УДК 515.2

О.В. Сименко, канд. техн. наук
Донецький національний технічний університет, Красноармійський індустріальний інститут (м. Красноармійськ)

ОБОЛОНКИ ІЗ СЕРЕДИННОЮ ЦИКЛІЧНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ІОАХІМСТАЛЯ

В роботі пропонуються аналітичні і комп'ютерно-графічні моделі циклічних поверхонь Іоахімсталя, що проходять через подану лінію, та спосіб віднесення їх до ліній кривини. Моделі базуються на проекціюванні лінії конгруенцією кіл зі спільною радикальною віссю.

Постановка проблеми. Візуально виразні з точки зору сприйняття поверхні, віднесені до ліній кривини, перспективні щодо їх використання як конструкцій архітектурних оболонок. Збігання координатної сітки з сіткою ліній кривини сприяє застосуванню розрахунків на міцність, оскільки дозволяє описати пружно-деформований стан оболонки рівняннями у найпростішому вигляді

Аналіз досягнень і публікацій. Поверхні Іоахімсталя, як поверхні оболонок, досліджувались щодо їх подання в роботах [1-6] і щодо розрахунку на міцність – в роботах [1, 5]. В роботі [6] було показано, що параметричні рівняння конгруенції кіл, спільною радикальною віссю якої є вісь *OZ*, а до визначника, крім радикальної осі, входить коло в площині *ZOX* радіуса r з центром на осі *OX*, розташованим на відстані a від початку координат, мають вигляд

$$x=(a_i+\sqrt{a_i^2-(a^2-r^2)}cost)cosv,$$
$$y=(a_i+\sqrt{a_i^2-(a^2-r^2)}cost)sinv, \qquad (1)$$
$$z=\sqrt{a_i^2-(a^2-r^2)}sint,$$

де

$$a_i=a-\frac{1}{2u}, \quad r_i=\sqrt{a_i^2-(a^2-r^2)} - \qquad (2)$$

відповідно абсциса центра та радіус довільного кола, що належить пучку кіл зі спільною радикальною віссю *OZ* в площині *ZOX*, до якого входить коло – визначник, u – параметр пучка кіл.

Обертанням пучка навколо осі *OZ* (v – параметр обертання) отримуємо конгруенцію кіл (1). При цьому центри кіл всуцільну покривають площину *XOY*.

В тій же площині *ZOX* існує ще один пучок кіл, з центрами на осі *OZ*, спряжений з першим пучком. Кожне коло кожного з цих двох пучків ортогональне усім колам іншого пучка. При обертанні пучків навколо осі *OZ* другий пучок утворює сфери, перший, як було вже сказано, конгруенцію кіл, що є ортогональними траєкторіями цих сфер.

Для першого пучка кіл

$$a_i^2 - r_i^2 = a^2 - r^2 = d = const. \tag{3}$$

Для спряженого пучка

$$a_j^2 - r_j^2 = r^2 - a^2 = -d = const. \tag{4}$$

Звідки випливає, що спряжений пучок можна подавати сферою радіуса a з аплікатою центра r.

Постановка задачі. Виходячи з параметричних рівнянь (1), (2) конгруенції кіл, отримати загальні параметричні рівняння поверхонь Іоахімсталя з циклічним каркасом ліній кривини за умов її проходження через наперед подану лінію і висвітлити шлях віднесення цих поверхонь до ліній кривини.

Основна частина. Знайдемо параметричні рівняння кола конгруенції (1), (2), що проекціює точку M (x_M, y_M, z_M). Для цього підставимо x_M, y_M, z_M у ліві частини рівнянь (1) і розв'яжемо (1), (2) відносно $sin v, cos v, u$. Отримаємо

$$cos v_M = \frac{x_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}, \quad sin v_M = \frac{y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}},$$
$$u = -\frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{(\sqrt{x_M^2 + y_M^2} - a)^2 + z_M^2 - r^2}. \tag{5}$$

З врахуванням (5), (2) рівняння (1) набувають вигляду

$$x=\frac{\left\{x_M^2+y_M^2+z_M^2+a^2-r^2+\sqrt{\left[x_M^2+y_M^2-(a^2-r^2)\right]^2+z_M^2\left[z_M^2+2(x_M^2+y_M^2+a^2-r^2)\right]}\cos t\right\}x_M}{2(x_M^2+y_M^2)},$$

$$y=\frac{\left\{x_M^2+y_M^2+z_M^2+a^2-r^2+\sqrt{\left[x_M^2+y_M^2-(a^2-r^2)\right]^2+z_M^2\left[z_M^2+2(x_M^2+y_M^2+a^2-r^2)\right]}\cos t\right\}y_M}{2(x_M^2+y_M^2)},$$

$$z=\frac{\sqrt{\left[x_M^2+y_M^2-(a^2-r^2)\right]^2+z_M^2\left[z_M^2+2(x_M^2+y_M^2+a^2-r^2)\right]}\sin t}{2\sqrt{x_M^2+y_M^2}}. \qquad (6)$$

