**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Косолапов Ю.Ф.

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПЕРШОГО КУРСУ

ЧАСТИНИ 1 - 2

Навчальний посібник по вивченню курсу
”Математичний аналіз”
для студентів ДонНТУ

Розглянуто на засіданні
кафедри вищої математики
протокол № 8 від 29.04.2009

Затверджено на засіданні
навчально-видавничої
ради ДонНТУ
протокол № 2 від 29.04.2009

ДОНЕЦЬК 2009

УДК 517.2(071)

Косолапов Ю.Ф. Математичний аналіз першого курсу. Частини 1 - 2: Вступ до аналізу. Диференціальне числення та його застосування. Інтеґральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди: Навчальний посібник по вивченню курсу ”Математичний аналіз” для студентів ДонНТУ/ - Донецьк: РВА ДонНТУ, 2009. – 458 с.

Викладаються основні поняття теорії границь, неперервності, диференціального числення, невизначеного, визначеного і подвійного інтеґралів, звичайних диференціальних рівнянь та систем, теорії рядів. Подаються численні практичні застосування. Докладно розглядаються приклади розв’язання типових задач. Дано завдання для самостійної роботи.

Для студентів і викладачів технічних вузів.

УКЛАДАЧ: **Косолапов Ю.Ф.**

РЕЦЕНЗЕНТ: кандидат фізико-математичних наук, доцент Косілова О.Ф.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ ЗА ВИПУСК:
зав. кафедри вищої математики ДонНТУ,
доктор технічних наук, професор Улітін Г.М.

ЧАСТИНА ПЕРША: ВСТУП ДО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ЛІТЕРАТУРА

ПІДРУЧНИКИ

1. Bermant A., Aramanovich I. Mathematical analysis. A brief course for engineering students. – Moscow: Mir Publishers, 1975. - 782 p.
2. Kosolapov J. Introduction in Mathematical Analysis. Differential calculus. Методичний посібник по вивченню розділу курсу "Математичний аналіз" для студентів ДонНТУ (англійською мовою)/– Донецьк: РВА ДонНТУ, 2006.- 169 с.
3. Piscunov N. Differential and integral calculus. – Moscow: Mir Publishers, 1969. - 895 p.
4. Yakovlev G. Higher mathematics. – Moscow: Mir Publishers, 1990, - 480 p.
5. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Уч. пособие для вузов.- М.: ЮНИТИ, 2004. - 471 с.
6. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И.Ермакова. - М.: ИНФРА, 1999. - 656 с.
7. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник. – Д.: "Видавництво Сталкер", 2003. – 496 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1, 2. – М.: Наука, 1978, 1985. - 456, 560 с.
9. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Тт. 1, 2. Учеб. пособие для втузов. – М.: „Высшая школа", 1978. – 384, 328 с.

ЗБІРНИКИ ЗАДАЧ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие для вузов. - СПб: Профессия, 2005.- 432 с.
2. Кремер Н.Ш. Практикум по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 423 с.
3. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

1. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1.1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

1.1.1.Функція (додаткові зауваження)

Означення 1. Дійсне число *x*, пару дійсних чисел $x=(x_1,x_2)$, трійку дісних чисел $x=(x_1,x_2,x_3)$ називатимемо відповідно одновимірною, двовимірною, тривимірною точкою. Множини $\Re=\Re^1=(-\infty,\infty)$, $\Re^2$, $\Re^3$ всіх одновимірних, двовимірних, тривимірних точок називатимемо відповідно одновимірним, двовимірним, тривимірним просторами. Геометрично їм відповідають вісь O*x*, площина Ox_1x_2 та простір $Ox_1x_2x_3$.

Означення 2. *n*-вимірним простором $\Re^n$ називається множина всіх так званих *n*-вимірних точок $x=(x_1,x_2,...,x_n)$.

Означення 3. Відстанню між двома точками

$$x=(x_1,x_2,...,x_n),\ y=(y_1,y_2,...,y_n)$$

n-вимірного простору $\Re^n$ називається вираз

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}.$$

Теорема 1. Для будь-яких точок *x*, *y*, *z* *n*-вимірного простору $\Re^n$

$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (нерівність трикутника).

Означення 4. Функцією $y=f(x)$ з областю визначення $D(f)\in\Re^n$ і множиною значень $E(f)\subseteq\Re$ називається відображення області визначення $D(f)$ на множину значень $E(f)$, тобто певне правило, яке кожній точці $x\in D(f)$ ставить у відповідність певне (єдине) число $y\in E(f)\subseteq\Re$.

Для *n* = 1, 2, 3, …, *n* ми маємо функцію однієї, двох, трьох, *n* змінних

$y = f(x)$, $y = f(x) = f(x_1, x_2)$, $y = f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$, $y = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Означення 5. Символ $f(x)$ називається значенням функції в точці x.

Приклад. **Числова послідовність**. Нехай областю визначення функції є множина всіх натуральних чисел $D(f) = \aleph = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, тобто йдеться про функцію $y = f(n)$ натурального аргументу, і

$$y_1 = f(1),\ y_2 = f(2),\ y_3 = f(3), ..., y_n = f(n), ..., \text{ скорочено } \{y_n = f(n)\}.$$

Послідовно виписані значення функції $y = f(n)$ утворюють числову послідовність з загальним членом $y_n = f(n)$.

Способи визначення функції.

1. **Аналітичний спосіб**: за допомоги формули $y = f(x)$, в правій частині якої визначена процедура, яка дозволяє для будь-якої точки $x \in D(f)$ знайти відповідне значення функції.

Наприклад: $y = x^2$, $y = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$, $y = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}$.

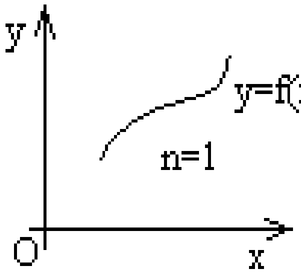


Рис. 1

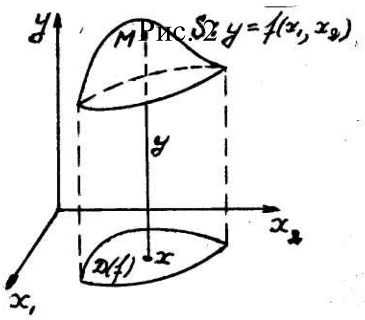


Рис. 2

2. **Графічний (геометричний) спосіб** (для $n = 1, 2$): за допомогою графіка.

Все зрозуміло для випадку n = 1 (див. рис. 1). Нехай тепер n = 2, тобто йдеться про функцію двох змінних $y = f(x) = f(x_1, x_2)$. Для будь-якої точки $x = (x_1, x_2) \in D(f)$ ми отримуємо точку $M(x_1, x_2, y)$, $y = f(x_1, x_2)$ простору Ox_1x_2y. Множина всіх таких точок часто-густо утворює деяку поверхню S, яка називається графіком функції (рис. 2).

Функцію двох змінних $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ можна геометрично представити так званими **лініями рівня**, а саме лініями, вздовж яких функція має сталі значення,

$$f(x_1, x_2) = C, C - const.$$

Очевидно, для кожного C лінія рівня є проекцією на площину x_1Ox_2 лінії перерізу графіка функції $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ з площиною $z = C$.

Приклад. Лінії рівня функції

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

визначаються рівнянням

$$x_1^2 + x_2^2 = C; C \geq 0.$$

При $C = 0$ маємо $x_1 = x_2 = 0$, тобто точку $O(0,0)$. Якщо ж $C > 0$, лінії рівня є кола з радіусами $R = \sqrt{C}$ і спільним центром в початку координат $O(0,0)$.

Функція трьох змінних $y = f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ не може мати графіка в просторі, але її можна геометрично характеризувати **поверхнями рівня**, тобто поверхнями, на яких функція має сталі значення, тобто

$$f(x_1, x_2, x_3) = C, C - const.$$

Приклад. Поверхні рівня функції

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

подаються рівняннями

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C; C \geq 0.$$

Для $C = 0$ поверхня рівня вироджується в точку $O(0,0,0)$, а для $C > 0$ поверхні рівня є сферами з радіусами $R = \sqrt{C}$ і центром в початку координат $O(0,0,0)$.

3. **Табличний спосіб** (для $n = 1, 2, 3$): за допомогою деякої таблиці.

При $n = 1$ існують, наприклад, таблиці тригонометричних функцій, логарифмів тощо. Є таблиці з двома і трьома входами для $n = 2, 3$ відповідно.

4. **Описовий спосіб** (за допомогою деякого опису).

Приклад. Означення тригонометричних функцій дійсного арґументу.

5. **Алгоритмічний спосіб** (за допомогою програми для ЕОМ або ПК).

Означення 6. Основними елементарними називаються наступні функції (однієї змінної):

1) стала функція $y = f(x) = C$, C -const;

2) степенева функція

$$y = x^{\alpha}, \ \alpha \in \Re^1;$$

3) показникова функція

$$y = a^x, \ 0 < a \neq 1, \text{ зокрема } y = e^x,$$

де $e \approx 2.71828...$ - так зване число Ейлера;

4) логарифмічна функція

$$y = \log_a x, \text{ зокрема } y = \ln x = \log_e x;$$

5) тригонометричні функції

$$y = \sin x, \ y = \cos x, \ y = \tan x, \ y = \cot x;$$

6) обернені тригонометричні функції

$$y = \arcsin x, \ y = \arccos x, \ y = \arctan x, \ y = arc\cot x.$$

Означення 7 (складена функція). Нехай $y = f(u), \ u = \varphi(x)$ - дві функції однієї змінної, причому $E(\varphi) \subseteq D(f)$. Функція $y = f(\varphi(x))$ називається **складеною** [*або* функцією від функції, **суперпозицією** функцій f та φ].

Розглядають також складені функції декількох змінних.

Приклад. Складена функція трьох змінних

$$y = f(\varphi_1(x_1, x_2, x_3), \varphi_2(x_1, x_2, x_3)),$$

де

$$y = f(u) = f(u_1, u_2), u_1 = \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1, x_2, x_3), u_2 = \varphi_2(x) = \varphi_2(x_1, x_2, x_3),$$
$$u = (u_1, u_2) \in \Re^2, \ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Re^3$$

Означення 8 (елементарна функція). Функція $y = f(x)$ однієї змінної $x \in \Re^1$ називається **елементарною**, якщо вона є основною елементарною функцією або може бути отримана за допомоги скінченної кількості арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій над основними елементарними функціями.

Приклад. Многочлен n-го степеня (однієї змінної $x \in \Re^1$)

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \ a_n \neq 0.$$

Приклад. Раціональний дріб (від $x \in \Re^1$),

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)},\ Q_m(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m,$$

тобто відношення двох многочленів. Дріб називається **правильним**, якщо $m<n$, і **неправильним** в противному разі (при $m\ge n$).

Означення 9. Нехай $a\in\Re^1$. **Околом** U_a точки a називається будь-який інтервал, який містить цю точку. Зокрема, інтервал $U_{a,\varepsilon}=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, визначений нерівністю $|x-a|<\varepsilon$, називається ε - околом точки a.

Означення 10. Проколеним околом U'_a точки $a\in\Re^1$ називається її окіл U_a без цієї точки:

$$U'_a = U_a\setminus\{a\}.$$

Зокрема, проколений ε-окіл $U'_{a,\varepsilon}$ точки a є об"єднанням двох інтервалів:

$$U'_{a,\varepsilon}=(a-\varepsilon,a)\bigcup(a,a+\varepsilon).$$

Аналогічні означення можна дати в n-вимірному просторі. Обмежимось випадком $n=2$, тобто випадком $\Re^2$ (площини x_1Ox_2).

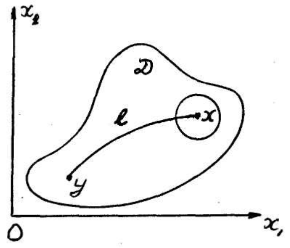


Рис. 3

Означення 11. Областю на площині називається точкова множина $D\subseteq\Re^2$, яка задовольняє дві умови:

1) кожна точка $x=(x_1,x_2)\in D$ належить D разом з деяким колом з центром в цій точці;

2) кожні дві точки $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ множини D можна з"єднати якоюсь лінією l, яка цілком лежить в D ($l\subset D$) (рис. 3).

Приклад. Відкритий круг $K(a,R)$ радіуса R з центром в точці $a=(a_1,a_2)$ (круг без своєї границі, тобто без кола $S(a,R)$).

За аналогією до означень 9, 10 ми можемо дати

Означення 12. Околом U_a точки $a=(a_1,a_2)\in\Re^2$ називається будь-яка область, яка містить цю точку (наприклад, відкритий круг $K(a,R)$).

Означення 13. Проколеним околом U'_a точки $a=(a_1,a_2)\in\Re^2$ називається її окіл U_a без точки a, тобто множина $U'_a=U_a\setminus\{a\}$ (наприклад, проколений круг $K'(a,R)=K(a,R)\setminus\{a\}$).

Дуже багато функцій (однієї і декількох змінних) розглядають в економіці, наприклад виробнича, пропозиційна і продуктивна функції, функції прибутку, витрат, вартості, попиту, корисності, втрат, ризику, збитків, ефектив-ності, банкрутства, втрати корисності, переваги, функція Кобба-Дугласа.

1.1.2. Границя. Нескінченно малі і великі

А. Границя функції в точці

Розпочнімо з наступного прикладу.

Приклад. Нехай задано функцію однієї змінної (рис. 4)

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

з областю визначення $D(f)=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$, і нехай x прямує до числа 3 (тобто $x\to 3$). Ми бачимо (див. таблицю 1), що відповідні значення функції прямують до числа 6, $f(x)\to 6$. Цей факт ми фіксуємо наступними позначеннями

$$\lim_{x\to 3} f(x)=6,\quad f(x)\to 6 \text{ при } x\to 3.$$

Ми повинні дати точне означення процесу прямування функції до числа.

Table 1

x	2.94	2.96	2.98	3	3.02	3.04	3.06
$y=f(x)$	5.94	5.96	5.98	Doesn't exist	6.02	6.04	6.06
$\lvert f(x)-6\rvert$	0.06	0.04	0.02		0.02	0.04	0.06

Нехай $x\neq 3$, а ε - довільне додатне число, яке ми можемо вважати як завгодно малим. Розглянемо абсолютну величину різниці між довільними значеннями функції і числом 6. Матимемо

$$|f(x)-6|=\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=|(x+3)-6|=|x-3|<\varepsilon \text{ якщо } -\varepsilon<x-3<\varepsilon,$$
$$3-\varepsilon<x<3+\varepsilon,\ x\in(3-\varepsilon,3+\varepsilon),\ x\neq 3 \text{ або } x\in(3-\varepsilon,3)\cup(3,3+\varepsilon).$$

Наприклад,

$$|f(x)-6| < 0.01\,(\varepsilon = 0.01),$$

якщо $x \in (2.99,\, 3) \cup (3,\, 3.01)$;

$$|f(x)-6| < 0.001\ (\varepsilon = 0.001),$$

якщо $x \in (2.999,\, 3) \cup (3,\, 3.001)$ і $x \neq 3$.

Таким чином, для будь-якого додатного як завгодно малого числа ε існує окіл точки $x = 3$, тобто інтервал $U_3 = (3-\varepsilon,\, 3+\varepsilon)$ ($U_3 = (m,\, n)$ на рис. 4), такий, що для довільного $x \in D(f)$, що потрапляє в проколений окіл U_3' точки $x = 3$, тобто $x \in U_3' = (3-\varepsilon,\, 3+\varepsilon) \setminus \{3\} = (3-\varepsilon,\, 3) \cup (3,\, 3+\varepsilon) = (m,\, 3) \cup (3,\, n)$, виконується нерівність

$$|f(x)-6| < \varepsilon.$$

Сказане можна висловити символічно таким чином:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_3 = (3-\varepsilon,\, 3+\varepsilon), \forall x \in D(f): \left(x \in U_3' = (3-\varepsilon,\, 3) \cup (3,\, 3+\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon\right)$$

Це й є точне означення того факту, що **границя** нашої функції, якщо x прямує до 3, дорівнює 6, або, що те ж саме, функція **прямує** до числа 6, якщо її аргумент x прямує до числа 3.

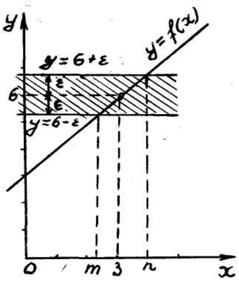


Рис. 4

Нерівність $|f(x)-6| < \varepsilon$ є еквівалентною наступним співвідношенням (нерівності та включенню)

$$6-\varepsilon < f(x) < 6+\varepsilon, \quad f(x) \in U_{6,\varepsilon} = (6-\varepsilon,\, 6+\varepsilon),$$

що дозволяє висловити геометричний сенс того факту, що $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$ (див рис. 4). Саме, якщо x належить проколеному околу

$$U_3' = (m,\, 3) \cup (3,\, n)$$

точки $x = 3$, то відповідні значення функції $f(x)$ знаходяться в ε-околі $U_{6,\varepsilon}$ точки 6, а відповідна частина її графіка лежить в заштрихованій 2ε-смужці, обмеженій прямими

$$y = 6-\varepsilon,\ y = 6+\varepsilon.$$

На основі розглянутого прикладу ми в змозі дати загальне означення границі функції $y = f(x)$, якщо x прямує до якоїсь точки a (або, як часто кажуть, границі функції в точці $x = a$). Функція може залежати як від однієї, так і від n змінних.

Означення 14. Число b називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to a$ (границею функції в точці a), $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ або $f(x) \to b$ при $x \to a$, якщо для будь-якого додатного як завгодно малого числа ε існує окіл U_a точки a такий, що для довільного значення x з області визначення $D(f)$ функції, яке належить проколеному околу U'_a точки a, виконується нерівність

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

або, що те ж саме, подвійна нерівність і включення

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon, \quad f(x) \in U_{b,\varepsilon} = (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Символічно,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(f) : \left(x \in U'_a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow (\, b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon)\right).$$

Зауваження.

1) Точка a може належати або не належати області визначення $D(f)$ функції $y = f(x)$. Тому в означенні границі фігурує проколений окіл U'_a точки a. Останній можна замінити простим околом U_a, якщо $a \in D(f)$.

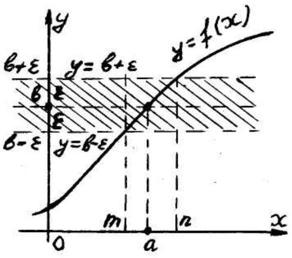


Рис. 5

2) У випадку функції декількох змінних означення границі передбачає можливість прямування x до точки a вздовж будь-якого шляху, який повністю лежить всередині області визначення функції.

3) У випадку $n = 1$, тобто для функції однієї змінної, неважко встановити геометричний сенс означення границі функції в точці a (рис. 5). Саме, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує окіл U_a точки a (інтервал (m, n) на рис. 5) такий, що для всіх

точок $x \in D(f)$, які потрапляють в проколений окіл $U'_a = (m, a) \cup (a, n)$ точки a, значення функції $f(x)$ знаходяться в ε-околі $U_{b,\varepsilon}$ точки b, а відповідна частина її графіка лежить в заштрихованій 2ε-смузі між прямими $y = b - \varepsilon$, $y = b + \varepsilon$.

4) Означення границі в точці a для функції однієї змінної $y = f(x)$ частогусто дається в формі, дещо відмінній від викладеної. Саме, окіл U_a точки a припускається симетричним відносно точки. В такому разі його можна подати у вигляді інтервалу $(a - \delta, a + \delta)$ довжини 2δ і назвати δ-околом точки a, $U_{a,\delta}$.

Оскільки

$$\left(x \in U_{a,\delta}, x \in U'_{a,\delta}\right) \Leftrightarrow \left(|x - a| < \delta, 0 < |x - a| < \delta\right),$$

означення границі набуває однієї з двох форм:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D(f): \left(x \in U'_{a,\delta} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow (\, b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon)\right)$$

або ж якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D(f): \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow (\, b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon)\right).$$

Приклад. Вище ми дали математичне означення того факту, що

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Зараз ми можемо подати означення в такій формі:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon, \forall x \in D(f): \left(x \in U'_{3,\delta} = U'_{3,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - 6| = \left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| < \varepsilon\right)$$

або ж

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon, \forall x \in D(f): \left(0 < |x - 3| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 6| = \left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| < \varepsilon\right).$$

Приклад. Довести на підставі означення границі, що

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Областю визначення функції $y = f(x) = x^2$ є множина всіх дісних чисел.

Поведінку функції при $x \to 2$ показано в таблиці 2.

Table 2

x	1.96	1.97	1.98	1.99	2.00	2.01	2.02	2.03	2.04
$y = x^2\ (\approx)$	3.84	3.88	3.92	3.96	4.00	4.04	4.08	4.12	4.16
$\lvert x^2 - 4 \rvert$	0.16	0.12	0.08	0.04	0.00	0.04	0.08	0.12	0.16

Нехай $\varepsilon > 0$ – додатне як завгодно мале число. Тоді

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| < \varepsilon \text{ якщо } -\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon, 4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon, \sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}.$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує окіл точки $x = 2$, а саме

$$U_2 = = (m, n) = \left(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}\right),$$

такий, що для всіх значень $x \in U_2$ виконується нерівність

$$|x^2 - 4| < \varepsilon .$$

За означенням границі (з врахуванням зауваження 1) можемо написати

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_2 = (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}), \forall x \in \Re : \left(x \in U_2 \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon\right), \lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

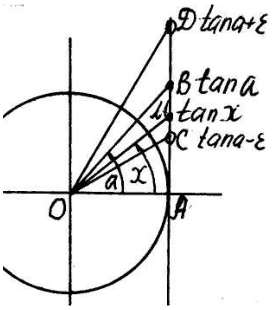


Рис. 6

Геометричний сенс розглянутого граничного переходу встановіть самостійно.

Приклад. За допомогою означення тангенса довести, що для будь-якого $a \in (0, \pi/2)$

$$\lim_{x \to a} \tan x = \tan a .$$

■Позначимо на лінії тангенсів три точки

$$\tan a - \varepsilon, \tan a, \tan a + \varepsilon$$

(точки C, B, D відповідно, рис. 6) та з"єднаємо ці точки з центром O тригонометричного круга. Нехай

$$\alpha = \angle AOC, \ a = \angle AOB, \beta = \angle AOD, x = \angle AOM \text{ (рис. 6).}$$

Отримуємо наступний результат (в символічній формі):

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_a = (\alpha, \beta), \forall x \in (0, \pi/2) : (x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow$$

$$\tan a - \varepsilon < \tan x < \tan a + \varepsilon, \text{тобто} |\tan x - \tan a| < \varepsilon).$$

На підставі означення границі маємо $\lim\limits_{x\to a}\tan x = \tan a$ ■

Можна поширити цей результат на довільне $a \neq \pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Спробуйте зробити це самостійно.

За допомогою означення синуса, косинуса і котангенса (в тригонометричному крузі) можна довести, що

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a;\ \lim_{x\to a}\cos x = \cos a;\ \lim_{x\to a}\cot x = \cot a\quad \left(a \neq \pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\right).$$

Зауваження. Два попередні приклади та названі результати стосовно функцій $sin\,x, cos\,x, cot\,x$ дають нам перші приклади так званих неперервних функцій, тобто функцій, які посідають властивість вигляду

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

(границя функції в точці a дорівнює значенню функції в цій точці). Існує багато функцій такого гатунку. Нижче йтиметься про неперервність всіх основних елементарних та елементарних функцій на своїх областях визначення. Але вже зараз при обчисленні границь ми будемо брати цю неперервність до уваги, принаймні в простих випадках.

Приклад. Довести, що функція двох змінних

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

не має границі в початку координат $O(0, 0)$.

■Достатньо показати, що при наближенні до початку координат вздовж деяких двох різних шляхів ми отримуємо різні результати. Як такі шляхи виберемо, наприклад, прямі $x_2 = x_1$ та $x_2 = 2x_1$. Вздовж прямої $x_2 = x_1$ маємо

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_1) = \frac{x_1 x_1}{x_1^2 + x_1^2} = \frac{1}{2},\quad \lim_{(x_1, x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1\to 0}\frac{x_1 x_1}{x_1^2 + x_1^2} = \frac{1}{2}.$$

а вздовж прямої $x_2 = 2x_1$ - зовсім інший результат

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 2x_1) = \frac{x_1 \cdot 2x_1}{x_1^2 + (2x_1)^2} = \frac{2}{5},\quad \lim_{(x_1, x_2)\to(0,0)} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1\to 0}\frac{x_1 \cdot 2x_1}{x_1^2 + (2x_1)^2} = \frac{2}{5}.$$

На підставі зауваження 2 це значить, що границі функції в початку координат, тобто при $(x_1, x_2) \to (0{,}0)$, не існує.■

Ми дали означення границі функції $y = f(x)$ однієї або декількох змінних в точці a. Існують і інші типи граничних переходів. Ми коротенько розглянемо їх для функцій однієї змінної $x \in D(f) \subseteq \Re^1$.

