Сименко О.В., к.т.н., доц..
Красноармійський індустріальний інститут ДонНТУ, Україна

ВІДНЕСЕННЯ ЦИКЛІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ ІОАХІМСТАЛЯ ДО ЛІНІЙ КРИВИНИ

Пропонується спосіб віднесення до ліній кривини циклічної поверхні Іоахімсталя, поданої визначником, до складу якого входять спільна радикальна вісь плоского пучка кіл, одне із кіл цього пучка і довільна лінія, через яку мусить пройти поверхня.

Постановка проблеми. Задачу віднесення поверхні до ліній кривини у кінцевому вигляді розв'язано лише для досить вузького класу поверхонь, лінії кривини яких мають спеціальні властивості: для розгортних поверхонь, різьблених поверхонь Монжа, циклід Дюпена, поверхонь, з двома сім'ями плоских ліній кривини. Оскільки рівняння пружно-деформованого стану в розрахунках оболонок набувають найкомпактнішого вигляду за умов віднесення серединної поверхні до ліній кривини, сформульована задача не втрачає актуальності, особливо у випадках, коли до поверхні поставлено додаткові умови.

Аналіз досягнень і публікацій. Параметричні рівняння поверхонь, віднесених до ліній кривини, отримано в [1] для різьблених поверхонь Монжа, утворених плоским меридіаном, площина якого перекочується без ковзання по циліндру обертання, а також для конуса, утвореного фіксованою твірною конуса обертання, що перекочується по іншому конусу обертання. В роботі [2] задачу розв'язано для циклічних поверхонь Іоахімсталя і для циклід Дюпена. В [3] віднесення до ліній кривини поверхонь Іоахімсталя і різьблених поверхонь Монжа здійснено за умов їх натурального представлення.

В [4] було отримано параметричні рівняння пучка кіл зі спільною радикальною віссю OZ в площині ZOX

$$x = a_i + r_i\, cos\, t, \quad y = a_i + r_i\, sin\, t, \quad z = r_i\, sin\, t, \tag{1}$$

де a_i, r_i – відповідно абсциса центра та радіус довільного кола пучка. Для поданого пучка кіл з радикальною віссю OZ значення a_i та r_i є залежними, так що

$$a_i^2 - r_i^2 = c = const. \tag{2}$$

Таким чином, пучок кіл зі спільною радикальною віссю OZ з центрами на осі OX можна подати колом (a, r). Залежність a_i та r_i від параметра u пучка

$$a_i = \left(a - \frac{1}{2u}\right), \quad r_i = \sqrt{\left(a - \frac{1}{2u}\right)^2 - a^2 + r^2}\,. \tag{3}$$

Постановка задачі. Скласти параметричні рівняння поверхні Іоахімсталя, циклічний каркас якої належить конгруенції кіл, отриманої обертанням пучка навколо осі *OZ* і яка проходить через довільну лінію

$$x = f(w), \quad y = \varphi(w), \quad z = \psi(w). \tag{4}$$

Віднести поверхню до ліній кривини.

Основна частина досліджень. Відомо, що існує другий пучок кіл, спряжений з пучком (1). Центри кіл цього пучка розташовані на осі *OZ*, а спільною радикальною віссю пучка є вісь *OX*. Кожне коло кожного з двох спряжених пучків ортогональне всім колам іншого пучка. Для пучка спряженого з (1) апліката центра b_j і радіус r_j кола, що належить пучку, залежать від параметра $\bar{u}$:

$$b_j = b - \frac{1}{2\bar{u}}, \quad r_j = \sqrt{\left(b - \frac{1}{2\bar{u}}\right)^2 - b^2 + \bar{r}^2}\,. \tag{5}$$

Умова ортогональності кіл

$$(x - a_1)^2 + (z - b_1)^2 - r_1^2 = 0,$$

$$(x - a_2)^2 + (z - b_2)^2 - r_2^2 = 0$$

має вираз [5]

$$2a_1a_2 + 2b_1b_2 - a_1^2 - b_1^2 + r_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + r_2^2 = 0\,. \tag{6}$$

