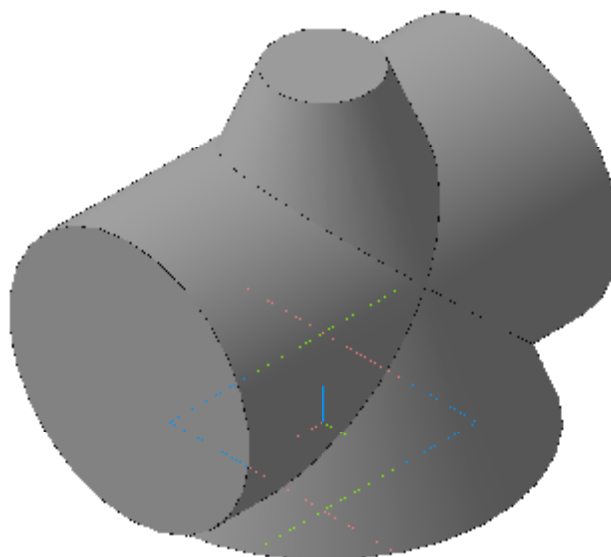


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**  
**(РОБОЧИЙ ЗОШИТ)**  
Частина 2



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**  
**(РОБОЧИЙ ЗОШИТ)**  
**Частина 2**

**РОЗГЛЯНУТО**

на засіданні кафедри нарисної  
геометрії та інженерної графіки  
Протокол № 8 від 08.04.2008 р.

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

на засіданні навчально – видавничої  
ради ДонНТУ  
Протокол № 4 від 19.05. 2008 р.

УДК 515

Нарисна геометрія. (Робочий зошит). Частина 2 /Укл.: Катькалова О. А., Коломієць А. Ф., Пастернак Д. М. – Донецьк: ДВНЗ ДонНТУ. 2008. –36 с.

Посібник містить навчальний матеріал з нарисної геометрії за темами „Перетин гранних та кривих поверхонь площиною.”, „Перетин прямої лінії з поверхнею” „Взаємний перетин гранних та кривих поверхонь”, „Розгортання поверхонь”. Для студентів напрямку підготовки „Інженерна механіка” вищих технічних навчальних закладів III – IV рівнів акредитації.

Укладачі:

О. А. Катькалова, доц.,  
А. Ф. Коломієць, проф.,  
Д. М. Пастернак, проф.

Рецензент:

М. С. Гармаш, доц.

Відповідальний за випуск:

І. А. Скідан, проф.

© Катькалова О. А., Коломієць А. Ф., Пастернак Д. М.

## ЗМІСТ

Передмова.....	С.
1 Побудова лінії перетину площини з багатогранною поверхнею.....	5
2 Побудова лінії перетину площини з кривою поверхнею.....	6
3 Перетин прямої лінії з багатогранником.....	13
4 Взаємний перетин багатогранників.....	20
5 Перетин прямої лінії з кривою поверхнею.....	23
6 Взаємний перетин двох кривих поверхонь.....	27
7 Метод допоміжних сферичних поверхонь.....	30
	34

## ПЕРЕДМОВА

Питання побудови ліній перетину поверхонь з площинами та іншими поверхнями викладати на лекціях дуже важко через велику складність та насиченість ілюстраційних рисунків. Якщо лектор виконує ілюстраційні рисунки на дошці крейдою, то завдання ускладнюється ще й тим, що студенти не можуть перенести ці рисунки у свій зошит адекватно. Тому результати розв'язування задачі у студентів і на дошці виглядають по різному. Це викликає у студентів багато запитань. Необхідно, щоб у студентів були ідентичні умови задач. Тоді і результати розв'язування будуть більш наближеними до того, який демонструє лектор. Картки, що містяться у нашому посібнику, призначені для використання на лекціях, які читаються з використанням діафільмів чи слайдів, навчального телебачення або комп'ютерних технологій. Повний комплект містить у собі 16 карток, виконаних на форматах А4 та короткі пояснення у письмовій і символній формі. Вони роздаються студентам на лекціях, протягом яких студенти виконують геометричні побудови безпосередньо на цих картках. Частина карток призначена для самостійного розв'язування задач. Як свідчить багаторічний досвід використання цих карток у навчальному процесі, вони допомагають лектору більш наочно і виразно донести до студентів навчальний матеріал і сприяють кращому засвоєнню цього матеріалу студентами. Проте не всі студенти встигають виконати повний обсяг геометричних побудов на лекціях. У такому разі студенти доопрацьовують їх під час самостійної роботи над лекційним матеріалом. Крім того, картки використовуються для підготовки до модульного контролю.

# 1 ПОБУДОВА ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ ПЛОЩИНИ З ГРАННОЮ ПОВЕРХНЕЮ (приклад розв'язування задач)

**Приклад 1.** Побудувати проєкції лінії перетину призми  $ABCDEF$  з площиною  $\Gamma(a||b)$  та розгортку бічної поверхні призми з нанесенням лінії перетину (рис. 2)

**Розв'язування.**

- |                              |                                       |
|------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $ABFE \subset \Delta$     | 6. $ADCE \subset \Lambda$             |
| 2. $\Delta \cap \Gamma = 12$ | 7. $\Lambda \cap \Gamma = 34$         |
| 3. $12 \cap AE = M$          | 8. $34 \cap CD = P$                   |
| 4. $12 \cap BF = N$          | 9. $PM = \Gamma \cap ADCE$            |
| 5. $MN = ABFE \cap \Gamma$   | 10. $\Delta MNP = \Gamma \cap ABCDEF$ |

**Розгортка.** У даному прикладі призма пряма (бічні ребра призми перпендикулярні до площини основи) розташована вертикально. Тому розгортка її бічної поверхні являє собою прямокутник, висота якого дорівнює висоті призми, а ширина становить периметр основи  $ABC$ :

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1. $E_0F_0 = E_1F_1$ | 4. $A_0B_0 = A_1B_1$ |
| 2. $F_0D_0 = F_1D_1$ | 5. $B_0C_0 = B_1C_1$ |
| 3. $D_0E_0 = D_1E_1$ | 6. $C_0A_0 = C_1A_1$ |

$A_0B_0C_0A_0E_0D_0F_0E_0$  – розгортка бічної поверхні призми

- |                      |
|----------------------|
| 7. $E_0M_0 = E_2M_2$ |
| 8. $F_0N_0 = F_2N_2$ |
| 9. $D_0P_0 = D_2P_2$ |

$M_0N_0P_0M_0$  – лінія перетину площини  $\Gamma$  з призмою на її розгортці.

**Приклад 2.** Побудувати проєкції лінії перетину площини  $\Gamma(a||b)$  з похилою призмою  $ABCDEF$  та розгортку бічної поверхні призми з нанесенням лінії перетину (рис. 3).

**Розв'язування.**

- |                                                                             |                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $AD \subset \Delta$                                                      | 5. $BE \subset \Lambda$                                                       |
| 2. $\Delta \cap \Gamma = 12$ ( $\Delta \cap a = 1$ , $\Delta \cap b = 2$ )  | 6. $\Lambda \cap \Gamma = 34$ ( $\Lambda \cap a = 3$ , $\Lambda \cap b = 4$ ) |
| 3. $12 \cap AD = M$ ( $1_2 2_2 \cap A_2 D_2 = M_2$ )                        | 7. $34 \cap BE = N$ ( $3_2 4_2 \cap B_2 E_2 = N_2$ )                          |
| 4. $M_2 M_1 \cap A_1 D_1 = M_1$                                             | 8. $N_2 N_1 \cap B_1 E_1 = N_1$                                               |
| 9. $CF \subset \Sigma$                                                      |                                                                               |
| 10. $\Sigma \cap \Gamma = 56$ ( $\Sigma \cap a = 5$ ; $\Sigma \cap b = 6$ ) |                                                                               |
| 11. $56 \cap CF = P$ ( $5_2 6_2 \cap C_2 F_2 = P_2$ )                       |                                                                               |
| 12. $P_2 P_1 \cap C_1 F_1 = P_1$                                            |                                                                               |

$\Delta MNP$  ( $\Delta M_1 N_1 P_1$ ,  $\Delta M_2 N_2 P_2$ ) – лінія перетину призми  $ABCDEF$  з площиною  $\Gamma$ .

**Розгортка.** Розгортка будується способом розгортання (точки обертаються навколо фронтальних осей):

- |                            |                                               |
|----------------------------|-----------------------------------------------|
| 1. $A_2 A_0 \perp A_2 D_2$ | 5. $C_0 B_0 = C_1 B_1$                        |
| 2. $B_2 B_0 \perp A_2 D_2$ | 6. $B_0 A_0 = B_1 A_1$                        |
| 3. $C_2 C_0 \perp A_2 D_2$ | 7. $C_0 F_0    A_2 D_2    B_0 E_0    A_0 D_0$ |

$$4. A_2C_0 = A_1C_1$$

$$9. F_0E_0 = F_1E_1$$

$A_2C_0B_0A_0D_0E_0F_0D_2$  – розгортка бічної поверхні призми.

$$A_0M_0 = A_2M_2$$

$$B_0N_0 = B_2N_2$$

$$C_0P_0 = C_2P_2.$$

$M_2P_0N_0M_0$  – лінія перетину призми з площиною  $\Gamma$  на розгортці призми.

$$8. D_2F_0 = D_1F_1$$

$$10. E_0D_0 = E_1D_0.$$

**Приклад 3.** Побудувати проєкції лінії перетину піраміди  $SABC$  з площиною  $\Gamma(a||b)$  та розгортку бічної поверхні піраміди з нанесенням лінії перетину (рис. 4).

**Розв’язування.** Лінія перетину піраміди з площиною  $\Gamma$  будується способом ребер:

$$1. CS(C_2S_2) \subset \Sigma(\Sigma_2) \perp \Pi_2.$$

$$2. \Sigma \cap \Gamma = 12 (\Sigma \cap a = 1, \Sigma \cap b = 2).$$

$$3. 12 \cap CS = M (1_12_1 \cap C_1S_1 = M_1; M_1M_2 || C_2C_1, M_1M_2 \cap C_2S_2 = M_2).$$

$$M(M_1, M_2) = CS \cap \Gamma.$$

$$4. AS(A_1S_1) \subset \Delta(\Delta_1) \perp \Pi_1.$$

$$5. \Delta \cap \Gamma = 34 (\Delta \cap a = 3, \Delta \cap b = 4).$$

$$6. 34 \cap AS = N (3_24_2 \cap A_2S_2 = N_2; N_1N_2 || C_1C_2; N_2N_1 \cap A_1S_1 = N_1).$$

$$N(N_1, N_2) = AS \cap \Gamma.$$

$$7. \Delta \cap BCS = 5S (\Delta_1 \cap B_1C_1 = 5_1).$$

$$8. 5_15_2 || C_1C_2; 5_2S_2 \cap 3_24_2 = 6_2; 6_26_1 || C_2C_1; 6_1 \subset 3_14_1). M_6 = \Gamma \cap BCS.$$

$$9. M_6 \cap BS = P (M_26_2 \cap B_2S_2 = P_2; M_16_1 \cap B_1S_1 = P_1).$$

$$P(P_1, P_2) = BS \cap \Gamma.$$

$$10. \Delta MNP(\Delta M_1N_1P_1, \Delta M_2N_2P_2) = \Gamma \cap SABC.$$

**Розгортка.** Розгортка будується способом трикутників (триангуляції). Ребра основи піраміди зображені на  $\Pi_1$  без спотворення ( $ABC || \Pi_1$ ):

$$A_1B_1 = AB; B_1C_1 = BC; A_1C_1 = AC.$$

Дійсна довжина бічних ребер визначена способом прямокутного трикутника.

Вертикальний відрізок  $\bar{S} \bar{S}_0$ , зображений справа від фронтальної проєкції піраміди, ( $S_2 \bar{S} || \Pi_1$ ), становить висоту піраміди і дорівнює різниці висот кінців бічних ребер:

$$\bar{S} \bar{S}_0 = (S_z - A_z) = (S_z - B_z) = (S_z - C_z);$$

$$\bar{S}_0 \bar{A} \perp \bar{S} S_0; \bar{S}_0 \bar{A} = A_1S_1; \bar{S}_0 \bar{B} = B_1S_1; \bar{S}_0 \bar{C} = C_1S_1.$$

$\bar{A}\bar{S}$ ,  $\bar{B}\bar{S}$ ,  $\bar{C}\bar{S}$  - неспотворені зображення бічних ребер піраміди  $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$ .

