Сименко О.В., к.т.н., доц..

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПРОМЕНЯМИ КОНГРУЕНЦІЇ ПРЯМИХ З ФОКАЛЬНИМИ ПРЯМОЮ ТА КОЛОМ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, ТА УТВОРЮВАНИХ НИМ ПОВЕРХОНЬ

Красноармійський індустріальний інститут Дон НТУ, Україна

Постановка проблеми. Широко відомий алгебраїчний підхід до дослідження конгруенцій прямих та лінійчастих поверхонь не дозволяє застосувати засоби комп'ютерної графіки для візуалізації поверхонь з представленням лінійчастого каркасу та тих ліній, що входять до визначників як конгруенції, так і поверхні. Оскільки така візуалізація конче бажана на етапах передпроектних наукових досліджень та проектування, то аналітичне моделювання в параметричній формі, що веде до означеної цілі, є актуальною проблемою.

Аналіз досягнень і публікацій. Робота спирається на дослідження, проведені у синтетичній формі Р. Штурмом [1], Т.Рейє [2], В.С. Обуховою та О.Л. Підгорним [3], у алгебраїчній формі А.Л. Кочетковою[4, 5].

Основна частина досліджень. Відомі конгруенції бісекант – це конгруенції прямих, що двічі перетинають просторову криву. Коло та пряму, що його перетинає, можна уявити як просторову криву третього порядку, що розпалася.

Конгруенція бісекант просторової кривої третього порядку у випадку розпаду останьої на пряму та коло, що перетинаються і не належать одній площині, розпадається на в'язку прямих і на конгруенцію першого порядку.

Сумістимо фокальну пряму l з віссю OZ, а коло k розташуємо в площині XOY (рис. 1) таким чином, щоб вісь OX дотикалась до нього у початку координат.

Параметричні рівняння фокальної прямої

$$x=0,\quad y=0,\quad z=v. \tag{1}$$

Параметричні рівняння фокального кола k

$$x=2R\sin u\cos u,\quad y=2R\sin^2 u,\quad z=0. \tag{2}$$

Крім параметрів положення довільного променя конгруенції u та v, сутність яких очевидна (див. рис. 1), за параметр положення точки на промені оберемо t, який приймає значення 0, коли точка належить фокальній прямій, та 1, коли вона належить фокальному колу.

Параметричні рівняння конгруенції прямих отримаємо як рівняння поточного променя конгруенції, що проходить через точки на фокальних лініях:

$$\frac{x}{2R\sin u\cos u}=\frac{y}{2R\sin^2 u}=\frac{z-v}{-v}=t, \text{ або}$$

$$x = 2Rt\sin u\cos u, \quad y = 2Rt\sin^2 u, \quad z = v(1-t). \tag{3}$$

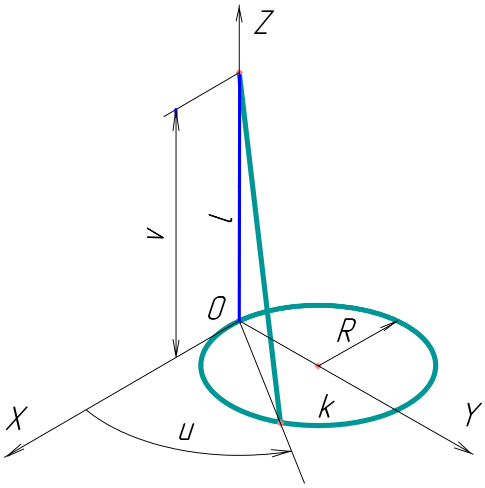


Рис. 1. Фокальні лінії та параметри конгруенції бісекант кривої 3-го порядку, що розпалася на коніку та пряму l

Визначимо особливі точки параметризації конгруенції (3).

$$\frac{D(x,y,z)}{D(t,u,v)} = \begin{vmatrix} 2R\sin u\cos u & 2R\sin^2 u & -v \\ 2Rt(\cos^2 u - \sin^2 u) & 4Rt\sin u\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = 4R^2 t(1-t)\sin u = 0, \text{ звідки}$$

випливає:

$-t = 0$ і підстановка до (3) дає: $x = 0, y = 0, z = v$ - параметричні рівняння фокальної прямої (1),

$-t = 1$ і підстановка до (3) приводить до параметричних рівнянь (2) кола,

$-u = 0, u = \pi$ - знову отримуємо параметричні рівняння фокальної прямої (1) після підстановки до (3).

Таким чином, фокальна пряма (1) може бути потрійною прямою поверхонь конгруенції (3), а параметризація конгруенції крім точок на фокальних лініях, особливих точок більше не містить.