У випадку, коли кола належать спряженим пучкам

$$a_1 = a_i, \quad b_1 = 0, \quad r_1 = r_i,$$

$$a_2 = 0, \quad b_2 = b_j, \quad r_2 = r_j$$

і умова (6) зводиться до

$$a_i^2 - r_i^2 = -\left(b_j^2 - r_j^2\right). \tag{7}$$

Звідси висновок: степень точок осі *OZ* відносно кіл пучка (1) і точок осі *OX* відносно спряженого пучка рівні за абсолютною величиною і протилежні за знаком. По-друге, обидва пучки будуть визначені поданням абсциси *a* центра і радіуса *r* кола, що належить першому пучку (1). Згідно з (7) тим самим подається коло спряженого пучка з центром на осі *OZ*, аплікати b_j і радіус r_j якого

$$b_j = r, \quad r_j = a\,. \tag{8}$$

Обертанням навколо осі *OZ* перший пучок перетворюється у суцільну конгруенцію кіл, спряжений пучок – у лінійну конгруенцію кіл [6]. Центри кіл першої конгруенції всуцільну покривають площину *XOY*, центри кіл другої конгруенції розташовані на осі *OZ*, а самі кола утворюють сім'ю сфер. Через довільну точку простору проходить єдине коло кожної з конгруенцій за винятком точок, що належать осі *OZ* для першої і площині *XOY* для другої, де відповідні кола невизначені.

Виходячи з (3), складемо параметричні рівняння суцільної конгруенції кіл

$$x = (a_i + r_i \cos t)\cos v, \quad y = (a_i + r_i \cos t)\sin v, \quad z = r_i \sin t. \tag{9}$$

Оскільки a_i та r_i залежать від u (див.(3)) в рівняннях (9) два параметра u і v конгруенції і один t – параметр положення точки на колі (u, v) конгруенції. Знайдемо вирази параметрів u, v конгруенції для кола, що проходить через фіксовану (неособливу) точку $M(x_M, y_M, z_M)$.

Для цього ліві частини рівнянь (9) замінимо на x_M, y_M, z_M. З перших двох рівнянь знайдемо

$$\cos v_M = \frac{x_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}, \quad \sin v_M = \frac{y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}. \tag{10}$$

Легше за все знайти u, виходячи з рівняння пучка кіл з центрами на осі OX, поданого віссю OZ як радикальною віссю та колом (a, r). Якщо $s_1 = 0$ - рівняння радикальної осі (в нашому випадку $s_1 = x$), а $s_2 = 0$ - рівняння кола (a, r) $\left(s_2 = (x-a)^2 + z^2 - r^2\right)$, то рівняння пучка кіл [5]

$$x + u\left(x^2 - 2ax + a^2 + z^2 - r^2\right) = 0. \tag{11}$$

Переходячи від рівняння пучка (11) до рівняння конгруенції замінимо x на $\sqrt{x^2 + y^2}$ і отримаємо

$$u = -\frac{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}{(\sqrt{x_M^2 + y_M^2} - a)^2 + z_M^2 - r^2}. \tag{12}$$

Примусимо точку M рухатись у просторі по лінії (4). Кожному положенню точки M відповідатиме коло конгруенції (9). Замінюючи x_M, y_M, z_M на праві частини рівнянь (4) у виразах (10) та (12), підставивши замість u праву частину (12) до (3), нарешті, здійснивши кінцеві підстановки до рівняння конгруенції (9), після перетворень отримаємо:

$$x = \frac{\left\{f^2 + \varphi^2 + \psi^2 + a^2 - r^2 + \sqrt{\left[f^2 + \varphi^2 - (a^2 - r^2)\right]^2 + \psi^2\left[\psi^2 + 2(f^2 + \varphi^2 + a^2 - r^2)\right]}\cos t\right\} f}{2(f^2 + \varphi^2)},$$