Б. Однобічні границі функції однієї змінної в точці

Нехай $x < a$ та $x \to a$. Кажуть, що x прямує до a **зліва**, і позначають цей факт наступним чином: $x \to a - 0$. Відповідна границя b_1 функції $y = f(x)$, якщо вона існує, називається **лівою границею** функції в точці a і позначається

$$b_1 = f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) \text{ (рис. 7).}$$

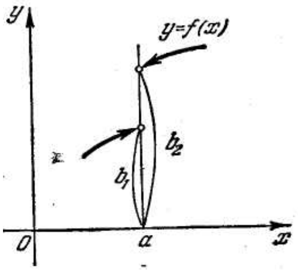


Рис. 7

Означення 15. Число b_1 називається лівою границею функції $y = f(x)$ в точці a (тобто якщо x прямує до a зліва), якщо (символічно)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (m, a), \forall x \in D(f) : (x \in (m, a) \Rightarrow |f(x) - b_1| < \varepsilon).$$

Аналогічно кажуть про прямування x до a **справа** ($x > a$ і $x \to a$, $x \to a + 0$) та **праву границю** b_2 функції в точці a,

$$b_2 = f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) \text{ (рис. 7).}$$

Означення 16. Число b_2 називається правою границею функції $y = f(x)$ в точці a (тобто якщо x прямує до a справа), якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (a, n), \forall x \in D(f) : (x \in (a, n) \Rightarrow |f(x) - b_2| < \varepsilon).$$

Приклад. Функція

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{якщо } 0 \le x < 3, \\ 3 - x, & \text{якщо } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

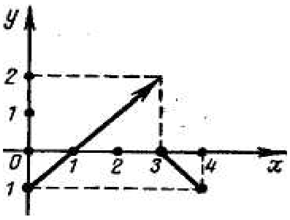


Рис. 8

(див. рис. 8) має в точці $x = 3$ ліву границю, рівну 2, та праву границю, яка дорівнює 0,

$$f(3-0) = \lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3-0} (x - 1) = 2,$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}(3-x)=0.$$

З"ясуйте самостійно геометричний сенс правої й лівої (або, як часто-густо кажуть, однобічних) границь.

Теорема 2. Границя функції (однієї змінної) в точці a існує тоді і тільки тоді, якщо вона має в цій точці ліву й праву границі, причому обидві ці однобічні границі є рівними,

$$\left(\exists \lim_{x\to a} f(x)\right) \Leftrightarrow \left(\exists f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x),\ \exists f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x),\ f(a-0)=f(a+0)\right)$$

Справедливість теореми виплаває з означень 14 (для n = 1), 15, 16.

B. Границя числової послідовності

Приклад. Нехай задано числову послідовність

$$\left\{x_n=\frac{2n+1}{3n-2}\right\}.$$

Її поведінку подано таблицею 3

Table 3

n	10	10^2	10^3	10^6	10^9
$x_n\ (\approx)$	0.7500000	0.6744966	0.6674449	0.6666674	0.6666667
$\lvert x_n-2/3\rvert\ (\approx)$	0.0833333	0.0078300	0.0007783	0.0000008	0.0000000

З таблиці ми бачимо, що загальний член x_n послідовності прямує до 2/3 = 0.(6). Ми позначаємо цей факт таким чином

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}=\frac{2}{3}$$

і кажемо, що послідовність $\{x_n\}$ прямує (частіше - збігається) до 2/3.

Задля точного означення висловленого факту визначмо, для яких значень n виконується нерівність

$$|x_n-2/3|=\left|\frac{2n+1}{3n-2}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon,$$

якщо, як і вище, ε є як завгодно малим додатним числом. Маємо

$$|x_n-2/3|=\left|\frac{2n+1}{3n-2}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{7}{3(3n-2)}\right|=\{for\ n\ge 1\}=\frac{7}{3(3n-2)},$$

$$\frac{7}{3(3n-2)} < \varepsilon, \text{ якщо } 3(3n-2)\varepsilon > 7,\, 3n-2 > \frac{7}{3\varepsilon},\, n > \frac{1}{3}\left(\frac{7}{3\varepsilon}+2\right) = \frac{7+6\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Позначмо далі

$$N = \left[\frac{7+6\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$$

натуральне число, яке є цілою частиною числа

$$\frac{7+6\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Ми отримуємо, що для як завгодно малого додатного числа ε нерівність

$$|x_n - 2/3| < \varepsilon$$

виконується для всіх натуральних чисел n більших, ніж знайдене число N. Символічно

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists N = \left[\frac{7+6\varepsilon}{9\varepsilon}\right],\, \forall n : \left(n > N \Rightarrow |x_n - 2/3| = \left|\frac{2n+1}{3n-2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \right).$$

Узагальнюючи міркування прикладу, ми можемо сформулювати означення границі довільної числової послідовності.

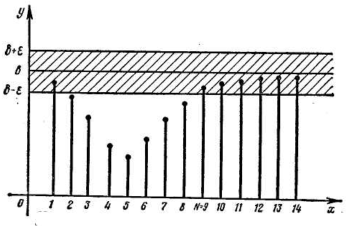


Рис. 9

Означення 17. Число b називається границею числової послідовності

$$\{y_n : y_1, y_2, ..., y_n, ...\},$$

якщо для довільного як завгодно малого додатного числа ε існує натуральне число N таке, що для всіх натуральних чисел n, більших, ніж N, виконується нерівність

$$|y_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon \Leftrightarrow y_n \in U_{b,\varepsilon} = (b-\varepsilon, b+\varepsilon).$$

В такому випадку пишуть

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b$$

і кажуть, що числова послідовність прямує до b (*або* **збігається** до b, **є збіжною** до b).

Символічна форма означення 17 є такою:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

якщо

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall n : \left(n > N \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon\right).$$

Геометричний сенс означення границі полягає в наступному: всі члени послідовності з номерами $n > N$ лежать всередині ε-окола $U_{b,\varepsilon}$ точки b, а всі відповідні точки, які зображають члени послідовності, знаходяться всередині заштрихованої 2ε-смуги між прямими $y = b - \varepsilon$, $y = b + \varepsilon$ (рис. 9).

Г. Границя функції на плюс або мінус нескінченності

Означення 18. Число b називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b,$$

якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число x_0' таке, що для всіх значень арґументу, більших від x_0', виконується нерівність

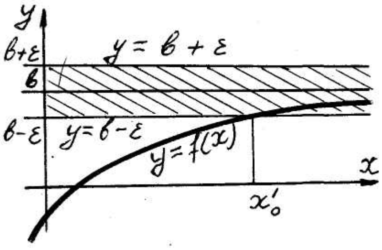


Рис. 10

$$|f(x) - b| < \varepsilon \ \left(b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon\right).$$

Символічно

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \text{якщо } \forall\varepsilon > 0, \exists x_0', \forall \in D(f) : \left(x > x_0' \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\right).$$

Геометрично (рис. 10): для $x \in D(f)$ таких, що $x > x_0'$, значення функції лежать в ε-околі $U_{b,\varepsilon} = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ точки b, а відповідна частина її графіка знаходиться в заштрихованій смузі між прямими $y = b - \varepsilon$, $y = b + \varepsilon$.

Приклад. Довести, що

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x + 2}{4x - 5} = \frac{3}{4}.$$

Доведення.

$$\left|\frac{3x+2}{4x-5} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{23}{4(4x-5)}\right| = \left\{\text{при } x > \frac{5}{4}\right\} = \frac{23}{4(4x-5)} < \varepsilon,$$

$$\text{якщо } 4\varepsilon(4x-5) > 23, \ x > \frac{1}{4}\left(\frac{23}{4\varepsilon} + 5\right).$$

Таким чином,

$$\forall\varepsilon>0,\exists x_0'=\frac{1}{4}\left(\frac{23}{4\varepsilon}+5\right),\forall x\in D(f):\left(x>x_0'\Rightarrow\left|\frac{3x+2}{4x-5}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon\right)\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{4x-5}=\frac{3}{4}.$$

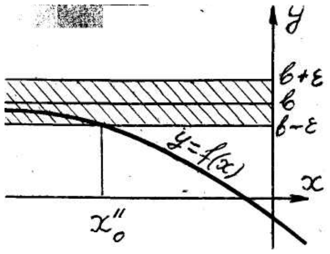


Рис. 11

Означення 19. Число b називається границею функції $y=f(x)$ при $x\to-\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=b,$$

якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує число x_0'' таке, що для всіх значень арґументу, менших, ніж x_0'', виконується нерівність

$$|f(x)-b|<\varepsilon\ (b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon)$$

Символічно

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$, якщо $\forall\varepsilon>0,\exists x_0'',\forall\in D(f):(x<x_0''\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon)$.

Сформулюйте самостійно, що це означає геометрично (рис. 11).

Приклад. Довести, що

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{4x-5}=\frac{3}{4}.$$

Дійсно,

$$\left|\frac{3x+2}{4x-5}-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{23}{4(4x-5)}\right|=\left\{\text{при } x<\frac{5}{4}\right\}=-\frac{23}{4(4x-5)}=\frac{23}{4(5-4x)}<\varepsilon,$$

якщо $4\varepsilon(5-4x)>23,\ 5-4x>\dfrac{23}{4\varepsilon},\ 4x<5-\dfrac{23}{4\varepsilon},\ x<\dfrac{1}{4}\left(5-\dfrac{23}{4\varepsilon}\right),$

$$\forall\varepsilon>0,\exists x_0''=\frac{1}{4}\left(5-\frac{23}{4\varepsilon}\right),\forall x\in D(f):\left(x<x_0''\Rightarrow\left|\frac{3x+2}{4x-5}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon\right)\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{4x-5}=\frac{3}{4}.$$

Д. Нескінченно малі (нм)

Означення 20. Функція $y=f(x)$ називається нескінченно малою (*нм*) в деякому граничному переході, якщо її границя в цьому переході дорівнює нулю.

У випадку $x \to a$ отримують означення *нм* з означення 14 при $b = 0$: функція $y = f(x)$ називається *нм* у випадку $x \to a$ (або в точці a), якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(f): \left(x \in U'_a \Rightarrow \left|f(x) - 0\right| = \left|f(x)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow (\, -\varepsilon < f(x) < \varepsilon)\right)$$

Приклад. Функція $y = x^2$ є *нм* при $x \to 0$,

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0,$$

бо

$$\left|x^2\right| = \left|x\right|^2 < \varepsilon,$$

якщо

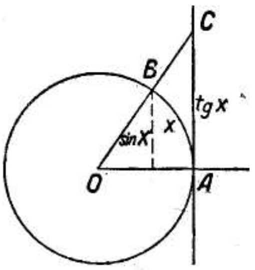
$$\left|x\right| < \varepsilon, -\varepsilon < x < \varepsilon, x \in U_0 = \left(-\varepsilon, \varepsilon\right).$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_0 = (-\varepsilon, \varepsilon), \forall x: \left(x \in U_0 \Rightarrow \left|x^2\right| < \varepsilon\right).$$

Приклад. Функція $y = 1/x$ є *нм* при $x \to \pm\infty$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} 1/x = 0.$$



■ $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$, якщо $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, тобто якщо $x > x'_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}$ або $x < x''_0 = -\dfrac{1}{\varepsilon}$ ■.

Теорема 3. Всі елементарні функції є *нм* в своїх нулях.

Рис. 12

Доведімо, наприклад, що $\sin x$ є *нм* в точці $x = 0$, тобто

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

■З тригонометричного круга ми бачимо (рис.12), що

$$\sin x < x \text{ для } 0 < x < \pi/2 \text{ і } \left|\sin x\right| < \left|x\right|, \text{якщо } -\pi/2 < x < \pi/2.$$

Отже, $\left|\sin x\right| < \varepsilon$, якщо $\left|x\right| < \varepsilon$, або $-\varepsilon < x < \varepsilon$, або ж $x \in U_0 = (-\varepsilon, \varepsilon)$, і ми можемо написати

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_0 = (-\varepsilon, \varepsilon), \forall x \in \left(-\pi/2, \pi/2\right): (x \in U_0 \Rightarrow \left|\sin x\right| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \sin x = 0. ■$$

Теорема 4. Всі наступні функції: a) $\frac{1}{x^n}$, $n \in \aleph$, при $x \to \pm\infty$; b) a^x для $a > 1$ та при $x \to -\infty$; c) a^x для $0 < a < 1$ і при $x \to +\infty$ є *нм*.

Можна запам"ятати ці факти за допомоги графіків відповідних функцій.

E. Зв"язок між границями функцій і нескінченно малими

Існує найтісніший зв"язок між границею функції й нескінченно малою в одному й тому ж граничному переході. З"ясуємо його на прикладі границі функції в точці.

Теорема 5. Функція $f(x)$ може мати границю b в точці a тоді і тільки тоді, якщо в деякому околі точки її можна зобразити сумою

$$f(x) = b + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ – *нм* при $x \to a$.

■ a) Якщо існує границя

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(f) : \left(x \in U_a' \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon\right),$$

то функція $\alpha(x) = f(x) - b$ є *нм* при $x \to a$ і $f(x) = b + \alpha(x)$ в U_a'.

b) Нехай, навпаки,

$$f(x) = b + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ – *нм* при $x \to a$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(f) : \left(x \in U_a' \Rightarrow |\alpha(x)| = | f(x) - b | < \varepsilon\right).$$

Звідси на підставі означення границі випливає, що існує границя

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. ■$$

Є. Нескінченно великі (нв)

Нехай, наприклад, задано функцію $y = f(x)$ однієї змінної $x \in \Re^1$, і x

прямує до точки a, $x \to a$.

Означення 21. Функція $y = f(x)$ називається нескінченно великою (*нв*) при $x \to a$ (або – в точці a),

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = +\infty,$$

якщо для як завгодно великого додатного числа N існує окіл U_a точки a такий, що для будь-якого значення арґументу з проколеного околу U'_a виконується нерівність

$$|f(x)| > N.$$

В символічному запису

$$\forall N > 0, \exists U_a, \forall x \in D(f) : \left(x \in U'_a \Rightarrow |f(x)| > N\right).$$

Зауваження. Якщо функція $y = f(x)$ є *нв* при $x \to a$, причому вона має тільки додатні (або від"ємні) значення в якомусь околі точки a, то кажуть, що

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ (відповідно} \lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{)}.$$

Аналогічно означаються поняття *нв* при $x \to a-0$, $x \to a+0$, $x \to \pm\infty$ і виокремлюються випадки прямування *нв* до $+\infty$ або $-\infty$.

Приклад. Функція $1/x$ є *нв* при $x \to 0$, причому

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x} = -\infty, \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x} = +\infty.$$

■ Для як завгодно великого додатного числа N маємо

$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} > N$, якщо $1 > |x|N, |x| < \frac{1}{N}$, або $-\frac{1}{N} < x < \frac{1}{N}$, або ж $x \in U_0 = \left(-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right)$.

Таким чином,

$$\forall N > 0, \exists U_0 = \left(-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right), \forall x \in D\left(\frac{1}{x}\right) : \left(x \in U_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > N\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right| = \infty.$$

Зокрема, функція $1/x$ прямує до $-\infty$, якщо x прямує до 0 зліва (при $x < 0$), і до $+\infty$, якщо x прямує до 0 справа (при $x > 0$),

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x} = +\infty,$$

бо при $x<0$ вона є від"ємною, а при $x>0$ - додатною.■

Приклад. За допомогою тригонометричного круга довести, що

$$\lim_{x\to\pi/2-0}\tan x=+\infty .$$

■Нехай $N>0$ як завгодно велике, і $\alpha=\arctan N$ (див. рис. 13). Тоді для будь-якого $x=\arctan M$ з інтервалу

$$\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)=\left(\arctan N,\frac{\pi}{2}\right),$$

виконується нерівність $\tan x=M>N$, а це значить, що

$$\lim_{x\to\pi/2-0}\tan x=+\infty .$$

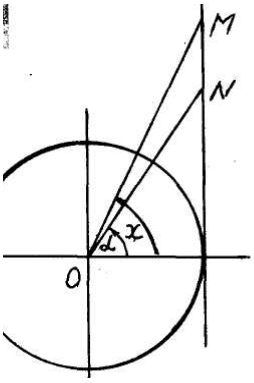


Рис. 13

В більш розгорнутому символічному вигляді ми можемо отриманий результат записати так:

$$\forall N>0,\exists\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right),\forall x:\left(x\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\tan x>N\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\pi/2-0}\tan x=+\infty .■$$

Приклад. Функція $y=x^3$ є *нв*, якщо $x\to\pm\infty$, до того ж

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty.$$

■Якщо $x\to+\infty$, то (в припущенні, що арґумент *x* вже став додатним)

$$x^3>N \text{ для } x>x_0'=\sqrt[3]{N}.$$

Якщо ж $x\to-\infty$, то (припускаючи, що арґумент *x* вже є від"ємним) маємо

$$x^3<-N \text{ для } x<x_0''=-\sqrt[3]{N}\ ■$$

Теорема 6. Всі наступні функції є *нв*: a) $x^n, n\in\aleph$ для $x\to\pm\infty$; b) a^x для $a>1$ і $x\to+\infty$; c) a^x при $0<a<1$ і $x\to-\infty$; d) $\log_a x$ для $x\to+\infty$ або $x\to 0+0$; e) $\tan x$ при $x\to\pi/2+\pi k$ $(k\in Z)$ зліва або справа; g) $\cot x$ для $x\to\pi k$ $(k\in Z)$ зліва і справа. Все це можна запам"ятати за допомогою відомих графіків названих функцій.

Ж. Співвідношення між нескінченно великими (нв) і нескінченно малими (нм)

1. Якщо функція $\alpha(x)$ є *нм*, то $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - *нв* (символічно: $\dfrac{1}{0}=\infty$).

■Нехай, наприклад, функція $\alpha(x)$ є *нм* при $x\to a$. Тоді на підставі означення *нм*, сформульованого в п. 1.2.5, маємо

$$\forall\varepsilon>0,\exists U_a,\forall x\in D(f):\left(x\in U'_a\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Нехай далі

$$\frac{1}{\varepsilon}=N,\frac{1}{\alpha(x)}=f(x).$$

Якщо число ε є як завгодно малим, то обернене число

$$N=\frac{1}{\varepsilon}$$

можна вважати як завгодно великим, звідки отримуємо

$$\forall\varepsilon>0,\exists U_a,\forall x\in D(f):\left(x\in U'_a\Rightarrow|f(x)|=\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon}=N,|f(x)|>N\right).$$

На підставі п. 1.2.7 це означає, що функція

$$f(x)=\frac{1}{\alpha(x)}$$

є *нв* при $x\to a$.■

Аналогічно можна довести і інший факт, а саме:

2. Якщо функція $f(x)$ є *нв*, то $\alpha(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ - *нм* (символічно: $\dfrac{1}{\infty}=0$).

Про існування зазначених співвідношень можна було здогадатись вже вище на підставі наведених прикладів *нм* і *нв* (див. теореми 4, 6).

1.1.3. Властивості границь

Означення 22. Функція $f(x)$ називається **обмеженою зверху** на множині

$X \subseteq D(f)$, якщо існує деяке число C_1 таке, що для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $f(x) \leq C_1$,

$$\exists C_1, \forall x \in X : f(x) \leq C_1 .$$

Аналогічно, функція $f(x)$ називається **обмеженою знизу** на множині $X \subseteq D(f)$, якщо

$$\exists C_2, \forall x \in X : f(x) \geq C_2 .$$

Нарешті, функція $f(x)$ називається **обмеженою** на X, якщо вона є там обмеженою і зверху, і знизу:

$$\exists C_1, \exists C_2, \forall x \in X : C_2 \leq f(x) \leq C_1$$

Теорема 6. Функція $f(x)$ є обмеженою на множині X тоді і тільки тоді, якщо

$$\exists C, \forall x \in X : |f(x)| \leq C .$$

Спробуйте довести цю теорему самостійно.

А. Загальні властивості границь

Всі наступні властивості є справедливими для будь-якого типу граничного переходу. Для визначеності перші п"ять розглядаються для випадку границі функції в точці a, а остання – для границі числової послідовності.

1 (єдиність границі). Функція може мати не більше однієї границі в точці a, тобто якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_1, \quad \lim_{x \to a} f(x) = b_2 ,$$

то $b_1 = b_2$.

■Доведімо властивість від супротивного. Нехай $b_1 \neq b_2$, наприклад $b_1 < b_2$. За означенням границі,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(f) : x \in U'_a \Rightarrow b_1 - \varepsilon < f(x) < b_1 - \varepsilon, b_2 - \varepsilon < f(x) < b_2 - \varepsilon .$$

Нехай ε - настільки мале, що $b_1 - \varepsilon < b_2 - \varepsilon$. Тоді в U'_a отримуємо

$$f(x) < b_1 - \varepsilon < b_2 - \varepsilon < f(x), \text{ або ж } f(x) < f(x),$$

що неможливо. Отримане протиріччя доводить справедливість властивості.■

2. Якщо існує границя

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

то функція $f(x)$ є обмеженою в деякому околі точки a.

■За означенням границі

$$\forall\varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(f): \left(x \in U'_a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon\right).$$

Таким чином в U'_a функція $f(x)$ обмежена зверху числом $b+\varepsilon$, знизу –числом $b-\varepsilon$, а отже є обмеженою.■

3. Функція $f(x)$, яка має в точці a додатну границю,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b > 0,$$

сама є додатною в деякому околі точки.

■Доведення випливає з доведення попередньої властивості, якщо взяти ε настільки малим, щоб різниця b - ε була додатною. Тоді в U'_a матимемо

$$0 < b - \varepsilon < f(x), f(x) > 0 .■$$

4 (наслідок). Якщо в деякому околі U_a точки a функція $f(x)$ додатна або невід"ємна ($f(x) > 0$ або $f(x) \ge 0$), то її границя в цій точці, якщо вона існує, є невід"ємною,

$$\lim_{x\to a} f(x) \ge 0.$$

■Властивість дуже просто доводиться від супротивного. Припустімо протилежне тому, що треба довести, а саме, що

$$\lim_{x\to a} f(x) < 0.$$

На підставі властивості 3 функція повинна бути від"ємною в якомусь околі точки a, нехай в $U_{a,1}$. Тоді в спільній частині околів U_a, $U_{a,1}$ вона є і додатною (або невід"ємною) і в той же час від"ємною. Отримане протиріччя доводить справедливість властивості.■

Зауваження. Умова властивості 4 припускає можливість як строгої, так і нестрогої нерівності ($f(x) > 0$ або $f(x) \ge 0$) в U_a, але відносно границі функції можна стверджувати тільки нестрогу нерівність.

Приклад. Для будь-якого натурального *n* виконується нерівність

$$\frac{1}{n} > 0,$$

але границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

дорівнює нулю і, отже, не є додатною.

5 (існування границі проміжної функції). Якщо в деякому околі $U_{a,1}$ точки *a* для трьох функцій $g(x), f(x), h(x)$ виконується нерівність

$$g(x) < f(x) < h(x),$$

причому функції $g(x)$ і $h(x)$ мають в точці *a* одну й ту ж границю *b*,

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b,$$

то в тій же точці існує границя проміжної функції $f(x)$, яка також дорівнює *b*,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

■ Факт

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$$

означає, що

$$\forall\varepsilon > 0, \exists U_{a,2}, \forall x \in D(f): \left(x \in U'_{a,2} \Rightarrow \begin{matrix} |g(x)-b| < \varepsilon, b-\varepsilon < g(x) < b+\varepsilon \\ |h(x)-b| < \varepsilon, b-\varepsilon < h(x) < b+\varepsilon \end{matrix} \right).$$

Нехай $U'_a = U'_{a,1} \bigcap U'_{a,2}$ - спільна частина околів $U'_{a,1}$ і $U'_{a,2}$. Тоді в U'_a виконуються всі задіяні тут нерівності, звідки отримуємо

$$b-\varepsilon < g(x) < f(x) < h(x) < b+\varepsilon,$$

а отже

$$b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon, |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Таким чином, нами доведено, що

$\forall\varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(f): (x \in U'_a \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon)$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.■

Доведену властивість часто жартома називають **теоремою про двох міліціонерів**. Як ви гадаєте, чому?

6. Якщо числова послідовність $\{y_n\}$ зростає (не спадає) і обмежена зверху або ж спадає (не зростає) і обмежена знизу, то вона збігається, тобто має границю.

Сформульоване твердження є насправді не властивістю, а важливою теоремою, яку в рамках нашого втузівського курсу неможливо навіть довести. Ми можемо тільки наводити приклади її застосування.

Приклад. Відомо, що послідовність периметрів P_n правильних n-кутників, вписаних в коло, є зростаючою. З іншого боку, вона є обмеженою зверху, наприклад, периметром будь-якого описаного многокутника. Отже, на підставі 6 існує границя

$$\lim_{n\to\infty} P_n = C,$$

яка й приймається за означення довжини кола. Аналогічно означаються площа круга, площі бокових поверхонь і об"єми круглих тіл (циліндра, конуса тощо).

Б. Властивості нескінченно малих

1. Сума двох або будь-якої скінченної кількості *нм* є *нм*.

■Нехай $\alpha(x), \beta(x)$ - дві *нм* при $x \to a$. За означенням *нм* можемо записати

$$\forall\varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(\alpha)\bigcap D(\beta):$$

$$\left(x \in U'_a \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ і } |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \right),$$

так що

$$\forall\varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(\alpha)\bigcap D(\beta): \left(x \in U'_a \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon\right),$$

тобто $\alpha(x) + \beta(x)$ є *нм*.■

2. Добуток *нм* і обмеженої функції є *нм*.

■ Нехай функція $f(x)$ обмежена в деякому околі $U_{a,1}$ точки a, тобто

$$\exists C > 0, \forall x \in D(f): \forall x \in U_{a,1} \Rightarrow |f(x)| \le C,$$

а $\alpha(x)$ - *нм* при $x \to a$, а саме

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_{a,2}, \forall x \in D(\alpha): \left(x \in U'_{a,2} \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C} \right).$$

В спільній частині $U'_a = U_{a,1} \bigcap U'_{a,2}$ околів $U_{a,1}$ і $U'_{a,2}$ маємо

$$|\alpha(x) f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon .$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(\alpha), \forall x \in D(f): (x \in U'_a \Rightarrow |\alpha(x) f(x)| < \varepsilon),$$

а це означає, що добуток $\alpha(x) f(x)$ є *нм* при $x \to a$.■

3 (наслідок). Добуток двох *нм* є *нм*.