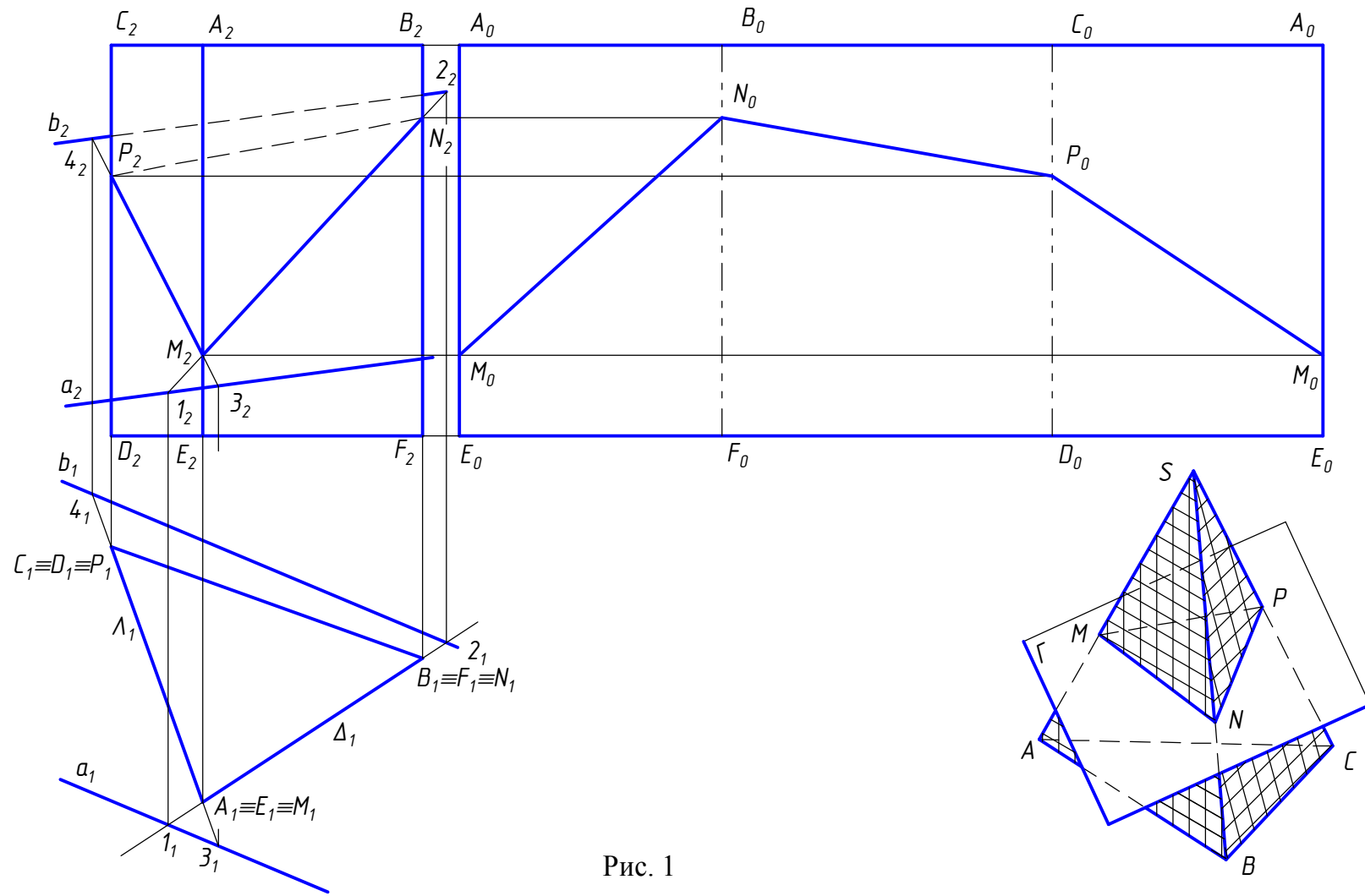


Рис. 1



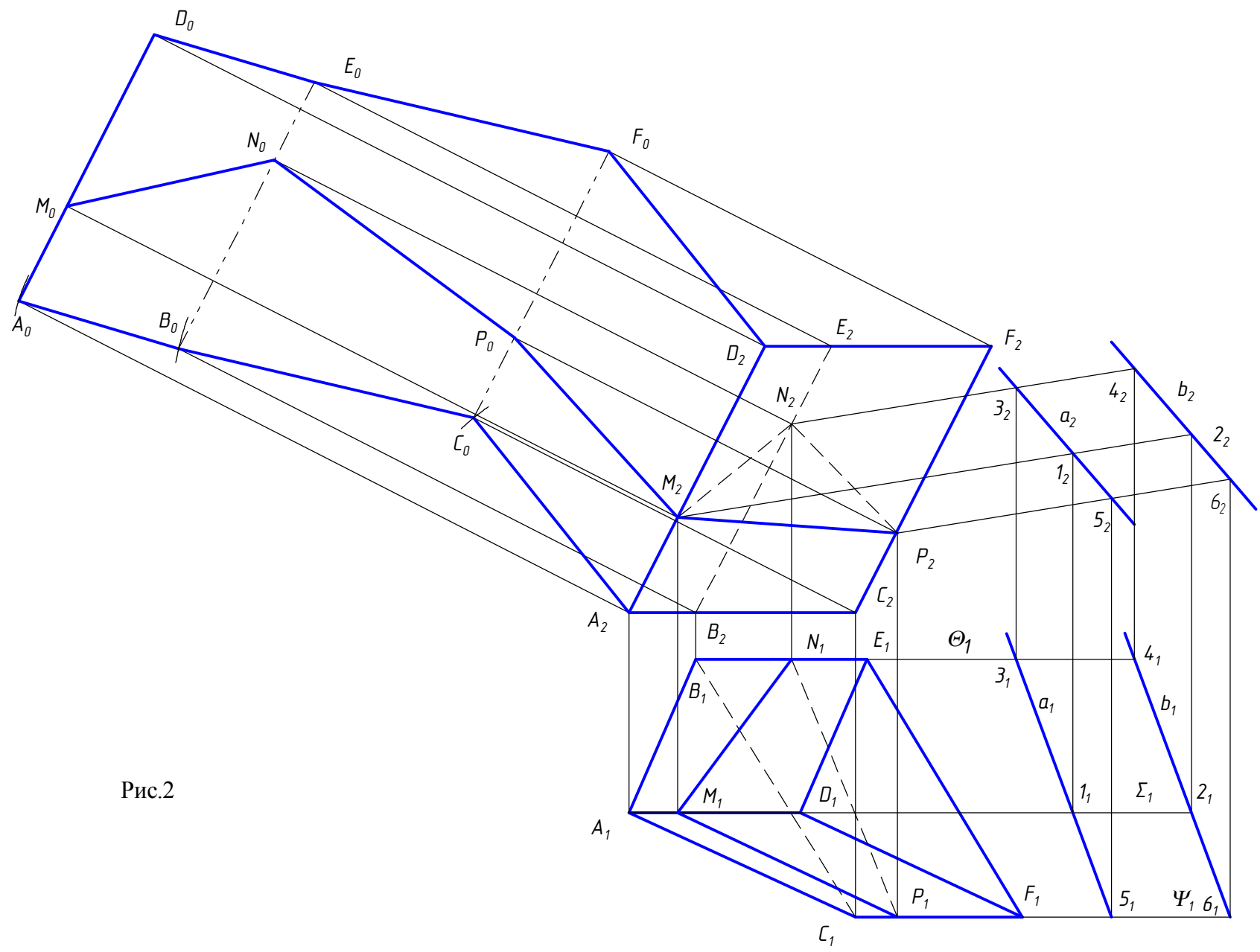


Рис.2

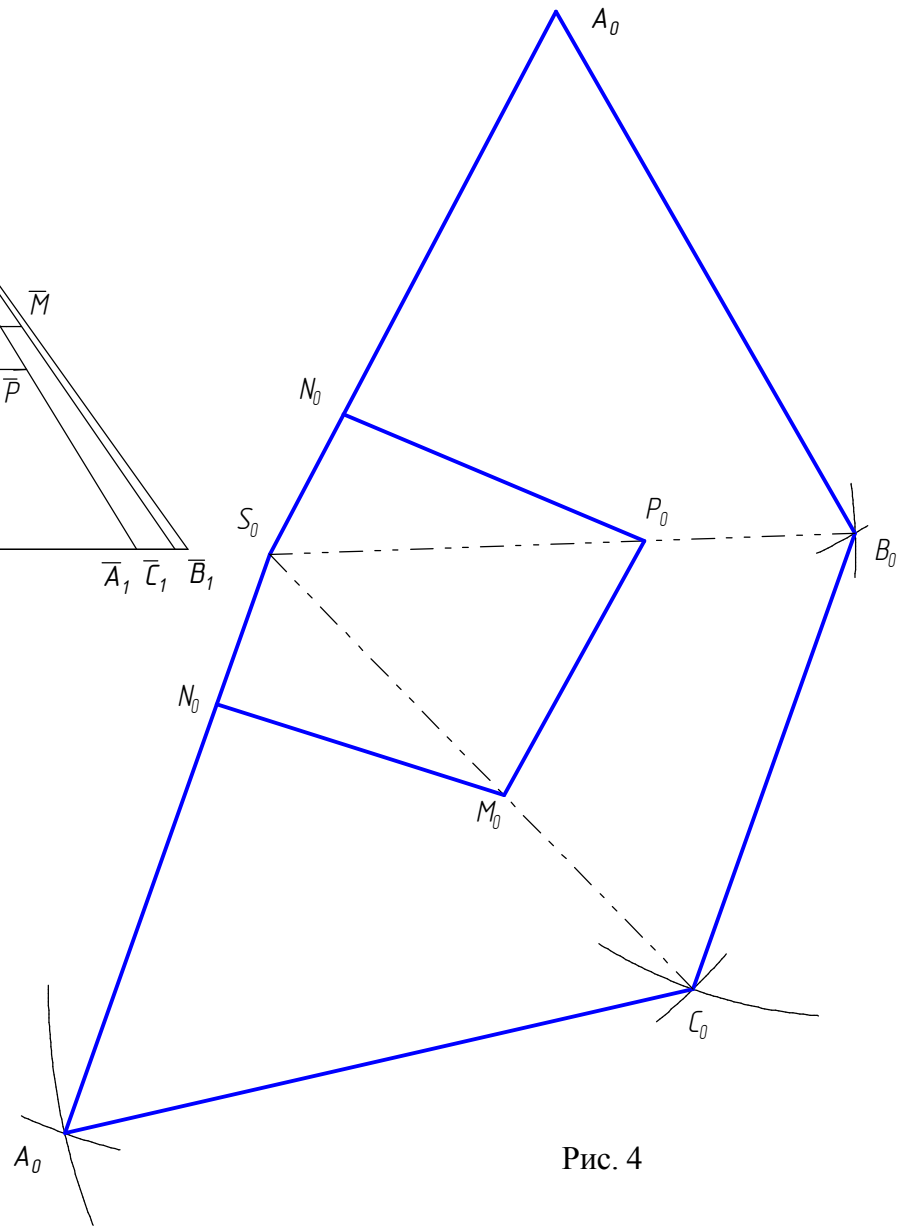
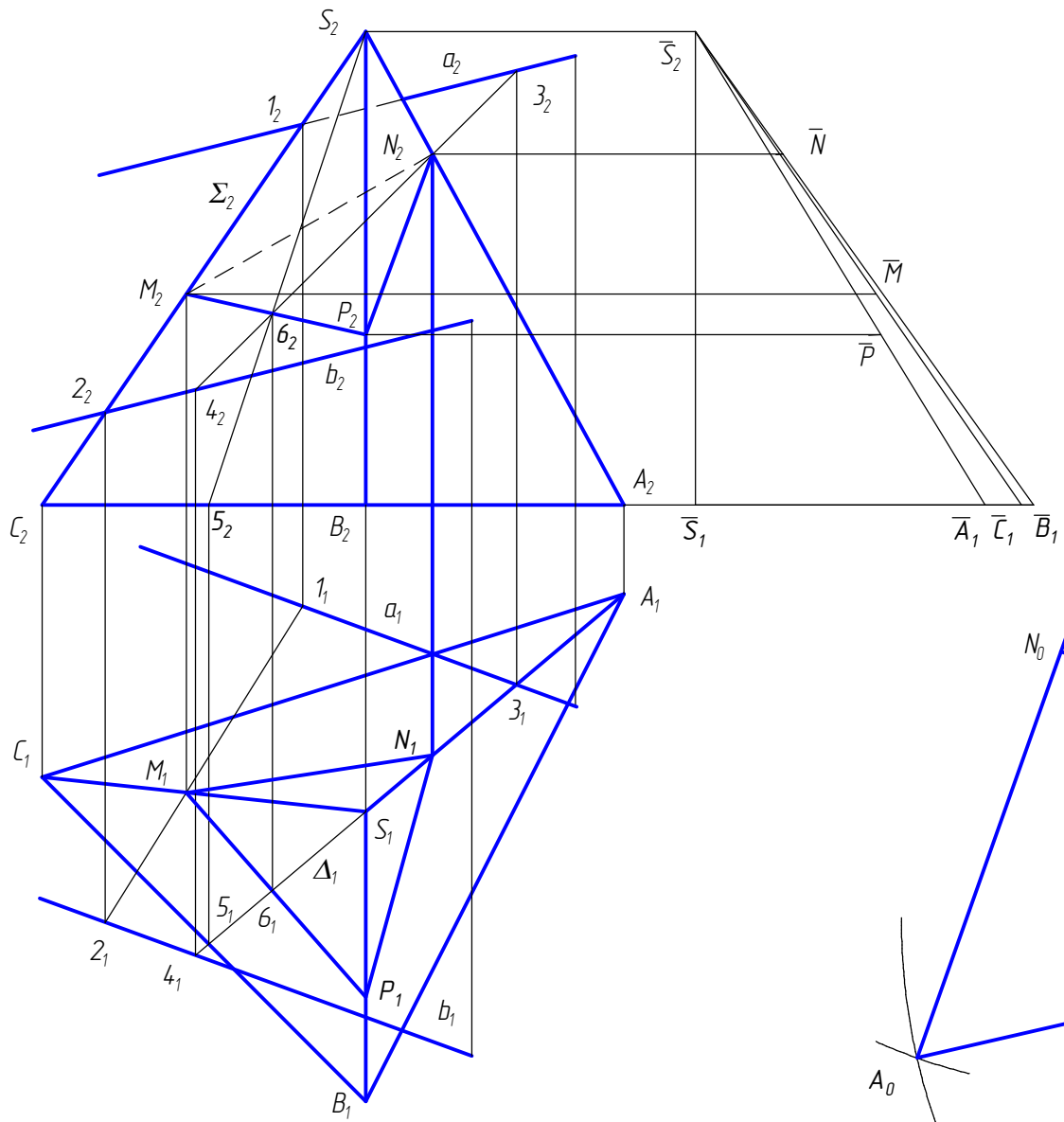


Рис. 4

За правилом побудови трикутника за трьома заданими сторонами побудовані послідовно впритул одне до одного зображення бічних граней піраміди:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $A_0S_0 = \overline{AS} = AS$ | 2. $B_0S_0 = \overline{BS} = BS$ |
| 3. $C_0S_0 = \overline{CS} = CS$ | 4. $A_0B_0 = A_1B_1 = AB$        |
| 5. $B_0C_0 = B_1C_1 = BC$        | 6. $A_0C_0 = A_1C_1 = AC$ .      |

$A_0B_0C_0A_0S_0$  – розгортка піраміди.

На зображеннях  $\overline{AS}$ ,  $\overline{BS}$ ,  $\overline{CS}$  бічних ребер побудовані точки  $\overline{M}$ ,  $\overline{N}$ ,  $\overline{P}$ :  $M_2\overline{M} \parallel N_2\overline{N} \parallel P_2\overline{P} \parallel \Pi_1$ .

На зображеннях бічних ребер  $A_0S_0$ ,  $B_0S_0$ ,  $C_0S_0$  на розгортці побудовані точки  $M_0$ ,  $N_0$ ,  $P_0$ :  $M_0S_0 = \overline{MS}$ ,  $N_0S_0 = \overline{NS}$ ,  $P_0S_0 = \overline{PS}$ .

$N_0M_0P_0N_0$  – це дінія перетину піраміди з площиною  $\Gamma$  на розгортці.

**Приклад 4.** Побудувати проекції лінії перетину призми з площиною  $\Gamma(f; h)$  (рис. 5).

**Розв’язування.** Проекції лінії перетину побудовані способом ребер:

- $A5 \subset \Delta(\Delta_2) \parallel \Pi_1$ .
- $\Delta(\Delta_2) \cap f(f_2) = 1(1_2)$ .
- $1M(1_1M_1) \parallel h(h_1)$ ;  $1M \cap A5 = M(M_1)$ ;  $M_2 = M_1M_2 \cap A_25_2$ .
- $M = A5 \cap \Gamma$ .
- $B6(B_26_2) \subset \Lambda(\Lambda_2)$ ;  $\Lambda \parallel \Pi_1$ .
- $\Lambda(\Lambda_2) \cap f(f_2) = 2(2_2)$ ;  $2(2_2) \cap f_1 = 2$ .
- $2N(2_1N_1) \parallel h(h_1)$ ;  $2N \cap B6 = N(N_1)$ ;  $N_1N_2 \cap B_26_2 = N_2$ .
- $N = B6 \cap \Gamma$ .
- $C7 \subset \Sigma \parallel \Pi_1$ .
- $\Sigma(\Sigma_2) \cap f(f_2) = 3(3_2)$ .
- $3P(3_1P_1) \parallel h(h_1)$ ;  $3P \cap C7 = P(P_1)$ ;  $P_1P_2 \cap C_27_2 = P_2$ .
- $P = C7 \cap \Gamma$ .
- $D8 \subset \Theta \parallel \Pi_1$ .
- $\Theta(\Theta_2) \cap f(f_2) = 4(4_2)$ .
- $4R(4_1R_1) \parallel h(h_1)$ ;  $4R \cap D8 = R(R_1)$ ;  $R_1R_2 \cap D_28_2 = R_2$ .
- $R = D8 \cap \Gamma$ .

$$MNPR = ABCD5678 \cap \Gamma.$$

**Розгортка.** Розгортка побудована способом нормального перерізу, яким є переріз 5678 призми профільною площиною проекцій  $\Pi_3$ :

$$5_06_0 = 5_36_3; \quad 5_36_37_38_3 = 5678; \quad 5678 = \Pi_3 \cap ABCD5678.$$

- $5_06_07_08_05_0$  – розгортка нормального перерізу.
- $A_05_0 \perp 5_05_0$ ;  $A_05 = A_25_2$ .
- $B_06_0 \perp 6_07_0$ ;  $B_06_0 = B_26_2$ .
- $C_07_0 \perp 7_08_0$ ;  $C_07_0 = C_27_2$ .
- $D_08_0 \perp 8_05_0$ ;  $D_08_0 = D_28_2$ .

$A_0B_0C_0D_0A_0$  – розгортка основи призми  $ABCD$ .

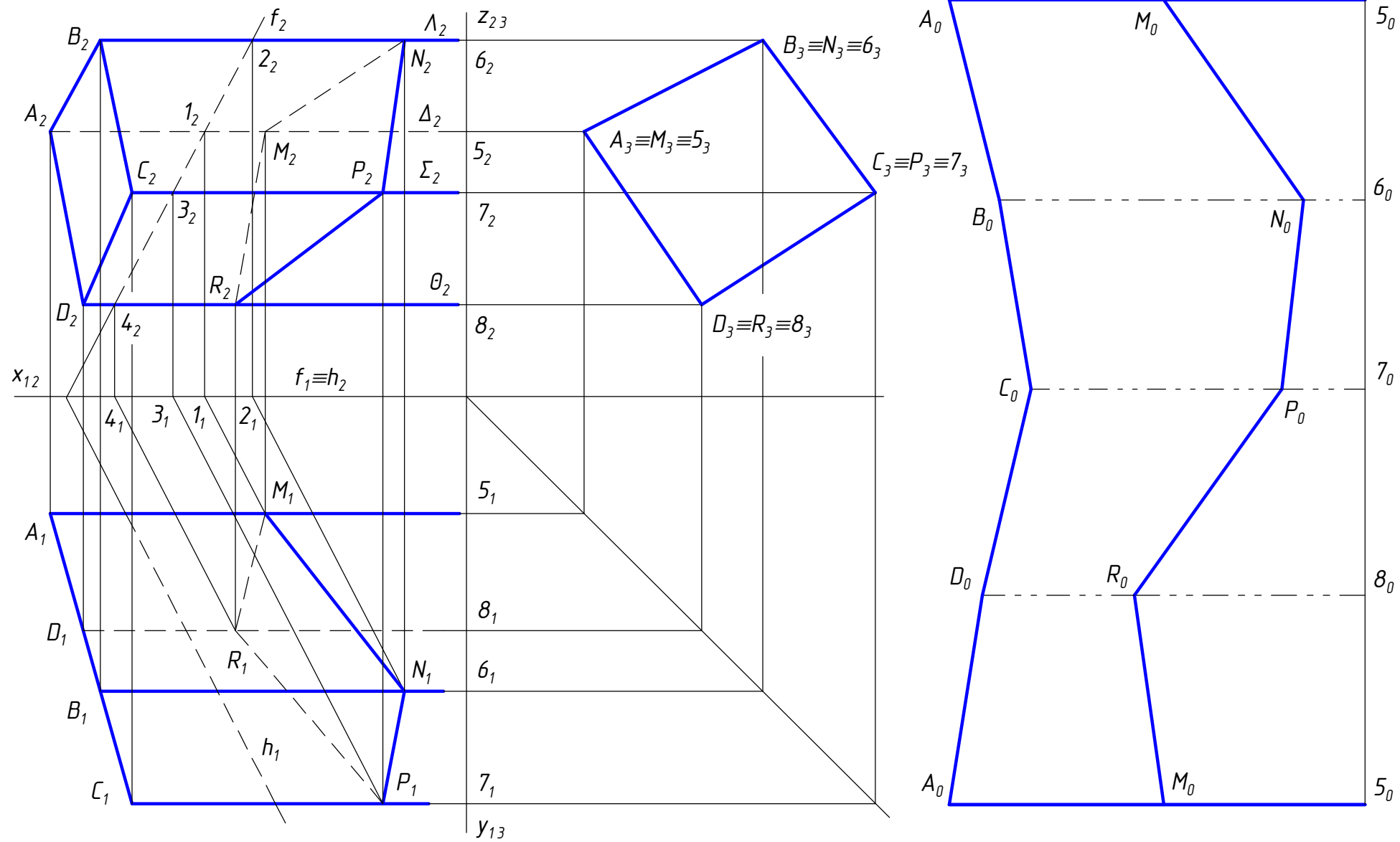


Рис. 5

$$5. 5_0M_0 = 5_2M_2.$$

$$7_0P_0 = 7_2P_2$$

$$6. 6_0N_0 = 6_2N_2.$$

$$8_0R_0 = 8_2R_2.$$

$M_0N_0P_0R_0$  – лінія перетину призми з площиною на розгортці призми.