Розв'яжемо рівняння (3) відносно $t, v, \sin u, \cos u$. З перших двох рівнянь (3)

$$\frac{y}{x} = tgu, \text{ звідки } \sin u = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Підставимо знайдені вирази $\sin u, \cos u$ до першого з рівнянь (3) та визначимо t

$$t = \frac{x^2+y^2}{2Ry}. \tag{4}$$

Підставимо знайдений вираз t до третього з рівнянь (3) і визначимо v

$$v = \frac{2Ryz}{2Ry - x^2 - y^2}. \tag{5}$$

Останні вирази $t, v, \sin u, \cos u$ дозволяють визначити параметри t_M, v_M, $\sin u_M$, $\cos u_M$ через прямокутні декартові координати x_M, y_M, z_M неособливої точки *M*.

Знайдемо параметричні рівняння променя, що проекціює точку *M*. Для цього до параметричних рівнянь конгруенції (3) необхідно підставити вирази $\sin u, \cos u$ та *v*, обчислені для точки *M*, лишивши параметр *t* вільним:

$$x = \frac{2Rt\,x_M y_M}{x_M^2 + y_M^2}, \quad y = \frac{2Rt\,y_M^2}{x_M^2 + y_M^2}, \quad z = \frac{2R\,y_M z_M (1-t)}{2R\,y_M - x_M^2 - y_M^2}. \qquad (6)$$

Примусимо точку M описувати лінію, подану рівняннями

$$x = f(w), \quad y = \varphi(w), \quad z = \psi(w). \qquad (7)$$

При цьому проекціювальний промінь буде описувати лінійчасту поверхню конгруенції (3), параметричні рівняння якої отримаємо підстановкою до (6) замість x_M, y_M, z_M правих частин рівнянь (7):

$$x = \frac{2Rtf(w)\varphi(w)}{f^2(w)+\varphi^2(w)}, \quad y = \frac{2Rt\varphi^2(w)}{f^2(w)+\varphi^2(w)}, \quad z = \frac{2R\varphi(w)\psi(w)(1-t)}{2R\varphi(w) - f^2(w) - \varphi^2(w)}. \qquad (8)$$

Приклад 1. Скласти параметричні рівняння поверхні конгруенції (3), яка проекціюється променями конгруенції на площину $z = a$ у вигляді кола

$$x = r\cos w + \frac{\sqrt{2}}{2}r, \quad y = r\sin w + \frac{\sqrt{2}}{2}r, \quad z = a. \qquad (9)$$

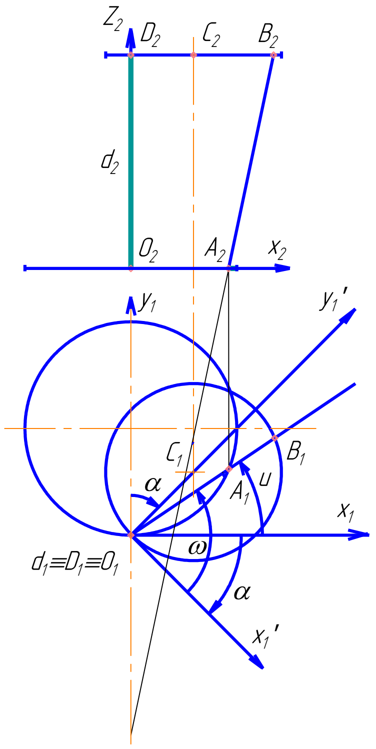
Засобами комп'ютерної графіки візуалізувати поверхню, виділивши фокальні лінії та подану проекцію поверхні на площину $z = a$.

Розв'язання. Параметричні рівняння шуканої поверхні отримаємо підстановкою правих частин (9) замість $f(w), \varphi(w), \psi(w)$ до (8):

$$x = \frac{2Rt(\cos w + \frac{\sqrt{2}}{2})(\sin w + \frac{\sqrt{2}}{2})}{(\cos w + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\sin w + \frac{\sqrt{2}}{2})^2}, \quad y = \frac{2Rt(\sin w + \frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(\cos w + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\sin w + \frac{\sqrt{2}}{2})^2},$$

$$z = \frac{2R(1-t)\,a\,(\sin w + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2R(\sin w + \frac{\sqrt{2}}{2}) - r\left[(\cos w + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\sin w + \frac{\sqrt{2}}{2})^2\right]}.$$

Покажемо перехід до іншої координатної сітки. З ліній, об'явлених умовою, лишилась невиділеною проекція поверхні на площину $z = a$ у вигляді кола (9). Щоб включити його до координатної сітки, візьмемо до уваги, що, по-перше, фокальне коло (2) належить площині $z = a$ і є сенс параметром сім'ї призначити аплікату *z*. По-друге, конче бажано зберегти сім'ю прямолінійних променів. Цього можна досягти, якщо для кіл (2) та (9) призначити спільну параметризацію. Оскільки кола перетинаються з фокальною прямою і розташовані в паралельних площинах, проекціювальні промені розташовані в площинах пучка, для яких фокальна пряма є віссю. Таким чином, щоб досягти бажаних умов, слід в параметричних рівняннях (3) конгруенції лишити вільним параметр u, здійснити параметризацію кола (9) через параметр u, виключити параметри t, v, скориставшись їхніми виразами через x, y, z, місце яких мусять посісти праві частини параметричних рівнянь кола – проекції, виражені через параметр u.