Зауваження. Нічого певного не можна сказати про відношення двох *нм*. У випадках, коли треба знайти границю відношення двох *нм*, кажуть, що треба розкрити невизначеність типу $0/0$.

В. “Арифметичні” властивості границь

1. Границя суми, різниці, добутку, частки двох функціій дорівнює (відповідно) сумі, різниці, добутку, частці границь цих функцій, тобто

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$$
$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$
$$\lim_{x \to a} (f(x) / g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x) \text{ за умови } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

■ Доведення для границі добутку. Нехай

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \ \lim_{x \to a} g(x) = c .$$

На підставі теореми 5 з п. 1.2.6 в деякому околі точки a

$$f(x) = b + \alpha(x), g(x) = c + \beta(x),$$

де $\alpha(x), \beta(x)$ - *нм* при $x \to a$. Добуток цих функцій дорівнює

$$f(x) \cdot g(x) = b \cdot c + \underbrace{\underbrace{b\beta(x)}_{IS} + \underbrace{c\alpha(x)}_{IS} + \underbrace{\alpha(x)\beta(x)}_{IS}}_{IS}.$$

Це значить, що

$$f(x)\cdot g(x)=b\cdot c+IS\Rightarrow\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=b\cdot c=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).\blacksquare$$

Зауваження (див. також зауваження наприкінці попереднього пункта). Нічого не можна сказати без спеціального дослідження про границю частки двох функцій

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

коли обидві вони є *нм* або *нв* при $x\to a$. В таких випадках кажуть про невизначеності типів

$$\frac{0}{0}\text{ або }\frac{\infty}{\infty}$$

та про необхідність їх розкриття.

Наслідки. а) Для будь-якої константи С

$$\lim_{x\to a}(C\cdot f(x))=C\cdot\lim_{x\to a}f(x),$$

тобто сталий множник можна винести за знак границі.

b) Для довільного натурального числа *n* границя *n*-го степеня функції дорівнює *n*-му степеню границі цієї функції,

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n.$$

Приклад. Застосовуючи властивість 1 та наслідки з неї, маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+3x^2+12}{\sin^4 x-5x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(2\cos x+3x^2+12)}{\lim\limits_{x\to 0}(\sin^4 x-5x-7)}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\cos x+3\lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}12}{\lim\limits_{x\to 0}\sin^4 x-5\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}7}=$$

$$=\frac{2\cdot\cos 0+3\left(\lim\limits_{x\to 0}x\right)^2+12}{(\sin 0)^4-5\cdot 0-7}=\frac{2\cdot 1+3\cdot 0^2+12}{0-5\cdot 0-7}=\frac{14}{-7}=-2.$$

Приклад. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-6x+1}{3x^2-x-2}.$$

Число 1 є коренем як чисельника, так і знаменника, так що нам треба розкрити невизначеність типу $0/0$. Ми зробимо це, розклавши чисельник і знаменник на множники і скоротивши дріб на множник $x-1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-6x+1}{3x^2-x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)\left(x-\frac{1}{5}\right)}{3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{5\left(x-\frac{1}{5}\right)}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\frac{5\left(1-\frac{1}{5}\right)}{3\left(1+\frac{2}{3}\right)}=\frac{4}{5}.$$

Приклад. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{5-4x}-1}.$$

Тут також треба розкрити невизначеність типу $0/0$. З цією метою ми помножимо чисельник і знаменник на добуток спряжених їм виразів, що після деяких перетворень дасть можливість скоротити дріб і позбавитись невизначеності. Саме,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{5-4x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{5-4x}+1\right)}{\left(\sqrt{5-4x}-1\right)\left(\sqrt{5-4x}+1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2\right)\left(\sqrt{5-4x}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{5-4x}\right)^2-1^2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3-4)\left(\sqrt{5-4x}+1\right)}{(5-4x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{5-4x}+1\right)}{4(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{5-4x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-4x}+1}{\sqrt{x+3}+2}=-\frac{1}{8}.$$

2 (границя складеної функції). Нехай дано складену функцію

$$y=f(\varphi(x)),$$

де $y=f(u), u=\varphi(x)$. Якщо

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=b \ \text{ і } \lim_{u\to b}f(u)=A,$$

то існує границя функції в точці a, яка дорівнює A,

$$\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=A.$$

■Доведення властивості зручно здійснити в тій формі означення границі, про яку йшлося в зауваженні 4 пункту 1.2.1. Оскільки

$$\lim_{u\to b}f(u)=A,$$

то

$$\forall\varepsilon>0,\exists\gamma>0,\forall u\in D(f):\{0<|u-b|<\gamma\Rightarrow|f(u)-A|<\varepsilon\}.$$

Оскільки, далі,

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = b,$$

то для названого $\gamma > 0$

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D(\varphi): \{0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - b| < \gamma\}.$$

З цих двох співвідношень випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D(f(\varphi(x))): \{0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(\varphi(x)) - A| < \varepsilon\},$$

а це означає, що

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = A. \blacksquare$$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x \to 2} e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Введемо позначення

$$u = \varphi(x) = \frac{1}{x-2}, \ y = f(u) = e^{u},$$

так що треба знайти в точці $x = 2$ границю складеної функції

$$y = f(\varphi(x)) = e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Тут необхідно виокремити випадки прямування до 2 зліва і справа.

$$\lim_{x \to 2+0} \varphi(x) = \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty, \lim_{u \to +\infty} f(u) = \lim_{u \to +\infty} e^{u} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 2+0} f(\varphi(x)) = \lim_{x \to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2-0} \varphi(x) = \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty, \lim_{u \to -\infty} f(u) = \lim_{u \to -\infty} e^{u} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 2-0} f(\varphi(x)) = \lim_{x \to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = 0.$$

Таким чином,

$$\lim_{x \to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = \begin{cases} +\infty, \text{if } x \to 2+0, \\ 0, \text{if } \quad x \to 2-0. \end{cases}$$

Означення 23. Дві функції $f(x)$, $g(x)$ називаються **еквівалентними** в деякому граничному переході $f(x) \sim g(x)$, якщо границя їх відношення дорівнює одиниці.

Так, для випадку $x \to a$ еквівалентність функцій $f(x)$ і $g(x)$ означає, що

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

3. При відшуканні границь ми можемо замінювати співмножники еквівалентними їм.

■ Нехай, наприклад, $f(x)\sim h(x)$, $g(x)\sim k(x)$ при $x\to a$, і

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)u(x)w(x)}{g(x)v(x)}=b.$$

Помножаючи чисельник і знаменник на добуток $h(x)k(x)$, матимемо

$$b=\lim_{x\to a}\frac{f(x)u(x)w(x)}{g(x)v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)k(x)h(x)u(x)w(x)}{h(x)g(x)k(x)v(x)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{k(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{h(x)u(x)w(x)}{k(x)v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)u(x)w(x)}{k(x)v(x)}.$$

Отже, ми замінили множники $f(x)$, $g(x)$ еквівалентними їм множниками $h(x)$, $k(x)$, і це не змінило результат граничного переходу.■

Властивість 3 може полегшувати відшукання границь, якщо ми замінюватимемо співмножники еквівалентними їм, але простішими.

Г. Властивості нескінченно великих

1. Якщо $f(x)\to\pm\infty, g(x)\to\pm\infty$, то $f(x)+g(x)\to\pm\infty$.

■Нехай, наприклад,

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty.$$

Тоді за означенням *нв*, які прямують до $+\infty$,

$$\forall N>0,\exists U_a,\forall x\in D(f)\cap D(g):$$

$$\left(x\in U'_a\Rightarrow\begin{matrix}f(x)>N/2\\ g(x)>N/2\end{matrix}\right)\Rightarrow f(x)+g(x)>\frac{N}{2}+\frac{N}{2}=N\Rightarrow\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty.■$$

В символічному запису властивість має вигляд

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty.$$

2. Якщо $f(x)\to\pm\infty, g(x)\to\mp\infty$, то $f(x)-g(x)\to\pm\infty$.

В символічному запису

$$(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty.$$

Зауваження. Ситуації, виражені символами,

$$(\pm\infty)-(\pm\infty) \text{ або } (\pm\infty)+(\mp\infty),$$

належать до невизначеностей і потребують спеціального розгляду.

2. *нв·вн* =*нв*, тобто добуток двох *нв* є *нв*. Символічно

$$\infty\cdot\infty=\infty.$$

Зауваження. Частка двох *нв* дає нам невизначеність типу

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

4. Нехай $f(x)$, $g(x)$ – дві функції, перша з яких є *нв* при $x\to a$, а друга має ненульове значення або ненульову границю в точці a ($g(a)=b\neq 0$ або ж $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b\neq 0$). Тоді добуток $f(x)\cdot g(x)$ цих функцій є *нв* при $x\to a$.

Аналогічна властивість є справедливою і для інших типів граничного переходу. Її символічний запис

$$b\cdot\infty=\infty \text{, якщо } b\neq 0.$$

Зауваження. Якщо ж $b=0$, отримуємо невизначеність типу

$$0\cdot\infty.$$

Зауваження. Зберемо до купи всі вищезгадані типи невизначеностей:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ (\pm\infty)-(\pm\infty),\ (\pm\infty)+(\mp\infty),\ 0\cdot\infty.$$

Нижче до них приєднаються ще декілька типів.

Приклад. Знайти границю

$$A=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2+3x+1}{1-x^3}-\frac{2}{1-x}\right).$$

Спочатку проаналізуємо умову.

Функції $1-x^3, 1-x$ є *нм* при $x\to 1$, а тому дроби

$$\frac{1}{1-x^3},\quad \frac{1}{1-x}.$$

є *нв*. Помножаючи їх, відповідно, на тричлен $2x^2+3x+1$, який має в точці $x=1$

значення $6 \neq 0$, і на $2 \neq 0$, отримаємо функції, які фігурують в прикладі в дужках і які на підставі властивості 4 є *нв* при $x \to 1$. Помічаючи далі, що обидві функції мають в точці $x = 1$ одні й ті ж ліву і праву границі ($+\infty$ і $-\infty$ відповідно), доходимо висновку, що ми маємо справу з невизначеністю типу

$$(\pm\infty) - (\pm\infty).$$

Для її розкриття розпочнімо з зведення дробів до спільного знаменника, а далі діятимемо за ситуацією.

$$A = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2+3x+1}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{2}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2+3x+1-2(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(1-x)(1+x+x^2)}\right) = -\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+x+x^2)} = -\frac{1}{3}.$$

Приклад. Многочлен n-го степеня

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,\ a_n \neq 0,$$

при $x \to \pm\infty$ є *нв*, причому еквівалентною своєму старшому члену a_nx^n.

■ Виносячи x^n за дужки, отримуємо добуток

$$P_n(x) = x^n \cdot \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n\right)$$

нескінченно великої x^n і функції, яка при $x \to \pm\infty$ має скінченну ненульову границю $a_n \neq 0$. Тому цей добуток є *нв* при $x \to \pm\infty$. Далі маємо

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{a_nx^n} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n \cdot \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n\right)}{a_nx^n} = \frac{a_n}{a_n} = 1 \Rightarrow P_n(x) \sim a_nx^n.\ ■$$

Приклад. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^8 - 3x^5 + 2x - 4}{5x^7 + 2x^4 - 3x^2 + 4}.$$

Оскільки тут

$$4x^8 - 3x^5 + 2x - 4 \sim 4x^8,\ 5x^7 + 2x^4 - 3x^2 + 4 \sim 5x^7,$$

маємо

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^8-3x^5+2x-4}{5x^7+2x^4-3x^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^8}{5x^7}=\frac{4}{5}\lim_{x\to\pm\infty}x=\begin{cases}+\infty \text{ при } x\to+\infty,\\ -\infty \text{ при } x\to-\infty.\end{cases}$$

1.1.4.Стандартні границі

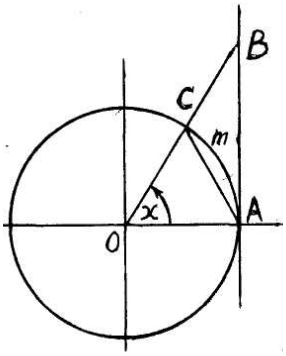


Рис. 14

А. Перша стандартна границя

Першою стандартною називається така границя

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \qquad (1)$$

■Використовуючи тригонометричний круг, ми зупинимось на випадку $0<x<\pi/2$ (рис. 14). Знаходячи площі $S_{\Delta AOC}, S_{\Delta AOB}, S_{OAmC}$ трикутників AOC, AOB та кругового сектора $OAmC$, ми бачимо, що

$$S_{\Delta AOC}<S_{OAmC}<S_{\Delta AOB}.$$

Звідси

$$\frac{1}{2}OA\cdot OC\cdot\sin x<\frac{OA^2\cdot x}{2}<\frac{1}{2}OA\cdot AB,\ \frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin x<\frac{1^2\cdot x}{2}<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan x,$$

$$\sin x<x<\tan x, 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

або

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Ця подвійна нерівність залишається вірною і при $-\pi/2<x<0$.

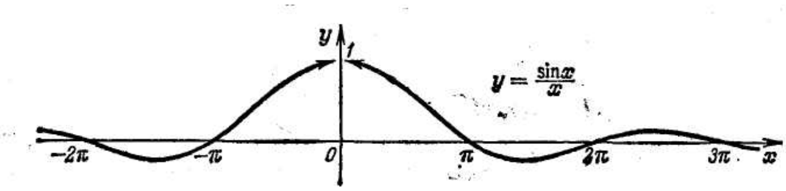


Рис. 15

Оскільки $\lim_{x\to0}\cos x=1$, ми отримуємо результат (1) на підставі теореми про проміжну функцію (теореми про двох міліціонерів).■

Графік функції

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

зображено на рис.15

Наслідки.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1;\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1;\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$

Доведімо третю з цих границь. Решту доведіть самостійно.

$$\blacksquare \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\left|\begin{array}{l}\arctan x=y,\\ y\to 0,\\ x=\tan y\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}=\lim_{y\to 0}\frac{y\cos y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y=1\cdot 1=1\blacksquare$$

2. При $x\to 0$ функції $\sin x, \arcsin x, \tan x, \arctan x$ є нескінченно малими (*нм*), еквівалентними своєму аргументу x:

$$\sin x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \ \tan x\sim x,\ \arctan x\sim x\ \ (\text{якщо } x\to 0).$$

Приклад. За властивістю 3 “арифметичних” властивостей границь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x\cdot\tan 7x}{\arcsin 3x\cdot\arctan 8x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{ll}\sin 4x\sim 4x & \tan 7x\sim 7x\\ \arcsin 3x\sim 3x & \arctan 8x\sim 8x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cdot 7x}{3x\cdot 8x}=\frac{7}{6}.$$

Приклад. Знайти границю.

$$A=lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-sin^3 13x}{1-sin^3 9x}\ .$$

Оскільки (на підставі формул зведення)

$$sin\frac{13\pi}{2}=sin\left(6\pi+\frac{\pi}{2}\right)=sin\frac{\pi}{2}=1,\ sin\frac{9\pi}{2}=sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)=sin\frac{\pi}{2}=1,$$

ми маємо розкрити тут невизначеність типу $0/0$. За “арифметичними” властивостями границь (з використанням формули про різницю кубів двох чисел, яка дорівнює добутку їх різниці і неповного квадрата їх суми)

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3 13x}{1-\sin^3 9x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin 13x)(1+\sin 13x+\sin^2 13x)}{(1-\sin 9x)(1+\sin 9x+\sin^2 9x)}=$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin 13x}{1-\sin 9x} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin 13x+\sin^2 13x\right)}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin 9x+\sin^2 9x\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin 13x}{1-\sin 9x},$$

оскільки

$$lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+sin13x+sin^2 13x\right)=1+1+1=3,\ lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+sin9x+sin^2 9x\right)=1+1+1=3.$$

Тепер введімо заміну змінної $\frac{\pi}{2}-x=y,\ y\to 0,$ звідки

$$sin13x = sin13\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=sin\left(\frac{13\pi}{2}-13y\right)=sin\left(6\pi+\frac{\pi}{2}-13y\right)=sin\left(\frac{\pi}{2}-13y\right)=cos13y$$

$$sin9x = sin9\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=sin\left(\frac{9\pi}{2}-9y\right)=sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}-9y\right)=sin\left(\frac{\pi}{2}-9y\right)=cos9y.$$

Таким чином,

$$A=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos 13y}{1-\cos 9y}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{13y}{2}}{2\sin^2\frac{9y}{2}}=\left|\begin{array}{l}\sin^2\frac{13y}{2}\sim\left(\frac{13y}{2}\right)^2\\ \sin^2\frac{9y}{2}\sim\left(\frac{9y}{2}\right)^2\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\left(\frac{13y}{2}\right)^2}{\left(\frac{9y}{2}\right)^2}=\left(\frac{13}{9}\right)^2=\frac{169}{81}$$

Тут для фіксації еквівалентності ми використали позначення $\cong$, бо в редакторі формул на ПК символ "~" відсутній.

Б. Друга стандартна границя

Розглянемо наступну числову послідовність:

$$\left\{y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Наближені значення (до 0.001) деяких членів послідовності дає таблиця 4

Table 4.

n	10	50	100	150	1000	2000	3000	10000
y_n	2.594	2.692	2.705	2.709	2.717	2.717	2.717	2.718

Ми доходимо таких висновків (їх можна також довести строго): а) послідовність зростає; b) вона обмежена зверху (наприклад, числом 3). Тому (за властивістю 6 загальних властивостей границь) вона має границю, яку позначають літерою e (число Ейлера; його наближене значення ми будемо в змозі знайти пізніше, а зараз візьмемо до уваги, що $e = 2.718281828459045\ldots$). Таким чином, ми можемо написати

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Вірним є і такий більш загальний результат

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

де x може прямувати як до $+\infty$, так і до $-\infty$. Цей же результат можна записати і в дещо іншій формі:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Ми запишемо всі три формули разом і назвемо їх сукупність **другою стандартною границею**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e;\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \qquad (2)$$

Зауваження. Друга стандартна границя дає нам ще один тип невизначеності, а саме

$$1^\infty.$$

Така невизначеність, наприклад, виникає, якщо треба знайти границю степеня, основа якого прямує до 1, а показник – до нескінченності. В такому випадку використання другої стандартної границі стає нам в великій пригоді.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

Розв"язання дається наступним ланцюжком перетворень.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1} = \left|\begin{matrix}\frac{2x-3}{2x+5}\to 1, & 1^\infty \\ x-1\to\infty & \end{matrix}\right| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3}{2x+5}-1\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{2x+5}\right)^{x-1} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-8}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-8}}\right)^{\frac{-8}{2x+5}(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8}{2x+5}(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8(x-1)}{2x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x}{2x}}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}.$$

З другої стандартної границі можна вивести деякі важливі наслідки.

1. $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \text{ (третя стандартна границя)} \qquad (3)$$

$$■\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.■$$

Законність переходу до границі під знаком логарифма буде обґрунтована пізніше.

2. $$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1 \text{ (четверта стандартна границя)} \qquad (4)$$

$$■\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\left|\begin{array}{c}e^x-1=y,\\ y\to0,\\ x=\ln(1+y)\end{array}\right|=\lim_{y\to0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.■$$

3. З формул (3), (4) випливає, що при $x\to0$ функції $\ln(1+x)$, e^x-1 є *нм*, які є еквівалентними своєму арґументу x,

$$\ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x \text{ (якщо } x\to0).$$

4. $\log_a(1+x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln a}\sim\dfrac{1}{\ln\alpha}\cdot x$.

5. $a^x-1=\left(e^{\ln a}\right)^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\cdot\ln a$.

6. $(1+x)^\alpha-1=e^{\alpha\ln(1+x)}-1\sim\alpha\ln(1+x)\sim\alpha x$.

Як остаточний результат складемо **таблицю еквівалентних *нм***

$$\left.\begin{array}{l}\sin x\\ tgx\\ \arcsin x\\ arctgx\\ \ln(1+x)\\ e^x-1\end{array}\right\}\sim x \text{ при } x\to0 \qquad \left.\begin{array}{c}\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}\\ a^x-1\sim x\ln a\\ (1+x)^\alpha-1\sim\alpha\,x\end{array}\right\} \text{ при } x\to0$$

Наведемо кілька прикладів з використанням таблиці еквівалентних нескінченно малих.

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}(3x-2)(\ln(4x+3)-\ln(4x-7)).$$

$$\lim_{x\to\infty}(3x-2)(\ln(4x+3)-\ln(4x-7))=(\infty\cdot(\infty-\infty))=\lim_{x\to\infty}(3x-2)\ln\frac{4x+3}{4x-7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(3x-2)\ln\left(1+\frac{4x+3}{4x-7}-1\right)=\lim_{x\to\infty}(3x-2)\ln\left(1+\frac{10}{4x-7}\right)=$$

$$=\left|\frac{10}{4x-7}\to 0,\text{ тому }\ln\left(1+\frac{10}{4x-7}\right)\sim\frac{10}{4x-7}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{10(3x-2)}{4x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{30x}{4x}=\frac{15}{2}.$$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[5]{1+\tan 4x}-1\right)\cdot\log_8(1-\arcsin 3x)}{\left(6^{\sin 3x}-1\right)\arctan 5x}.$$

Оскільки $\tan 4x, \arcsin 3x, \sin 3x, \arctan 5x$ є *нм* при $x\to 0$, всі чотири множники дробу під знаком границі є також *нм.* За таблицею еквівалентних *нм* послідовно маємо

$$\sqrt[5]{1+\tan 4x}-1\sim\frac{1}{5}\tan 4x\ \sim\frac{1}{5}\cdot 4x,\ \log_8(1-\arcsin 3x)\sim-\frac{\arcsin 3x}{\ln 8}\sim-\frac{1}{\ln 8}\cdot 3x,$$

$$6^{\sin 3x}-1\sim\ \sin 3x\cdot\ln 6\sim 3x\cdot\ln 6,\ \arctan 5x\sim 5x,$$

а отже

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[5]{1+\tan 4x}-1\right)\cdot\log_8(1-\arcsin 3x)}{\left(6^{\sin 3x}-1\right)\arctan 5x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{5}\cdot 4x\cdot\left(-\frac{1}{\ln 8}\cdot 3x\right)}{3x\cdot\ln 6\cdot 5x}=-\frac{4}{375\cdot\ln 8\cdot\ln 6}$$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x\to0}\frac{4^{3x}-5^{8x}}{\sqrt{1-\sin 3x}-1}.$$

Відразу помічаємо, що

$$\sqrt{1-\sin 3x}-1\sim\frac{1}{2}(-\sin 3x)\sim\frac{1}{2}(-3x)=-\frac{3}{2}x.$$

Що стосується чисельника, перетворимо його наступним чином (з використанням так званої основної логарифмічної тотожності):

$$4^{3x}-5^{8x}=e^{3x\ln 4}-e^{8x\ln 5}=e^{8x\ln 5}\left(e^{x(3\ln 4-8\ln 5)}-1\right).$$

Перший з множників прямує до 1, другий

$$e^{x(3\ln 4-8\ln 5)}-1\sim x(3\ln 4-8\ln 5).$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^{3x}-5^{8x}}{\sqrt{1-\sin 3x}-1}=\lim_{x\to 0}e^{8x\ln 5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x(3\ln 4-8\ln 5)}{-\frac{3}{2}x}=\frac{-2(3\ln 4-8\ln 5)}{3}=-\frac{2}{3}\ln\frac{4^3}{5^8}.$$

1.1.5. Відсотки в інвестиціях

Нехай

$B(t)$ - кількість грошей, яку мають в момент часу t;

$B(0)=P$ - початковий капітал (в момент часу $t=0$);

$I(t)$ - прибуток, який отримують в момент часу t;

α - відсоток прибутку, віднесений до одиниці часу.

Нехай ми робимо інвестицію всього нашого початкового капіталу P до моменту часу T. В цей момент T ми матимемо наступну кількість грошей (суму початкового капіталу P і прибутку $I(T)$ в момент часу T)

$$B(T)=P+I(T)=P+\frac{\alpha}{100}TP=P(1+\frac{\alpha}{100}T). \qquad (5)$$

Це є формула **простих відсотків**.

Припустимо тепер, що ми здійснюємо n інвестицій всіх наших грошей протягом часу T (в моменти часу 0, $\frac{T}{n}$, $\frac{2T}{n}$,…, $\frac{(n-1)T}{n}$).

В момент часу T/n ми матимемо (суму початкового капіталу P і прибутку $I(T/n)$ в момент T/n)

$$B\left(\frac{T}{n}\right)=P+I\left(\frac{T}{n}\right)=P+P\cdot\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}=P\left(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}\right).$$

В момент часу $2T/n$ ми матимемо (суму інвестованого капіталу $B(T/n)$ і прибутку $I(2T/n)$ від момента T/n до момента $2T/n$)

$$B\left(\frac{2T}{n}\right)=B\left(\frac{T}{n}\right)+B\left(\frac{T}{n}\right)\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}=B\left(\frac{T}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}\right)=$$

$$=P\left(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}\right)=P\left(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}\right)^2.$$

В момент часу $3T/n$ матимемо

$$B\left(\frac{3T}{n}\right)=P\left(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}\right)^2\left(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}\right)=P\left(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}\right)^3.$$

Продовжуючи міркувати таким же чином, знаходимо, що в момент часу $T=nT/n$ будемо остаточно мати

$$B(T)=B\left(\frac{nT}{n}\right)=P\left(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n}\right)^n \qquad (6)$$

Формула (6) називається формулою **складних відсотків**.