## 2 ПОБУДОВА ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ ПЛОЩИНИ З КРИВОЮ ПОВЕРХНЕЮ

**Приклад 5.** Побудувати проєкції лінії перетину циліндра площиною  $\Delta(f; h)$  та розгортку бічної поверхні циліндра з нанесенням лінії перетину.

**Розв’язування.** Циліндр – горизонтально проєкціювальний, тому горизонтальна проєкція лінії перетину відома. Фронтальна проєкція лінії перетину будується як проєкція лінії, що належить площині  $\Delta(f; h)$  (рис. 6).

Побудова опорних точок:

1.  $A(A_1A_2), B(B_1B_2)$  – точки дотику фронтальної проєкції лінії перетину до крайніх твірних циліндра.

$$2. AB \subset \Delta \parallel \Pi_2.$$

$$3. \Delta \cap h(h_1) = 1(1_1); 1_1 1_2 \perp h_2; 1_2 2_2 \parallel f_2; 1_2 \cap \Phi = A, B.$$

4. Найвища  $C(C_1C_2)$  і найнижча  $D(D_1D_2)$  точки лінії перетину:

$$CD \subset \Gamma \perp h(h_1). \Gamma(\Gamma_1) \cap h(h_1) = 3(3_1).$$

$$5. 3_2(3_1 2_1, 3_2 2_2) \cap \Phi = C, D(C_1D_1, C_2D_2).$$

6.  $EF(E_1F_1, E_2F_2)$  – мала вісь еліпса лінії перетину,  $EF(E_1F_1) \perp CD(C_1D_1)$ .

7.  $M(M_1M_2), N(N_1N_2)$  – проміжні точки лінії перетину.

$$8. M_4 \subset \Sigma(\Sigma_1) \parallel f(f_1); M_1 4_1 \cap 2_1 3_1 = 4_1; 4_1 4_2 \cap 2_2 3_2 = 4_2; 4_2 M_2 \parallel f_2;$$

$$M_1 M_2 \cap 4_2 M_2 = M_2.$$

$$9. N_2 2_2 = 2_2 M_2.$$

**Розгортка.** Розгортка побудована способом нормального перерізу.

$$10. 5_0 \dots 5_0 = \pi d - \text{розгортка основи циліндра: } 5_0 6_0 = 5_1 6_1 = 6_0 7_0 = \dots = 12_0 5_0.$$

$$11. 5_0 D_0 = 5_2 D_2, \dots, 9_0 C_0 = 9_2 C_2, \dots, 12_0 A_0 = 12_2 A_2.$$

$D_0 M_0 F_0 B_0 C_0 N_0 E_0 A_0 D_0$  – лінія перетину циліндра з площиною  $\Lambda$  на розгортці.

**Приклад 6.** Побудувати проєкції лінії перетину похилого циліндра з площиною  $\Delta(f; h)$  та розгортку бічної поверхні циліндра з нанесенням лінії перетину (рис. 7).

**Розв’язування.** Лінія перетину – це еліпс. Опорні точки:  $A(A_1, A_2), B(B_1, B_2), C(C_1, C_2), D(D_1, D_2)$  – точки дотику еліпса до крайніх твірних циліндра на горизонтальній і фронтальній проєкції.

1. Побудова точок  $A(A_1, A_2), B(B_1, B_2)$ :

$1_1 \subset \Gamma(\Gamma_1) \parallel \Pi_2; \Gamma_1 \cap h_1 = 15_1; 15_1 15_2 \perp h_2; 15_2 A_2 \parallel f_2; A_2 A_1 \perp 15_1 1_1$ . Аналогічно побудована точка  $B(B_1, B_2): B_2 B_1 \perp 15_1 1_1; B_2 B_1 \cap 1_1 15_1 = B_1$ .

2. Точки  $C(C_1, C_2), D(D_1, D_2)$ :

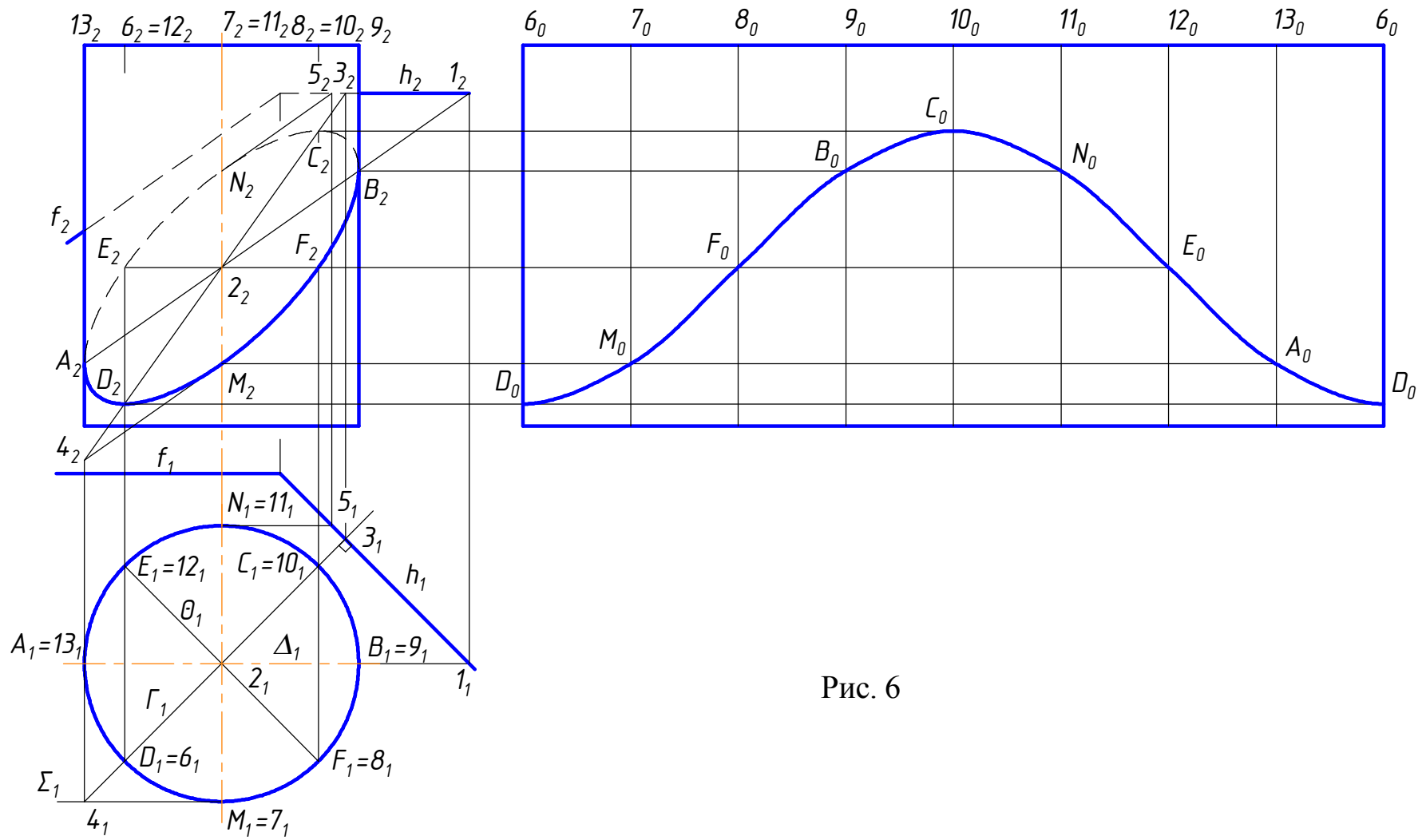


Рис. 6

$4_1 16_1 \subset \Lambda(\Lambda_1) \parallel \Pi_2; \Lambda_1 \cap h_1 = 16_1; 16_1 16_2 \perp h_2; 16_2 C_2 \parallel f_2; C_2 C_1 \perp 4_1 16_1.$   
 $10_1 17_1 \subset \Theta(\Theta_1) \square \square_2; \Theta_2 \cap h_1 = 17_1; 17_1 17_2 \perp h_2; 17_2 D_2 \square \square_2; 17_2 D_2 \cap 4_2 D_2 = D_2.$

$D_2 D_1 \perp 10_1 17_1; D_2 D_1 \cap 10_1 17_1 = D_1.$

3. Найвища точка  $E(E_1, E_2)$  найнижча точка  $F(F_1, F_2)$ :

Через центр основи циліндра перпендикулярно до горизонталі  $h(h_1)$  проведена пряма, яка перетинає коло основи циліндра у точках  $13(13_1), 14(14_1)$ . Через точки  $13$  і  $14$  проходять твірні циліндра, на яких розташовані відповідно найвища  $E(E_1, E_2)$  і найнижча  $F(F_1, F_2)$  точки. Проекції цих точок побудовані аналогічно побудовам точок  $A, B, C, D$ .

**Розгортка.** Розгортка циліндра побудована способом розгортання. Оскільки твірні циліндра паралельні площині  $\Pi_2$ , то на цю площину відрізки твірних проєціюються без спотворення. Через точки  $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, \dots, 12_2$  проведені перпендикуляри до твірних циліндра. Ці перпендикуляри зображують кола, по яких обертаються точки  $1, 2, 3, \dots, 12$  до суміщення з фронтальною площиною, що проходить через вісь циліндра.

$$1_2 2_0 = 1_1 2_1, 2_0 3_0 = 2_1 3_1, \dots, 12_0 1_0 = 12_1 1_1.$$

Крива  $1_2 2_0 \dots 12_0 1_0$  – розгортка основи циліндра.

Через точки  $2_0, 3_0, \dots, 12_0, 1_0$  проведені зображення твірних циліндра на розгортці, наприклад,  $7_0 B_0 = 7_2 B_2, 1_0 A_0 = 1_2 A_2, 10_0 D_0 = 10_2 D_2$ .

$A_2 M_0 C_0 F_0 N_0 B_0 D_0 E_0 A_0$  – розгортка лінії перетину площини  $\Delta(f; h)$  з циліндром.

**Приклад 7.** Побудувати проєкції лінії перетину прямого кругового конуса з площиною  $\Gamma(\Gamma_2)$  та розгортку бічної поверхні з нанесенням лінії перетину (рис. 10).

**Розв'язування.** Лінія перетину – еліпс. Його велика вісь – відрізок  $AB(A_1 B_1, A_2 B_2)$ , мала вісь – відрізок  $CD(C_1 D_1, C_2 D_2)$ .  $A(A_1, A_2)$  – найвища точка лінії перетину,  $B(B_1, B_2)$  – найнижча точка лінії перетину.

Горизонтальні проєкції точок лінії перетину побудовані як проєкції точок, що розташовані на поверхні конуса. Наприклад, через точки  $C_2 = D_2$  проведено площину  $\Delta(\Delta_2)$  паралельно площині основи конуса:

$$\Delta \cap \Phi = a(a_1, a_2);$$

$$C_2 C_1 \perp x_{12}; C_2 C_1 \cap a_1 = C_2$$

$$D_2 D_1 \perp x_{12}; D_2 D_1 \cap a_1 = D_1.$$

Аналогічно можуть бути побудовані і інші точки.

Інакше можна побудувати горизонтальні проєкції точок лінії перетину як точок перетину твірних конуса з площиною  $\Gamma$ . Наприклад:

$$M_2 = 5_2 S_2 \cap \Gamma_2; M_2 M_1 \perp x_{12}; M_2 M_1 \cap 5_1 S_1 = M_1;$$

$$N_2 = 9_2 S_2 \cap \Gamma_2; N_2 N_1 \perp x_{12}; N_2 N_1 \cap 9_1 S_1 = N_1;$$

**Розгортка.** Розгортка прямого кругового конуса – це сектор круга, у якого центральний кут  $\varphi = 360R/l$ , де  $R = 1_1 S_1$  (радіус основи конуса);  $l = 1_2 S_2$  (довжина твірної конуса).

На вільному місці проведена дуга кола  $R = 1_2 S_2$ . На дузі відкладені 12 відрізків  $1_0 2_0 = 1_1 2_1, 2_0 3_0 = 2_1 3_1, \dots, 12_0 1_0 = 12_1 1_1$ . Через точки  $1_0, 2_0, \dots, 12_0, 1_0$

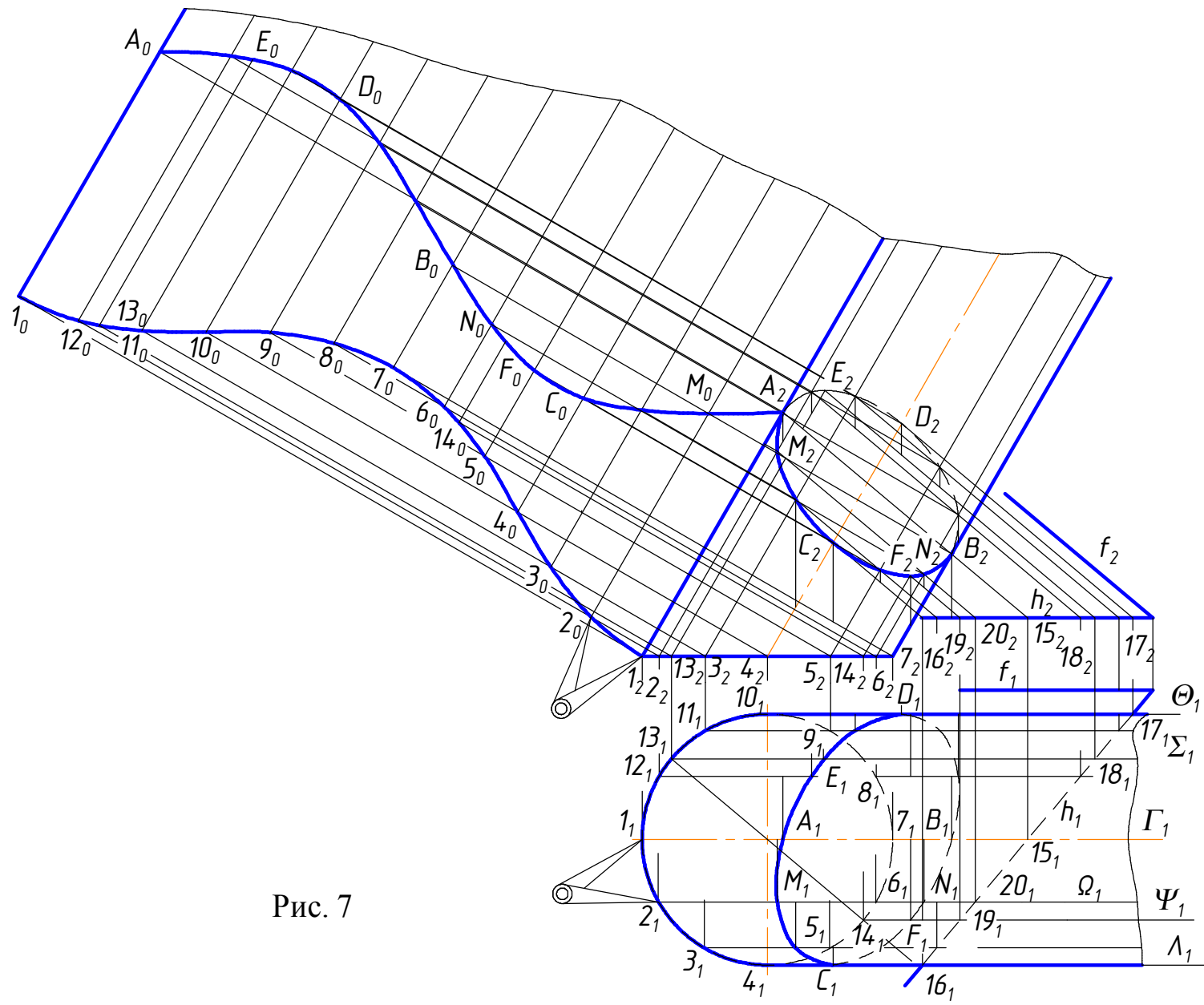


Рис. 7



проведені твірні конуса. На ці твірні перенесені відповідні точки конуса  $A_0, B_0, C_0, D_0, M_0, N_0$  і інші.

$$A_0S_0 = S_2A_2, \quad B_0S_0 = B_2S_2.$$

Інші точки еліпса обертаються навколо осі конуса до крайньої твірної конуса:  $M_2 \rightarrow \bar{M}_2$ ;  $\bar{M}_2S_2 = M_0S_0 = N_0S_0$ .

