}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поверхні (11) називають спіральними [5]. Їм притаманна властивість, яка впливає із властивостей просторових спіралей [5]: лінія (10), що здійснює спіральне переміщення при змінному  $t$ , бере участь у подібному перетворенні з коефіцієнтом, пропорціональним  $t$  і з центром у вершині конусів (у початку координат).

Віднесемо поверхню (11) до криволінійних координат  $w, z$ .  
 Прологарифмуємо третє рівняння (11)

$$\ln z = \ln c + ht,$$

звідки

$$t = \frac{\ln z - \ln c}{h}.$$

Підставимо цей вираз  $t$ , а також вираз  $z$  з третього рівняння (11) до перших двох рівнянь. Отримаємо

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{f^2(w) + \varphi^2(w)}z}{\psi(w)} \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{\varphi(w)}{f(w)} - \omega \frac{\ln \psi(w) - \ln z}{h}\right), \\ y &= \frac{\sqrt{f^2(w) + \varphi^2(w)}z}{\psi(w)} \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{\varphi(w)}{f(w)} - \omega \frac{\ln \psi(w) - \ln z}{h}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$z = z.$$

**Приклад 1.** Скласти параметричні рівняння спіральної поверхні як сім'ї променів конгруенції просторових спіралей, що проєкціюють кардіоїду

$$x = a(1 + \cos w)\cos w, \quad y = a(1 + \cos w)\sin w, \quad z = b. \quad (13)$$

Засобами комп'ютерної графіки візуалізувати поверхню, виділивши лінію (13).

**Розв'язання.** Підстановкою правих частин (13) замість  $f(w), \varphi(w), \psi(w)$  до (12) отримаємо

$$\begin{aligned} x &= \frac{a(1 + \cos w)}{b} z \cos\left(w - \omega \frac{\ln b - \ln z}{h}\right), \\ y &= \frac{a(1 + \cos w)}{b} z \sin\left(w - \omega \frac{\ln b - \ln z}{h}\right), \\ z &= z - \end{aligned} \quad (14)$$

шукані параметричні рівняння шуканої поверхні.

На рис. 1 показано спіральну поверхню (14) з виділеною на ній кардіоїдою (13). Вхідні дані  $a = 2, b = 3, h = 1,5, \omega = 0,75, 3 \leq z \leq 7,5, 0 \leq w \leq 2\pi$ .

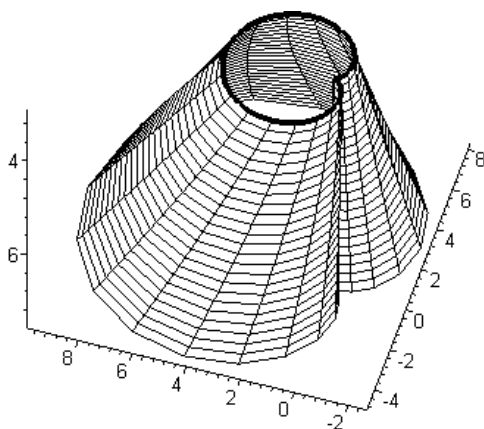


Рис. 1. Спіральна поверхня, що проєкціює кардіоїду

**Приклад 2.** Скласти параметричні рівняння спіральної поверхні як сім'ї променів конгруенції просторових спіралей, що проєкціюють пряму

$$x = w, \quad y = 0, \quad z = kw + a. \quad (15)$$

Засобами комп'ютерної графіки візуалізувати поверхню, виділивши пряму (15) і спіральну проєкцію поверхні на площину  $z = b$ .

**Розв'язання.** Параметричні рівняння шуканої поверхні отримаємо підстановкою правих частин (15) замість  $f(w)$ ,  $\varphi(w)$ ,  $\psi(w)$  до (12):

$$x = \frac{wz}{kw + a} \cos\left(\omega \frac{\ln z - \ln(kw + a)}{h}\right),$$

$$y = \frac{wz}{kw + a} \sin\left(\omega \frac{\ln z - \ln(kw + a)}{h}\right), \quad (16)$$

$$z = z.$$

Параметричні рівняння спіральної проекції поверхні (16) на площину  $z = b$  отримаємо як лінію перетину поверхні (16) з площиною  $z = b$ . Для отримання достатньо підставити  $b$  замість  $z$  до рівнянь (16).

На рис. 2 показано поверхню (16), на якій виділено пряму (15) і спіральну проекцію на площину  $z = b$ . Вхідні дані:  $k = 1$ ,  $a = -1$ ,  $\omega = 1$ ,  $h = 2$ ,  $2 \leq w \leq 6$ ,  $1 \leq z \leq 5$ ,  $b = 3$ . Поверхня (рис. 2) є лінійчата з напрямними: вісь  $OZ$ , спіраль, невласне коло, подане напрямним конусом.