Припустимо, нарешті, що протягом часу кількість інвестицій необмежено зростає, $n\to+\infty$. В цьому випадку остаточна кількість грошей $B^*(T)$ в момент часу T на підставі другої стандартної границі дорівнюватиме

$$B^*(T)=\lim_{n\to\infty}B(T)=\lim_{n\to\infty}P(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n})^n=P\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{T}{n})^n=$$

$$=P\lim_{n\to\infty}((1+\frac{\alpha T}{100n})^{\frac{100n}{\alpha T}})^{\frac{\alpha T}{100}}=Pe^{\frac{\alpha}{100}T},$$

$$B^*(T)=P\cdot e^{\frac{\alpha}{100}.T} \qquad (7)$$

Формула (7) називається формулою **неперервних відсотків**. Вона дає остаточну кількість отриманих нами грошей в момент часу T за умови, що ми здійснюємо інвестиції неперервно.

1.2. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

1.2.1. Неперервність функції в точці

А. Основні означення

Означення 1. Функція $y = f(x)$ однієї або декількох змінних називається неперервною в точці a, якщо:

1) функція визначена в точці a і деякому її околі;

2) існує границя функції

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

в точці a;

3) ця границя дорівнює значенню функції в точці a,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a). \qquad (1)$$

На мові теорії границь це означає:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists U_a, \forall x \in D(f) : \left(x \in U_a \Rightarrow \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon\right).$$

Приклад. Функція

$$y = f(x) = x^2$$

неперервна в довільній точці a.

■На підставі означення неперервної функції ми повинні довести, що

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^2 = a^2 = f(a).$$

Нехай $\varepsilon > 0$ - настільки мале, що $a^2 - \varepsilon > 0$, а число a, для визначеності, є додатним. Маємо

$$\left|f(x) - f(a)\right| = \left|x^2 - a^2\right| < \varepsilon,$$

якщо

$$-\varepsilon < x^2 - a^2 < \varepsilon, 0 < a^2 - \varepsilon < x^2 < a^2 + \varepsilon, \sqrt{a^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{a^2 + \varepsilon},$$

$$x \in U_a = (\sqrt{a^2 - \varepsilon}, \sqrt{a^2 + \varepsilon}).$$

Таким чином на підставі означення границі

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2. \blacksquare$$

Аналогічно можна довести неперервність в будь-якій точці степеневої функції

$$y = f(x) = x^n$$

з довільним натуральним показником.

Приклад. Функція

$$y = f(x) = \sin x$$

неперервна в довільній точці a

■ Потрібно довести, що

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sin x = \sin a = f(a).$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ маємо

$$|\sin x - \sin a| = \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right| = 2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \le$$
$$\le 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|.$$

Таким чином,

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon,$$

якщо

$$|x-a| < \varepsilon,\ x \in U_a = (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Це означає, що

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \blacksquare$$

Доведіть самостійно неперервність в довільній точці функції

$$y = f(x) = \cos x.$$

Зауважимо, що в п. 1.2.1 за допомогою тригонометричного круга була фактично доведена неперервність тангенса в будь-якій точці $a \ne \pi/2 + k\pi, k \in Z$. Там же відзначалася можливість аналогічним чином довести неперервність синуса, косинуса і котангенса (останнього – в довільній точці $a \ne k\pi, k \in Z$).

Теорема 1. Функція однієї змінної $x \in \Re^1$ неперервна в точці $a \in \Re^1$ тоді і тільки тоді, якщо: a) існують ліва і права границі

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x),\quad f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)$$

функції в точці a; b) ці границі дорівнюють значенню функції в цій точці,

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a). \qquad (2)$$

Справедливість теореми випливає з теореми 2 попереднього розділу (див п. 1.2.2).

Означення 2. Функція однієї змінної x називається неперервною в точці a **зліва**, якщо вона визначена в деякому інтервалі (m, a) і $f(a-0)=f(a)$. Вона називається неперервною в точці a **справа**, якщо вона визначена в якомусь інтервалі (a, n) і $f(a+0)=f(a)$.

Таким чином, функція однієї змінної є неперервною в точці тоді і тільки тоді, якщо вона в цій точці неперервна як зліва, так і справа.

Означення 3. Для функції однієї змінної $y=f(x)$ різниця

$$\Delta x = x-a$$

називається приростом арґументу x, а різниця

$$\Delta y=\Delta f(a)=f(x)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a) \qquad (3)$$

- приростом функції в точці a.

Очевидно, що $x\to a$ тоді і тільки тоді, якщо $\Delta x\to 0$, $(x\to a)\Leftrightarrow(\Delta x\to 0)$.

Означення 4. Для функції n змінних різниці

$$\Delta x_1 = x_1-a_1, \Delta x_2 = x_2-a_2,..., \Delta x_n = x_n-a_n,$$

називаються приростами її арґументів, n-вимірній вектор

$$\Delta x=(\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_n)=(x_1-a_1, x_2-a_2,..., x_n-a_n)$$

- приростом її (n-вимірного) арґументу, а різниця

$$\begin{aligned}\Delta y=\Delta f(a)=f(x)-f(a)=f(x_1, x_2,..., x_n)-f(a_1, a_2,..., a_n)= \\ =f(a+\Delta x)-f(a)=f(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2,..., a_n+\Delta x_n)-f(a_1, a_2,..., a_n).\end{aligned} \qquad (4)$$

- приростом (так званим повним приростом) функції в точці $a=(a_1, a_2,..., a_n)$.

Очевидно (як і для випадку $n=1$), $x\to a$ тоді і тільки тоді, якщо $\Delta x\to 0$, $(x\to a)\Leftrightarrow(\Delta x\to 0)$.

Теорема 2. Функція $y = f(x)$ неперервна в точці a тоді і тільки тоді, коли з прямування до нуля приросту арґументу Δx випливає прямування до нуля її приросту $\Delta y = \Delta f(a) = f(x) - f(a)$ в цій точці, або якщо нескінченно малому приросту арґументу відповідає нескінченно малий приріст функції в точці a.

Теорема випливає з означення границі функції в точці a, якщо покласти $b = f(a)$.

Означення 5. Функція $y = f(x)$ називається неперервною на деякій множині, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Зокрема, функція однієї змінної є неперервною на відрізку $[a, b]$, якщо: 1) вона неперервна в кожній точці інтервалу (a, b), 2) в точці a - неперервна справа ($\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$), 3) в точці b - неперервна зліва ($\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$).

Б. Властивості неперервних функцій

1 **(**неперервність арифметичних операцій над неперервними функціями**)**. Сума, різниця, добуток двох неперервних в точці a функцій $f(x)$, $g(x)$ неперервні в цій точці. Відношення ж $f(x)/g(x)$ цих функцій неперервне в цій точці за умови $g(a) \neq 0$.

■Нехай, наприклад $F(x) = f(x) \cdot g(x)$. На підставі властивості 1 "арифметичних властивостей границь"

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f((x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \cdot g(a) = F(a),$$

тобто добуток $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ функцій $f(x)$, $g(x)$ є неперервним в точці a.■

Приклад. Функції

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

неперервні: перша в усіх точках $a \neq \pi/2 + k\pi$, де $k \in Z$, друга – в будь-якій точці $a \neq k\pi, k \in Z$.

2 **(**неперервність суперпозиції функції**)**. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперерв-

на в точці a, а функція $y = f(u)$ неперервна у відповідній точці $b = \varphi(a)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ є неперервною в точці a.

Це означає, що якщо $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b = \varphi(a)$ і $\lim\limits_{u \to b} f(u) = f(b) = f(\varphi(a))$, то

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to a} \varphi(x)) = f\left(\varphi\left(\lim_{x \to a} x\right)\right) = f(\varphi(a)).$$

Цю властивість можна довести в такий же спосіб, який ми використали при доведенні твердження про границю складеної функції (див. п. 1.3.3).

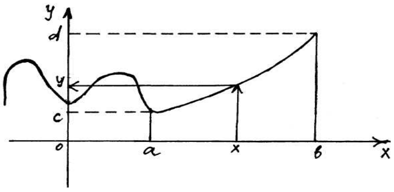


Рис. 1

3 (неперервність оберненої функції). Якщо функція $y = f(x)$ однієї змінної є неперервною і зростаючою (спадаючою) на відрізку $[a, b]$, то її обернена функція $x = g(y)$ є неперервною і також зростаючою (відповідно спадаючою) на відрізку $[c, d] = [f(a), f(b)]$ (рис. 1).

Приклад. Функція

$$y = f(x) = x^2$$

є неперервною і зростаючою на інтервалі $[0, +\infty)$, причому

$$f(0) = 0, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Тому її обернена функція

$$x = g(y) = \sqrt{y} \text{ (або ж } y = g(x) = \sqrt{x}\text{)}$$

є також неперервною і зростаючою на інтервалі $[0, +\infty)$.

Аналогічно встановлюється неперервність і зростання на $[0, +\infty)$ оберненої функції для неперервної і зростаючої на $[0, +\infty)$ степеневої функції

$$y = f(x) = x^n$$

з натуральним показником, а саме функції

$$x = g(y) = \sqrt[n]{y} \text{ (або ж } y = g(x) = \sqrt[n]{x}\text{)}$$

Приклад. Функція

$$y = f(x) = \sin x$$

є неперервною і зростаючою на відрізку $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$, причому

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Тому її обернена функція

$$x = g(y) = \arcsin y \text{ (або ж } y = g(x) = \arcsin x\text{)}$$

- неперервна і зростаюча на відрізку $\left[-1, 1\right]$.

Аналогічно доводиться неперервність і зростання функції

$$y = g(x) = \arctan x \text{ на інтервалі } \left(-\pi/2, \pi/2\right),$$

неперервність і спадання функцій

$$y = g(x) = \arccos x \text{ на відрізку } \left[0, \pi\right],$$

$$y = g(x) = arc\cot x \text{ на інтервалі } \left(0, \pi\right).$$

Приклад. Неперервність степеневої функції

$$y = x^{\alpha}$$

для будь-якого дійсного показника степеня α закладено в строге означення функції, яке в свою чергу базується на строгій теорії дійсного числа.

Приклад. Таким же чином неперервність закладено і в строге означення показникової функції

$$y = a^{x},$$

де a – дійсне число, яке задовольняє нерівність

$$0 < a \neq 1.$$

Приклад. Неперервність і зростання (при $a > 1$) або спадання (при $0 < a < 1$) логарифмічної функції

$$y = g(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1,$$

як оберненої для показникової, випливає з неперервності і зростання (відповідно спадання) останньої.

З розглянутих прикладів і властивостей неперервних функцій випливає наступна теорема:

Теорема 3. Всі основні елементарні і елементарні функції неперервні в своїх областях визначення.

Фактично ми користувались цією теоремою при обчисленні границь. Зокрема, при доведенні третьої стандартної границі ми скористалися неперервністю логарифма.

В. Точки розриву

Означення 6. Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною в деякому околі точки x_0, за винятком самої цієї точки, тобто у виколеному околі U'_{x_0} точки. В такому випадку точка x_0 називається точкою розриву функції.

У випадку функції однієї змінної $y = f(x), x \in \Re^1$, ми можемо класифікувати точки розриву. Це робиться в термінах лівої і правої границь

$$f(x_0 \pm 0) = \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$$

функції в точці x_0, коли порушується принаймні одна з умов теореми 1 (див. рис. 2, 3).

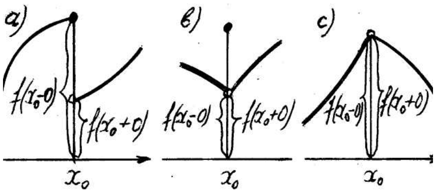


Рис. 2

1. Точкою розриву **першого роду** називається точка x_0, для якої існують як ліва, так і права границі $f(x_0 \pm 0)$ (рис. 2). Розрив може реалізовуватися в такі три способи:

а) ліва і права границя функції в точці x_0 існують, але не є рівними,

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$$

(див рис. 2а); в цьому випадку різниця

$$h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

називається стрибком (скінченним стрибком) функції в точці розриву x_0;

б) ліва і права границя функції в точці x_0 існують і є рівними,

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0),$$

але значення функції в точці x_0, хоча і існує, та не дорівнює її лівій (правій) границі в цій точці (див. рис. 2b);

в) ліва і права границя функції в точці x_0 існують і є рівними,

$$f(x_0-0)=f(x_0+0),$$

але значення функції в точці x_0 не існує (див. рис. 2с).

У випадках б), в) точка x_0 називається **точкою усувного розриву**, оскільки ми можемо "виправити" функцію в цій точці, розглянувши функцію, яка збігається з даною в усіх точках $x \neq x_0$, а в точці x_0 має значення $f(x_0 \pm 0)$,

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & \text{якщо} \quad x \neq x_0, \\ f(x_0 \pm 0), & \text{якщо} \quad x = x_0. \end{cases}$$

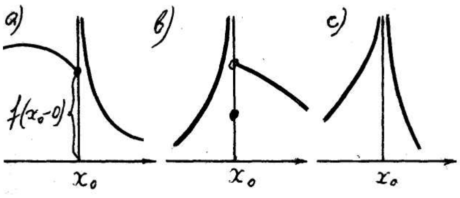


Рис. 3

Функція $f_1(x)$ є неперервною в точці x_0, збігається з $f(x)$ в усіх інших точках, і отже наявний розрив в точці "усунуто".

2. Точкою розриву **другого роду** називається точка x_0, для якої принаймні одна з границь $f(x_0 \pm 0)$ є нескінченною або взагалі не існує (рис. 3).

Наприклад, точки

$$\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad \pi+\pi k, \quad k \in Z,$$

є точками розриву другого роду відповідно тангенса $y=\tan x$ і котангенса $y=\cot x$.

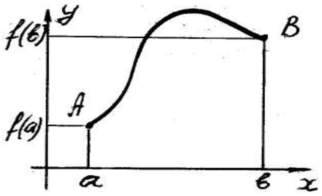


Рис. 4

Наслідок. Графік функції однієї змінної, неперервної на якомусь інтервалі (a,b), є якась неперервна лінія (рис. 4).

Приклад. Вище (див. п. 1.3.3) ми показали, що

$$\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}}=\begin{cases} +\infty, \text{if } x \to 2+0, \\ 0, \text{if} \quad x \to 2-0. \end{cases}$$

Отже, точка $x = 2$ є точкою розриву другого роду функції

$$f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Приклад. Точка $x = 2$ є точкою розриву першого роду функції

$$f(x)=\frac{3-5\cdot e^{\frac{1}{x-2}}}{4+2\cdot e^{\frac{1}{x-2}}}.$$

■Нехай

$$y=e^{\frac{1}{x-2}} \text{ і } f(x)=\frac{3-5\cdot y}{4+2\cdot y}.$$

Якщо $x\to 2-0$, то, як було показано вище, $y\to 0$, і

$$f(x)\to\frac{3}{4}.$$

Якщо ж $x\to 2+0$, то, як ми вже знаємо, $y\to+\infty$, і

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{y\to+\infty}\frac{3-5\cdot y}{4+2\cdot y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{-5\cdot y}{2\cdot y}=-\frac{5}{2}.$$

Отже,

$$f(2-0)=3/4,\ f(2+0)=-5/2,\ f(2-0)\neq f(2+0),$$

і точка $x=2$ є точкою розриву першого роду. Стрибок функції в цій точці

$$h=f(2+0)-f(2-0)=-13/4.\blacksquare$$

Приклад. Нехай

$$f(x)=\begin{cases}3x-2, & \text{якщо } x\le 1,\\ 2+ax^2, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

При якому значенні параметра a функція $f(x)$ буде неперервною?

Функцію на двох різних інтервалах $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$ задано різними виразами. Вона, очевидно, є неперервною для всіх значень арґументу, крім, можливо, точки стику $x=1$. Тому треба забезпечити неперервність функції тільки в цій точці. Подальші міркування засновані на теоремі 1.

Ліва і права границі функції в точці $x=1$ дорівнюють

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(3x-2)=1;\ f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(2+ax^2)=2+a.$$

Для неперервності функції в точці $x=1$ повинна виконуватись умова

$$f(1-0)=f(1+0),\ 1=2+a,$$

звідки випливає, що $a=-1$. Функція

$$f(x)=\begin{cases}3x-2, & \text{якщо } x\le 1,\\ 2-x^2, & \text{якщо } x>1\end{cases}$$

є неперервною для всіх значень аргументу x.

Для функцій декількох змінних множина точок розриву може бути значно складнішою, ніж для функцій однієї змінної.

Приклад. Точки розриву функції двох змінних

$$f(x,y)=\frac{3x-4y+5}{x-y}$$

утворюють цілу пряму, а саме $x=y$.

1.2.2. Властивості функції, неперервної на відрізку або в замкненій обмеженій області

Теорема 4. Якщо функція однієї змінної неперервна на відрізку $[a, b]$, то (див. рис. 5):

1) вона набуває найбільшого M і найменшого m значень на $[a, b]$: існують такі точки $c_1\in[a,b]$, $c_2\in[a,b]$, що

$$f(c_2)=M=\max_{[a,b]}f(x),\quad f(c_1)=m=\min_{[a,b]}f(x)$$

(**теорема Вейерштрасса**[1]);

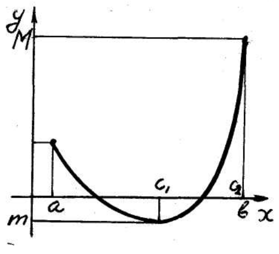


Рис. 5

2) вона набуває всіх значень, які знаходяться між m і M (**теорема Больцано**[2]**-Коші**[3] про проміжне значення);

3) якщо вона має значення різних знаків в двох точках відрізка, то вона хоча б один раз між цими точками набуває нульового значення.

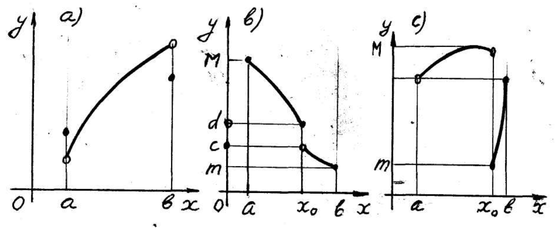


Рис. 6

---

[1] Вейерштрасс, Карл Теодор Вільгельм (1815 - 1897), - німецький математик

[2] Больцано, Бернард (1781 - 1848), - чеський математик, філософ і логік

[3] Коші, Огюстен Луї (1780 - 1859), - знаменитий французький математик

Зауваження. Заключення теореми можуть не справджуватись, якщо функція має принаймні одну точку розриву. Наприклад, функція, графік якої зображено на рис. 6a, має розрив в точках a і b і не має ні найменшого, ні найбільшого значень. Функція з графіком, зображеним на рис. 6b, має точку розриву x_0, набуває найбільшого M і найменшого m значень, але не набуває жодного проміжного значення між c і d.

Відзначимо, нарешті, що функція, яка має графік, показаний на рис. 6c, має дві точки розриву a і x_0 і тим не менш перші два заключення теореми для неї справджуються. Це означає, що умови теореми є достатніми для заключень 1), 2), 3), але вони не є необхідними.

Аналогічні теореми є справедливими для функцій декількох змінних.

Означення 7. Об"єднання $\overline{D}$ області D та її границі ∂D називається замкненою областю,

$$\overline{D} = D \bigcup \partial D.$$

Означення 8. Область на площині (або в просторі будь-якого виміру) називається обмеженою, якщо вона міститься всередині якогось кола (відповід-но якоїсь сфери) з центром в початку координат.

Теорема 5. Якщо функція декількох змінних неперервна в замкненій обмеженій області $\overline{D}$, то:

1) вона набуває в $\overline{D}$ своїх найбільшого M і найменшого m значень;

2) вона набуває всіх значень, заключених між m і M;

3) якщо вона має різні знаки в двох точках області, то вона в ній принаймні один раз набуває нульове значення.

1.2.3. Метод інтервалів та його узагальнення

Третя частина теореми 4 часто застосовується в так званому методі інтервалів для розв"язання нерівностей або визначення знаків функцій.

Нехай функція $y = f(x)$ однієї змінної має, наприклад, три нулі b, c, e і дві точки розриву a, d на множині всіх дійсних чисел $\Re^1 = (-\infty, \infty)$ (рис. 7). Точки a, b, c, d, e породжують шість інтервалів
$$(-\infty, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, +\infty),$$
на кожному з яких функція має один і той же сталий знак.

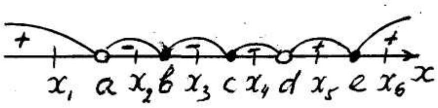


Рис. 7

Дійсно, якби в двох точках якогось інтервалу функція мала різні знаки, то вона повинна була б хоча б один раз перетворитися в нуль між цими точками. Але це неможливо, бо всі нулю функції вже враховано.

Для знаходження знака функції на названих інтервалах треба знайти її знак в якійсь одній точці кожного інтервалу. На рис. 7 літерами
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$$
позначено точки, довільно вибрані на інтервалах, і показано можливий розподіл знаків функції.

Приклад. Розв"язати нерівність
$$x^2 > a^2$$
для випадку $a > 0$.

Розглянемо функцію
$$f(x) = x^2 - a^2.$$
Вона неперервна на $\Re^1$ і має два нулі $\pm a$, що породжують три інтервали
$$(-\infty, -a), (-a, a), (a, +\infty).$$
Для точок $x = -2a \in (-\infty, -a)$ і $x = 2a \in (a, +\infty)$ першого і третього інтервалів маємо
$$f(-2a) > 0, f(2a) > 0,$$
а для точки $x = 0 \in (-a, a)$ середнього інтервалу маємо
$$f(0) < 0.$$
Отже, нерівність виконується для
$$x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty),$$

або, що те ж саме, якщо

$$|x| > a.$$

Доведіть самостійно, що для випадку $a < 0$ розв"язком нерівності буде

$$|x| > -a.$$

В загальному випадку розв"язок нерівності можна записати у вигляді

$$|x| > |a|$$

Приклад. Задано функцію

$$y = f(x) = \frac{(x+4)(x-7)}{x^2(x-5)}.$$

Знайти інтервали, на яких вона має сталий знак, є невід"ємною або недодатною, а також ліву і праву границі функції в точках її розриву.

Областю визначення функції є об"єднання трьох інтервалів

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 5) \cup (5, +\infty);$$

точки $x = 0, x = 5$ є точками розриву другого роду функції, тому що при прямуванні x до 0 або до 5 знаменник прямує до нуля, а чисельник набуває відмінні від нуля значення - відповідно $-28 \neq 0, -18 \neq 0$. Функція має два нулі, а саме $x = -4, x = 7$, бо $f(-4) = 0, f(7) = 0$.

Нулі і точки розриву функції утворюють п"ять інтервалів

$$(-\infty, -4), (-4, 0), (0, 5), (5, 7), (7, +\infty).$$

Оскільки, наприклад,

$$f(-5) < 0, f(-1) > 0, f(1) > 0, f(6) < 0, f(8) > 0,$$

то на інтервалах

$$(-4, 0), (0, 5), (7, +\infty)$$

функція є додатною, на інтервалах

$$[-4, 0), (0, 5), [7, +\infty)$$

невід"ємною; на інтервалах

$$(-\infty, -4), (5, 7)$$

вона є від"ємною, а на інтервалах

$$(-\infty, -4], (5, 7]$$

недодатною.

Далі, враховуючи знаки функції в околах точок $x = 0, x = 5$, отримуємо

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = +\infty, \quad f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty,$$

$$f(5-0) = \lim_{x\to 5-0} f(x) = +\infty, \quad f(5+0) = \lim_{x\to 5+0} f(x) = -\infty.$$

Аналогічний метод можна застосовувати для випадку функцій двох змінних.

Приклад. Знайти область визначення функції двох змінних x, y

$$Z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 16}{x^2 + y^2 - 4}}.$$

Розглянемо функцію (підкореневий вираз даної функції Z)

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 16}{x^2 + y^2 - 4}.$$

Областю визначення функції Z є множина точок (x, y) площини xOy, для яких виконується нерівність

$$f(x, y) \equiv \frac{x^2 + y^2 - 16}{x^2 + y^2 - 4} \geq 0.$$

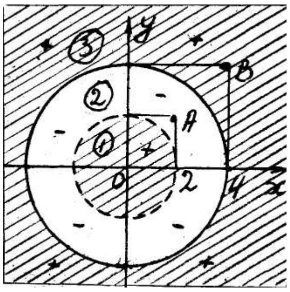


Рис. 8

Функція $f(x, y)$ дорівнює нулю на колі $x^2 + y^2 - 16 = 0$ і не існує на колі $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Ці кола поділяють площину xOy на три частини 1, 2, 3 (див. рис. 8), в кожній з яких функція $f(x, y)$ має сталий знак (на підставі заключення 3 теореми 5). Для визначення цього знака ми знаходимо знаки функції в довільній точці кожної частини, наприклад,

$$f(0) = f(0; 0) = 4 > 0, f(A) = f(2; 2) = -2 < 0, f(B) = f(4; 4) = 4/7 > 0.$$

Отже, функція $f(x, y)$ є додатною в частинах 1 і 3.

Відповідь. Областю визначення функції Z є заштриховане об"єднання круга $x^2 + y^2 < 4$ (без його границі $x^2 + y^2 = 4$) і зовнішності кола $x^2 + y^2 = 16$, включно з цим колом.

Приклад. Дослідити функцію

$$y = f(x) = \frac{x^3}{8 - x}$$

і побудувати наближений ескіз її графіка.

Будемо проводити дослідження в такому порядку.

1) Область визначення функції є $D(f) = (-\infty, 8) \cup (8, +\infty)$. Графік функції не перетинає прямої $x = 8$, яка перпендикулярна до осі Оx.