Через точки  $C_1$  і  $D_1$  проведені додаткові твірні конуса:

$$C_2 \rightarrow \bar{C}_2; \quad \bar{C}_2S_2 = C_0S_0 = D_0S_0.$$

Якщо конус перетинається з площиною загального положення (рис. 11), то способом заміни площин проєкцій креслення перетворюється так, щоб січна площина стала проєкціовальною. Задача розв'язується на проєкціях на  $\Pi_4$  і  $\Pi_1$ , як це виконано на рис. 10, а потім фронтальні проєкції точок лінії перетину будуються на  $\Pi_2$  за їхніми висотами:

$$C_2C_{12} = D_2D_{12} = C_4C_{14}.$$

**Приклад 8.** Побудувати проєкції лінії перетину площини  $\Gamma(\Gamma_2)$  зі сферою та розгортку поверхні сфери з нанесенням лінії перетину (рис. 12).

**Розв'язування.** Лінія перетину сфери з площиною – коло. Відрізком прямої  $A_2B_2$  вимірюється діаметр цього кола. На  $\Pi_1$  коло проєкціюється еліпсом, у якого довжина великої осі  $E_1F_1$  дорівнює  $A_2B_2$ , а малої –  $A_1B_1$ . Точки  $C$  і  $D$  на розташовані на екваторі сфери, тому еліпс на горизонтальній проєкції дотикається до екватора сфери в точках  $C_1$  і  $D_1$ .

Нижня частина кола між точками  $C$  і  $D$  на горизонтальній проєкції невидима. Інші точки лінії перетину побудовані за допомогою паралелей сфери. Наприклад, через точки  $M_2 = N_2$  проведена паралель  $a$  (або площина  $\Delta(\Delta_2)$ , яка перетинає сферу по паралелі  $a$ ), потім будується горизонтальна проєкція  $a_1$  паралелі  $a$  і на ній за лініями зв'язку будуються проєкції  $M_1, N_1$  точок  $M, N$ .

**Розгортка.** Розгортка сфери може бути побудована лише умовна, оскільки поверхня сфери нерозгортна. Відомо два способи графічної побудови розгортки сфери – спосіб описаних циліндрів і спосіб описаних конусів. На рис. 12 розгортка побудована способом описаних циліндрів. Сфера поділяється меридіанами на декілька однакових частин (чим більше частин, тим точніша розгортка). Кожна частина (назвемо її пелюсткою) між двома найближчими меридіанами замінюється частиною циліндра, описаного навколо сфери, або вписаного у неї. Далі будується розгортка однієї пелюстки і потім до неї притуляються копії усіх інших пелюсток на одній спільній осі симетрії. У прикладі на рис. 12 екватор сфери поділено на 12 частин і на вільному місці на горизонтальній осі відкладені 12 відрізків:  $1_02_0, 2_03_0, \dots, 12_01_0$ . Через середини кожного відрізка проведені вертикальні осі пелюсток і на них відкладені відрізки, довжина яких дорівнює половині довжини меридіана. Наприклад, через середину (точка  $G_0$ ) відрізка  $1_02_0$  проведена вертикальна вісь і на ній відкладений відрізок  $G_0L_0 = \frac{1}{4}\pi d$  (чверть довжини меридіана сфери), униз відкладений такий самий відрізок. Точками  $K_0, H_0$  відрізок  $G_0L_0$  поділений на три рівні частини. Точкам  $K_0, H_0$  відповідають на фронтальній проєкції сфери точки  $K_2, H_2$ , які поділили дугу

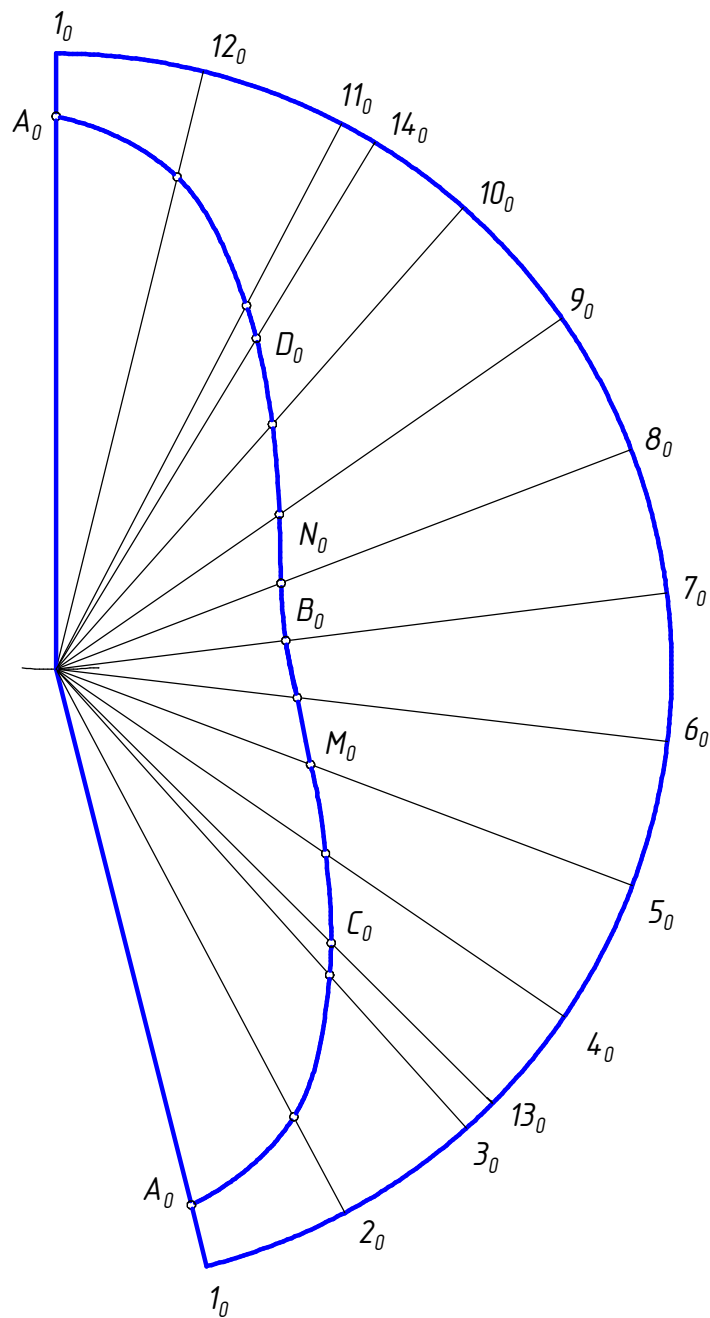
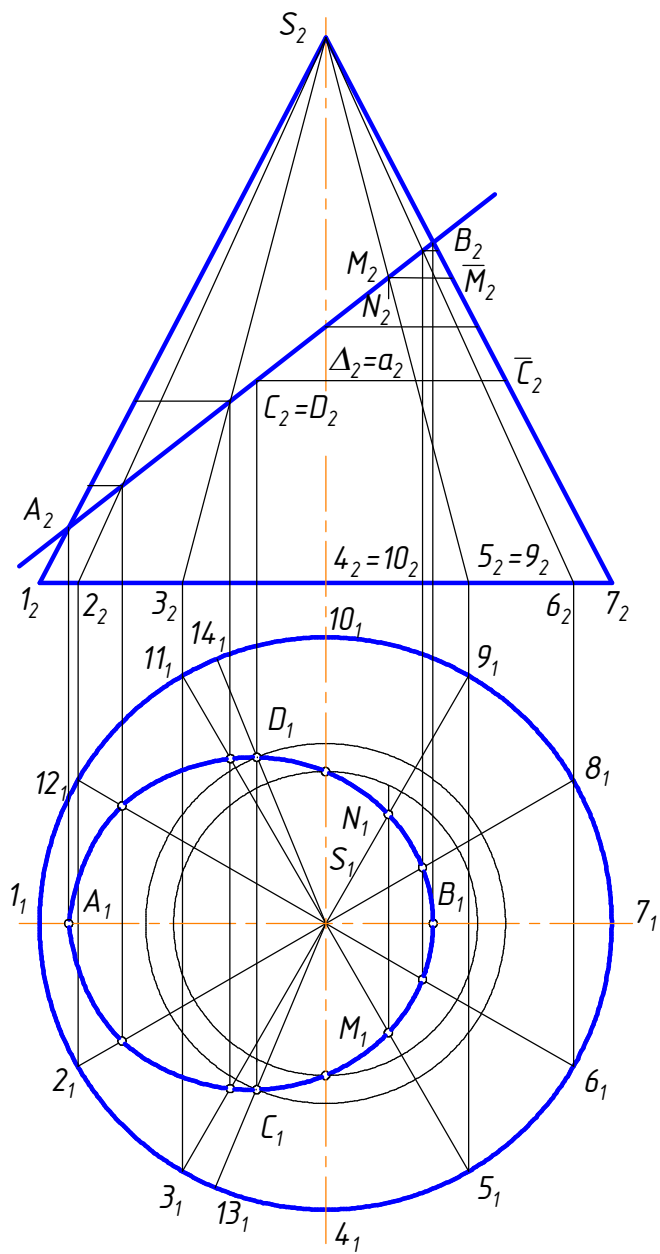


Рис. 10

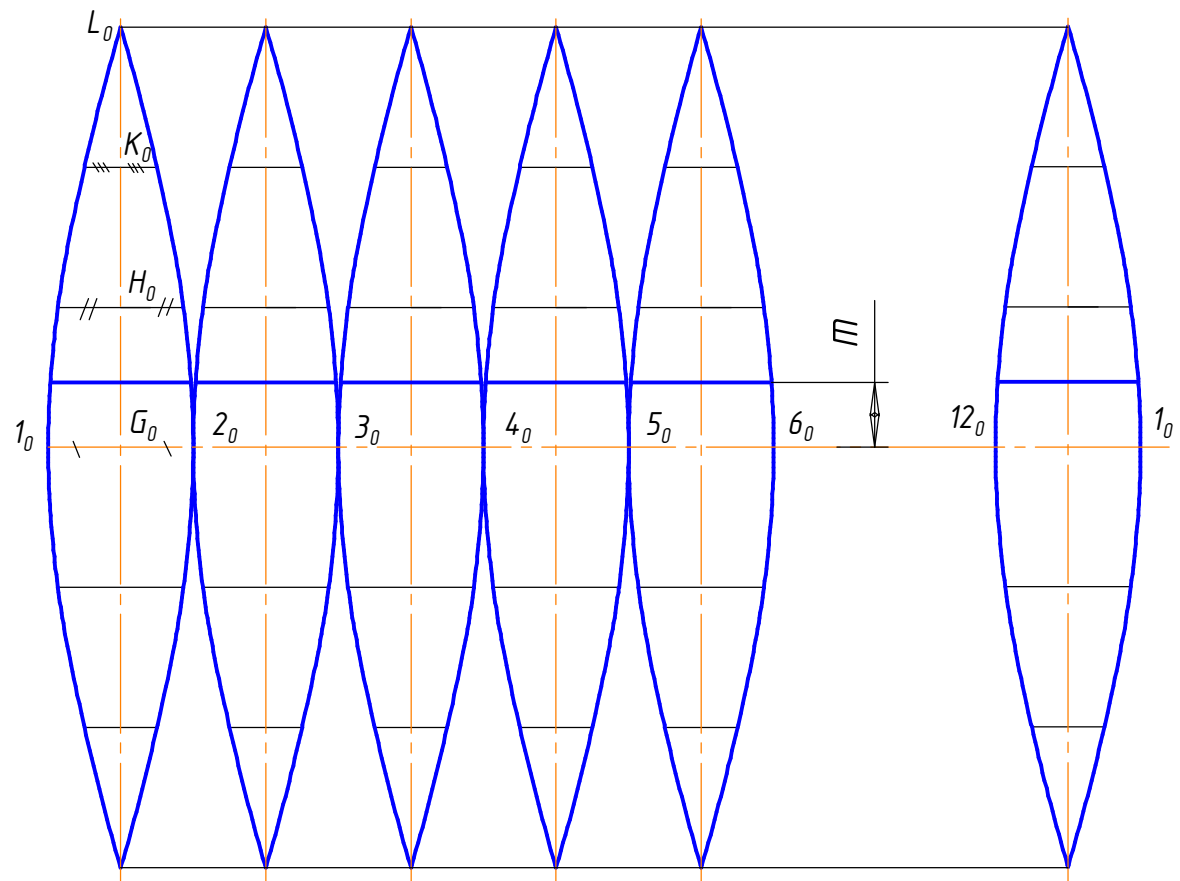
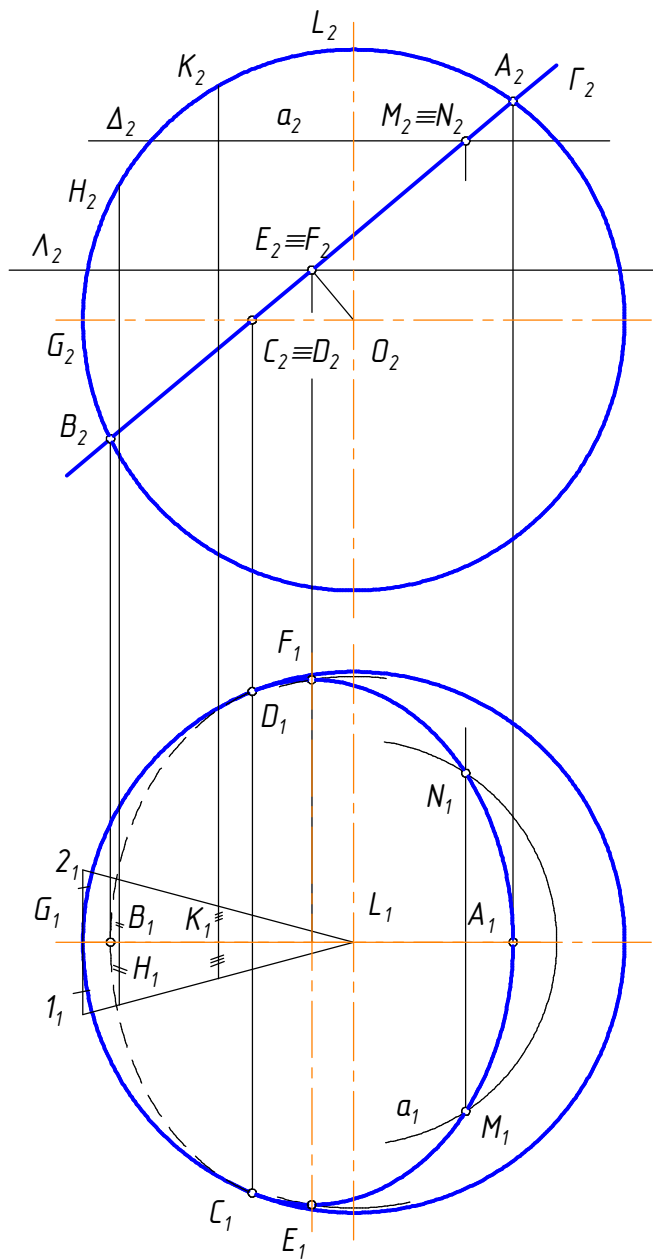


Рис.12

$G_2L_2$  на три однакові відрізки. Точкам  $K_2, H_2$  на горизонтальній проекції відповідають точки  $K_1, H_1$ . Точки  $1_1, 2_1, L_1$  обмежують зображення однієї пелюстки між двома суміжними меридіанами. Ширину цієї пелюстки у точках  $K_1$  та  $H_1$  відкладаємо відповідно у точках  $K_0, H_0$  на розгортці. Через отримані таким чином точки і точки  $G_0, L_0$  та  $2_0$  проведені під лекало криві. Маємо верхню половину пелюстки. Симетрично щодо осі  $1_02_0$  побудована нижня половина пелюстки. Зображення одинадцяти інших пелюсток побудовані як копії першої впритул до неї і одна до одної.

Для побудови лінії перетину сфери з площиною  $\Gamma$  останню подумки повертаємо навколо фронтально проекціювальної осі, яка проходить через центр сфери, до горизонтального положення. У такому положенні лінія перетину на розгортці зобразиться у пряму лінію, як будь-яка паралель. На розгортці в межах кожної пелюстки проведені відрізки прямої на відстані  $m = O_2F_2$ . Ці відрізки зображують лінію перетину на розгортці.