Примусимо точку М описувати лінію

$$x=f(w), \quad y=\varphi(w), \quad z=\psi(w) \qquad (7)$$

Підстановка до (6) замість x_M, y_M, z_M правих частин (7) приводить до параметричних рівнянь поверхні як сім'ї кіл конгруенції (1), (2), що проекціюють лінію (7)

$$x=\frac{\left\{f^2+\varphi^2+\psi^2+a^2-r^2+\sqrt{\left[f^2+\varphi^2-(a^2-r^2)\right]^2+\psi^2\left[\psi^2+2(f^2+\varphi^2+a^2-r^2)\right]}\cos t\right\}f}{2(f^2+\varphi^2)},$$

$$y=\frac{\left\{f^2+\varphi^2+\psi^2+a^2-r^2+\sqrt{\left[f^2+\varphi^2-(a^2-r^2)\right]^2+\psi^2\left[\psi^2+2(f^2+\varphi^2+a^2-r^2)\right]}\cos t\right\}\varphi}{2(f^2+\varphi^2)},$$

$$z=\frac{\sqrt{\left[f^2+\varphi^2-(a^2-r^2)\right]^2+\psi^2\left[\psi^2+2(f^2+\varphi^2+a^2-r^2)\right]}\sin t}{2\sqrt{f^2+\varphi^2}}. \qquad (8)$$

Примітимо, що у поданні поверхні рівняннями (8) у загальному випадку лише сім'я координатних ліній $w=const$, що складається із кіл, розташованих у площинах пучка з віссю *OZ*, збігається з лініями кривини. І лише у частковому випадку, коли лінія (7) належить одній із сфер, отриманих обертанням спряженого пучка кіл навколо осі *OZ*, обидві сім'ї координатних ліній $w=const$ (кола) та $t=const$ (сферичні лінії) складають сітку з ліній кривини.

Приклад 1. Скласти параметричні рівняння поверхні, як сім'ї кіл конгруенції (1), (2), що проекціюють гвинтову лінію, ось якої збігається з віссю *OZ*.

$$x=r_1\cos w, \quad y=r_1\sin w, \quad z=\frac{h}{2\pi}w. \qquad (9)$$

Засобами комп'ютерної графіки візуалізувати поверхню, виділивши лінію (9).

Розв'язання. Кінцеві параметричні рівняння шуканої поверхні отримаємо підстановкою правих частин (9) до (8)

$$x=\frac{\left\{r_1^2+\left(\frac{hw}{2\pi}\right)^2+a^2-r^2+\sqrt{\left[r_1^2-(a^2-r^2)\right]^2+\left(\frac{hw}{2\pi}\right)^2\left[\left(\frac{hw}{2\pi}\right)^2+2(r_1^2+a^2-r^2)\right]}\cos t\right\}\cos w}{2r_1},$$

$$y=\frac{\left\{r_1^2+\left(\frac{hw}{2\pi}\right)^2+a^2-r^2+\sqrt{\left[r_1^2-(a^2-r^2)\right]^2+\left(\frac{hw}{2\pi}\right)^2\left[\left(\frac{hw}{2\pi}\right)^2+2(r_1^2+a^2-r^2)\right]}\cos t\right\}\sin w}{2r_1},$$

$$z=\frac{\sqrt{\left[r_1^2-(a^2-r^2)\right]^2+\left(\frac{hw}{2\pi}\right)^2\left[\left(\frac{hw}{2\pi}\right)^2+2(r_1^2+a^2-r^2)\right]}\sin t}{2r_1}.$$

На рис. показано шукану поверхню при значеннях сталих параметрів $a=3,\quad r=1,\quad r_1=2$ $h=0{,}5$ та інтервалах змінних $0\le t\le 2\pi,$ $\frac{\pi}{4}\le w\le\frac{7}{4}\pi$.

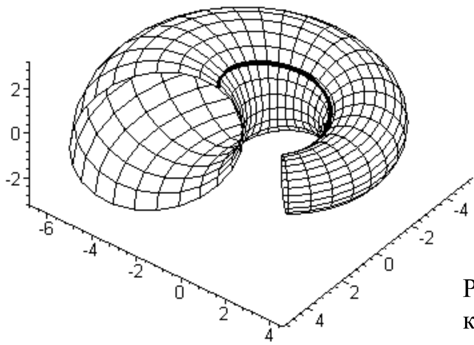


Рис. Поверхня, що проекціює лінію (9)

Приклад 2. Скласти рівняння поверхні Іоахімсталя, однією сім'єю ліній кривини якої є кола, а іншою – сферичні лінії. Поверхня проходить через сферичну лінію

$$f(w)=a\cos(w_0+c\sin(wn))\cos w,$$

$$\varphi(w)=a\cos(w_0+c\sin(wn))\sin w, \tag{10}$$

$$\psi(w)=a\sin(w_0+c\sin(wn))+r,$$

де a, r – відстань від радикальної осі *OZ* до центра, r – радіус кола – визначника конгруенції ортогональних траєкторій та сім'ї сфер, отриманих обертанням двох спряжених пучків кіл;

w_0 – широта початкової паралелі, що є криволінійною віссю синусоїдальної сферичної лінії, аналога осі абсцис плоскої синусоїдальної кривої;

c – криволінійна амплітуда синусоїдальної сферичної лінії – аналог амплітуди плоскої синусоїдальної кривої;

n – ціле, кількість складок;

w – криволінійна координата на сфері сім'ї, отриманої обертанням спряженого пучка.