2) Знаходимо інтервали, де функція має сталі знаки (скорочено: знаходимо інтервали знакосталості функції). Точки $x = 0$ (нуль функції) і $x = 8$ (точка розриву другого роду) утворюють три інтервали $(-\infty, 0), (0, 8), (8,+\infty)$. На інтервалі $(0, 8)$ функція додатна, так що її графік лежить вище осі Оx. На інтервалах $(-\infty, 0), (8,+\infty)$ функція від"ємна, і її графік лежить нижче осі Оx.

3) Знаючи знаки функції, ми знаходимо її ліву і праву границі в точці розриву $x = 8$, а саме:

$$f(8-0) = \lim_{x \to 8-0} \frac{x^3}{8-x} = \left(\frac{1}{0} = \infty\right) = +\infty, \; f(8+0) = \lim_{x \to 8+0} \frac{x^3}{8-x} = \left(\frac{1}{0} = \infty\right) = -\infty.$$

Отже, графік функції необмежено здіймається вгору, якщо $x \to 8-0$ і необмежено спускається вниз при $x \to 8+0$.

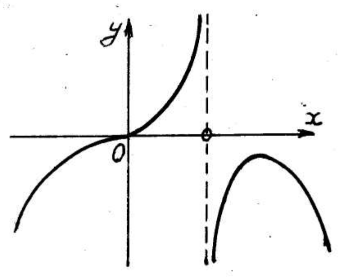


Рис. 9

4) Границя функції при $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{8-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{-x} = -\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = -\infty.$$

Це означає, що графік функції необмежено спускається вниз, якщо $x \to \pm\infty$.

5) Знаходимо точки перетину графіка функції з осями Оx, Оy.

Оy: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ O(0;0);

Оx: $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ O(0;0).

Беручи до уваги всі отримані результати, будуємо ескіз графіка (рис. 9).

Приклад. Самостійно проведіть дослідження і побудуйте ескіз графіка функції

$$f(x)=\frac{(x+1)(2-x)}{(x-5)(x+6)}.$$

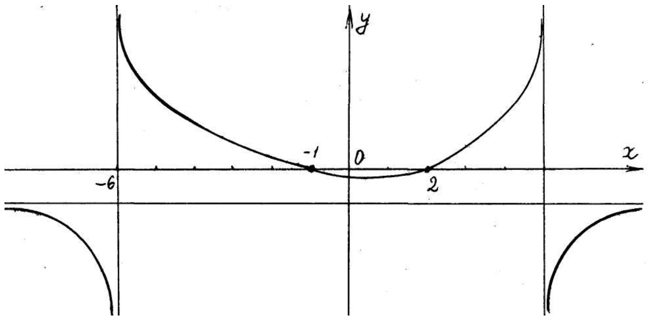


Рис. 10

Вказівки.

1) $D(f)=(-\infty,-6)\cup(-6,5)\cup(5,+\infty)$.

2) $f(x)>0$ на $(-6,-1)\cup(2,5)$, $f(x)<0$ на $(-\infty,-6)\cup(-1,2)\cup(5,+\infty)$.

3) $f(-6-0)=-\infty$, $f(-6+0)=+\infty$; $f(5-0)=+\infty$, $f(5+0)=-\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1$.

5) $(-1;0)\in Ox$, $(2;0)\in Ox$, $(0;-1/15)\in Oy$.

Ескіз графіка показано на рис. 10.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

2.1. ПОХІДНА

2.1.1. Задачі, які ведуть до поняття похідної

А. Швидкість зміни функції

Нехай $y = f(x)$ – функція однієї змінної, а $x = x_0$ - якась точка. Якщо аргумент *x* отримує приріст $\Delta x = x - x_0$, то функція набуває приросту

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

який дає зміну функції на інтервалі $[x_0, x_0 + \Delta x] \equiv [x_0, x]$. Відношення

$$V_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Називається середньою швидкістю зміни функції на названому інтервалі. Нехай далі $\Delta x \to 0$, тобто $x \to x_0$. Границя

$$V(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} V_{av} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

називається **швидкістю зміни** функції в точці x_0.

Б. Продуктивність праці

Нехай $U(t)$ - кількість продукції, виготовленої якоюсь фабрикою протягом часу *t* (тобто протягом часового проміжку від, наприклад, 0 до *t*). Тоді приріст функції $U(t)$ в точці t_0, тобто

$$\Delta U(t_0) = U(t_0 + \Delta t) - U(t_0),$$

є кількість продукції, виготовленої протягом часового проміжку від t_0 до $t_0 + \Delta t$. Відношення

$$f_{av} = \frac{\Delta U(t_0)}{\Delta t} = \frac{U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)}{\Delta t}$$

є середньою продуктивністю праці фабрики протягом цього інтервалу. Границя середньої продуктивності при $\Delta t \to 0$, саме

$$f(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} f_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)}{\Delta t}, \qquad (2)$$

Називається продуктивністю праці фабрики в момент часу t_0.

B. Дотична до кривої

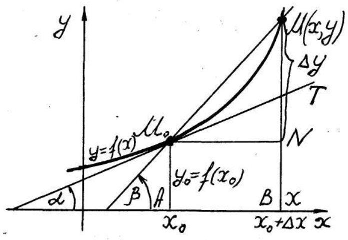


Рис. 1

Нехай задано криву $y = f(x)$, $M_0(x_0, y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$, - фіксована її точка, $M(x, y)$ її довільна точка. Пряма M_0M називається **січною** кривої. Нехай далі $M \to M_0$ вздовж кривої. Якщо існує **гранична позиція** M_0T січної при $M \to M_0$ (як зліва, так і справа), то пряма M_0T називається **дотичною** до кривої в точці $M(x_0, y_0)$. Її кутовий коефіцієнт дорівнює

$$\begin{aligned} k_{tg} = tg\alpha = \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ M \to M_0 \\ \Delta x \to 0}} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{NM}{M_0N} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{BM - BN}{AB} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned} \qquad (3)$$

2.1.2. Похідна і частинні похідні

A. Похідна функції однієї змінної

Нехай задано функцію однієї змінної $y = f(x)$. Даючи арґументу x приріст $\Delta x = x - x_0$ і знаходячи відповідний приріст функції

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (4)$$

в точці x_0, ми знаходимо їх відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

і переходимо до границі при $\Delta x = x - x_0 \to 0$.

Означення 1. Границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (5)$$

тобто границя відношення приросту функції $y=f(x)$ в точці x_0 і відповідного приросту арґументу Δx при прямуванні останнього до нуля, називається похідною функції в точці x_0. Ми позначаємо похідну одним з поданих нижче способів

$$y'=y'(x_0)=f'(x_0)=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x_0)}{dx},$$

так що

$$y'=f'(x_0)=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x_0)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (6)$$

Вищенаведені приклади дозволяють з"ясувати декілька сенсів похідної.

1. З формули (1) випливає, що **швидкість зміни функції** $y=f(x)$ в точці x_0 - це похідна функції в цій точці,

$$V(x_0)=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (7)$$

2. З формули (2) випливає, що **продуктивність праці** фабрики в момент часу t_0 - це похідна функції $U(t)$, тобто похідна кількості виробленої фабрикою продукції, в цей момент,

$$f(t_0)=U'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta U(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{U(t_0+\Delta t)-U(t_0)}{\Delta t} \qquad (8)$$

3. З формули (3) випливає **геометричний сенс похідної:**

Кутовий коефіцієнт k_{tg} **дотичної** M_0T до графіка функції $y=f(x)$ в його точці $M(x_0, y_0)$, $y_0=f(x_0)$ (рис. 1) – це похідна функції в точці x_0,

$$k_{tg}=tg\alpha=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (9)$$

Рівняння дотичної M_0T (з кутовим коефіцієнтом $k_{tg}=tg\alpha=f'(x_0)$) є

$$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0),\ y_0=f(x_0). \qquad (10)$$

Нормаль $M_0Q \perp M_0T$ до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0,\, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ (рис. 2) має кутовий коефіцієнт

$$k_{norm} = -\frac{1}{k_{tg}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

і таке рівняння

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \qquad (11)$$

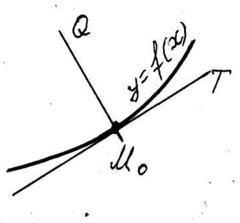


Fig. 2

Часто доводиться розглядати таку задачу: знайти кут φ, під яким перетинаються дві криві

$L_1 : y = f_1(x)$ та $L_2 : y = f_2(x)$ (рис. 3).

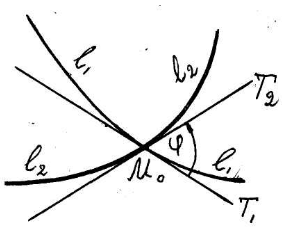


Рис. 3

Розв"язок. Нехай $M_0(x_0,\, y_0)$ - точка перетину кривих L_1 і L_2, а M_0T_1, M_0T_2 – дотичні до L_1, L_2 в точці M_0. Їх кутові коефіцієнти дорівнюють

$$k_{M_0T_1} = f_1'(x_0),\, k_{M_0T_2} = f_2'(x_0),$$

а отже

$$\tan\varphi = \frac{k_{M_0T_2} - k_{M_0T_1}}{1 + k_{M_0T_1} \cdot k_{M_0T_2}} = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)} \qquad (12)$$

Б. Частинні похідні функції декількох змінних

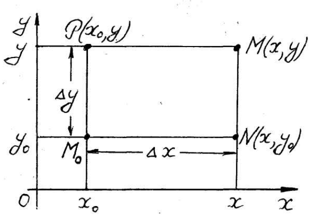


Рис. 4

Для функцій декількох змінних ми вводимо поняття частинних похідних. Нехай, наприклад, задано функцію двох змінних x, y

$$z = f(M) = f(x,\, y),\, M(x,\, y).$$

Ми вводимо чотири точки $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, $N(x, y_0)$, $P(x_0, y)$ і покладаємо $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$, звідки $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ (див. рис. 4).

Означення 2. Різниця (при фіксованому $y = y_0$)

$$\Delta_x z = \Delta_x f(M_0) = f(N) - f(M_0) = f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

називається **частинним приростом по** $\boldsymbol{x}$ функції $z = f(M) = f(x,\, y)$ в точці $M_0(x_0,\, y_0)$. Різниця (для фіксованого $x = x_0$)

$$\Delta_y z = \Delta_y f(M_0) = f(P) - f(M_0) = f(x_0,\, y) - f(x_0,\, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

називається частинним приростом по y функції в цій точці.

Означення 3. Частинними похідними функції $z = f(M) = f(x,\, y)$ по x, y в точці $M_0(x_0,\, y_0)$ називаються (і позначаються) відповідно наступні границі:

$$\begin{aligned} z'_x &= f'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ z'_y &= f'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(M_0)}{\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \end{aligned} \tag{13}$$

2.1.3. Похідні основних елементарних функцій

Похідні багатьох основних елементарних функцій можна знайти, виходячи з означення похідної.

1. $C' = 0,\, C - const$.

■Нехай $y = f(x) = C$. Тоді

$$f(x + \Delta x) = C,\, \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0,\, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,\, y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0. ■$$

2. $x' = 1$.

■ Нехай $y = f(x) = x$. Тоді

$$f(x + \Delta x) = x + \Delta x,\, \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x,\, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,\, y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,\, x' = 1. ■$$

3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1},\, \alpha \in \Re$. Зокрема, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\, (\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

■ Нехай $y = f(x) = x^\alpha$. Тоді

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^{\alpha},\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}=\left(x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right)^{\alpha}-x^{\alpha}=$$

$$=x^{\alpha}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right)\sim x^{\alpha}\cdot\alpha\frac{\Delta x}{x}=\alpha x^{\alpha-1}\Delta x\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1},\ y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1}\sim.\blacksquare$$

4. $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a^{x}$, зокрема $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$.

■Нехай $y=f(x)=a^{x}$. Тоді

$$f(x+\Delta x)=a^{x+\Delta x},\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=a^{x+\Delta x}-a^{x}=a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)\sim a^{x}\cdot\Delta x\cdot\ln a$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^{x}\cdot\ln a\Rightarrow y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^{x}\cdot\ln a.\blacksquare$$

5. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, зокрема $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$.

■ Нехай $y=f(x)=log_a x$. Тоді

$$f(x+\Delta x)=\log_a(x+\Delta x),\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=$$
$$=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\sim\frac{\Delta x}{x\ln a}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x\ln a},\ y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x\ln a}.\blacksquare$$

6. $(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x$.

■ Нехай, наприклад, $y=f(x)=\sin x$. Тоді

$$f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x),\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=$$
$$=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\sim 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\Delta x}{2}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta x\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.\blacksquare$$

Приклад. Знайти кут, під яким перетинаються криві

$$f_1(x)=\sin x,\ \ f_2(x)=\cos x.$$

Розв"язання. Точки перетину кривих визначаються рівнянням

$$\sin x=\cos x\Rightarrow\tan x=1,\ x_0=\pi/4+\pi n,\ n\in Z,$$

$$f_1'(x_0)=\cos x_0=\cos(\pi/4+\pi n),\ f_2'(x_0)=-\sin x_0=-\sin(\pi/4+\pi n),$$

і на підставі формули (12)

$$tg\varphi = \frac{-\sin(\pi/4+n\pi)-\cos(\pi/4+n\pi)}{1+\cos(\pi/4+n\pi)\cdot(-\sin(\pi/4+n\pi))} = -\frac{\sqrt{2}\sin(\pi/4+n\pi)}{1-\frac{1}{2}\sin(\pi/4+2n\pi)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\cos n\pi}{1/2} = -2\sqrt{2}\cos n\pi = -2\sqrt{2}(-1)^n = 2\sqrt{2}(-1)^{n+1}.$$

Приклад. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \sin x$ в точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Розв"язання. Нехай

$$y = f(x) = \sin x.$$

Маємо

$$y_0 = f(x_0) = \sin x_0 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};\ f'(x) = \cos x,\ f'(x_0) = \cos x_0 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Використовуючи формули (10), (11), маємо рівняння дотичної

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

і рівняння нормалі

$$y = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

2.1.4. Диференційовність і неперервність

Означення 4. Функція однієї змінної $y = f(x)$ $(x \in \Re)$ називається диференційовною в точці x_0, якщо в цій точці існує її похідна $f'(x_0)$.

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною в точці x_0. На підставі означення похідної і теорії границь

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,\ \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\cdot\Delta x,$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x)$ є *нм* при $\Delta x \to 0$. Отже, приріст функції, диференційовної в точці x_0, можна подати в такій формі:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad (14)$$

де $A = f'(x_0)$, а $\alpha = \alpha(\Delta x)$ є *нм* при $\Delta x \to 0$.

Означення диференційовної функції декількох змінних більш тонке і пов"язане з узагальненням формули (14). Обмежимось для простоти функцією двох змінних.

Означення 5. Функція двох змінних $z = f(M) = f(x, y)$ називається диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо її повний приріст в цій точці, тобто вираз

$$\Delta z = \Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

(див. означення 4 з п. 2.1.1 Вступу до аналізу і рис. 4), може бути представлений в наступому вигляді:

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \qquad (15)$$

де A, B - якісь числа, α, β - *нм* при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Нескладно довести, що

$$A = f'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0),$$

і тому

$$\begin{aligned}\Delta z = f(M) - f(M_0) = f'_x(M_0) \cdot \Delta x + f'_y(M_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \\ = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y\end{aligned} \qquad (16)$$

Теорема 1 (достатня умова диференційовності)**.** Якщо функція $z = f(M) = f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, які в самій точці неперервні, то функція є диференційовною в цій точці.

Доведення теореми ми дамо дещо пізніше.

Можна показати (в більш повних курсах аналізу є відповідні приклади), що для диференційовності функції в точці не є достатнім одного тільки існування частинних похідних функції в цій точці.

Теорема 2 (необхідна, але недостатня умова диференційовності). Якщо функція диференційовна в точці, то вона неперервна в цій точці (але не навпаки!).

■Нехай, наприклад, $y = f(x)$ - функція однієї змінної, яка диференційовна в точці x_0, і нехай $\Delta x = x - x_0 \to 0$. З формули (14) випливає, що приріст функції в точці x_0 прямує до нуля,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0 \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0),$$

що означає неперервність функції в точці x_0.■

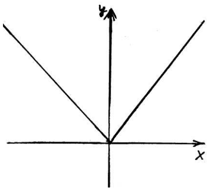


Рис. 5

Зауваження. Однієї тільки неперервності функції недостатньо для її диференційовності. Існують неперервні функції, які не є диференційовними принаймні в одній точці.

Приклад. Функція

$$y = |x|$$

(рис. 5) неперервна в усіх точках $x \in \Re$, але її похідна не існує в точці $x = 0$.

■Маємо

$$x_0 = 0,\ f(x_0) = f(0) = |0| = 0,\ f(x_0 + \Delta x) = |\Delta x|,$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |\Delta x| \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ для } \Delta x > 0,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \text{ для } \Delta x < 0,$$

і тому $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x$ не існує.

Зауважимо, що для графіка функції $y = |x|$ точка $O(0;\,0)$ є кутовою. Аналогічна обставина справедлива для графіка будь-якої функції, яке не має похідної в тій чи іншій точці.

2.1.5. Похідні суми, різниці, добутку, частки

Нехай

$$u = u(x), \quad v = v(x)$$

- дві диференційовні функції змінної *x*. Тоді похідні їх суми, різниці, добутку і частки обчислюються за такими правилами

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ (похідна суми і різниці).

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ (похідна добутку).

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ (похідна частки).

■Дамо доведення для випадку добутку двох функцій. Зауважимо, що

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x), u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u = u + \Delta u;$$

$$u(x+\Delta x) = u + \Delta u \;\; v(x+\Delta x) = v + \Delta v.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0, \Delta v \to 0$ внаслідок диференційовності, а отже і неперервності функцій $u = u(x), v = v(x)$. Тому

$$(u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v) - u \cdot v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u \cdot v + v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot \Delta v\right) = u' \cdot v + u \cdot v' + 0 = u' \cdot v + u \cdot v'.■$$

Частинні випадки.

a) $(C \cdot u) = C \cdot u' \; (C - const)$

(сталий множник можна винести за знак диференціювання), бо

$$(C \cdot u)' = C' \cdot u + C \cdot u' = 0 \cdot u + C \cdot u' = C \cdot u'.$$

b) $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$,

оскільки

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{1' \cdot v - 1 \cdot v'}{v^2} = \frac{0 \cdot v - 1 \cdot v'}{v^2} = -\frac{v'}{v^2}.$$

Приклад. Похідні тангенса і котангенса.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\tan^2 x \cdot \cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Приклад. Знайти частинні похідні по x і y функції двох змінних

$$z = \ln x \cdot 5^y - \arctan x \cdot y^5.$$

Знаходячи частинну похідну по x (y), ми розглядаємо другу змінну y (відповідно x) як фіксовану (або просто сталу).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(\ln x \cdot 5^y\right)'_x - \left(\arctan x \cdot y^5\right)'_x = \left(\ln x\right)'_x \cdot 5^y - \left(\arctan x\right)'_x \cdot y^5 =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot 5^y - \frac{1}{1+x^2} \cdot y^5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(\ln x \cdot 5^y\right)'_y - \left(\arctan x \cdot y^5\right)'_y = \ln x \cdot (5^y)'_y - \arctan x \cdot (y^5)'_y =$$

$$= \ln x \cdot 5^y \ln 5 - \arctan x \cdot 5y^4.$$

Приклад. Продиференціювати функцію (тобто знайти її похідну)

$$y = \arcsin x \cdot \sqrt[3]{x}.$$

$$y' = \left(\arcsin x \cdot \sqrt[3]{x}\right)' = \left(\arcsin x\right)' \cdot \sqrt[3]{x} + \arcsin x \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Приклад. Довести формулу диференціювання добутку трьох функцій.

$$\left(u \cdot v \cdot w\right)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

$$\blacksquare \left(u \cdot v \cdot w\right)' = \left(u \cdot \left(v \cdot w\right)\right)' = u' \cdot \left(v \cdot w\right) + u \cdot \left(v \cdot w\right)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot \left(v' \cdot w + v \cdot w'\right) =$$

$$= u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'. \blacksquare$$

Приклад. Знайти похідну функції

$$y = \cos x \cdot 2^x \cdot x^5.$$

На підставі формули, доведеної в попередньому прикладі, маємо

$$y' = \left(\cos x\right)' \cdot 2^x \cdot x^5 + \cos x \cdot \left(2^x\right)' \cdot x^5 + \cos x \cdot 2^x \cdot \left(x^5\right)' =$$

$$= -\sin x \cdot 2^x \cdot x^5 + \cos x \cdot 2^x \ln 2 \cdot x^5 + \cos x \cdot 2^x \cdot 5x^4.$$

2.2. ТЕХНІКА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

2.2.1. Похідна складеної функції

Теорема 1. Якщо функції однієї змінної $y = f(u), u = \varphi(x)$ диференційовні, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну, яка обчислюється за таким правилом:

$$y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \qquad (1)$$

або більш коротко

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

■З п. 2.1.4 (теорема 2) випливає, що функції $y = f(u), u = \varphi(x)$ неперервні. На цій підставі, якщо приріст Δx арґументу x прямує до нуля, $\Delta x \to 0$, то приріст Δu функції $u = \varphi(x)$ прямує до нуля, $\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \to 0$, а тому приріст Δy функції $y = f(u)$ також прямує до нуля, $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) \to 0$.

На підставі формули (14) з п. 2.1.4 можемо записати

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha \cdot \Delta u,$$

де α є *нм* при $\Delta u \to 0$ (а отже і при $\Delta x \to 0$). Поділивши обидві частини рівності на Δx і переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}, \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u' + 0 \cdot u'$$

звідки випливає формула (1). ■

Зауваження. Функцію $u = \varphi(x)$ часто називають **проміжним арґументом**, або **внутрішньою функцією**, і ми можемо сформулювати наступне правило диференціювання складеної функції: похідна складеної функції дорівнює добутку її похідної по проміжному арґументу [по внутрішній функції] і похідної проміжного арґументу [внутрішньої функції].

Застосовуючи теорему і попередні результати щодо диференціювання основних елементарних функцій (див. пп. 2.1.3 і 2.1.5), ми можемо скласти наступну таблицю похідних, в якій $u = u(x)$ означає деяку функцію.

Таблиця похідних

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$, зокрема $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$, $\left(\sqrt[3]{u}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\cdot u'$, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'$
2. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a\cdot u'$, зокрема $\left(e^{u}\right)' = e^{u}\cdot u'$
3. $\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u}\log_a e\cdot u' = \frac{1}{u\ln a}\cdot u'$, зокрема $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}\cdot u'$
4. $\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$
5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'$
6. $\left(\tan u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u' = \sec^2 u\cdot u'$ $\left(\text{де } \sec x = \frac{1}{\cos x}\right)$
7. $\left(\cot u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u' = -\mathrm{cosec}^2 u\cdot u'$ $\left(\text{де } \mathrm{cosec} x = \frac{1}{\sin x}\right)$
8. $\left(\sec u\right)' = \left(\frac{1}{\cos u}\right)' = \sec u\cdot\tan u\cdot u'$
9. $\left(\mathrm{cosec} u\right)' = \left(\frac{1}{\sin u}\right)' = -\mathrm{cosec} u\cdot\cot u\cdot u'$
10. $\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
11. $\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
12. $\left(\arctan u\right)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
13. $\left(\mathrm{arccot} u\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Приклад. $\left(\sin^6 x\right)' = \left((\sin x)^6\right)' = 6(\sin x)^5\cdot(\sin x)' = 6\sin^5 x\cdot\cos x$.

Приклад. $\left(\ln^2 4x\right)' = \left((\ln 4x)^2\right)' = 2\ln 4x\cdot(\ln 4x)' = 2\ln 4x\cdot\frac{1}{4x}\cdot(4x)' =$

$$= 2\ln 4x\cdot\frac{1}{4x}\cdot 4 = \frac{2\ln 4x}{x}.$$

Приклад. $\left(\sqrt[3]{arc\cot x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(arc\cot x)^2}}\cdot(arc\cot x)' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(arc\cot x)^2}\left(1+x^2\right)}$

Приклад. Знайти частинні похідні по x і по y функції двох змінних

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Вважаючи фіксованим y, знаходимо частинну похідну по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2x+0)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Фіксуючи тепер x, знаходимо частинну похідну по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(0+2y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Приклад (логарифмічне диференціювання, або диференціювання за допомоги попереднього логарифмування). Нехай задано функцію

$$y=(\varphi(x))^{\phi(x)}, \qquad (2)$$

яка не є ні степеневою, ні показниковою (іноді її називають степенево-показниковою).

Прологарифмуємо ліву і праву частини рівності (2), а потім продиференціюємо отриману рівність почленно (по арґументу x). Використовуючи правила диференціювання складеної функції і добутку, маємо:

$$\ln y=\ln(\varphi(x))^{\phi(x)},\ \ln y=\phi(x)\cdot\ln\varphi(x),\ (\ln y)'=(\phi(x)\cdot\ln\varphi(x))',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=(\phi(x))'\cdot\ln\varphi(x)+\phi(x)\cdot(\ln\varphi(x))'\cdot\varphi',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\phi'(x)\cdot\ln\varphi(x)+\frac{\phi(x)}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x).$$

Помножаючи тепер обидві частини на

$$y=(\varphi(x))^{\phi(x)},$$

знаходимо y',

$$y'=(\varphi(x))^{\phi(x)}\left(\phi'(x)\cdot\ln\varphi(x)+\frac{\phi(x)}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\right)..$$

Приклад. Застосуємо цей метод для диференціювання функції

$$y=x^{\tan x}.$$

Маємо послідовно

$$\ln y = \ln x^{\tan x},\ \ln y = \tan x \cdot \ln x,\ (\ln y)' = (\tan x \cdot \ln x)',\ \frac{1}{y} \cdot y' = (\tan x)' \cdot \ln x +$$

$$+ \tan x \cdot (\ln x)' = \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x} \Rightarrow y' = y \cdot \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x} \right) = x^{\tan x} \cdot \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x} \right).$$

Метод попереднього логарифмування можна застосовувати не тільки до степенево-показникових функцій вигляду (2), а і в багатьох інших випадках. Як приклад знайдемо цим методом похідну добутку трьох функцій

$$y = u \cdot v \cdot w,$$

яку ми вже знаходили в інший спосіб в п. 1.5.