За такою методикою можна побудувати лінію перетину площини з будь-якою поверхнею обертання, а також будувати розгортки поверхонь обертання, використовуючи паралелі поверхонь. На рис. 13 показано побудову лінії перетину тора з площиною та розгортки поверхні тора. Методика розв'язання задачі така сама, як і зі сферою (рис. 12).

### 3 ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ ЛІНІЇ З БАГАТОГРАННИКОМ

**Приклад 9.** Побудувати точки перетину прямої  $l$  з пірамідою  $SDEFG$  (рис. 14, 15).

**Розв'язування.** Точки перетину прямої з будь-яким багатогранником будуються за таким алгоритмом (рис. 14):

- 1) через пряму проводиться допоміжна площина  $\Sigma$ ;
- 2) будується лінія  $123\dots$  перетину площини  $\Sigma$  з багатогранником;
- 3) позначаються точки  $M, N$  перетину лінії  $123\dots$  із заданою прямою  $l$ .

На рис. 15:

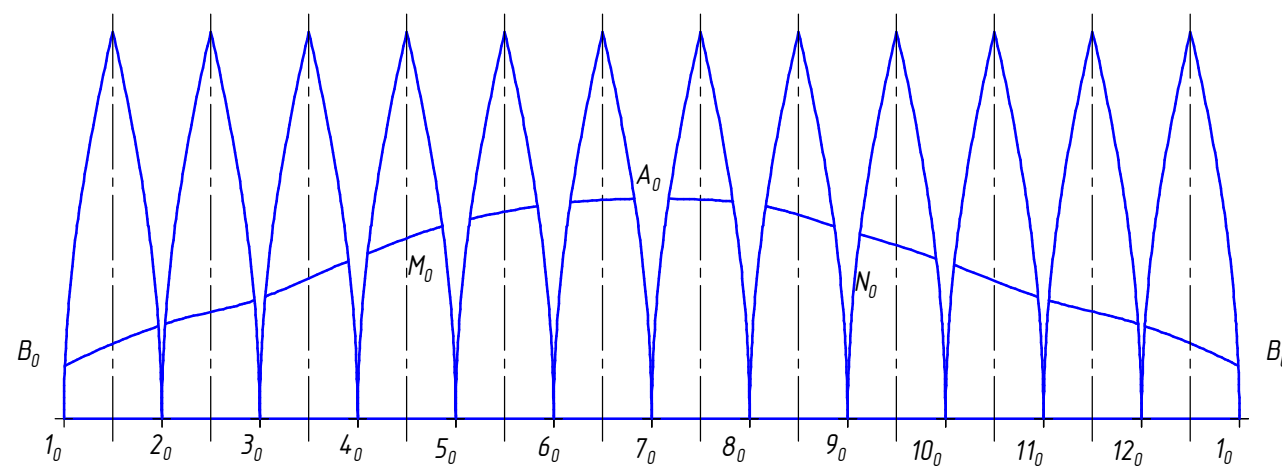
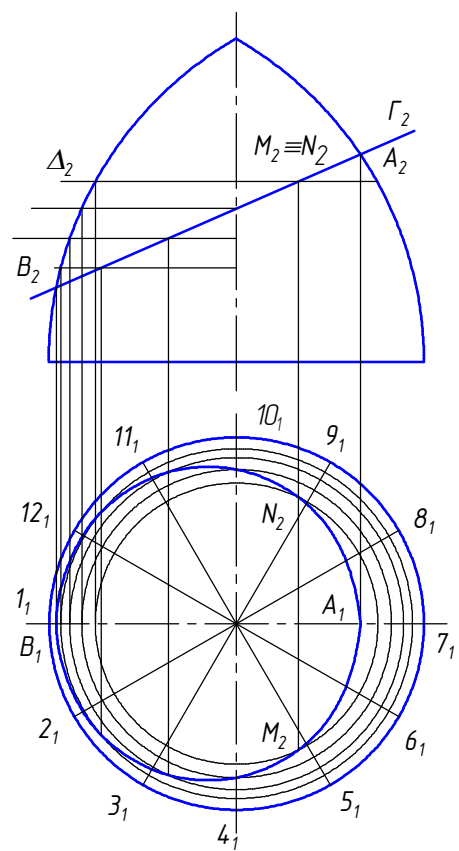
- 1)  $l \subset \Sigma(\Sigma_2)$ ;
- 2)  $\Sigma \cap SDEFG = 1234(1_12_13_14_1, 1_22_23_24_2)$ , ( $4 = \Sigma \cap GS$ ;  
 $4 \subset 45 \parallel DG(4_25_2 \parallel D_2G_2; 4_15_1 \parallel D_1G_1)$ );
- 3)  $1234 \cap l = M, N$ .

$M(M_1, M_2), N(N_1, N_2)$  – точки перетину прямої  $l(l_1, l_2)$  з пірамідою  $SDEFG$ .

**Приклад 10.** Побудувати точки перетину прямої  $l$  з призмою  $\Phi(ABC)$  (рис. 16).

**Розв'язання.** За методикою розв'язання ця задача схожа на попередню.

- 1)  $l \subset \Sigma(\Sigma_2)$ ;
- 2)  $\Sigma \cap \Phi(ABC) = 123(1_12_13_1; 1_22_23_2)$ .
- 3)  $123 \cap l = M, N$ .



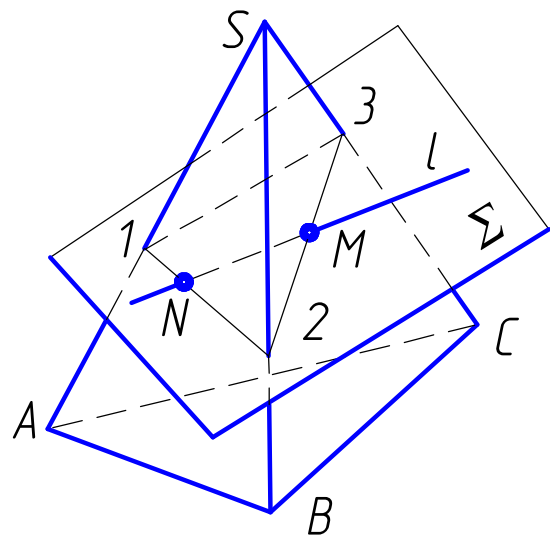


Рис. 14

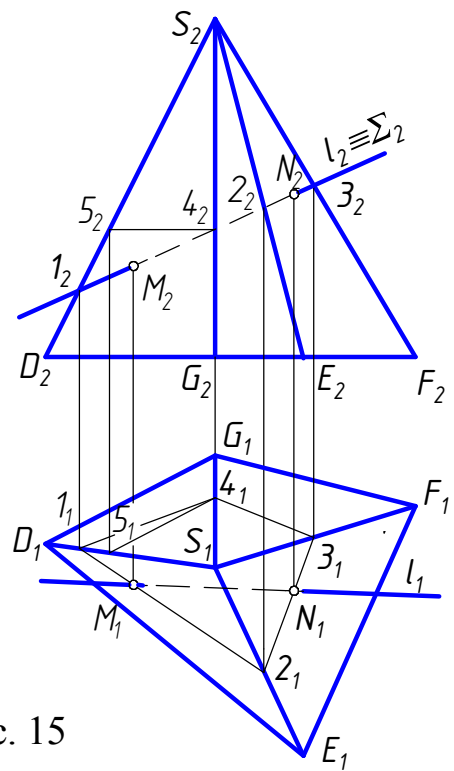


Рис. 15

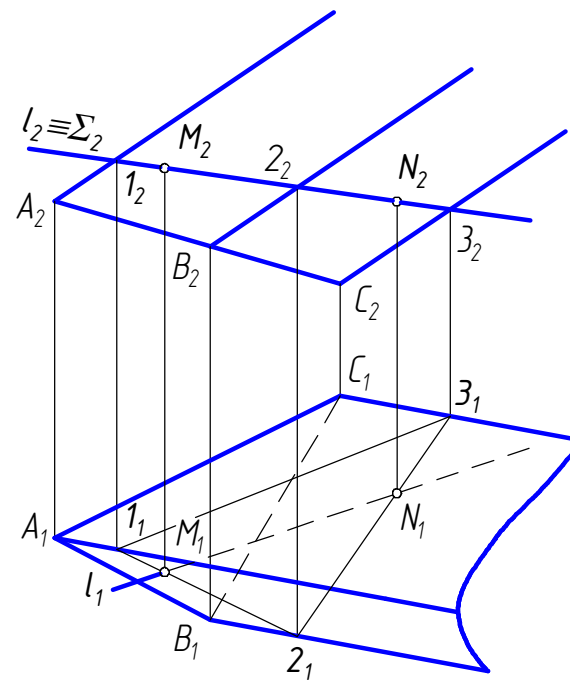


Рис. 16

$M(M_1, M_2), N(N_1, N_2)$  – точки перетину прямої  $l$  з призмою.

#### 4 ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКІВ

**Приклад 11.** Побудувати лінію взаємного перетину піраміди  $SABC$  з призмою  $def$  (рис. 17).

**Розв’язування.** У заданому прикладі лінія перетину піраміди з призмою – це просторова замкнена ламана лінія. Вона будується з використанням способів граней і ребер.

Спосіб граней:

- 1)  $(d, f) \subset \Gamma$ ;
- 2)  $\Gamma \cap SABC = 123(1_1 2_1 3_1, 1_2 2_2 3_2)$ ,  
123 – лінія перетину площини  $\Gamma$  з призмою;
- 3)  $123 \cap d = K, L, K(K_1, K_2), L(L_1, L_2)$  – точки перетину ребра  $d$  з пірамідою,  
 $123 \cap f = M, N; M(M_1, M_2), N(N_1, N_2)$  – точки перетину ребра  $f$  з пірамідою.

Спосіб ребер:

4.  $AS(A_2 S_2) \subset \Sigma(\Sigma_2)$ ;
5.  $\Sigma \cap def = 456(4_1 5_1 6_1, 4_2 5_2 6_2)$ .  
456 – лінія перетину площини  $\Sigma$  з призмою  $def$ .
6.  $456 \cap AS = 1, P; 1(1_1, 1_2), P(P_1, P_2)$  – точки перетину ребра  $AS(A_1 S_1, A_2 S_2)$  з призмою  $def$ .
7.  $CS(C_2 S_2) \subset \Delta(\Delta_2)$ .
8.  $\Delta \cap def = 789(7_1 8_1 9_1, 7_2 8_2 9_2)$ .  
789 – лінія перетину площини  $\Delta$  з призмою  $def$ .
9.  $789 \cap CS = Q, R; Q(Q_1, Q_2), R(R_1, R_2)$  – точки перетину ребра  $CS(C_1 S_1, C_2 S_2)$  з призмою  $def$ .
10. Лінія  $1LPQKMRN1(1_1 L_1 P_1 Q_1 K_1 M_1 R_1 N_1 1_1, 1_2 L_2 P_2 Q_2 K_2 M_2 R_2 N_2 1_2)$  – лінія перетину піраміди  $SABC$  з призмою  $def$ .

**Приклад 12.** Побудувати проєкції лінії перетину шестикутної зрізаної піраміди з трикутною фронтально проєкціювальною призмою (рис. 18).

**Розв’язування.** Оскільки призма фронтально проєкціювальна, то фронтальна проєкція лінії перетину відома – вона збігається з фронтальною проєкцією призми. До того ж з фронтальної проєкції видно, що лінія перетину розпадається на дві частини, кожна з яких є просторовою замкненою ламаною лінією. Крайне ліве і крайне праве ребра піраміди не перетинаються з призмою.

1. Через нижню грань призми проведена площина  $\Sigma(\Sigma_2)$ , яка перетинає піраміду по шестикутнику, подібному до основи піраміди. Ліве і праве ребра призми перетинаються з шестикутником у точках  $C(C_1), M(M_1), F(F_1), J(J_1)$ .

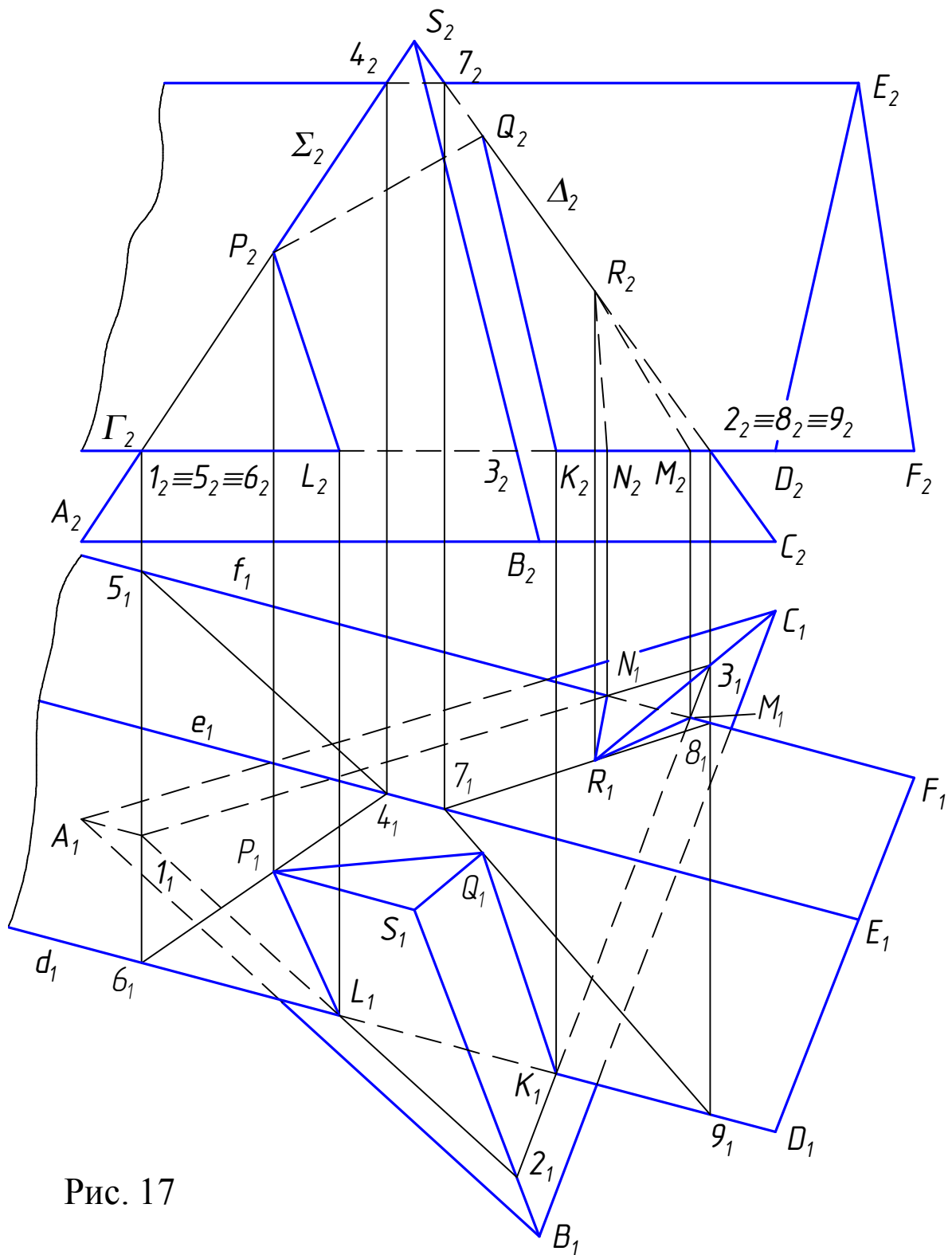


Рис. 17

Вершини  $D(D_1)$ ,  $E(E_1)$ ,  $K(K_1)$ ,  $L(L_1)$  шестикутника – це точки перетину бічних ребер піраміди з нижньою гранню призми.

Точки  $B(B_2)$ ,  $N(N_2)$ ,  $G(G_2)$ ,  $I(I_2)$  – це точки перетину бічних ребер піраміди з бічними гранями призми. Горизонтальні проекції  $B_1$ ,  $N_1$ ,  $G_1$ ,  $I_1$  цих точок побудовані за лініями зв'язку.

2. Точки перетину верхнього ребра призми з пірамідою побудовані за допомогою горизонтальної площини  $\Delta(\Delta_2)$ , яка перетинає ліве бічне ребро піраміди у точці  $1(1_2)$ . Точка  $1(1_1)$  – це одна із шести вершин шестикутника,



подібного до основи піраміди, по якому площина  $\Delta$  перетинає піраміду. Цей шестикутник перетинає верхнє ребро призми у точках  $A(A_1, A_2)$  та  $H(H_1, H_2)$ .

Сполучені між собою відповідним чином названі вище точки становлять лінію перетину призми з пірамідою:

$$\Phi_1 \cap \Phi_2 = ACBDEFGA(A_1C_1B_1D_1E_1F_1G_1A_1, A_2C_2B_2D_2E_2F_2G_2A_2); \\ NMLKJIHN(N_1M_1L_1K_1J_1I_1H_1N_1, N_2M_2L_2K_2J_2I_2H_2N_2).$$

**Приклад 13.** Побудувати проєкції лінії перетину трикутної зрізаної піраміди з чотирикутною фронтально проєкціювальною призмою (рис. 19).