Покажемо на рис. 2 в ортогональних проекціях фокальну пряму, фокальне коло та коло (9).

$$x' = 2r\cos\omega\sin\omega, \quad y' = 2r\sin^2\omega, \quad z = a. \tag{10}$$

Параметричні рівняння (2) фокального кола були складені в системі $XOYZ$. Параметричні рівняння кола (9) в системі $X'OY'Z$

Перетворенням повороту на кут α навколо осі OZ перерахуємо координати x', y' у координати x, y за формулами

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{11}$$

Між ω та u існує залежність (див. рис.2)

$$\omega = u - \alpha \tag{12}$$

З врахуванням (12) підставимо до (11) вирази x', y' з (10). Отримаємо, добавивши незмінну z.

Рис. 2. Ортогональні проекції визначника конгруенції і поверхні

$$\begin{aligned} x &= 2r\sin(u-\alpha)[\cos(u-\alpha)\cos\alpha - \sin(u-\alpha)\sin\alpha], \\ y &= 2r\sin(u-\alpha)[\cos(u-\alpha)\sin\alpha + \sin(u-\alpha)\cos\alpha], \\ z &= a \quad - \end{aligned} \tag{13}$$

параметричні рівняння кола (9). Спростимо вирази у квадратних дужках (13). Отримаємо

$$x = 2r\sin(u-\alpha)\cos u, \quad y = 2r\sin(u-\alpha)\sin u, \quad z = a.$$

Підставимо до третього з рівнянь (3) вирази t (4) та v (5). Отримаємо z=z.
З третього з рівнянь (3) визначимо t

$$t = 1 - \frac{z}{v}. \tag{14}$$

Виразимо v через праві частини (7), скориставшись (5)

$$v = \frac{2R\varphi(w)\psi(w)}{2R\varphi(w) - f^2(w) - \varphi^2(w)}. \tag{15}$$

Виразимо параметр t через параметр z, підставивши (15) до (14)

$$t = \frac{2R\varphi(w)\psi(w) - (2R\varphi(w) - f^2(w) - \varphi^2(w))z}{2R\varphi(w)\psi(w)}. \tag{16}$$

Нарешті, підставимо t до рівняння конгруенції (3) і отримаємо параметричні рівняння поверхні як сім'ї променів, що проекціюють лінію (7), за умов заміни параметра w на параметр u:

$$x = \frac{\sin u \cos u \{2R\varphi(w)\psi(w) - z[2R\varphi(w) - f^2(w) - \varphi(w)]\}}{\varphi(w)\psi(w)},$$
$$y = \sin^2 u \frac{\{2R\varphi(w)\psi(w) - z[2R\varphi(w) - f^2(w) - \varphi(w)]\}}{\varphi(w)\psi(w)}, \tag{17}$$
$$z = z.$$

Параметричні рівняння кола як проекції шуканої поверхні променями конгруенції (3) на площину $z = a$ з використанням параметра u нами вже отримано (див. (9)). Підстановка правих частин (9) до (17) замість $f(w), \varphi(w), \psi(w)$ відповідно приводить до параметричних рівнянь шуканої поверхні в параметрах $z = const$ – горизонтальні лінії рівня, $u = const$ – прямолінійні промені:

$$x = 2\cos u(R\sin u - \frac{z}{a}(R\sin u - r\sin(u-\alpha))),$$
$$y = 2\sin u(R\sin u - \frac{z}{a}(R\sin u - r\sin(u-\alpha))), \tag{18}$$
$$z = z.$$

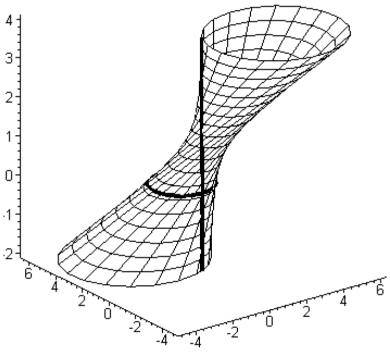


Рис. 3.