Маємо

$$\ln y = \ln(u \cdot v \cdot w), \quad \ln y = \ln u + \ln v + \ln w, \quad (\ln y)' = (\ln u)' + (\ln v)' + (\ln w)',$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{u} u' + \frac{1}{v} v' + \frac{1}{w} w', \quad y' = y \left(\frac{1}{u} u' + \frac{1}{v} v' + \frac{1}{w} w' \right),$$

$$y' = uvw \left(\frac{1}{u} u' + \frac{1}{v} v' + \frac{1}{w} w' \right), \quad y' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Для функцій декількох змінних існує безліч аналогічних формул. Одна з них дається наступною теоремою.

Теорема 2. Якщо функції

$$z = f(u, v),\ u = u(x, y),\ v = v(x, y)$$

диференційовні, то існують частинні похідні складеної функції

$$z = f(u(x, y), v(x, y)),$$

які обчислюються за такими формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (3)$$

Доведіть теорему самостійно за допомогою формули (16) з п. 2.1.4 і наступної схеми доведення:

$$\Delta_x z = f'_u(u, v) \cdot \Delta_x u + f'_v(u, v) \cdot \Delta_x v + \alpha \cdot \Delta_x u + \beta \cdot \Delta_x v,$$

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_u(u, v) \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + f'_v(u, v) \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=f'_u(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f'_v(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Приклад. Знайти похідну степенево-показникової функції (2)

$$y=(\varphi(x))^{\phi(x)},$$

використовуючи формулу на кшталт (3).

Введемо позначення

$$u=\varphi(x), v=\phi(x).$$

Тоді, перш за все,

$$y=u^v,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=v\cdot u^{v-1},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=u^v\ln u.$$

Першу частинну похідну ми знаходимо як похідну степеневої функції (основа степеня – змінна, а показник степеня - фіксований), а другу – як похідну показникової функції (основа степеня – фіксована, а показник степеня - змінний). Тепер знаходимо похідну складеної функції двох змінних, а саме:

$$y'=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot u'+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot v'=v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\ln u\cdot v'=$$

$$=\phi(x)(\varphi(x))^{\phi(x)-1}\cdot\varphi'(x)+(\varphi(x))^{\phi(x)}\ln\varphi(x)\cdot\phi'(x)=$$

$$=(\varphi(x))^{\phi(x)}\left(\phi'(x)\cdot\ln\varphi(x)+\frac{\phi(x)}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\right).$$

Приклад. Знайти похідну функції

$$y=(\cos x)^{\sin x},$$

використовуючи правило диференціювання складеної функції декількох змінних (без попереднього логарифмування).

Послідовно маємо

$$u=\cos x,\quad v=\sin x,\quad y=u^v,\quad y'_u=vu^{v-1},\quad y'_v=u^v\ln u,$$

$$y'=y'_u\cdot u'+y'_v\cdot v',\quad y'=\sin x(\cos x)^{\sin x-1}\cdot(-\sin x)+(\cos x)^{\sin x}\ln\cos x\cdot\cos x=$$

$$=(\cos x)^{\sin x}\left(\ln\cos x\cdot\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)..$$

Приклад. Записати формули для диференціювання складених функцій

$$y = f(x, \varphi(x), \phi(x)),\ z = F(u(x), v(x), w(x)) \qquad (4)$$

Відповідь.

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \varphi' + \frac{\partial f}{\partial \phi} \cdot \phi', \qquad z' = F'_u \cdot u' + F'_v \cdot v' + F'_w \cdot w'. \qquad (5)$$

Приклад. Знайдімо ще в один спосіб похідну добутку трьох функцій

$$y = u \cdot v \cdot w.$$

Спочатку знаходимо частинні похідні функції по u, v, w:

$$y'_u = v \cdot w, \quad y'_v = u \cdot w, \quad y'_w = u \cdot v.$$

Тепер за допомоги другої з формул (5) маємо

$$y' = (u \cdot v \cdot w)' = y'_u \cdot u' + y'_v \cdot v' + y'_w \cdot w' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w',$$

тобто отримуємо той же самий результат, якій вже двічі мали вище.

2.2.2. Диференціювання неявної, оберненої та параметрично заданої функцій

А. Випадок неявної функції

Означення 1. Функція $y = f(x)$ однієї змінної $x \in \Re$ називається неявною (або неявно заданою), якщо вона визначена рівнянням вигляду

$$F(x, y) = 0, \qquad (6)$$

тобто рівнянням, яке не розв"язане відносно y.

Якщо з рівняння (6) можна знайти $y = y(x)$, то функція $y(x)$ перетворює рівняння на тотожність

$$F(x, y(x)) \equiv 0.$$

Приклад. Рівняння $x^2 + y^2 = 1$ визначає дві неявні функції

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

підстановка яких в рівняння дає тотожність

$$x^2 + \left(\pm\sqrt{1 - x^2}\right)^2 \equiv 1.$$

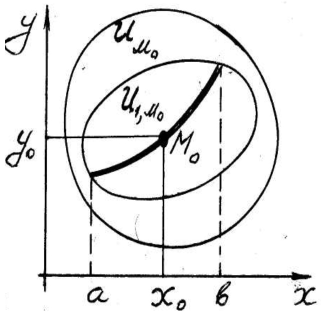


Рис. 1

Теорема 3. Нехай:

1) функція $F(x,y)$ в рівнянні (6) і її частинні похідні F'_x, F'_y визначені і неперервні в деякому околі U_{M_0} точки $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 1);

2) $F(M_0)=F(x_0, y_0)=0$,

але

$$F'_y(M_0)=F'_y(x_0, y_0)\neq 0.$$

Тоді рівняння (6) визначає єдину неявну функцію $y=f(x)$ в певному околі $U_{1,M_0}\subseteq U_{M_0}$ точки M_0. Ця функція є неперервною і диференційовною в деякому околі $(a,b)\subseteq\Re^1$ точки x_0, а її графік проходить через точку M_0 (тобто $f(x_0)=y_0$).

Щоб знайти похідну неявної функції $y=f(x)$, трактуватимемо рівняння (6) як тотожність $(F(x,f(x))\equiv 0)$ і продиференціюємо його по x. Використовуючи правило диференціювання складеної функції, отримаємо

$$(F(x,y))'_x=0,\ F'_x\cdot x'_x+F'_y\cdot y'_x=0,\ F'_x\cdot 1+F'_y\cdot y'_x=0,\ F'_x\cdot 1+F'_y\cdot y'_x=0,$$

$$y'=y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}. \qquad (7)$$

В подальшому ми можемо, залежно від ситуації, застосовувати як формулу (7), так і метод, за допомоги якого її отримано.

Приклад. Знайти похідну функції, неявно заданої рівнянням

$$x^2+y^2=7xy+6.$$

Перший спосіб (за допомогою формули (7)). Тут функція

$$F(x,y)=x^2+y^2-7xy-6,$$

її частинні похідні по x і y дорівнюють

$$F'_x=2x-7y, F'_y=2y-7x,$$

звідки за формулою (7)

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x-7y}{2y-7x} = \frac{7y-2x}{2y-7x}.$$

Другій спосіб (безпосереднє знаходження похідної). Продиференціюємо задане рівняння по x, беручи до уваги, що змінна y є функцією від x:

$$\left(x^2+y^2\right)'_x = \left(7xy+6\right)'_x,\ 2x+2y\cdot y' = 7\left(x'\cdot y + x\cdot y'\right), 2x+2y\cdot y' = 7y+7x\cdot y'.$$

Ми отримали лінійне рівняння відносно шуканої похідної y'. Розв"язуючи його, маємо

$$2y\cdot y' - 7x\cdot y' = 7y-2x,\ \left(2y-7x\right)\cdot y' = 7y-2x,\ y' = \frac{7y-2x}{2y-7x}.$$

Приклад. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2+y^2=16$, які проходять через точку A (0; 5).

Зауважмо, що точка A (0; 5) не лежить на колі. Розв"язок задачі можна подати в декілька кроків.

а) Взявши до уваги, що дотичні повинні проходити через точку A (0; 5), шукатимемо їх рівняння у вигляді

$$y-5=k\left(x-0\right), \text{ або ж } y-5=kx,$$

де k – невідомі кутові коефіцієнти дотичних.

б) Диференціюємо обидві частини рівняння кола і знаходимо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній його точці $M\left(x;\ y\right)$,

$$2x+2yy'=0,\ \ y'=-x/y.$$

в) В спільних точках шуканих дотичних і кола повинні виконуватися умови

$$\begin{cases} y-5=kx, \\ x^2+y^2=16, \\ k=-x/y, \end{cases}$$

які породжують систему рівнянь відносно k і координат точок дотику.

г) Немає потреби повністю розв"язувати систему, достатньо знайти з неї шукані значення k. Діємо наступним чином:

$$\begin{cases} x=-ky,\\ k^2y^2+y^2=16,\\ y-5=k(-ky); \end{cases} \quad \begin{cases} y^2\left(k^2+1\right)=16,\\ y\left(k^2+1\right)=5; \end{cases} \quad \frac{y^2\left(k^2+1\right)}{y^2\left(k^2+1\right)^2}=\frac{16}{25};$$

$$25=16\cdot\left(k^2+1\right); k^2=\frac{3}{4}; k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отримали два значення k, і шуканими рівняннями дотичних будуть

$$y=5\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Приклад. Знайти кути, під якими перетинаються лінії

$$x^2+y^2=8, y^2=2x.$$

Розв"язання.

a) Спочатку знаходимо точки перетину ліній (кола і параболи), розв"язуючи систему їх рівнянь,

$$\begin{cases} x^2+y^2=8,\\ y^2=2x\ (x\geq 0); \end{cases} \quad \begin{cases} y^2=2x\\ x^2+2x-8=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2,\\ y=\pm 2, \end{cases} \Rightarrow M_{01}(2;2), M_{02}(2;-2)$$

b) Далі ми знаходимо кутові коефіцієнти дотичних до обох кривих в довільних їх точках. Знаходячи похідні функцій, заданих неявно, маємо

$$a)\ x^2+y^2=8,\ 2x+2yy'=0,\ y'=y_1'=-\frac{x}{y};\quad b)\ y^2=2x,\ 2yy'=2,\ y'=y_2'=\frac{1}{y}.$$

c) В точці $M_{01}(2;2)$ $(x_0=2, y_0=2)$ кутові коефіцієнти дотичних до кривих дорівнюють

$$k_1=y_1'(x_0)=-\frac{x_0}{y_0}=-\frac{2}{2}=-1,\quad k_2=y_2'(x_0)=\frac{1}{y_0}=\frac{1}{2},$$

і тому криві перетинаються тут під кутом, тангенс якого дорівнює

$$\tan\varphi_1=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{1/2-(-1)}{1+1/2\cdot(-1)}=3.$$

d) В точці $M_{02}(2;-2)$ криві перетинаються під кутом, для якого (перевірте!)

$$\tan\varphi_2=-3.$$

Досі йшлося про існування і диференційовність неявної функції однієї змінної x, визначеної рівнянням вигляду (6). Аналогічно можна вести розмову про існування і диференційовність неявної функції будь-якої кількості змінних, визначеної одним рівнянням, і навіть декількох неявних функцій, визначених системою рівнянь.

Обмежмось декількома словами щодо функції двох змінних

$$z = f(x, y),$$

неявно визначеної рівнянням вигляду

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (8)$$

Її частинні похідні по x і y знаходяться за формулами

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad \text{якщо} \quad F'_z(x,y,z) \neq 0 \qquad (9)$$

Спробуйте довести ці формули самостійно!

Вказівка.

$$(F(x,y,z))'_x = 0,\ F'_x \cdot x'_x + F'_y \cdot y'_x + F'_z \cdot z'_x = 0,$$

$$F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot 0 + F'_z \cdot z'_x = 0,\ F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0,\ z'_x = -F'_x / F'_z,$$

і таким же чином для z'_y.

Приклад. Знайти частинні похідні функції $z = f(x, y)$, неявно визначеної рівнянням

$$\cos\left(x^2 + y^3 + z^4\right) = e^{xyz}.$$

Відповідно формулам (9) послідовно маємо

$$F(x,y,z) = e^{xyz} - \cos\left(x^2 + y^3 + z^4\right), \quad F'_x = yze^{xyz} + 2x\sin\left(x^2 + y^3 + z^4\right),$$

$$F'_y = xze^{xyz} + 3y^2\sin\left(x^2 + y^3 + z^4\right), \quad F'_z = xye^{xyz} + 4z^3\sin\left(x^2 + y^3 + z^4\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yze^{xyz} + 2x\sin\left(x^2 + y^3 + z^4\right)}{xye^{xyz} + 4z^3\sin\left(x^2 + y^3 + z^4\right)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xze^{xyz} + 3y^2\sin\left(x^2 + y^3 + z^4\right)}{xye^{xyz} + 4z^3\sin\left(x^2 + y^3 + z^4\right)}$$

Б. Випадок оберненої функції

Теорема 4. Нехай функція $y = f\ (\ x\ )$ однієї змінної задовольняє умови, про які йшлося у властивості 3 неперервних функцій (неперервність оберненої функції, п. 1.2.1 Б), і, крім того, є диференційовною. В цьому випадку обернена функція $x = g(y)$ також диференційовна, а її похідну можна знайти за такою формулою:

$$x'_y = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y'_x} \qquad (10)$$

■Обидві функції $y = f(x), x = g(y)$ є неперервними, отже якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$, і навпаки, якщо $\Delta y \to 0$, то $\Delta x \to 0$. Крім того, $\Delta y \neq 0$, якщо $\Delta x \neq 0$ і навпаки. Таким чином, ми отримуємо

$$x' = x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}.■$$

Приклад. Похідні обернених тригонометричних функцій

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, (arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

■Нехай, наприклад, $y = f(x) = \arctan x$ і $x = g(y) = \tan y$. На підставі (10)

$$(\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.■$$

Доведіть решту формул самостійно.

В. Випадок функції, заданої параметрично

Функцію $y = f(x)$ однієї змінної x часто-густо можна задати парою рівнянь

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad (11)$$

які містять допоміжну змінну (параметр) *t*. Такий спосіб задання функції називається параметричним.

Приклад. Рівняння

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t$$

для $0 \le t \le \pi$ визначають функцію, графіком якої є верхня частина еліпса (з півосями a, b); для $\pi \le t \le 2\pi$ вони визначають функцію з графіком – нижньою частиною того ж еліпса.

Приклад. Рівняння

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$$

визначають функцію, графіком якої є циклоїда.

Параметрично задану функцію можна подати у вигляді прямої залежності між x і y, якщо в рівняннях (11) одна з функцій $x(t)$, $y(t)$ має обернену. Нехай, наприклад, існує функція обернена функція $t = t(x)$ для $x = x(t)$. Тоді ми можемо виразити змінну y як функцію безпосередньо від x, а саме $y = y(t(x))$.

Проте для знаходження похідної від параметрично заданої функції зовсім не обов"язково виражати y (чи x) через x (відповідно через y).

Теорема 5. Якщо функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ параметричного представлення (11) функції $y = f(x)$ диференційовні, а функція $x = x(t)$ має обернену, то функція $y = f(x)$ має похідну, яка дається наступною формулою:

$$y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (12)$$

■Використовуючи правила диференціювання спочатку складеної, а потім оберненої функцій, маємо

$$y' = y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} ■$$

Приклад. Написати рівняння дотичної і нормалі до еліпса

$$x = a \cos t,\quad y = = b \sin t$$

в точці, для якої $t = t_0 = \frac{\pi}{3}$.

Рівняння дотичної і нормалі ми шукаємо у вигляді

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \quad y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Але

$$x_0 = \cos t_0 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, y_0 = \sin t_0 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t,\ y'(x_0) = -\frac{b}{a}\cot t_0 = -\frac{b}{a}\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{b}{a}\frac{\sqrt{3}}{3},$$

і шуканими рівняннями будуть такі:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{b}{a}\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(x - \frac{1}{2}),\ y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{b\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}).$$

2.2.3. Похідні вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ є функцією однієї змінної, а $y' = f'(x)$ - її похідна. Остання є функцією від x, і ми можемо ставити питання про її диференціювання.

Означення 2. Похідна похідної функції однієї змінної називається похідною другого порядку (коротше – другою похідною) цієї функції і позначається

$$y'' = y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = f''_{x^2}(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = (y')' = (f'(x))' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(f'(x)).$$

Аналогічно ми означаємо похідні третього, четвертого, n-го порядків (третю, четверту,…, n-ну похідні),

$$y''' = (y'')' = f'''(x), y^{IV} = y^{(4)} = (y''')' = f^{IV}(x) = f^{(4)}(x),..., y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x).$$

Приклад. Нехай дано степеневу функцію

$$y = a^x.$$

Тоді

$$y' = a^x \ln a, y'' = a^x \ln^2 a, y''' = a^x \ln^3 a, y^{IV} = y^{(4)} = a^x \ln^4 a,..., y^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

Приклад. Нехай

$$y = \sin x.$$

Тоді

$$y' = \cos x = \sin\left(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right), y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

і загалом

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогічно отримуємо для функції

$$y = \cos x$$

$$y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Приклад. Знайти перші дві похідні функції, неявно заданої рівнянням

$$x^2 + y^3 = 4.$$

Розв"язання. Для знаходження похідної першого порядку скористаємося методом прямого диференціювання.

$$2x + 3y^2y' = 0,\ y' = -\frac{2x}{3y^2},\ y'' = -\frac{2}{3}\cdot\frac{(x)'\cdot y^2 - x\cdot\left(y^2\right)'}{y^4} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1\cdot y^2 - x\cdot 2yy'}{y^4} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{y - 2xy'}{y^3} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{y - 2x\cdot\left(-\dfrac{2x}{3y^2}\right)}{y^3} = \frac{\dfrac{3y^3 + 4x^2}{3y^2}}{y^3} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3y^3 + 4x^2}{3y^5} =$$

$$= -\frac{2}{9}\cdot\frac{x^2 + 3x^2 + 3y^3}{y^5} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{x^2 + 3\left(x^2 + y^3\right)}{y^5} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{x^2 + 3\cdot 4}{y^5} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{x^2 + 12}{y^5}.$$

Приклад. Похідна другого порядку функції, заданої параметрично.

Нехай

$$x = x(t),\ y = y(t).$$

Подвійним застосуванням формули (12) ми отримуємо

$$y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},\ y'' = y''_{x^2} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{t^2}x'_t - x''_{t^2}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Таким чином,

$$y'' = y''_{x^2} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{t^2}x'_t - x''_{t^2}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}. \qquad (13)$$

Приклад. Знайти першу і другу похідні параметрично заданої функції

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

$$y' = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t,$$

$$y'' = y''_{x^2} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)'_t}{(a\cos t)'_t} = -\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Для функцій декількох змінних розглядають частинні похідні другого, третього, … порядків.

Нехай, наприклад, задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Для неї розглядають чотири частинні похідні другого порядку, а саме:

$$z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = (z'_x)'_x,\ z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = (z'_x)'_y,$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = (z'_y)'_x,\ z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = (z'_y)'_y.$$

Частинні похідні z''_{xy}, z''_{yx} називаються мішаними.

Приклад. Нехай

$$z = f(x, y) = x^4y^6 + x^2y^5.$$

Тоді

$$z'_x = 4x^4y^6 + 2xy^5,\ z'_y = 6x^4y^5 + 5x^2y^4,$$

$$z''_{x^2} = \left(4x^4y^6 + 2xy^5\right)'_x = 16x^3y^6 + 2y^5,\ z''_{xy} = \left(4x^4y^6 + 2xy^5\right)'_y = 24x^4y^5 + 10xy^4,$$

$$z''_{yx} = \left(6x^4y^5 + 5x^2y^4\right)'_x = 24x^3y^5 + 10xy^4,\ z''_{y^2} = \left(6x^4y^5 + 5x^2y^4\right)'_y = 30x^4y^4 + 20x^2y^3$$

Ми бачимо, що в цьому прикладі мішані частинні похідні другого порядку виявилися рівними. Це є загальним фактом. Саме, справедливою є така

Теорема 6. Якщо мішані частинні похідні z''_{xy}, z''_{yx} неперервні в якійсь точці, то вони в цій точці є рівними.

$$z''_{xy} = z''_{yx}.$$

Аналогічно означаються частинні похідні третього, четвертого, …, *n*-го порядків і формулюється теорема про рівність відповідних мішаних похідних.

2.2.4. Диференціал

Означення 3. Нехай функція $y = f(x)$ однієї змінної x диференційовна в точці x_0, а отже її приріст в цій точці дається формулою

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad (14)$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x)$ є *нм* при $\Delta x \to 0$ (див. формулу (14) з п. 2.1.4). Вираз

$$f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (15)$$

називається диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0. Якщо позначити його $dy = df(x_0)$, матимемо

$$dy = df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (16)$$

Зокрема, для арґументу x функції за формулою (16) маємо

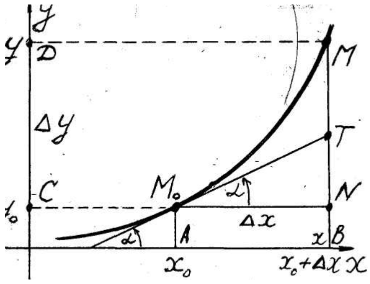


Рис. 1

$$dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x, \ dx = \Delta x.$$

Це означає, що диференціал незалежної змінної дорівнює його приросту, і ми можемо зобразити диференціал функції в його звичайному вигляді:

$$dy = df(x_0) = f'(x_0)dx. \qquad (17)$$

Приклад. Диференціал синуса $y = \sin x$ в довільній точці x дорівнює

$$dy = d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

Геометричний сенс диференціала ми можемо з"ясувати з рис. 1:

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x = \tan \alpha \cdot M_0 N = NT,$$

тобто диференціал є приростом ординати дотичної до графіка функції в точці $M_0(x_0, y_0)$, де, як звичайно, $y_0 = f(x_0)$.

Поняття диференціала розглядають також для функцій декількох змінних.

Означення 4. Нехай $z = f(x, y)$ - функція двох незалежних змінних, диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$. В такому разі її повний приріст в цій точці дається формулою (16) з п. 2.1.4,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y), \beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ - нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$. Диференціалом функції в точці $M_0(x_0, y_0)$ називається (і відповідно позначається) наступний вираз

$$dz = df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y. \qquad (18)$$

Зокрема, диференціали арґументів дорівнюють їх приростам, оскільки

$$dx = x'_x \cdot \Delta x + x'_y \cdot \Delta y = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x, dy = y'_x \cdot \Delta x + y'_y \cdot \Delta y = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y = \Delta y.$$

На цій підставі диференціал (18) можна записати у вигляді

$$dz = df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy. \qquad (19)$$

Приклад. Знайти диференціал функції двох змінних $z = f(x, y) = x^3 y^2$ в довільній точці (x, y).

Частинні похідні функції по x і по y відповідно дорівнюють

$$f'_x(x, y) = 3x^2 y^2, \quad f'_y(x, y) = 2x^3 y,$$

а тому на підставі формули (19)

$$dz = df(x, y) = f'_x(x, y) \cdot dx + f'_y(x, y) \cdot dy = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy.$$

Властивості диференціала схожі з властивостями похідної. Саме, якщо u, v - дві диференційовні функції, то диференціали їх суми, різниці, добутку і частки дорівнюють

$$1.\ d(u \pm v) = du \pm dv.\ 2.\ d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du.\ 3.\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

Як наслідок маємо

$$d(Cu) = C \cdot du\ (C - const), d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{dv}{v^2}.$$

■Якщо, наприклад, $u = u(x), v = v(x)$ - дві диференційовні функції однієї змінної, то диференціал їх добутку дорівнює

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)' dx = vu'dx + uv'dx = v \cdot du + u \cdot dv. \blacksquare$$

4 (**інваріантність**, тобто незмінність форми диференціала). Диференціал функції має одну і ту ж форму незалежно від того, чи її аргументи є незалежними змінними, чи вони є функціями інших незалежних змінних.

■Розглянемо дві типові ситуації̈.

а) Якщо, наприклад,

$$y = f(x), u = \varphi(t),$$

тобто функція

$$y = f(\varphi(t))$$

є складеною функцією незалежної змінної t, то за правилом диференціювання складеної функції і за формулою (17) маємо

$$dy = y'_t \cdot dt = y'_x \cdot x'(t)dt = f'(x)dx\,.$$

Отже, диференціал функції дорівнює

$$dy = f'(x)dx$$

і отже має таку ж саму форму (17), яку б він мав, якби змінна x була незалежною, а не функцією.

b) Нехай тепер

$$z = f(x, y), \quad x = x(u, v), \ \ y = y(u, v),$$

і в цьому випадку

$$z = f(x(u, v), y(u, v))$$

є складеною функцією двох незалежних змінних u і v. В наступних міркуваннях ми декілька разів використовуємо формулу (19), а також формули, схожі з формуламии (3) з п. 2.2.1. Маємо

$$dz = f'_u \cdot du + f'_v \cdot dv = (f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u) \cdot du + (f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v) \cdot dv =$$

$$= f'_x \cdot (x'_u du + x'_v dv) + f'_y \cdot (y'_u du + y'_v dv) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy,$$

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Ми знов отримали диференціал в тій же самій формі, яку б він мав, якби x і y були не функціями, а незалежними змінними.■

Приклад. Знайти похідну функції $y = f(x)$, яку задано неявно рівнянням

$$x^3 = 3^y.$$

Скориставшись тим, що ліва частина рівності залежить тільки від x, а права – тільки від y, візьмемо диференціали лівої і правої частин рівності. На підставі властивості 4 ми можемо це зробити, диференціюючи зліва по змінній x, а справа – по y, не замислюючись над тим, яка з змінних x, y є незалежною, а яка – функцією. Отже,

$$d\left(x^3\right) = d\left(3^y\right), \quad \left(x^3\right)_x' dx = \left(3^y\right)_y' dy, \quad 3x^2 dx = 3^y \ln 3 dy,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3^y \ln 3} = \frac{3^{1-y} x^2}{\ln 3}.$$

Міркування, подібні використаним, часто будуть застосовуватись пізніше в так званому інтеґральному численні.