**Розв’язування.**

Через верхню грань призми проведена горизонтальна допоміжна площина  $\Delta(\Delta_2)$ , яка перетинає піраміду по трикутнику  $1_2A(1_2A_1, 1_2A_2)$ . Два верхні ребра призми перетинаються з цим трикутником у точках  $A(A_1, A_2)$ ,  $D(D_1, D_2)$ ,  $B(B_1, B_2)$ ,  $C(C_1, C_2)$ . Саме у цих точках верхні ребра призми перетинаються з пірамідою.

Через нижню грань призми проведена друга допоміжна горизонтальна площина  $\Lambda(\Lambda_2)$ , яка перетинає піраміду по трикутнику  $3_4E(3_4E_1, 3_4E_2)$ . Нижні бічні ребра призми перетинають цей трикутник у точках  $E(E_1, E_2)$ ,  $F(F_1, F_2)$ ,  $G(G_1, G_2)$ ,  $H(H_1, H_2)$ ,  $K(K_1, K_2)$ . Це – точки перетину ребер призми з пірамідою. Таким чином, лінія перетину піраміди з призмою розпалася на дві частини:

$$\Phi_1 \cap \Phi_2 = ABFEKA(A_1B_1F_1E_1K_1A_1, A_2B_2F_2E_2K_2A_2); \\ CDHG(C_1D_1H_1G_1, C_2D_2H_2G_2).$$

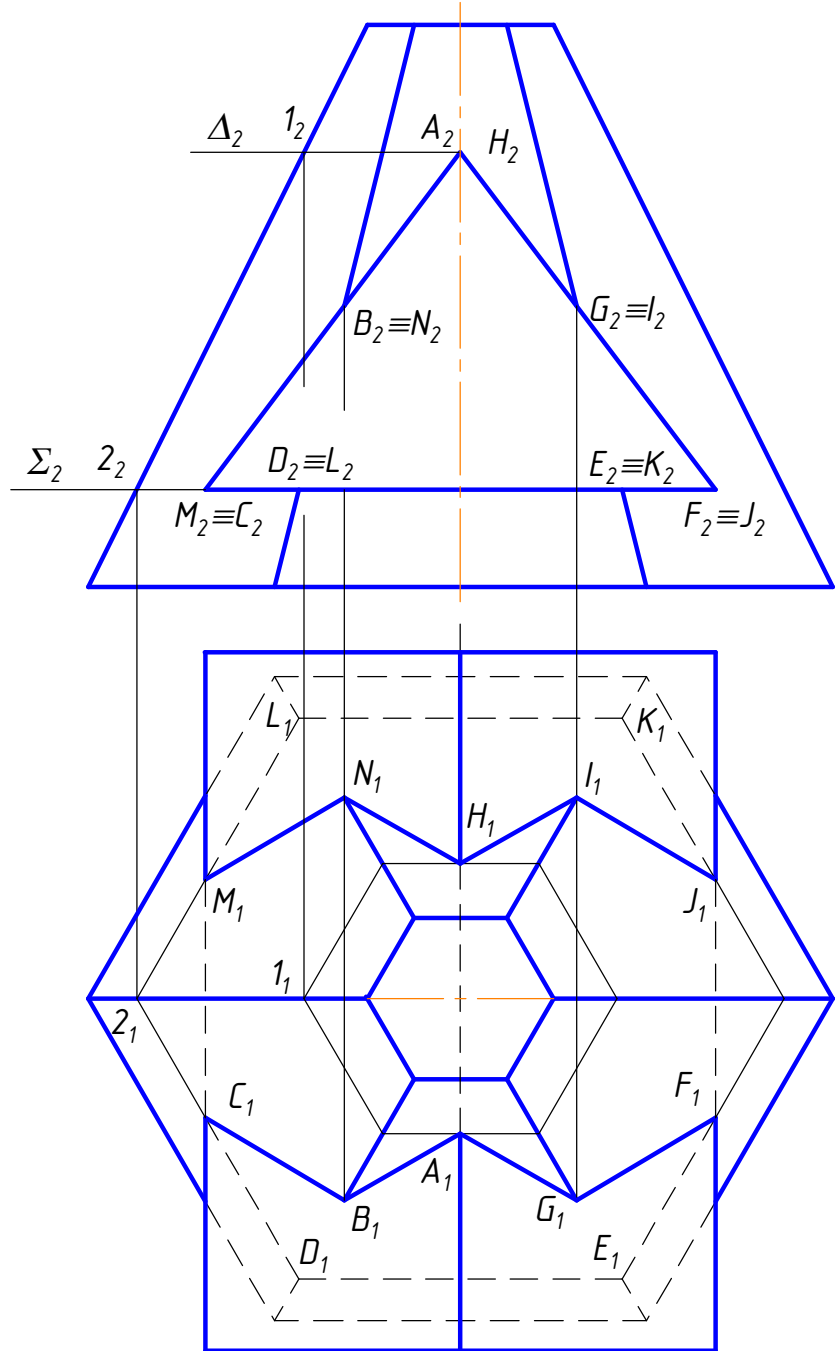


Рис. 18

**Приклад 14.**  
 Побудувати проекції  
 лінії перетину двох  
 призм (рис. 34).

**Розв'язуванн  
 я.** Призми різно-  
 йменно проєкцюва-  
 льні, тому дві проєк-  
 ції їхньої лінії пе-  
 ретину відомі, вони  
 збігаються з відпо-  
 відними проєкціями  
 бічних поверхонь  
 призм. Із фронталь-  
 ної проєкції видно,  
 що лінія перетину  
 розпадається на дві  
 частини, кожна з  
 яких є просторовою  
 ламаною замкненою  
 лінією. Необхідно  
 розпізнати проєкції  
 вершин цієї лінії,  
 позначити їх відпо-  
 відним чином та по-  
 будувати профільну  
 проєкцію лінії пере-  
 тину. Позначення  
 горизонтальної та  
 фронтальної проєк-  
 цій  
 лінії перетину:

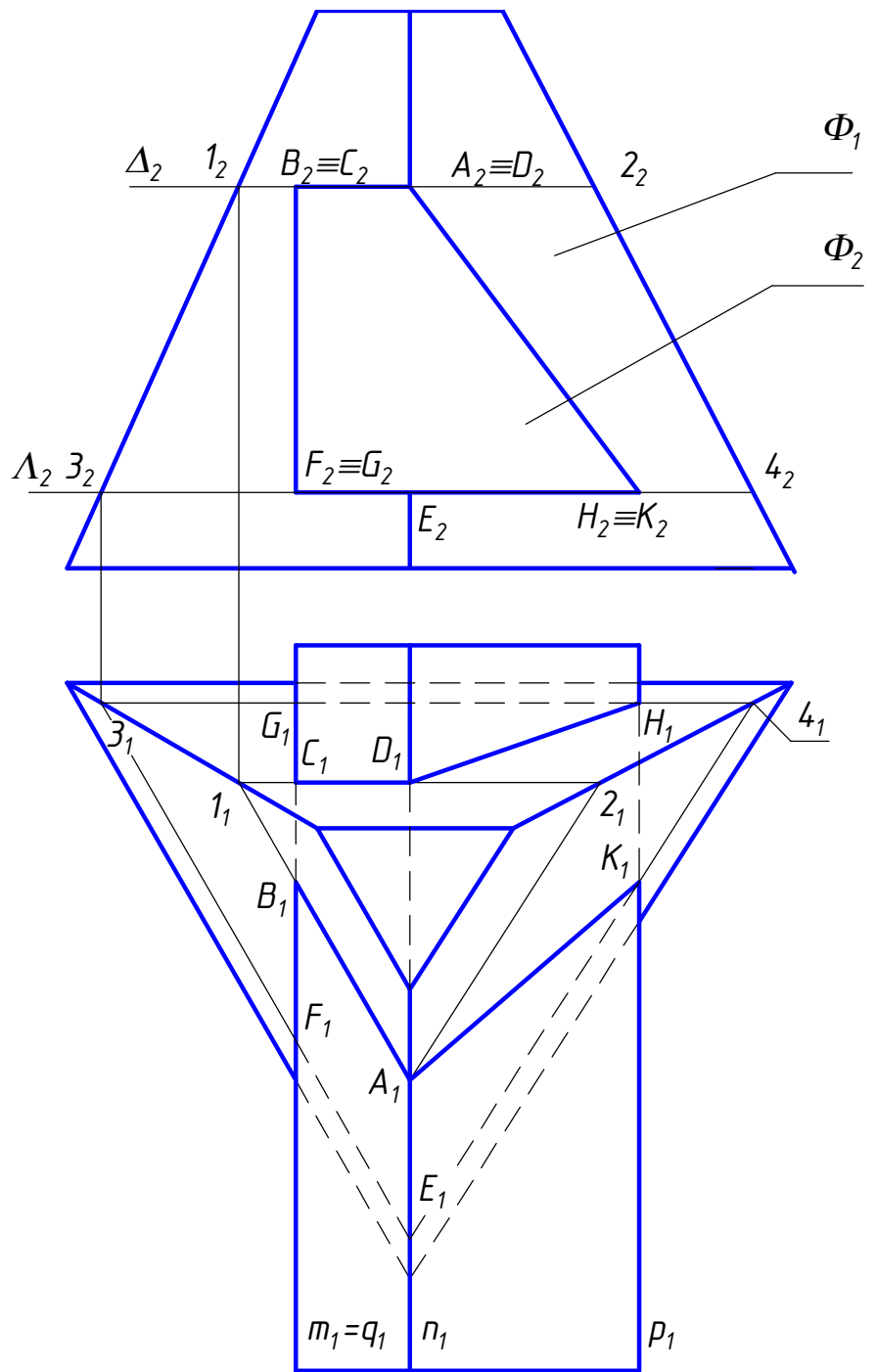


Рис. 19

$$\Phi_1 \cap \Phi_2 = ABCDEFA(A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_1, A_2B_2C_2D_2E_2F_2A_2);$$

$$GHIJKLG(G_1H_1I_1J_1K_1L_1G_1, G_2H_2I_2J_2K_2L_2G_2).$$

Профільна проєкція лінії перетину може бути побудована будь-яким із відомих способів. У даному прикладі вона побудована за допомогою постійної прямої креслення.

## 5 ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ ЛІНІЇ З КРИВОЮ ПОВЕРХНЕЮ

**Приклад 15.** Побудувати проєкції точок перетину прямої  $l$  з поверхнею похилого циліндра  $\Phi$  (рис. 20, 21).

**Розв'язування.** На наочному (стереометричному) зображенні (рис. 20) показано схематично методику побудови точок перетину прямої з поверхнею:

1. Через пряму  $l$  проведена допоміжна площина  $\Sigma$ .
2. Площина  $\Sigma$  перетинає поверхню по лінії 3456.
3. Лінія 3456 перетинає пряму  $l$  у точках  $M, N$ .

Точки  $M$  і  $N$  – це точки перетину прямої  $l$  з поверхнею  $\Phi$ .

Допоміжну площину-посередник слід проводити таким чином, щоб вона перетинала поверхню по найпростішій лінії – прямій чи колу.

На рис. 21 показано побудову точок перетину прямої  $l(l_1, l_2)$  з похилим циліндром  $\Phi$ :

1. Через пряму проведена допоміжна площина-посередник  $\Sigma(l; a)$  паралельно твірним циліндра.

2.  $l \cap \Gamma = 1$ ;  $a \cap \Gamma = 2$ ;  $12 = \Sigma \cap \Gamma$ ;  $12$  – це лінія перетину площини  $\Sigma$  з площиною основи циліндра. Вона перетинає коло основи циліндра у точках  $3(3_1)$  і  $4(4_1)$ .

3. Через точки  $3_1$  і  $4(4_1)$  проведені проєкції твірних циліндра, які перетинають пряму  $l$  у точках  $M_1$  і  $N_1$ .

4. За лініями зв'язку побудовані фронтальні проєкції  $M_2$  і  $N_2$  точок  $M, N$ .

$M(M_1, M_2), N(N_1, N_2)$  – це точки перетину прямої  $l$  з поверхнею циліндра.

Точка  $M$  на обох проєкціях видима, тому частина прямої  $l$ , що розташована вище за точку  $M$ , видима на обох проєкціях. Точка  $N$  невидима на обох проєкціях, тому частина прямої  $l$ , що розташована нижче за точку  $N$  до крайніх твірних на обох проєкціях невидима. Відрізок  $MN$  прямої  $l$  завжди невидимий на обох проєкціях, бо він розташований усередині циліндра.

**Приклад 16.** Побудувати проєкції точок перетину прямої  $l$  з поверхнею конуса (рис. 22, 23).

**Розв'язування.** На рис. 22 показана загальна схема побудови точок перетину прямої з конусом. Через вершину конуса і пряму  $l$  проведена допоміжна площина, яка перетинає конус по двох його твірних  $3S, 4S$ . У перетині цих твірних з прямою  $l$  маємо точки  $M$  і  $N$  перетину прямої  $l$  з конусом.

На рис. 23 на комплексному кресленні показано побудову точок перетину прямого кругового конуса з прямою  $l$ :

1.  $l \subset \Sigma(a; l)$ ;  $a \cap l = A$ .
2.  $\Sigma \cap \Phi = 34S$ .
3.  $34S \cap l = M, N$ .

4.  $M, N = l \cap \Phi$ .

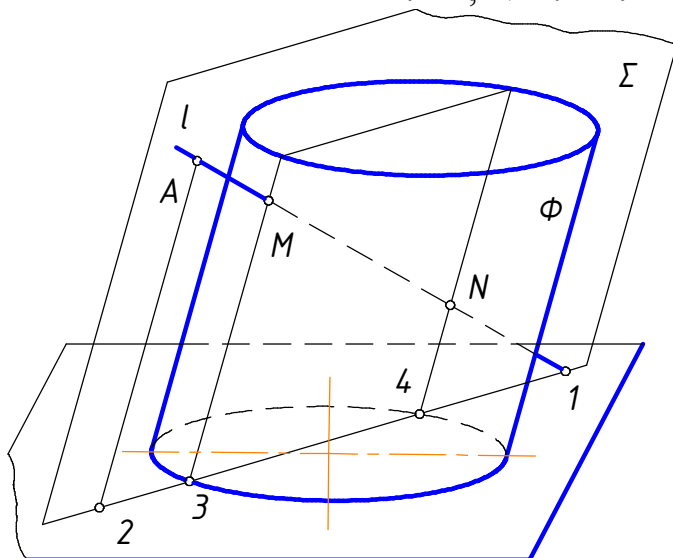


Рис. 20

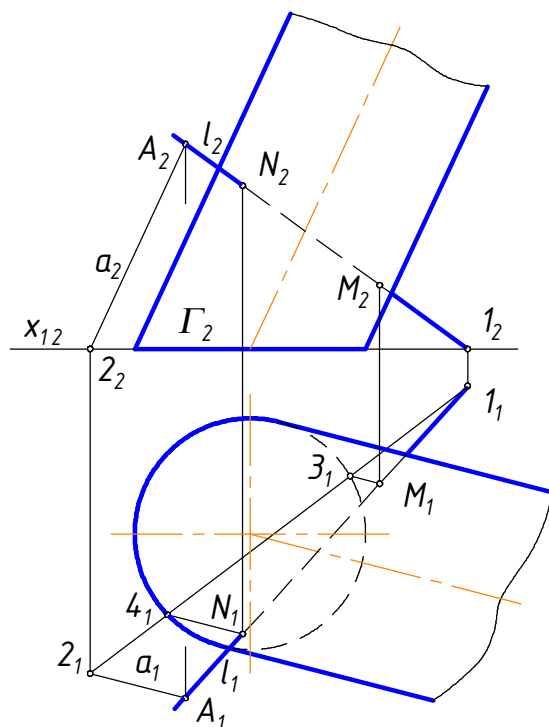


Рис. 21

**Приклад 17.** Побудувати проєкції точок перетину прямої  $l$  зі сферою (рис. 24).

**Розв'язування.** Задача розв'язується за загальною методикою. Будь-яка площина, яка може бути проведена через пряму  $l$  перетинає сферу по колу. Проте, оскільки пряма  $l$  перебуває у загальному положенні, то коло перетину сфери з площиною, проведеною через пряму, не може спроектуватися у коло на жодну із площин проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ .

Тому через пряму  $l$  проведена горизонтально проєкціювальна площина  $\Sigma(\Sigma_1)$ . Далі замінена площина  $\Pi_2$  новою площиною  $\Pi_4 \parallel l_1$ .

1.  $l \subset \Sigma(\Sigma_1)$ .
2.  $\Sigma \cap \Phi = a$ ;
3.  $\Pi_2 \rightarrow \Pi_4 \perp \Pi_1$ ;  $\Pi_4 \parallel \Sigma$ .
4.  $a_4 \cap l_4 = M_4, N_4$ .