$$y = \frac{\left\{f^2 + \varphi^2 + \psi^2 + a^2 - r^2 + \sqrt{\left[f^2 + \varphi^2 - (a^2 - r^2)\right]^2 + \psi^2\left[\psi^2 + 2(f^2 + \varphi^2 + a^2 - r^2)\right]}\cos t\right\} \varphi}{2(f^2 + \varphi^2)}, \tag{13}$$

$$z = \frac{\sqrt{\left[f^2 + \varphi^2 - (a^2 - r^2)\right]^2 + \psi^2\left[\psi^2 + 2(f^2 + \varphi^2 + a^2 - r^2)\right]}\sin t}{2\sqrt{f^2 + \varphi^2}} \text{ -}$$

параметричні рівняння поверхні, що проходить через лінію (4).

Приклад 1. Побудувати поверхню Іоахімсталя за параметричними рівняннями (13) за умови її проходження через лінію

$$x = r_1 \cos w, \quad y = r_1 \sin w, \quad z = \frac{h}{2\pi} w \tag{14}$$

при $a = 3,\ r = 1,\ r_1 = 2,\ h = 0{,}5$.

Розв’язання. Підставимо до (13) замість f,φ,ψ праві частини рівнянь (14) відповідно та числові значення інших параметрів. На рис. 1 показано шукану поверхню при $0 \le t \le 2\pi,\ \dfrac{\pi}{4} \le w \le \dfrac{7}{4}\pi$.

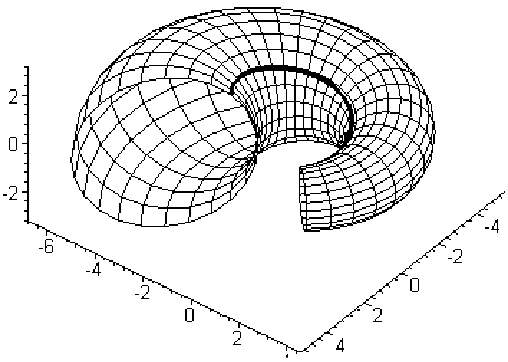

Рис. 1. Поверхня, що проекціює лінію (14)

Розглянемо властивості конгруенцій, утворених обертанням навколо OZ пучка (1) та спряженого з ним пучка кіл. Відомо, що загальна схема утворення поверхні Іоахімсталя полягає у виділенні поверхні з конгруенції ліній, ортогональних до сім’ї сфер з центрами на прямій [7]. Одна сім’я ліній кривини такої поверхні – ортогональні траєкторії, друга сім’я – сферичні лінії перетину сфер з ортогональними траєкторіями. В нашому випадку ортогональними траєкторіями є кола першої конгруенції, а кола другої конгруенції складають сім’ю сфер з центрами на OZ. Звідси висновок: поверхня (13) є циклічна поверхня Іоахімсталя, виділена з конгруенції кіл (9) зануренням лінії (4). Тільки сім’я кіл $w = const$ збігається із сім’єю координатних ліній. Щоб віднести поверхню (13) до сітки ліній кривини, необхідно параметр t замінити на параметр r_j шляхом проекціювання колами конгруенції (9) лінії (4) на сім’ю сфер (b_j, r_j).

Введемо позначення.

$$\alpha = f^2 + \varphi^2, \quad \beta = a^2 - r^2, \quad \gamma = \alpha + \psi^2 + \beta,$$
$$\delta = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \psi^2\left[\psi^2 + 2(\alpha + \beta)\right]}. \tag{15}$$

Зважаючи на ці позначення, рівняння (13) запишемо у вигляді

$$x = (\gamma + \delta\cos t)\frac{f}{2\alpha}, \quad y = \left((\gamma + \delta\cos t)\frac{\varphi}{2\alpha}\right), \quad z = \frac{\delta\sin t}{2\sqrt{\alpha}}. \tag{16}$$

Рівняння сім’ї сфер, на які розшаровується лінійна конгруенція

$$x = r_j\cos\bar{t}\cos v, \quad y = r_j\cos\bar{t}\sin v, \quad z = b_j + r_j\sin\bar{t}. \tag{17}$$