Диференціали часто-густо застосовуються в наближених обчисленнях.

А) З одного боку ми можемо, наприклад, користуватися наближеними формулами:

$$f(x) = f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + df\left(x_0\right) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x \qquad (20)$$

для функцій однієї змінної і

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) + df\left(x_0, y_0\right) = \\ &= f\left(x_0, y_0\right) + f_x'(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y'(x_0, y_0) \cdot \Delta y \qquad (21) \end{aligned}$$

для функцій двох змінних.

В) З іншого боку, ми можемо для функції однієї змінної покласти

$$f(x) = f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) \qquad (22)$$

з абсолютною похибкою

$$\delta = \left|f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)\right| \approx df\left(x_0\right) = \left|f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x\right| = \left|f'\left(x_0\right)\right|\left|\Delta x\right|.$$

Для функції двох змінних ми можемо покласти

$$f(x, y) = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) \qquad (23)$$

з абсолютною похибкою

$$\delta = \left|f(x, y) - f\left(x_0, y_0\right)\right| \approx \left|df\left(x_0, y_0\right)\right| = \left|f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y\right| \leq$$

$$\le \left|f'_x(x_0,y_0)\right|\left|\Delta x\right| + \left|f'_y(x_0,y_0)\right|\left|\Delta y\right|.$$

Приклад. Нехай необхідно знайти наближене значення кореня

$$\sqrt[3]{8.003}.$$

А) Беручи до уваги формулу (20), матимемо

$$f(x)=\sqrt[3]{x},\ f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, x_0=8.000,\ \Delta x=0.003, f(x_0+\Delta x)=\sqrt[3]{x_0+\Delta x}=$$

$$=\sqrt[3]{2.000+0.003}\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=\sqrt[3]{8.000}+\frac{1}{3\sqrt[3]{8.000^2}}\cdot 0.003=2+\frac{0.003}{12}\approx 2.000$$

В) Використовуючи тепер формулу (22), отримаємо

$$f(x_0+\Delta x)=\sqrt[3]{x_0+\Delta x}=\sqrt[3]{2.000+0.003}\approx f(x_0)=\sqrt[2]{8.000}\approx 2.000$$

з абсолютною похибкою

$$\delta=\left|f'(x_0)\right|\left|\Delta x\right|=\frac{1}{3\sqrt[3]{8.000^2}}\cdot 0.003=0.00025.$$

Порівняймо цей результат з більш точним значенням кореня:

$$\sqrt[3]{8.003}\approx 2.000249969\ldots\ .$$

Приклад. Знайти наближене значення величини $1.03^{1.98}$.

А) За допомоги формули (21) маємо

$$f(x,y)=x^y,\ f'_x(x,y)=yx^{y-1},\ f'_y(x,y)=x^y\ln x,\ x_0=1,\ y_0=2,\ \Delta x=0.03,\ \Delta y=-0.02,$$

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=(x_0+\Delta x)^{y_0+\Delta y}=(1+0.03)^{2+(-0.02)}\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+$$

$$+f'_y(x_0,y_0)\Delta y=1^2+2\cdot 1^{2-1}\cdot 0.03+1^2\cdot\ln 1\cdot(-0.02)=1+0.06=1.06.$$

В) Використовуючи тепер формулу (23), маємо

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=(1+0.03)^{2+(-0.02)}\approx f(x_0,y_0)=1^2=1.0$$

з абсолютною похибкою

$$\delta\le\left|f'_x(x_0,y_0)\right|\left|\Delta x\right|+\left|f'_y(x_0,y_0)\right|\left|\Delta y\right|\le 2\cdot 1^{2-1}\cdot 0.03+1^2\cdot\ln 1\cdot(-0.02)=0.06<0.1.$$

Означення 5. Диференціалом другого, третього, ..., *n*-го порядку функції називається диференціал її диференціала першого, другого, ... (*n* - 1)-го порядку,

$$d^2 f = d(df),\ d^3 f = d\left(d^2 f\right), \ldots, d^n f = d\left(d^{n-1} f\right) \qquad (24)$$

Якщо $y = f(x)$ - функція однієї незалежної змінної x, то $dx = \Delta x$ є довільним приростом арґументу, а отже є довільною сталою. На цій підставі отримуємо диференціал функції другого порядку:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx \cdot f''(x)dx = f''(x)dx^2 .$$

Аналогічно ми доводимо, що

$$d^3 f(x) = f'''(x)dx^3, \ldots, d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n . \qquad (25)$$

Якщо $z = f(x, y)$ є функцією двох незалежних змінних x, y, то $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ - довільні прирости арґументів і також є довільними сталими. Припускаючи неперервність частинних похідних другого порядку функції (а отже рівність мішаних частинних похідних) отримаємо

$$d^2 f(x, y) = d\left(df(x, y)\right) = d(f'_x dx + f'_y dy) = dx \cdot df'_x + dy \cdot df'_y =$$
$$= dx \cdot (f''_{x^2} dx + f''_{xy} dy) + dy \cdot \left(f''_{yx} dx + f''_{y^2} dy\right) = f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2$$

$$d^2 f(x, y) = f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f(x, y). \qquad (26)$$

Аналогічно

$$d^3 f(x, y) = f'''_{x^3} dx^3 + f'''_{x^2 y} dx^2 dy + f'''_{xy^2} dxdy^2 + f'''_{x^3} dx^3 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 f(x, y)$$

$$d^n f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f(x, y) \qquad (27)$$

Формула (26) показує, що диференціал другого порядку функції двох змінних $f(x, y)$ є квадратичною формою з матрицею

$$H = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Приклад. Знайти диференціал другого порядку функції $z = x^5 y^8$.

Частинні похідні функції двох перших порядків дорівнюють

$$z'_x = 5x^4y^8,\ z'_y = 8x^5y^7,\ z''_{x^2} = 20x^3y^8,\ z''_{xy} = z''_{yx} = 40x^4y^7,\ z''_{y^2} = 56x^5y^6,$$

і за формулою (26) отримуємо

$$d^2z = 20x^3y^8dx^2 + 80x^4y^7dxdy + 56x^5y^6dy^2.$$

2.2.5. Похідна за напрямом. Ґрадієнт

Нехай деякий напрям (або напрямок) l на площині xOy визначено одиничним вектором (ортом)

$$\overline{l^\circ} = (\cos\alpha, \cos\beta), \qquad (29)$$

а точки $M_0(x_0;\, y_0)$, $M(x;\, y)$ такі, що вектор $\overline{M_0M}$ є колінеарним вектору $\overline{l^\circ}$, $\overline{M_0M} \uparrow\uparrow \overline{l^\circ}$ (див. рис. 2).

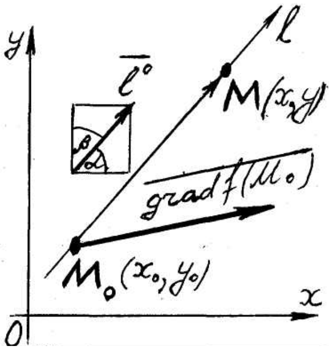


Рис. 2

Означення 6. Похідною функції двох змінних $z = f(M) = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0;\, y_0)$ за напрямом l називається (і відповідно позначається) така границя:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\left|\overline{M_0M}\right|}. \qquad (30)$$

Зауваження. Крім вислову "за напрямом" можна використовувати такі: за напрямком, в напрямі, в напрямку.

Означення 7. Ґрадієнтом функції двох змінних $z = f(M) = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0;\, y_0)$ називається вектор

$$\overline{grad\, f(M_0)} = \overline{grad\, f(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right). \qquad (31)$$

Теорема 7. Похідна функції $z = f(M) = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0;\, y_0)$ за напрямом l дорівнює скалярному добутку значення ґрадієнта функції в цій точці і орта $\overline{l^\circ}$ напряму l,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\overline{grad\, f(M_0)}\cdot\overline{l}^\circ=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta \qquad (32)$$

■Нехай $\left|\overline{M_0M}\right|=t$, а тому

$$\overline{M_0M}=t\cdot\overline{l}^\circ=(t\cos\alpha,\,t\cos\beta)=(x-x_0,y-y_0);$$

$$x-x_0=t\cos\alpha,\ y-y_0=t\cos\beta;\ x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\cos\beta.$$

Задану функцію $f(M)=f(x,y)$ можна розглядати як функцію $\varphi(t)$ однієї змінної *t*, а саме:

$$f(M)=f(x,y)=f(x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\cos\beta)=\varphi(t)\Rightarrow f(M_0)=f(x_0,y_0)=\varphi(0).$$

Формула (30) дає, що

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\left|\overline{M_0M}\right|}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\varphi'(0),$$

і тому ми повинні знайти $\varphi'(0)$. Але на підставі формули (3)

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=f'_x(x,y)\cdot x'_t+f'_y(x,y)\cdot y'_t=f'_x(x,y)\cos\alpha+f'_y(x,y)\cos\beta=\\&=f'_x(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)\cos\alpha+f'_y(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)\cos\beta\end{aligned}$$

і отже

$$\varphi'(0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta.■$$

З означення скалярного добутку випливає, що похідна (32) за напрямом дорівнює

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\left|\overline{grad\, f(M_0)}\right|\cdot\cos\left(\overline{grad\, f(M_0)}\,\widehat{,}\,\overline{l}^\circ\right). \qquad (33)$$

Тому вона набуває найбільшого значення, якщо $\overline{l}^\circ\uparrow\uparrow\overline{grad\, f(M_0)}$, тобто якщо похідну функції $z=f(M)=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ взято в напрямку ґрадієнта цієї функції в цій же самій точці. Цей факт можна записати наступним чином:

$$\max\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial grad\, f(M_0)}=\left|\overline{grad\, f(M_0)}\right|. \qquad (34)$$

Можна сказати, що ґрадієнт функції $z = f(M) = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ - це є вектор, який за величиною і за напрямком дає найбільшу швидкість зростання функції в цій точці.

Приклад. Частинні похідні функції $z = f(M) = f(x, y)$ по x або y є її похідними в напрямах осей Ox і Oy відповідно.

Приклад. Знайти похідні функції $z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(1;-2)$ в напряму: a) відомого вектора $\overline{a} = (-3; 4)$; b) ґрадієнта функції в цій же точці $M_0(1;-2)$; c) ґрадієнта функції в точці $N(2; 3)$, відмінній від точки $M_0(1;-2)$.

Розв"язок. Перш за все

$$\overline{grad\, z(M)} = \overline{grad\, z(x, y)} = \left(z'_x(x, y); z'_y(x, y)\right) = (2x; 2y),$$

і тому

$$\overline{grad\, z(M_0)} = \left(z'_x(1;-2); z'_y(1;-2)\right) = (2;-4), \overline{grad\, z(N)} = \left(z'_x(2; 3); z'_y(2; 3)\right) = (4; 6).$$

Орти вектора $\overline{a} = (-3; 4)$ і ґрадієнта функції $z = x^2 + y^2$ в точці $N(2; 3)$ відповідно дорівнюють

$$\overline{a^\circ} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right), \overline{grad\, z(N)}^\circ = \left(\frac{4}{\sqrt{52}}; \frac{6}{\sqrt{52}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right).$$

Отже, на основі формул (32), (34) маємо

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial a} = \overline{grad\, f(M_0)} \cdot \overline{a^\circ} = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + (-4) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{22}{5},$$

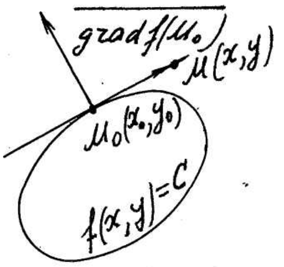
$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial grad\, f(N)} = \overline{grad\, f(M_0)} \cdot \overline{grad\, f(N)}^\circ = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + (-4) \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{8}{\sqrt{13}},$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial grad\, f(M_0)} = \left|\overline{grad\, f(M_0)}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Теорема 8. Ґрадієнт $\overline{grad\, f(M_0)}$ є перпендикулярним до лінії рівня функції $z = f(M) = f(x, y)$, яка на площині xOy проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

■Нехай лінія рівня $l: f(x, y) = C$ (для певного значення C) проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 3). Кутовий коефіцієнт дотичної до цієї лінії в точці $M_0(x_0; y_0)$ дорівнює

$$y'(x_0)=-f'_x(x_0,y_0)/f'_y(x_0,y_0),$$



звідки отримуємо рівняння дотичної до лінії

$$y-y_0=-f'_x(x_0,y_0)/f'_y(x_0,y_0)\cdot(x-x_0),$$

або

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0\,.$$

Звідси випливає, що $\overline{gradf(M_0)}=\left(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)\right)$ є перпендикуляром до лінії рівня l, бо перпендикулярний до напрямного вектора дотичної до l, а саме до вектора $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$.■

Рис. 3

Аналогічні означення і факти є справедливими в 3-вимірному просторі для функції трьох змінних $u=f(M)=f(x,y,z)$, а саме:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\left|\overline{M_0M}\right|}\,, \qquad (35)$$

$$\overline{l^\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

$$\overline{grad\, f(M_0)}=\overline{grad\, f(x_0,y_0,z_0)}=$$
$$=\left(\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y},\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right) \qquad (36)$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}=\left|\overline{grad\, f(M_0)}\right|\cdot\cos\left(\overline{grad\, f(M_0)}\,\widehat{,\,\overline{l^\circ}}\right), \qquad (37)$$

$$\max\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial grad\, f(M_0)}=\left|\overline{grad\, f(M_0)}\right|. \qquad (38)$$

Теорема 9. Ґрадієнт $\overline{grad\, f(M_0)}=\overline{grad\, f(x_0,y_0,z_0)}$ перпендикулярний до поверхні рівня $f(x,y,z)=C$ функції $z=f(M)=f(x,y,z)$, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

2.2.6. Похідні в економіці. Еластичність

А. Темп зміни функції

Відносна швидкість зміни [**темп зміни**] функції $y=f(x)$ - це є її логарифмічна похідна

$$T_{f(x)} = (ln\, f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \qquad (39)$$

Б. Граничні величини

Економіка має справу з численними так званими граничними величинами: граничні витрати виробництва, гранична виручка, граничний доход (прибуток), граничний продукт, гранична корисність тощо.

Зупинімося на понятті граничних витрат виробництва. Решта розглядається аналогічно.

Розглядатимемо витрати виробництва як функцію $y = f(x)$ кількості x випущеної продукції. Якщо $\varDelta x$ - приріст випущеної продукції, то приріст функції

$$\varDelta y = \varDelta f(x) = f(x + \varDelta x) - f(x)$$

є приростом витрат виробництва продукції, а

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$$

є середнім приростом витрат виробництва, які припадають на одиницю продукції. Похідна

$$y' = f'(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$$

дає граничні витрати виробництва. Вони приблизно характеризують додаткові витрати, які припадають на одиниці додаткової продукції.

Граничні величини характеризують не умови, позиції, стани, статуси, але процес, зміну деяких економічних об"єктів. Отже, похідна – це є швидкість зміни цих об"єктів (тобто швидкість процесу) відносно часу або деяких факторів, які є предметом вивчення.

В. Еластичність функції

Означення 8. Відносним приростом δz даної додатної величини $z > 0$

називається відношення її звичайного приросту $\varDelta z$ до початкового значення z цієї величини,

$$\delta z = \frac{\varDelta z}{z}.$$

Нехай функція $y = f(x)$ та її арґумент є додатними : $x > 0, f(x) > 0$.

За означенням їх відносними приростами є

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}, \delta f(x) = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \qquad (40)$$

Означення 9. Еластичністю $E_x(f)$ даної (додатної) функції $y = f(x)$ з (додатним) арґументом x називається границя відношення відносного приросту функції до відносного приросту її арґументу, якщо цей останній прямує до нуля,

$$E_x(f) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta f(x)}{\delta x} \qquad (41)$$

Еластичність виражає відсотковий приріст фунції на один відсоток приросту її арґументу.

Теорема 10 (еластичність і похідна).

$$E_x(f) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} \qquad (42)$$

$$\blacksquare\, E_x(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)/f(x)}{\Delta x/x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x) \cdot x}{\Delta x \cdot f(x)} = \frac{x}{f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}.\blacksquare$$

Наслідок (еластичність і темп зміни). Еластичність функції дорівнює добутку її арґументу і темпу її зміни,

$$E_x(f) = xT_{f(x)} \qquad (43)$$

Приклад. Нехай

$$f(x) = Ax^a,$$

де A, a - довільні дійсні числа, причому $A > 0$. Тоді

$$E_x(f) = E_x\left(Ax^a\right) = a, \qquad (44)$$

бо на підставі формули (42)

$$E_x(f)=E_x\left(Ax^a\right)=\left(Ax^a\right)'\cdot\frac{x}{Ax^a}=Aa\cdot x^{a-1}\cdot\frac{x}{Ax^a}=a$$

Приклад. Нехай

$$f(x)=e^{ax},$$

де a - довільне дійсне число. Тоді

$$E_x(f)=E_x\left(e^{ax}\right)=ax \qquad (45)$$

$$\blacksquare\, E_x(f)=E_x\left(e^{ax}\right)=\left(e^{ax}\right)'\cdot\frac{x}{e^{ax}}=ae^{ax}\cdot\frac{x}{e^{ax}}=ax.\blacksquare$$

Аналогічно доводиться (зробіть це самостійно!), що

$$E_x(f)=E_x\left(b^{ax}\right)=ax\ln b.$$

Приклад. Якщо

$$f(x)=\ln x \quad (x>1),$$

то

$$E_x(f)=E_x(\ln x)=(\ln x)'\cdot\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{\ln x}.$$

Властивості еластичності

1. $\operatorname{sign}E_x(f)=\operatorname{sign}f'(x)$ (оскільки $x>0, f(x)>0$).

2. Еластичність є безрозмірна функція, бо її розмірність $[E_x(f)]=1$.

$$\blacksquare\left[E_x(f)\right]=\left[\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta f(x)}{\delta x}\right]=\left[\frac{\delta f(x)}{\delta x}\right]=\left[\frac{\Delta f(x)/f(x)}{\Delta x/x}\right]=\frac{[\Delta f(x)]\cdot[x]}{[\Delta x]\cdot[f(x)]}=1\blacksquare$$

3. $E_x(f)=\dfrac{d(\ln f(x))}{d(\ln x)}$, або $E_x(f)=\dfrac{d(\log_a f(x))}{d(\log_a x)}$

для будь-яких a таких, що $0<a\neq 1$.

$$\blacksquare\,\frac{d(\ln f(x))}{d(\ln x)}=\frac{(\ln f(x))'\,dx}{(\ln x)'\,dx}=\frac{\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}{\dfrac{1}{x}}=f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}=E_x(f)\blacksquare$$

4. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (відповідно різниці) їх еластичностей,

$$E_x(fg)=E_x(f)+E_x(g),\quad E_x(f/g)=E_x(f)-E_x(g).$$

■ $E_x(fg)=(fg)'\cdot\dfrac{x}{fg}=f'g\cdot\dfrac{x}{fg}+fg'\cdot\dfrac{x}{fg}=f'\cdot\dfrac{x}{f}+g'\cdot\dfrac{x}{g}=E_x(f)+E_x(g),$

$E_x(f/g)=(f/g)'\cdot\dfrac{x}{f/g}=\dfrac{f'g}{g^2}\cdot\dfrac{x}{f/g}-\dfrac{fg'}{g^2}\cdot\dfrac{x}{f/g}=f'\cdot\dfrac{x}{f}-g'\cdot\dfrac{x}{g}=E_x(f)-E_x(g)$■

2.3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.3.1. Теореми Ферма і Ролля

Теорема 1 (Ферма[1]). Якщо функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і набуває найбільшого або найменшого значення в деякій (внутрішній) точці x_0 цього інтервалу, то похідна функції в цій точці, якщо вона існує, дорівнює нулю, $f'(x_0) = 0$.

■ Для визначеності припустимо, що функція $y = f(x)$ набуває в точці $x_0 \in (a, b)$ найбільшого значення, так що її приріст в цій точці є від"ємним,

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) < 0.$$

a) Нехай $\Delta x > 0$, причому Δx настільки мале, що $x = x_0 + \Delta x < b$. Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0,$$

і на підставі теорії границь (див. п. 1.1.3 А, властивість 4) маємо

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0.$$

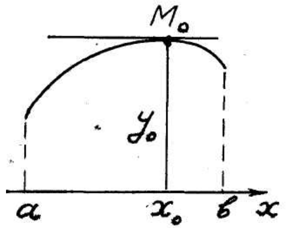


Рис. 1

b) Нехай тепер $\Delta x < 0$ і Δx є настільки малим, що $x = x_0 + \Delta x > a$. Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0,$$

і за тією ж теорією границь

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0.$$

Ми отримали $f'(x_0) \le 0$ і в той же час $f'(x_0) \ge 0$, звідки випливає, що $f'(x_0) = 0$.■

---

[1] Ферма П"єр (1601 - 1665), відомий французький математик

Зауваження. В більш повних курсах математичного аналізу теорема доводиться, як правило, в термінах лівої і правої похідних в точці x_0.

Геометричний сенс теореми Ферма полягає в наступному: дотична до графіка функції в точці $M_0(x_0, f(x_0))$, яка є його найвищою або найнижчою точкою на інтервалі (a, b), паралельна осі Ox (рис. 1).

Теорема 2 (Ролль[1]). Якщо функція $y = f(x)$:

а) неперервна на відрізку (обмеженому замкненому інтервалі) $[a, b]$;

б) має похідну на інтервалі (обмеженому відкритому інтервалі) (a, b);

в) має рівні значення на кінцях відрізка $[a, b]$,

то існує принаймні одна точка x_0 в інтервалі (a, b), в якій похідна функції дорівнює нулю, $f'(x_0) = 0$.

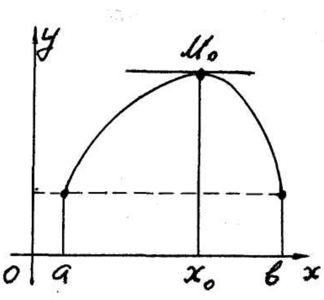


Рис. 2

■Ми можемо припустити, що $f(x) \neq const$ на (a, b) (в противному разі мали б $f'(x) \equiv 0$ в усіх точках інтервалу (a, b)). На підставі припущення а) функція $f(x)$ набуває своїх найбільшого і найменшого значень в якихось двох точках відрізка $[a, b]$. З припущення в) випливає, що принаймні одна з них лежить всередині відрізка. Якщо x_0 - одна з таких внутрішніх точок, то на підставі теореми Ферма і припущення в) похідна в цій точці дорівнює нулю, $f'(x_0) = 0$.■

Геометричний сенс теореми Ролля аналогічний сенсу теореми Ферма: якщо графіком функції $y = f(x)$ є неперервна крива з рівновіддаленими від осі Ox точками $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ $(f(a) = f(b))$, яка посідає дотичну в усіх своїх внутрішнії точках, то на графіку функції є принаймні одна точка $M_0(x_0, f(x_0))$, в якій дотична до графіка паралельна осі Ox (рис. 2).

Приклад. Довести, що похідна функції

---

[1] Ролль Мішель (1652 - 1719), французький математик

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 11x^2 - 36x - 180$$

має принаймні один корінь на інтервалі $(-3, 3)$.

Розв"язання. Функція $f(x)$ неперервна і диференційовна на множині всіх дійсних чисел, а точки $x = \pm 3$ є її нулями. За теоремою Ролля, застосованою для відрізка $[-3, 3]$, існує принаймні один корінь похідної $f'(x)$.

Перевірка. Похідна $f'(x)$ дорівнює

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 22x - 36$$

і має (єдиний) корінь $x = 1$ всередині інтервалу $(-3, 3)$.

Приклад. Доведіть самостійно, що похідна функції

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 32x^2 + 13x - 54$$

має принаймні один корінь в інтервалі $(-2, 1)$.

Зауваження**.** З теореми Ролля випливає, що між двох нулів x_1, x_2 функції, яка є неперервною на будь-якому відрізку $[a, b] \supseteq [x_1, x_2]$ і диференційовною на відповідному інтервалі $(a, b) \supseteq (x_1, x_2)$, лежить принаймні один нуль її похідної.

Приклад. Функція

$$f(x) = 9^{\sqrt{\cos x}}$$

неперервна і диференційовна на відрізку $[-\pi/2, \ \pi/2]$, причому

$$f(-\pi/2) = f(\pi/2) = 1.$$

За теоремою Ролля її похідна $f'(x)$ принаймні один раз анулюється всередині інтервалу $(-\pi/2, \pi/2)$.