Показати низку зображень поверхні при різних значеннях параметрів, перспективних щодо їх використання у проектуванні оболонок.

Розв'язання. Параметричні рівняння шуканої поверхні отримаємо з (8) підстановкою виразів (10) та позначень

$$\alpha(w) = f^2 + \varphi^2 + \psi^2 + a^2 - r^2 = 2a(a + r\sin(w_0 + c\sin(wn))),$$
$$\beta(w) = f^2 + \varphi^2 = a^2\cos^2(w_0 + c\sin(wn)),$$
$$a^2 - r^2 = d.$$

Ці рівняння зручні тим, що вони віднесені до ліній кривини

$$x = \frac{(\alpha(w) + \sqrt{(\beta(w) - d)^2 + \psi^2(w)(\psi^2(w) + 2(\beta(w) + d))}\cos t)f(w)}{2\beta(w)},$$

$$y = \frac{(\alpha(w) + \sqrt{(\beta(w) - d)^2 + \psi^2(w)(\psi^2(w) + 2(\beta(w) + d))}\cos t)\varphi(w)}{2\beta(w)}, \qquad (11)$$

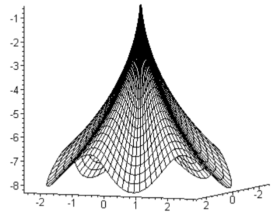
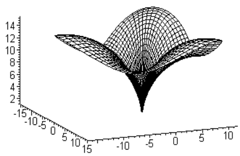
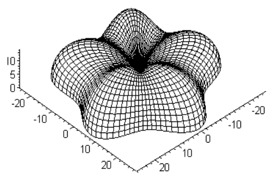
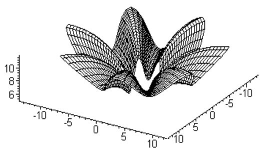
$$z = \frac{\sqrt{(\beta(w) - d)^2 + \psi^2(w)(\psi^2(w) + 2(\beta(w) + d))}\sin t}{2\sqrt{\beta(w)}},$$

Комп'ютерно-графічні зображення поверхні (11) при різних значеннях параметрів показано у таблиці:

Поверхні Іоахімсталя, подані сферичною лінією

$$(0 \le w \le 2\pi,\ d = a^2 - r^2)$$

Таблиця

№	a	r	w_0	c	n	Інтервал t	Зображення
1	5	5	$\frac{\pi}{4}$	0,07	5	$3{,}2 \le t \le 3{,}8$	
2	5	5	$\frac{\pi}{4}$	0,15	3	$1{,}5 \le t \le 3$	
3	5	5	$\frac{\pi}{4}$	0,1	5	$0 \le t \le 2{,}8$	
4	5	3	$\frac{\pi}{4}$	0,15	7	$1{,}5 \le t \le 2{,}4$	

Висновок. Отримані параметричні рівняння поверхонь Іоахімсталя зручні тим, що формою поверхні можна керувати зміною значень числових параметрів. Крім того, їх віднесення до ліній кривини сприяє застосуванню класичних методів розрахунку на міцність оболонок, описаних цим класом поверхонь.

Список літератури

1. Иванов В.Н. Геометрические исследования, формообразование, разработка методов расчета и численный анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек сложной формы с системой плоских координатных линий. Автореф. дис… д-ра техн. наук. 05.23.17/РУДН. – М.: 2006. - 33 с. **2**. Фролов О.В. Конструювання поверхонь Іоахімсталя зануренням поданої лінії до конгруенції ортогональних траєкторій // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Вип. 73. – К.: КНУБА. 2003. – С. 220-227. **3**. Фролов О.В. Моделі поверхонь Іоахімсталя, віднесені до ліній кривини // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 18. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – С. 101-107. **4**. Пилипака С.Ф. Конструювання каналових поверхонь Іоахімсталя за заданими вихідними умовами // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Вип. 65. – К.: КНУБА. 1999. – С. 87-90. **5**. Наср Юнес Ахмед Аббуши. Геометрия, конструирование и исследование напряженно-деформированного состояния оболочек в форме каналовых поверхностей Иоахимсталя. Автореф. дис… канд. техн. наук. 05.23.17 / РУДН. – М.: 2002. – 16 с. **6**. Сименко О.В. Проекціювання конгруенцією кіл із спільною радикальною віссю // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Вип. 73. – К.: КНУБА. 2003. – С. 260-266.

Отримано XX.XX.XXXX, ХДУХТ, Харків