Оскільки v – спільний параметр для рівнянь (10) і (17), візьмемо до уваги підстановки на шляху перетворення (9) у (17), порівняємо праві частини рівнянь (9) та (17) після скорочення на $\cos v = \dfrac{f}{\sqrt{\alpha}}$.

$$\left(\gamma+\delta\cos t\right)\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}=r_j\cos\bar{t}\,. \tag{18}$$

З ортогональності кіл, що належать різним конгруенціям випливає

$$\bar{t}=t+\frac{\pi}{2}\,. \tag{19}$$

В результаті рівняння (17) набуває вигляду

$$2\sqrt{\alpha}r_j\sin t+\delta\cos t=\gamma\,,$$

яке можна представити в іншій формі, а саме:

$$\sqrt{4\alpha r_j^2+\delta^2}\,\sin\left(t+arctg\,\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}\,r_j}\right)=\gamma\,,$$

звідки

$$t=\arcsin\frac{\gamma}{\sqrt{4\alpha r_j^2+\delta^2}}+arctg\,\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}r_j}\,. \tag{20}$$

Віднесення поверхні Іоахімсталя (13) до ліній кривини можна здійснити шляхом підстановки виразу t (20) до рівнянь (16) і отримати сітку координатних ліній кривини $r_j=const,w=const$.

Приклад 2. Віднести поверхню (13), що проходить через лінію (14) до ліній кривини при $a=3,\ r=1,\ r_1=2,\ h=10$.

Розв'язання. На рис. 2 показано варіант з використанням рівнянь (16), до яких здійснено підстановки (14), (15), (20).

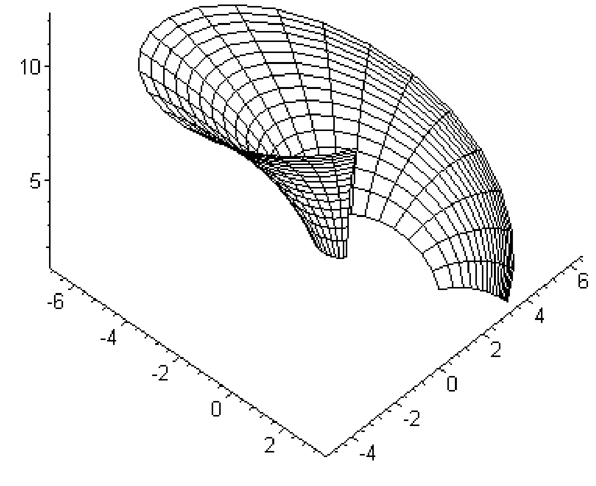

Рис. 2. Поверхня, що проекціює лінію (14)

Висновок. Вперше розроблено спосіб віднесення до координатній сітки з ліній кривини циклічної поверхні Іоахімсталя за умови її проходження через подану лінію.

Література.

1. Скидан И.А. Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах. Дис… докт. тех.. наук: 05.01.01 – М., 1989. – 340 с.
2. Иванов В.Н. Геометрические исследования, формообразование, разработка методов расчета и численный анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек сложной формы с системой плоских координатных линий. Дис. докт. тех. наук: 05.23.17. – М., 2006. – 357 с.
3. Пилипака С.Ф. Конструювання поверхонь та їх неперервне згинання в кінцеві форми на основі управління натуральними параметрами. Дис.. докт. тех.. наук: 05.01.01. – К., 2000. – 380 с.
4. Сименко О.В. Проекціювання конгруенцією кіл із спільною радикальною віссю // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 73. Відповід. ред. В.Є. Михайленко. - К.: КНУБА. 2003. - С. 260-266.
5. Клейн Ф. Высшая геометрия. - М. - Л.: Гос. объед. научн.-тех. изд-во, 1939. - 399 с.
6. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей. Ч. II. М.-Л.: ОГИЗ – ГОСТЕХИЗДАТ. – 1948. – 407 с.
7. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии М.: изд-во иностр. лит-ры, 1960. – 559 с.