Далі зворотним перетворенням побудовані точки  $M_1, N_1$ , а за лініями зв'язку і точки  $M_2, N_2$ . Точки  $M(M_1, M_2), N(N_1, N_2)$  – це точки перетину прямої  $l$  зі сферою.

Цю задачу можна розв'язати простіше, якщо через пряму  $l$  провести допоміжну площину загального положення, яка проходила б через центр сфери. Така площина перетинає сферу по великому колу (діаметр цього кола

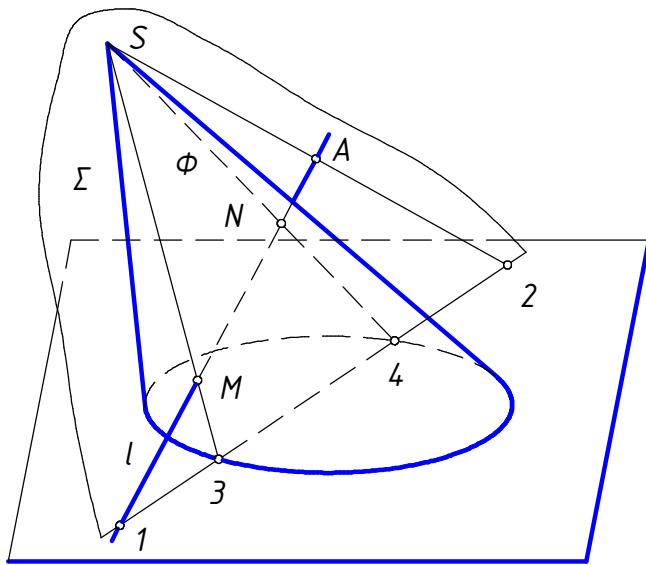


Рис. 22

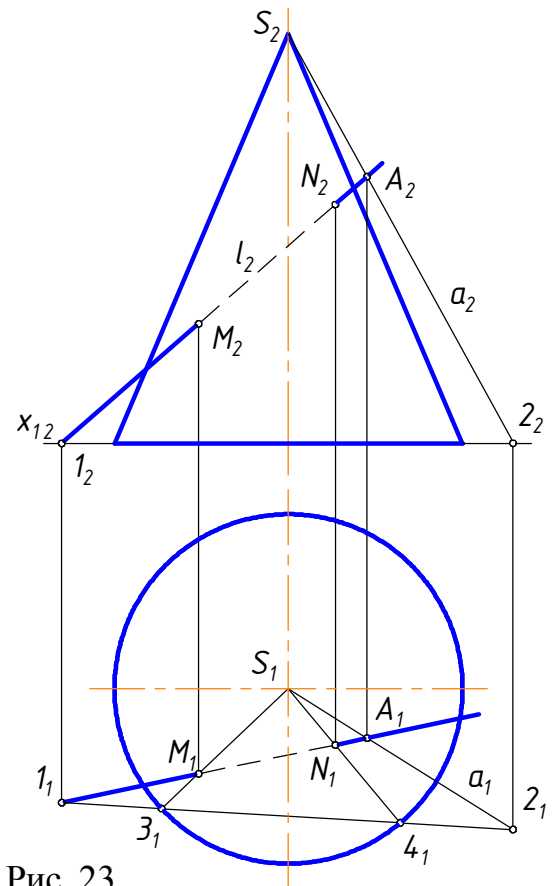


Рис. 23

дорівнює діаметру сфери). Ця площина визначається центром сфери і прямою  $l$ . Повернемо площину  $\Delta(O, l)$  навколо її горизонталі (можна фронталі). Проекція  $l_1$  поверненої прямої перетинає екватор сфери у точках  $\bar{M}_1, \bar{N}_1$ . Проекція поверненої лінії перетину сфери з площиною  $\Delta$  збігається з проекцією екватора сфери.

Зворотним обертанням точок  $M(\bar{M}_1)$  і  $N(\bar{N}_1)$  будемо горизонтальні проєкції  $M_1, N_1$  точок  $M, N$ . Потім за лініями зв'язку будемо їхні проєкції  $M_2, N_2$ .

На рис. 25 показано побудови точок перетину прямих  $l(l_1, l_2), m(m_1, m_2), n(n_1, n_2)$  зі сферою. Пряма  $l$  горизонтальна, тому через неї проведена горизонтальна площина  $\Gamma(\Gamma_2)$ , яка перетинає сферу по колу  $a(a_1)$ .  $l_1 \cap a_1 = A_1, B_1$ . За лініями зв'язку побудовані проєкції  $A_2, B_2$ . Точки  $A(A_1, A_2), B(B_1, B_2)$  – це точки перетину прямої  $l$  зі сферою.

Аналогічно за допомогою площини  $\Delta(\Delta_1)$  побудовані точки  $C(C_1, C_2), D(D_1, D_2)$  перетину прямої  $m(m_1, m_2)$  зі сферою, а також точки  $E(E_1, E_2), F(F_1, F_2)$  перетину прямої  $n$  зі сферою (за допомогою фронтальної площини  $\Lambda(\Lambda_1)$ ).

Так само побудовані точки перетину прямих  $l(l_1, l_2), m(m_1, m_2), n(n_1, n_2)$  з конусом (рис. 26) відповідно:

1.  $l \cap \Phi = M(M_1, M_2), N(N_1, N_2)$  (за допомогою площини  $\Gamma(\Gamma_2) \parallel \Pi_1$ ).
2.  $m \cap \Phi = P(P_1, P_2), Q(Q_1, Q_2)$  (за допомогою площини  $\Delta(\Delta_2) \parallel \Pi_1$ ).
3.  $n \cap \Phi = R(R_1, R_2), T(T_1, T_2)$  за допомогою площини  $\Lambda(\Lambda_1) \perp \Pi_1$ .

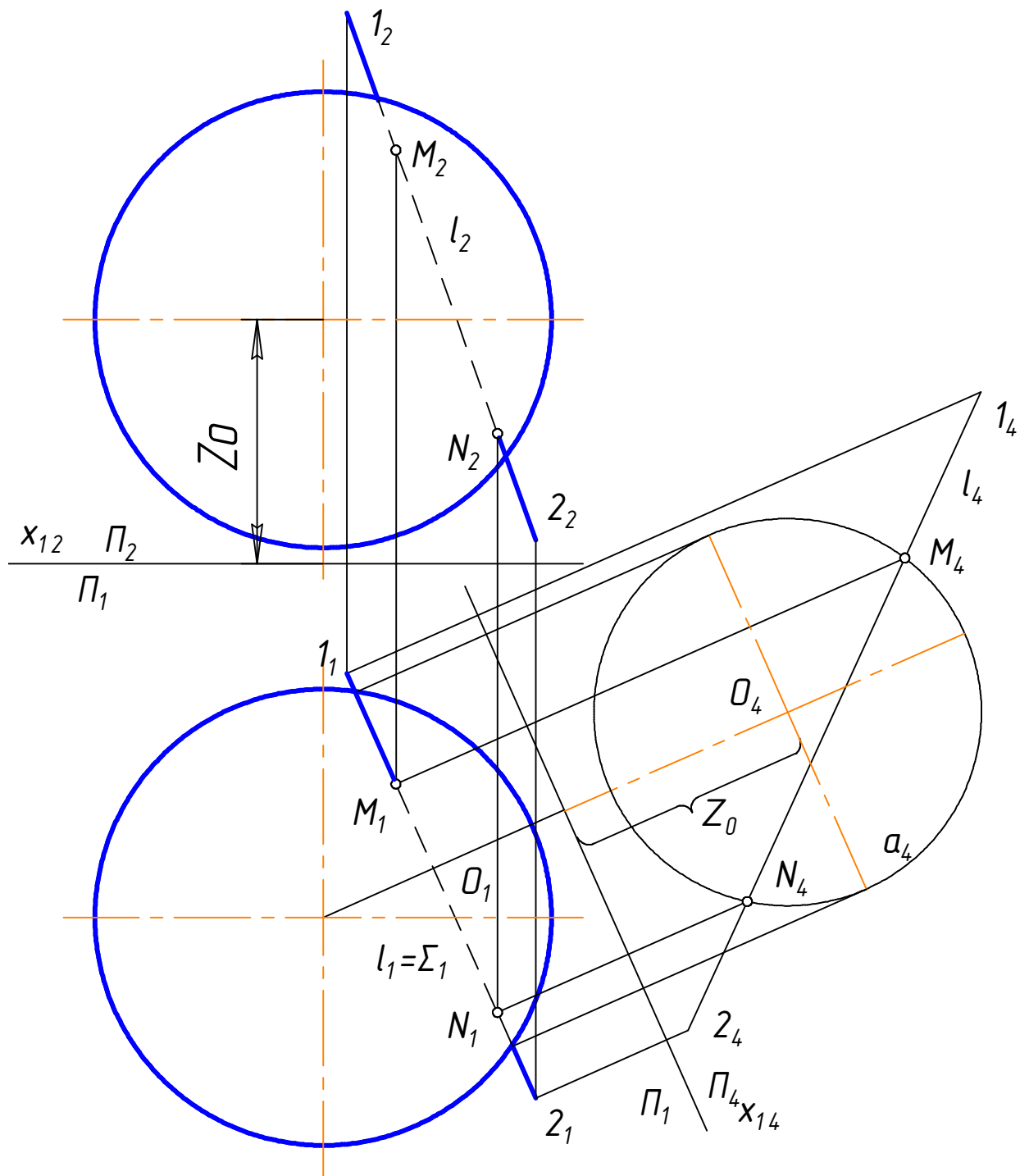


Рис. 24

## 6 ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ДВОХ КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

**Приклад 18.** Побудувати проєкції лінії взаємного перетину конуса  $\Phi^1$  зі сферою  $\Phi^2$  (рис. 27, 28).

**Розв'язування.** На стереометричному зображенні (рис. 27) показано загальну методику побудови точок, спільних для двох поверхонь, що перетинаються:

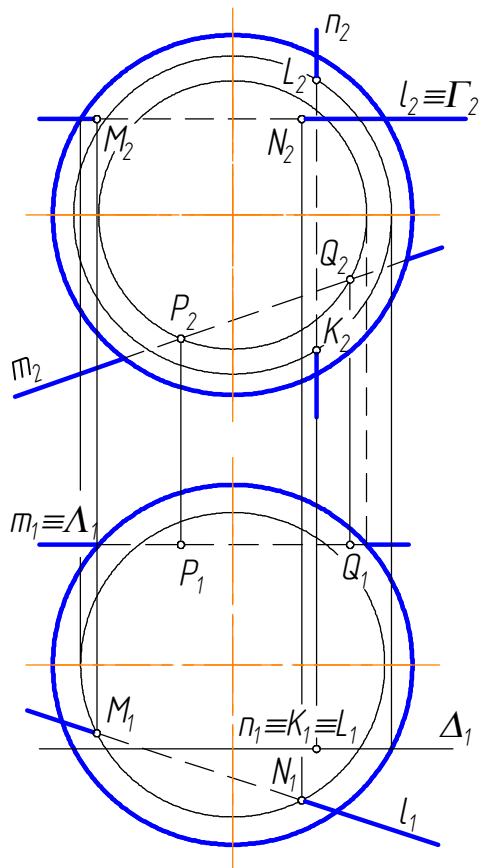


Рис. 25

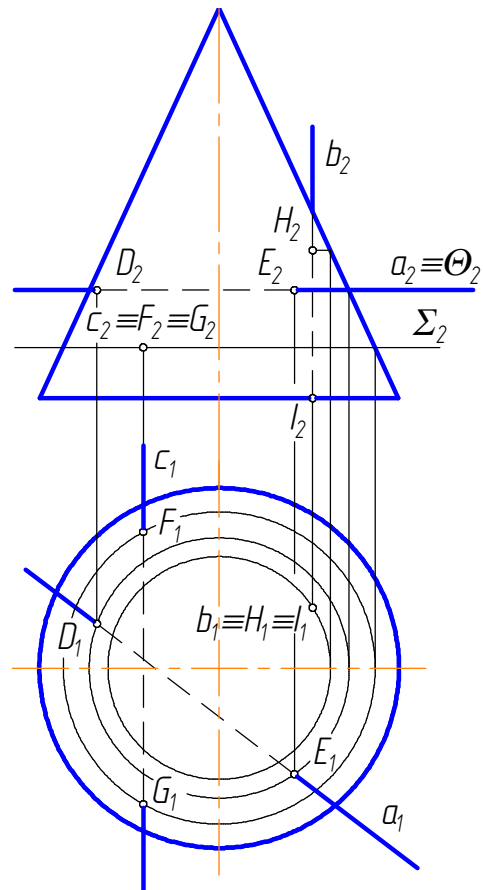


Рис. 26

1. Конус і сфера перетинаються допоміжною площинно-посередником  $\Sigma$ .
2.  $\Sigma \cap \Phi^1 = m$ ;  $\Sigma \cap \Phi^2 = n$ .
3.  $m \cap n = A, B$ .  $A \subset l = \Phi^1 \cap \Phi^2$ ;  $B \subset l = \Phi^1 \cap \Phi^2$ .

На комплексному кресленні (рис. 28) точки  $A(A_1, A_2)$ ,  $B(B_1, B_2)$  як проміжні точки лінії перетину побудовані за вище вказаним алгоритмом.

Проте, побудова лінії перетину двох поверхонь, зазвичай, починається з визначення характерних точок. У нашому прикладі такими точками є точки  $C(C_1, C_2)$  і  $D(D_1, D_2)$  (точки перетину крайніх твірних поверхонь),  $E(E_1, E_2)$ ,  $F(F_1, F_2)$  - точки дотику горизонтальної проекції лінії перетину до екватора сфери, ці точки поділяють горизонтальну проекцію лінії перетину на видимі і невидимі частини. Ці точки побудовані за допомогою горизонтальної площини  $\Gamma(\Gamma_2)$ , проведеної через центр сфери. Вона перетинає сферу по її екватору, а конус по колу  $a(a_1, a_2)$ . У перетині цих двох кіл маємо точки  $E$  і  $F$ . Точки  $G(G_1, G_2)$ ,  $H(H_1, H_2)$  - точки, в яких дві твірні конуса дотикаються до лінії перетину). Вони побудовані за допомогою сфери-посередника, проведеної через коло  $b(b_2)$ , по якому до сфери дотикається конус з вершиною, що збігається з вершиною вихідного конуса (з лівого боку сфери показана одна твірна допоміжного конуса, яка дотикається до головного меридіана вихідної сфери, саме через точку дотику і проведена сфера-посередник). Сфера-посередник перетинається з вихідною сферою по колу  $b(b_2)$ , а з конусом по

колу  $c(c_1, c_2)$ . У перетині кіл  $b$  та  $c$  маємо точки  $G(G_1, G_2), H(H_1, H_2)$ . Горизонтальні проєкції  $G_1, H_1$  побудовані як проєкції точок що належать колу  $c(c_1)$ .