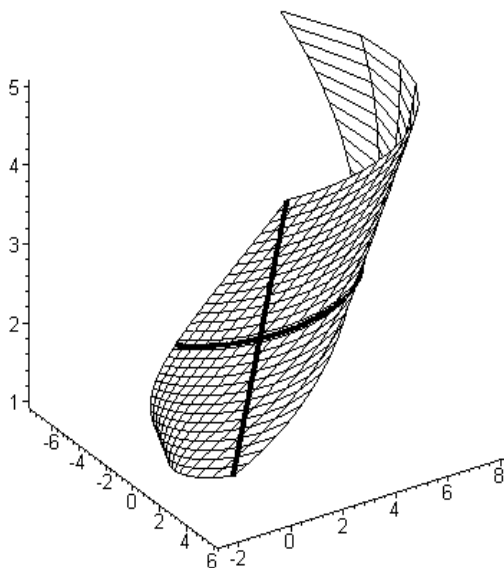


Рис. 2. Спіральна поверхня, що проєкціює пряму на площину  $z = 3$

*Приклад 3.* Скласти параметричні рівняння спіральної поверхні як сім'ї променів конгруенції просторових спіралей, що проєкціюють пряму

$$x = a, \quad y = w, \quad z = b.$$

( 17)

Засобами комп'ютерної графіки візуалізувати поверхню, виділивши пряму (17).

*Розв'язання.* Підстановкою правих частин (17) замість  $f(w)$ ,  $\varphi(w)$ ,  $\psi(w)$  до (12) отримаємо параметричні рівняння шуканої поверхні:

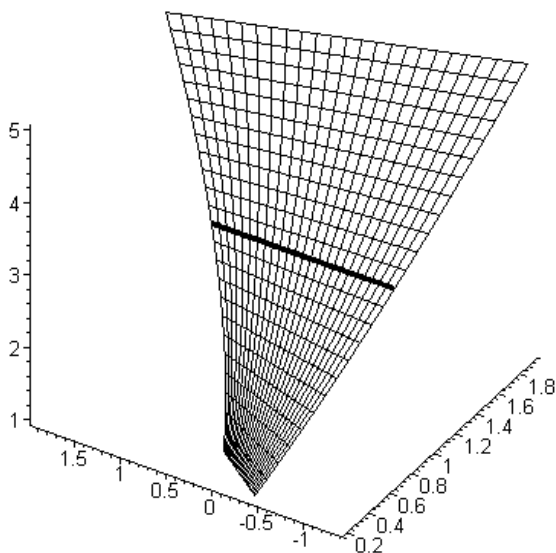
$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{a^2 + w^2}}{b} z \cos\left(\arctg \frac{w}{a} - \omega \frac{\ln b - \ln z}{h}\right), \\ y &= \frac{\sqrt{a^2 + w^2}}{b} z \sin\left(\arctg \frac{w}{a} - \omega \frac{\ln b - \ln z}{h}\right), \\ z &= z. \end{aligned} \quad (18)$$

Параметричні рівняння прямої (17) отримаємо підстановкою  $z = b$  до (18):

$$x = \sqrt{a^2 + w^2} \cos\left(\arctg \frac{w}{a}\right), \quad y = \sqrt{a^2 + w^2} \sin\left(\arctg \frac{w}{a}\right), \quad z = b. \quad (19)$$

Рівняння поданої прямої (19) еквівалентні рівнянням (17).

На рис. 3 показано поверхню (18) на якій виділено пряму (19). Вхідні дані:  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $\omega = 0,5$ ,  $h = 1,5$ ,  $-1 \leq w \leq 1$ ,  $1 \leq z \leq 5$ .





*Рис. 3. Спиральна поверхня, що проєкціює горизонтальну пряму*

**Висновки.** Наведений аналітичний апарат формоутворення поверхонь складної форми шляхом криволінійного проєкціювання довільної лінії у загальному випадку, представленої параметричними рівняннями, має прозору геометричну основу і вільний від процедур усунення параметрів, оскільки в ньому застосовуються лише підстановки.

#### *Список літератури*

1. Тевлин А.М. Преобразование конгруэнций // Кинематические методы конструирования технических поверхностей: Труды МАИ. – Вып. 213. – М.: 1970. – с. 158-171.
2. Скидан И.А., Зверева С.А. Компьютерная модель спиральной поверхности // Прикладная геометрия и инженерная графика – Вып. 60. Киев, КДТУБА, 1996. – с. 50-52.
3. Солоненко М.П., Тевлин А.М. Спирально-винтовое проецирование. // Кинематические методы конструирования технических поверхностей: Труды МАИ. – Вып. 213. – М.: 1970. – с. 118-120.
4. Кириллов С.В. Параметрические уравнения некоторых спироидальных поверхностей. // Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей. / Тематический сборник научных трудов института. Вып. 296, М.: МАИ. 1974 г. – с. 81-85.
5. Колычева Л.А. Применение винтового проектирования в сочетании с шаблоном-калькой при решении некоторых задач // Начертательная геометрия / Сборник трудов ВЗПИ. Вып. 93. – М.: 1974. С. 45-50.