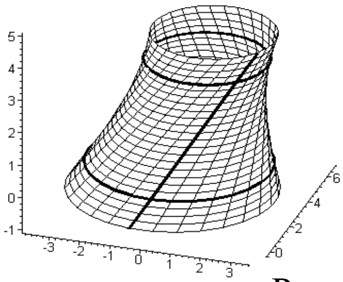


Рис. 4.

На рис. 3 показано поверхню, відповідну параметричним рівнянням (17), за умов виразів $f(w), \varphi(w), \psi(w)$ з врахуванням (9), (12), (13) при $R = 1.5,\ r = 1,\ a = 1,\ \alpha = -\frac{\pi}{4},\quad -\frac{\pi}{4} \le u \le \frac{3\pi}{4},\quad -2 \le z \le 4.$ На рис. 4 показано ту ж саму поверхню, що і на рис. 3, але побудовану за параметричними рівняннями (18), завдяки чому вдалося виділити коло (9). Поверхня є однопорожнинним гіперболоїдом. Значення сталих параметрів: $R = 3,\ r = 2,\ a = 4,\ \alpha = -\frac{\pi}{4}$. Інтервал змінних: $-\frac{\pi}{4} \le u \le \frac{3\pi}{4},\quad -1 \le z \le 6.$

Повернемось до рівнянь (18). При $\alpha = 0$ та при $\alpha = \pi$ вони набувають вигляду

$$x = \frac{\sin 2u}{a}[R(a-z) \pm zr],\quad y = \frac{2\sin^2 u}{a}[R(a-z) \pm zr],\quad z = z. \tag{19}$$

Складемо тангенціальне рівняння поверхні (19)

$$\left(X\sin 2u - Y\cos 2u + 2Z\frac{R\pm r}{a}\sin^2 u - 2R\sin^2 u\right)\left[Ra - z(R\pm r)\right] = 0. \qquad (20)$$

З рівності нулеві виразу у круглих дужках випливає: поверхня (20) розгортна, оскільки до цього виразу не входить *z*, тобто, дотична площина уздовж прямолінійних променів $u = const$ не змінюється. Якщо в цьому виразі покласти *X=0*, *Y=0*, то отримаємо $Z = \frac{Ra}{R\pm r}$, що означає, що всі дотичні площини перетинають вісь OZ у одній точці $(0,\ 0,\ \frac{Ra}{R\pm r})$. До такого ж висновку приходимо, прирівнявши нулю вираз у квадратних дужках рівняння (20).

Таким чином, при $\alpha = 0$ маємо похилий круговий конус, на якому фокальне коло (2) і коло-проекція (13) розташовані по один бік від вершини (рис. 5), при $\alpha = \pi$ - по різні боки (рис. 6).

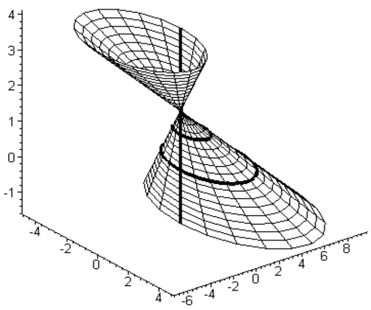


Рис. 5. Конус *(*$\alpha = 0$*)*

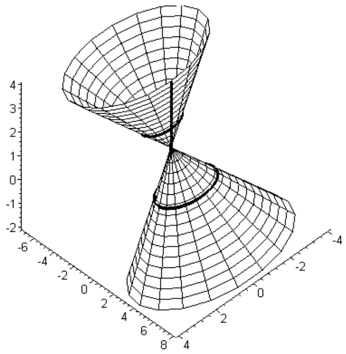


Рис. 6. Конус *(*$\alpha = \pi$*)*

Висновок. Наведена методика складання параметричних рівнянь конгруенцій та їх поверхонь дозволяє використати сучасні засоби комп’ютерної графіки для візуалізації поверхонь з виділенням їх визначника і характеристичної властивості ліній частості.

Література:

1. Sturm R. Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Linien geometrie in synthetische Behandlung. T. 1. Leipzig, 1892.
2. Reye T. Die Geometrie der Lage. T. 1-3. Leipzig, 1910.
3. Михайленко В.Е., Обухова В.С., Подгорный А.Л. Формообразование оболочек в архитектуре. К.: «Будівельник», 1972. - 270 с.
4. Кочеткова А.Л. Конструирование линейчатых поверхностей 3-го и 2-го порядка из линейной конгруэнции // Труды УДН, Т. 26. Вып. 3. - М.: 1967.
5. Кочеткова А.Л. Конструирование линейчатых поверхностей высших порядков из конгруэнций. // Труды УДН, Т. 26. Вып. 3. - М.: 1967.