Решта проміжних точок лінії перетину побудована так само, як точки  $A$  і  $B$  за допомогою горизонтальних площин-посередників, положення яких показано

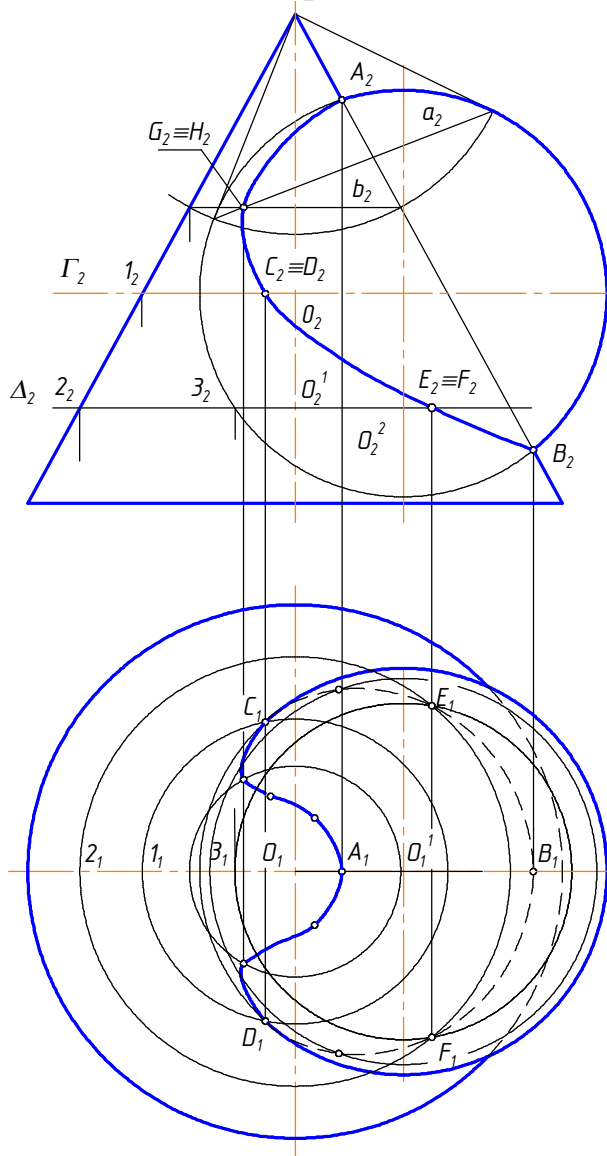


Рис. 28

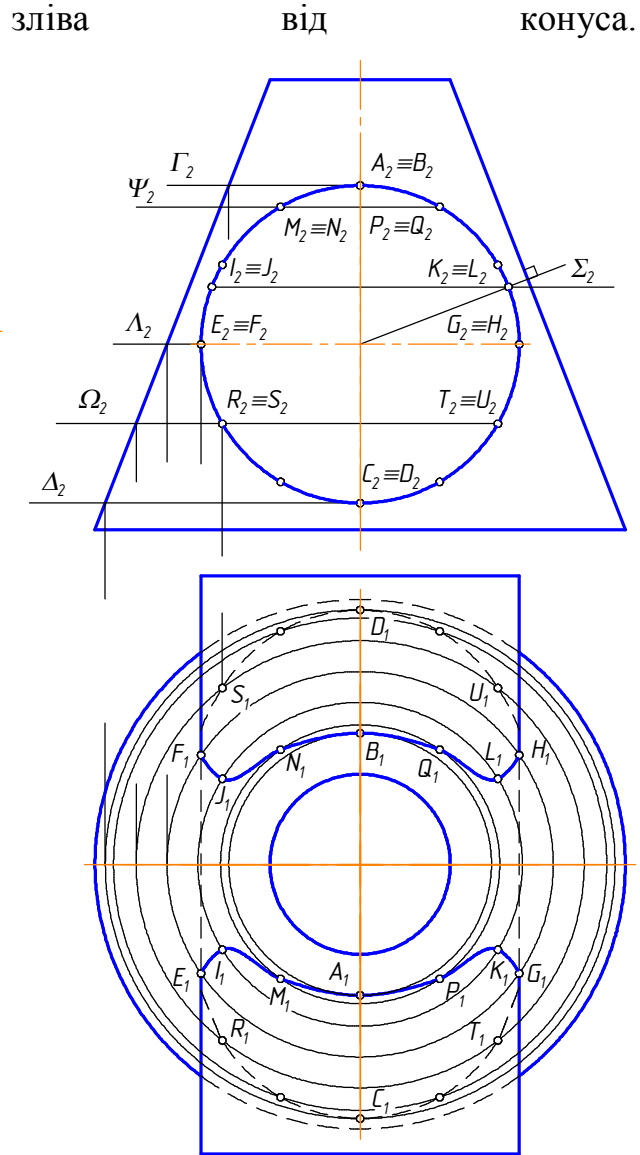


Рис. 29

**Приклад 19.** Побудувати проєкції лінії перетину зрізаного прямого кругового конуса з фронтально проєкціювальним циліндром (рис. 29).

**Розв'язування.** Лінія перетину розпалася на дві частини, кожна з яких є просторовою кривою. Фронтальна проєкція лінії перетину збігається з колом, у яке проєкціюється бічна поверхня циліндра. Горизонтальні проєкції усіх точок лінії перетину будуються за допомогою горизонтальних площин-посередників.

Так, горизонтальні проєкції найвищих точок  $A$  і  $B$  побудовані за допомогою горизонтальної площини  $\Gamma(\Gamma_2)$ , яка перетинається з конусом по колу і дотикається до циліндра по його найвищій твірній. Проєкції  $A_1$  і  $B_1$  точок  $A$  і  $B$  – це точки перетину названих кола і твірної циліндра.



Так само побудовані горизонтальні проекції  $C_1, D_1$  найнижчих точок лінії перетину, розташованих на найнижчій твірній циліндра, за допомогою площини  $\Delta(\Delta_2)$ . Чотири точки  $E(E_1, E_2), F(F_1, F_2), G(G_1, G_2), H(H_1, H_2)$  дотику горизонтальної проекції лінії перетину до крайніх твірних циліндра побудовані за допомогою площини  $\Lambda(\Lambda_2)$ , проведеної через крайні ліву та праву твірні циліндра. Ці точки поділяють горизонтальну проекцію лінії перетину на видиму і невидиму частини.

Точки  $K(K_1, K_2), L(L_1, L_2), I(I_1, I_2), J(J_1, J_2)$  – це точки, які розташовані найближче до крайніх твірних конуса. На горизонтальній проекції вони розташовані найближче до горизонтальної осі симетрії.

Точки  $M, N, P, Q, R, S, U$  – це проміжні точки лінії перетину. Їхні горизонтальні проекції побудовані аналогічно вище названим за допомогою площин  $\Psi(\Psi_2)$  і  $\Omega(\Omega_2)$ .

**Приклад 20.** Побудувати проекції лінії перетину двох циліндрів (рис. 30).

**Розв’язування.** Перетинаються два різнойменно проєкціювальних циліндри обертання. Тому дві проекції лінії перетину відомі. Необхідно лише ідентифікувати їх, тобто позначити проекції відповідних точок та побудувати третю проекцію лінії перетину, яка в даному випадку проєкціюється гіперболою. На рис. 30 проекції відповідних точок лінії перетину розташовані на відповідних лініях зв’язку. Профільна проекція побудована за допомогою постійної креслення.

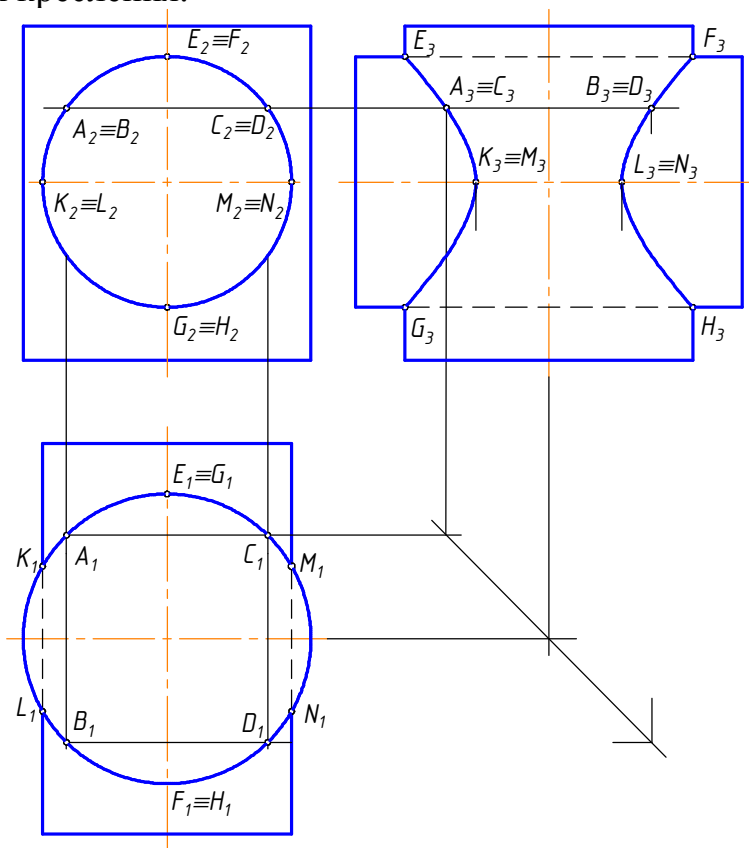


Рис. 30

## 7 МЕТОД ДОПОМІЖНИХ СФЕРИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

**Приклад 21.** Побудувати лінію перетину конуса обертання з похилим циліндром обертання, осі яких перетинаються між собою (рис. 31).

**Розв'язування.** Спосіб допоміжних сфер дозволяє будувати лінію перетину поверхонь на одній проекції. Якщо необхідно побудувати інші проекції, то вони можуть бути побудовані як проекції лінії, що належить одній із заданих поверхонь. Отже першими позначені чотири точки А, В, С, D перетину крайніх твірних конуса і циліндра. Найменша допоміжна сфера проведена так, що вона дотикається до конуса по одному колу і перетинається з циліндром по двох колах. У перетині цих трьох кіл утворилися точки  $E(E_2)$ ,  $F(F_2)$ . Точки  $E_2$  і  $F_2$  так само, як і усі інші точки лінії перетину, є подвійними: одна із них на видимому боці конуса і циліндра, а друга – на невидимому.

Друга сфера перетинає і конус і циліндр по двом колам, у перетині яких утворені три точки  $G(G_2)$ ,  $H(H_2)$ ,  $I(I_2)$ . Четверта точка є уявною. Вона розташована у перетині прямих, що продовжують зображення кіл, по яким перетинаються конус і циліндр зі сферою. Проте ця точка належить продовженню гіперболи, якою зобразилася лінія перетину.

Радіус найбільшої сфери не може перевищувати відстань від точки перетину осей конуса і циліндра до найбільш віддаленої від неї точки перетину крайніх твірних. Отже радіуси допоміжних сфер вибираються в межах  $R_{\min} < R < R_{\max}$ . Наприклад, неподалік від точки  $D(D_2)$  проведена сфера, яка перетинає конус по горизонтальному колу, а циліндр – по колу, перпендикулярному до його осі. У перетині цих кіл утворилася точка  $K(K_2)$ , що належить лінії перетину конуса і циліндра.

На рис. 32 показано ще два приклади побудови лінії перетину циліндрів та конусів способом допоміжних сфер. Сподіваємося, що читач, уважно розглянувши рисунки, зрозуміє хід побудов окремих точок лінії перетину.

**Приклад 22.** Побудувати три проекції конуса з призматичним трикутним отвором (рис. 33).

**Розв'язання.** Задача полягає у побудові трьох проекцій лінії перетину поверхні конуса з поверхнею наскрізного тригранного призматичного отвору. Горизонтальна площина  $\Delta(\Delta_2)$ , яка проведена через горизонтальну грань призми, перетинає конус по колу радіуса  $O_1I_1$ . Частини цього кола, - дуги  $AD(A_1D_1, A_2D_2)$  і  $BC(B_1C_1, B_2C_2)$ , - це лінія перетину горизонтальної грані призми отвору з конусом.

Нижнє ребро  $EF(E_1F_1, E_2F_2)$  призми отвору перетинається з профільними твірними конуса. Тому за горизонтальною лінією зв'язку побудовані спочатку профільні проекції  $E_3, F_3$  точок E, F, а потім – горизонтальні  $E_1, F_1$ .

У перетині конуса з двома іншими гранями призми отвору утворені дві пари відрізків двох еліпсів. Горизонтальні проекції точок цих еліпсів будуються за допомогою горизонтальних площин-посередників. Наприклад, площина  $\Sigma(\Sigma_2)$  перетинає конус по колу  $O_1I_2$ , а грані призми - по відрізкам  $MN(M_1N_1, M_2N_2)$  і  $PR(P_1R_2, P_2R_2)$  прямих. Точки M, N, P, R належать еліпсам

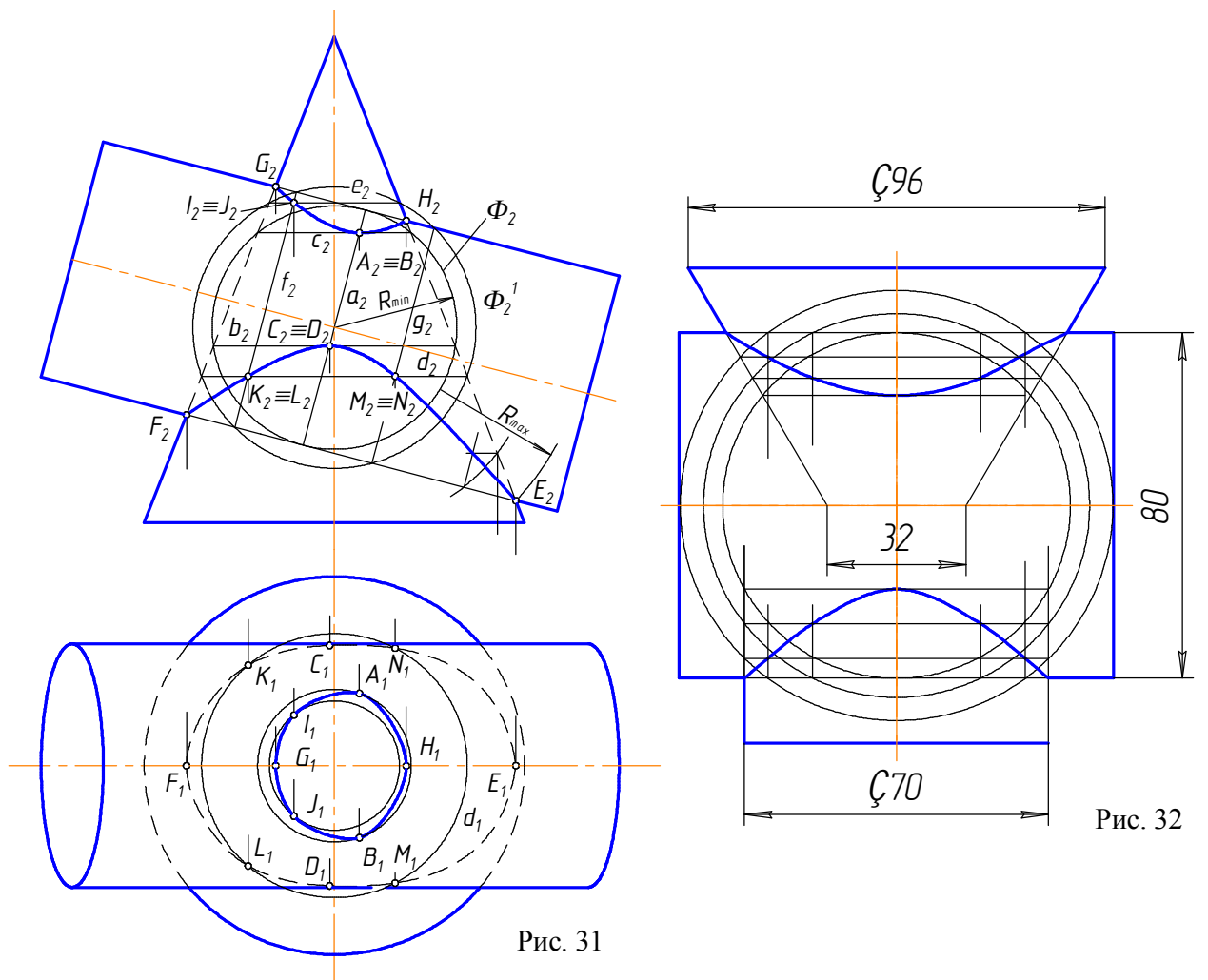


Рис. 32

перетину граней призми з конусом. Профільні проєкції  $M_3, N_3, P_3, R_3$  побудовані за допомогою постійної прямої креслення.

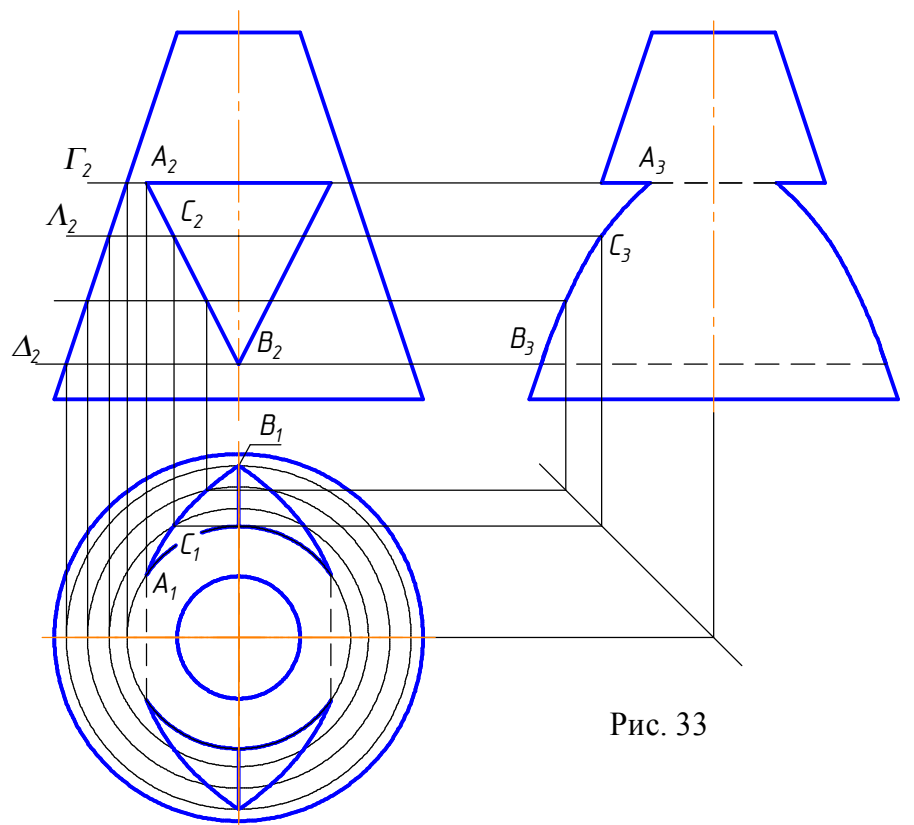


Рис. 33