Перевірка. Похідна функції дорівнює

$$f'(x) = -9^{\sqrt{\cos x}} \cdot \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \cdot \ln 9,$$

і $f'(x) = 0$, якщо $x = 0 \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Приклад. Перевірте самостійно справедливість теореми Ролля для функції

$$y = \sqrt{12 - x - x^2}$$

на відрізку $[-4, 3]$

Зауваження. Всі умови теореми Ролля є істотними для її справедливості, зокрема для існування дотичної до графіка функції $y = f(x)$, паралельної до осі Ox. З іншого боку вони є достатніми, але не необхідними для існування такої дотичної.

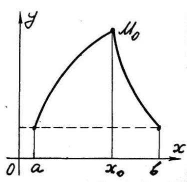


Рис. 3

Приклад. Не існує жодної дотичної, яка була б паралельною осі Ox, для функції, графік якої подано на рис. 3. Ця функція задовольняє умови а) і в) теореми Ролля, але не задовольняє умову б), а саме не є диференційовною в єдиній точці x_0 інтервалу (a, b).

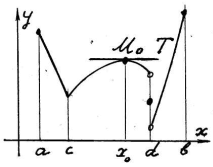


Рис. 4

Приклад. Жодна з умов теореми Ролля не виконується для функції, графічно представленої на рис. 4: вона є розривною в точці d, недиференційовною в точці c і має різні значення на кінцях відрізка, $f(a) \neq f(b)$. Тим не менш на відрізку є точка $x_0 \in (a, b)$, для якої дотична $M_0T \| Ox$.

2.3.2. Теореми Лагранжа і Коші

Теорема 3 (Лагранж[1]). Якщо функція $y = f(x)$:

а) неперервна на відрізку $[a,b]$;

б) має похідну в інтервалі (a, b),

то існує точка $c \in (a, b)$, для якої виконується наступна рівність:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad (1)$$

або ж

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad (2)$$

■Позначмо

---

[1] Лагранж Жозеф Луї (1736 - 1813), видатний французький математик, механік і астроном

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=Q,$$

звідки

$$f(b)-f(a)=Q(b-a),\ f(b)-f(a)-Q(b-a)=0. \qquad (3)$$

Замінюючи в (3) b на x, введімо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-Q(x-a). \qquad (4)$$

На підставі зазначених властивостей функції $f(x)$ функція $F(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля: вона неперервна на відрізку $[a, b]$, має похідну

$$F'(x)=f'(x)-Q$$

в інтервалі (a, b) і набуває рівних значень на кінцях відрізка a, b ($F(a)=0$ по (4), $F(b)=0$ по (3)). Отже, за теоремою Ролля існує точка $c \in (a, b)$, для якої похідна $F'(c)=0$, тобто

$$F'(c)=f'(c)-Q=0,\ f'(c)=Q,\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).\blacksquare$$

Геометричний сенс теореми полягає в наступному (рис. 5): якщо графік функції $y=f(x)$ - неперервна крива, яка має дотичну в усіх своїх внутрішніх точках, то існує принаймні одна точка графіка ($C(c, f(c))$ на рис. 5), в якій дотична до нього паралельна хорді AB, що з"єднує кінцеві точки $A(a, f(a))$ і $B(b, f(b))$ графіка.

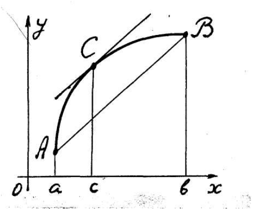


Рис. 5

Наслідок. Якщо в умовах теореми Лагранжа похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю, $f'(x)=0$, то функція є сталою на відрізку $[a, b]$.

■Для будь-якої точки $x \in [a, b]$ існує точки $c \in (a, x)$ така, що на підставі формули (2) мають

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)=0\cdot(x-a)=0.$$

Звідси випливає, що $f(x)=f(a)=const$.■

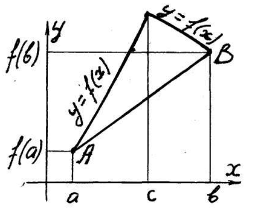


Рис. 6

Зауваження. Обидві умови теореми Лагранжа, що їх було накладено на функцію $y=f(x)$, є суттєвими для слушності теореми, зокрема для існування дотичної, паралельної хорді AB. В іншого боку, ці умови є достатніми, але не необхідними.

Приклад. Крива, зображена на рис. 6, не має дотичної, яка була б паралельною хорді AB. Ця крива є графіком функції, котра хоч і неперервна на відрізку $[a, b]$, але не має похідної в (єдиній!) точці $c \in (a, b)$.

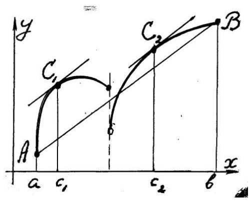


Рис. 7

Приклад. Функція, яку графічно подано на рис. 7, не задовольняє умови теореми Лагранжа, але її графік має навіть дві дотичні, паралельні хорді AB.

Приклад. За допомоги теореми Лагранжа довести, що для довільних a, b таких, що $0 \le a < b$, виконується наступна нерівність:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

■Функція $f(x) = \arctan x$ задовольняє умови теореми Лагранжа для будь-якого відрізка $[a, b]\,(0 \le a < b)$, а тому існує така точка $c \in (a, b)$, що

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \arctan b - \arctan a = \frac{b-a}{1+c^2}. \qquad (\,*\,)$$

Оскільки

$$0 \le a < c < b,$$

легко отримуємо низку вірних нерівностей

$$a^2 < c^2 < b^2, 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2, \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}, \frac{b-a}{1+b^2} < \frac{b-a}{1+c^2} < \frac{b-a}{1+a^2};$$

Нарешті з урахуванням (*) маємо

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2},$$

що і треба було довести.■

Приклад. Довести самостійно, що

a) $\dfrac{b-a}{b} \le \ln\dfrac{b}{a} \le \dfrac{b-a}{a}$ для $0 < a \le b$;

b) $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha} \le \tan\beta - \tan\alpha \le \dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$ для $0 \le \alpha \le \beta < \pi/2$;

c) $\dfrac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} \le \arcsin b - \arcsin a \le \dfrac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$ для $0 \le a \le b < 1$.

Приклад. Використовуючи теорему Лагранжа, знайти наближене значення числа $\sqrt[4]{82}$.

Розв"язок. Нехай

$$f(x) = \sqrt[4]{x},\ a = 81, b = 82.$$

Теорема Лагранжа стверджує існування такої точки $c \in (81, 82)$, що

$$f(82) - f(81) = f'(c)(82-81), \sqrt[4]{82} - \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{82} - 3 = \frac{1}{4\sqrt[4]{c^3}}.$$

Утворимо далі наступний ланцюжок оцінок:

$$3^4 < 81 < c < 82 < 3.01^4 < 82.085, 3^4 < c < 3.01^4, 3^{12} < c^3 < 3.01^{12}, 3^3 < \sqrt[4]{c^3} < 3.01^3,$$

$$\frac{1}{3.01^3} < \frac{1}{\sqrt[4]{c^3}} < \frac{1}{3^3}, \frac{1}{4 \cdot 3.01^3} < \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{c^3}} < \frac{1}{4 \cdot 3^3}, 0.00916 < \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{c^3}} < 0.00926,$$

звідки отримаємо

$$0.00916 < \sqrt[4]{82} - 3 < 0.00926, 3.00916 < \sqrt[4]{82} < 3.00926, \sqrt[4]{82} \approx 3.009.$$

В останньому запису всі десяткові цифри є вірними.

Приклад. Знайдіть самостійно наближене значення кореня $\sqrt{4.02}$.

Зауваження. Теорема Лагранжа дозволяє довести достатню умову диференційовності функції декількох (не менше двох) змінних. Доведімо, наприклад, теорему 1 з п. 2.1.4, в якій йдеться про функцію двох змінних.

■Нехай відповідно до умов теореми функція $z = f(M) = f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, які неперервні в самій точці. Запишемо спочатку повний приріст функції в точці $M_0(x_0, y_0)$, тобто вираз

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

в формі

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) + (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)).$$

Застосуємо тепер теорему Лагранжа до двох різниць в дужках, а саме:

$$\Delta z = f'_x(c_1, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, c_2)\Delta y,\ c_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x),\ c_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y).$$

Внаслідок неперервності частинних похідних в точці $M_0(x_0, y_0)$ можемо написати

$$f'_x(c_1, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha,\ f'_y(x_0, c_2) = f'_y(x_0, y_0) + \beta,$$

де

$$\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y),\ \beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \text{ - } нм \text{ при } \Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0.$$

Таким чином, маємо

$$\Delta z = (f'_x(x_0, y_0) + \alpha)\Delta x + (f'_y(x_0, y_0) + \beta)\Delta y = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

що і треба було довести.■

Теорема 4 (Коші[1]). Якщо функції $f(x), g(x)$

а) неперервні на відрізку $[a,b]$;

б) мають похідні на інтервалі (a, b);

в) значення функції $g(x)$ на кінцях відрізка не збігаються, $g(a) \neq g(b)$,

то існує точка $c \in (a, b)$, для якої виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (5)$$

Доведіть теорему самостійно, покладаючи

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = Q$$

і вводячи допоміжну функцію $F(x) = f(x) - f(a) - Q(g(x) - g(a))$.

2.3.3. Правило Лопіталя для розкриття невизначеностей

При обчисленні границь ми вже зустрічалися з невизначеностями типів:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^\infty, \infty^0, 0^0, (\pm\infty) - (\pm\infty), (\pm\infty) + (\mp\infty).$$

Диференціальне числення надає можливість більш простого розкриття принай-

---

[1] Коші Огюстен Луї (1780 - 1859), знаменитий французький математик

мні деяких з них.

А. Невизначеності типів $0/0, \infty/\infty$

Теорема 5 (правило Бернуллі[1] - Лопіталя[2]). Границя відношення двох *нм* або *нв* (для будь-якого типу граничного переходу) дорівнює границі відношення їх похідних, якщо ця остання існує. Схематично

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \text{ або } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

■Ми розглянемо найпростіший випадок, коли $x \to a+0,\ f(a) = g(a) = 0$, а функції $f(x),\ g(x)$ задовольняють умови теореми Коші.

Нехай існує границя

$$K = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тоді за допомогою теореми Коші отримуємо

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,\ \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

оскільки $c \in (a, x)$ і $c \to a$ при $x \to a+0$.■

Зауваження. Історично склалось так, що правило Бернуллі-Лопіталя звичайно називають правилом Лопіталя.

Зауваження. Правило Лопіталя можна (а часто-густо навіть дуже корисно) комбінувати з іншими методами розкриття невизначеностей. Зокрема, можна використовувати таблицю еквівалентних нескінченно малих.

Приклад.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 16x}{\sin 9x tg 24x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{matrix} \sin 9x \sim 9x \\ tg 24x \sim 24x \end{matrix} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 16x}{9x \cdot 24x} = \frac{1}{216} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 16x}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{216} \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos 16x)'}{(x^2)'} = \frac{1}{216} \lim_{x \to 0} \frac{16 \sin 16x}{2x} = \frac{1}{27} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 16x}{x} = |\sin 16x \cong 16x| = \frac{16}{27}.$$

---

[1] Бернуллі Йоганн (1667 - 1748) - відомий швейцарський математик

[2] Лопіталь Гійом Франсуа Антуан (1661 - 1704) – французький математик

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 5x}{x^{10}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln 5x)'}{\left(x^{10}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{5x}\cdot 5}{10x^{9}}=\frac{1}{10}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{10}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

Зауваження. Правило Лопіталя при необхідності можна застосовувати повторно декілька разів.

Приклад. Для будь-якого натурального *n*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n}}{5^{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^{n}\right)'}{\left(5^{x}\right)'}=\frac{n}{\ln 5}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{5^{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{n}{\ln 5}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^{n-1}\right)'}{\left(5^{x}\right)'}=\frac{n(n-1)}{(\ln 5)^{2}}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{5^{x}}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{(\ln 5)^{2}}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^{n-2}\right)'}{\left(5^{x}\right)'}=\ldots=\frac{n!}{(\ln 5)^{n}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{5^{x}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

Останні два приклади свідчать про те, що степенева функція прямує до нескінченності швидше, ніж логарифмічна, а показникова – швидше степеневої.

Б. Деякі інші типи невизначеностей

Інші невизначеності тими чи іншими перетвореннями треба зводити до перших двох типів.

Не входячи в загальні міркування, обмежимось кількома прикладами.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-x^{-2}}=-\lim_{x\to 0}x=0.$$

Приклад. Користуючись щойно отриманим результатом, маємо

$$\lim_{x\to 0+0}x^{x}=\left(0^{0}\right)=\lim_{x\to 0+0}\left(e^{\ln x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x}=\left(e^{0\cdot\infty}\right)=e^{0}=1.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{2\sin x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\sin x\cos x}-\frac{1}{2\sin x}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{x'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

2.3.4. Формули Тейлора і Маклорена

А. Формули Тейлора і Маклорена для многочлена

Нехай дано многочлен n-го степеня

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n. \qquad (6)$$

Диференціюючи його n разів, дістаємо

$$\left.\begin{aligned} P'(x)&=1\cdot a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1},\\ P''(x)&=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+4\cdot 5x^3+\ldots+(n-1)na_nx^{n-2},\\ P'''(x)&=1\cdot 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+3\cdot 4\cdot 5x^2+\ldots+(n-2)(n-1)na_nx^{n-3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ P^{(n)}(x)&=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot na_n. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Покладаючи в формулах (6), (7) $x = 0$, ми можемо виразити коефіцієнти многочлена через значення його і всіх його похідних в точці $x = 0$, саме

$$\left.\begin{aligned} P(0)&=a_0=1\cdot a_0=0!\cdot a_0\ (0!=1),\\ P'(0)&=a_1=1\cdot a_1=1!\,a_1\ (1!=1),\\ P''(0)&=1\cdot 2\cdot a_2=2!\cdot a_2(2!=1\cdot 2),\\ P'''(0)&=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3=3!\cdot a_3(3!=1\cdot 2\cdot 3),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ P^{(n)}(0)&=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot a_n=n!\cdot a_n(\mathrm{n}!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n,\ n\text{ - факторіал}), \end{aligned}\right\}$$

$$a_0=P(0)=\frac{P^{(0)}(0)}{0!},\ a_1=P'(0)=\frac{P'(0)}{1!},\ a_2=\frac{P''(0)}{2!},\ a_3=\frac{P'''(0)}{3!},\ldots,\ a_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}, \qquad (8)$$

$$P(x)=P(0)+P'(0)x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\frac{P'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k. \qquad (9)$$

Означення 9. Формула (9) називається формулою Маклорена (або Тейлора[1] - Маклорена[2]) для многочлена (6). Ми довели наступну теорему.

Теорема 10. Кожний многочлен (6) може бути представлений формулою Маклорена (Тейлора - Маклорена) (9) (з коефіцієнтами (8)).

---

[1] Тейлор Брук (1685 - 1731) – англійський математик

[2] Маклорен Колін (1698 - 1746) – шотландський математик

Якщо многочлен n-го степеня поданий у вигляді розвинення за степенями різниці $x - x_0$, саме

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n, \qquad (10)$$

то тим же шляхом доводиться, що

$$a_0 = P(x_0) = \frac{P^{(0)}(x_0)}{0!},\ a_1 = P'(x_0) = \frac{P'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{P''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad (11)$$

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad (12)$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Означення 10. Формула (12) називається формулою Тейлора для многочлена (10).

Теорема 11. Кожний многочлен вигляду (10) може бути поданий формулою Тейлора (12) (з коефіцієнтами (11)).

Зауваження. Формула Маклорена (9) є частинним випадком формули Тейлора (12) для $x_0 = 0$.

Б. Розвинення бінома (формула бінома Ньютона)

Означення 11. Біномом Ньютона називається наступний вираз

$$P(x) = (a + x)^n . \qquad (13)$$

Розвинемо біном Ньютона (13) за допомоги формул (6), (9).

$$P'(x) = n(a + x)^{n-1}, P''(x) = n(n-1)(a + x)^{n-2}, P'''(x) = n(n-1)(n-2)(a + x)^{n-3}, \ldots,$$

$$P^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))(a + x)^{n-k}, \ldots, P^{(n)}(x) = n!$$

$$P(0) = a^n, P'(0) = na^{n-1}, P''(0) = n(n-1)a^{n-2}, P'''(0) = n(n-1)(n-2)a^{n-3}, \ldots,$$

$$P^{(k)}(0) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))a^{n-k}, \ldots, P^{(n)}(0) = n!$$

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}x^k + \ldots + \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} + nax^{n-1} + x^n . \qquad (14)$$

Коефіцієнти розвинення (14) (**біномні коефіцієнти**) позначаються наступним чином:

$$C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!}, \ldots, C_n^{n-2} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!}, C_n^{n-1} = C_n^1 = n, C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Загалом

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1, n \qquad (15)$$

Зауваження. Коефіцієнти (15) посідають властивість (доведіть її самостійно)

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (16)$$

Зауваження. Біномні коефіцієнти можна легко запам"ятати за допомогою так званого трикутника Паскаля[1]

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

……………………………………………………………………

Приклад.

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$
$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4,$$
$$(a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5.$$

В. Формули Тейлора і Маклорена для довільної функції однієї змінної

Нехай задано довільну функцію $y = f(x)$.

Означення 12. Многочленом Тейлора n-го степеня, відповідним функції $y = f(x)$, називається такий многочлен

---

[1] Паскаль Блез (1623 - 1662) – відомий французький математик, фізик та філософ

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (17)$$

Означення 13. Різниця n раз диференційовної функції $y=f(x)$ та її многочлена Тейлора $T_n(x)$ називається **залишковим членом** і позначається $R_n(x)$,

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x) \quad (18)$$

З формул (17), (18) випливає, що

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\ldots=R_n^{(n)}(x_0)=0 \text{ і } R_n^{(k)}(x)=f^{(k)}(x) \text{ для } k>n \quad (19)$$

Теорема 12. Для (n + 1) раз диференційовної функції $y=f(x)$ залишковий член може бути представлений в формі (**формі Лагранжа**)

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (20)$$

де c – деяка точка між x і x_0.

■Нехай, для визначеності, $x_0<x$, а

$$\varphi(x)=(x-x_0)^{n+1} \quad (21)$$

допоміжна функція. Очевидно, що

$$\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\varphi''(x_0)=\ldots=\varphi^{(n)}(x_0)=0,\ \varphi^{(n+1)}(x)=(n+1)!. \quad (22)$$

Застосовуючи n раз теорему Коші (з послідовною появою точок $c_1, c_2, \ldots,\ c_n, c$ таких, що $x_0<c<c_n<\ldots<c_2<c_1<x$), дістаємо

$$\frac{R_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{R_n'(c_1)}{\varphi'(c_1)}=\frac{R_n'(c_1)-R_n'(x_0)}{\varphi'(c_1)-\varphi'(x_0)}=\frac{R_n''(c_2)}{\varphi''(c_2)}=\ldots=\frac{R_n^{(n)}(c_n)}{\varphi^{(n)}(c_n)}=$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(c_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(c_n)-\varphi^{(n)}(x_0)}=\frac{R_n^{(n+1)}(c)}{\varphi^{(n+1)}(c)}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Rightarrow R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\varphi(x),$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ ■$$

Зауваження. Залежно від способу міркувань існує багато форм залишкового члена (в формі Лагранжа (20), Коші, Пеано[1] і т.ін).

Знаючи залишковий член $R_n(x)$, ми можемо подати функцію $y=f(x)$ у

---

[1] Пеано Джузеппе (1858 - 1932) – італійський математик

вигляді

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x) \qquad (23)$$

Означення 13. Формула (23), яка виражає функцію $y=f(x)$ за допомогою її многочлена Тейлора $T_n(x)$ і залишкового члена $R_n(x)$, називаєть-ся формулою Тейлора для цієї функції.

В частинному випадку $x_0=0$ формула називається формулою Маклорена.

Напишемо формули Тейлора і Маклорена з залишковим членом в формі Лагранжа в розгорнутому вигляді. Маємо:

$$\begin{gathered}f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\\+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c\in(x_0,x),\end{gathered} \qquad (24)$$

$$\begin{gathered}f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\\=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\ c\in(0,x)\end{gathered} \qquad (25)$$

Приклад. Розкласти функцію $f(x)=e^x$ по формулі Маклорена.

Знаходимо похідні заданої функції та їх конкретні значення

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=...=f^{(n)}(x)=f^{(n+1)}(x)=e^x,$$

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=...=f^{(n)}(0)=1, f^{(n+1)}(c)=e^c,$$

після чого за формулою (25) отримуємо

$$e^x=T_n(x)+R_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c,\ c\in(0,x). \qquad (26)$$

Поклавши

$$e^x\approx T_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^n}{n!}, \qquad (27)$$

знаходимо наближене значення функції $f(x)=e^x$ з абсолютною похибкою

$$\alpha = \left|e^x - T_n(x)\right| = \left|R_n(x)\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^c. \qquad (28)$$

Приклад. Знайти наближене значення числа e, покладаючи $x = 1$ і $n = 8$ в формулах (27), (28). Маємо

$$\alpha = \left|e - T_8(1)\right| = \left|R_8(1)\right| = \frac{1}{9!}e^c,\ 0 < c < 1,\ e^c < 3,\ \alpha < \frac{3}{9!} < 0.000008 = 8\cdot 10^{-6},$$

$$T_8(1) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \approx 2.718278,$$

$$T_8(1) - 8\cdot 10^{-6} < e < T_8(1) + 8\cdot 10^{-6},\ 2.718278 - 0.000008 < e < 2.718278 + 0.000008,$$

$$2.718270 < e < 2.718286,$$

або ж

$$e \approx 2.7182,$$

де всі десяткові цифри – точні.

Приклад. Розвинути по формулі Маклорена функції

$$f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x.$$

Дамо розв"язок для першої з функцій, $f(x) = \sin x$.

Похідні функції дорівнюють

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \cos x,$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin x,\ f^{(7)}(x) = -\cos x,\ f^{(8)}(x) = \sin x, ...,$$

загалом (див. п. 2.2.3)

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Значення функції та її похідних в точці $x = 0$ дорівнюють

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(0) = 1,$$

$$f^{(6)}(0) = 0,\ f^{(7)}(0) = -1,\ f^{(8)}(0) = 0, ...,$$

$$f^{(2n-1)}(0) = \sin\left((2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi n\right) = -\cos\pi n = (-1)^{n-1},$$

$$f^{(2n)}(0) = \sin\left(2n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin n\pi = 0,$$

а значення $(2n+1)$-ої похідної в точці c є

$$f^{(2n+1)}(c)=\sin\left(c+(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Тепер на підставі формули (25) дістаємо

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(c+\frac{\pi}{2}(2n+1)\right). \quad (27)$$

Таким же чином розвивається за формулою Маклорена друга функція. Зробіть всі викладки самостійно, ми ж наведемо загальний результат

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(c+\frac{\pi}{2}(2n+2)\right).(28)$$

Приклад. З формули (27) випливає, що

$$\sin x \approx T_1(x)=x$$

з абсолютною похибкою

$$\alpha=|\sin x-T_1(x)|=|R_1(x)|=\left|(-1)^2\frac{x^3}{3!}\sin\left(c+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right|\le\frac{|x|^3}{3!}\le 0.001\,\text{if}\ |x|\le\sqrt[3]{0.006}<0.18$$

Отже, з точністю до 0.001

$$\sin x \approx x,$$

якщо

$$|x|<0.18,\ \text{або}\ |x^\circ|<10^\circ.$$

Зауваження. Покладаючи

$$dx=\Delta x=x-x_0,$$

Ми можемо написати формулу Тейлора (24) за допомогою диференціалів

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c) \quad (29)$$

Г. Формула Тейлора для функції декількох змінних

Формула Тейлора (29) для функції однієї змінної припускає просте перенесення на випадок функції декількох змінних.

Нехай

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Re^n,\ x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in \Re^n,$$

а функція n незалежних змінних

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$k+1$ разів диференційовна. Тоді її повний приріст в точці $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ може бути поданий в вигляді формули Тейлора з залишковим членом в формі Лагранжа

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) =$$

$$= df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0) + ... + \frac{1}{k!} d^k f(x_0) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(c),\ c = (c_1, c_2, ..., c_n). \quad (30)$$

Для випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ формулу Тейлора записуємо в такому вигляді

$$\begin{aligned}\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0) + ... +\\ + \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(c_1, c_2),\end{aligned} \quad (31)$$

де

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = \overline{gradf(x_0, y_0)} \cdot (dx, dy),$$

$$d^2 f(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2, \quad (32)$$

$$d^k f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^k f(x_0, y_0),\ k = 1, 2, 3, ... \quad (33)$$

З формули (32) бачимо, що диференціал другого порядку функції двох змінних $z = f(x, y)$ є квадратичною формою з симетричною матрицею (так званою матрицею Гессе[1]) другого порядку,

$$H(f, (x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix},\ f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \quad (34)$$

---

[1] Гессе Людвиг Отто (1811 - 1874) – німецький математик

У випадку n незалежних змінних диференціал другого порядку функції $y = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є квадратичною формою

$$d^2 f(x_0) = d^2 f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) = \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(x_0) dx_i dx_j \qquad (35)$$

з симетричною матрицею (матрицею Гессе) n-порядку

$$H(f, x_0) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(x_0) & f''_{x_1x_2}(x_0) & f''_{x_1x_3}(x_0) & ... & f''_{x_1x_n}(x_0) \\ f''_{x_2x_1}(x_0) & f''_{x_2x_2}(x_0) & f''_{x_2x_3}(x_0) & ... & f''_{x_2x_n}(x_0) \\ f''_{x_3x_1}(x_0) & f''_{x_3x_2}(x_0) & f''_{x_3x_3}(x_0) & ... & f''_{x_3x_n}(x_0) \\ .... & .... & .... & ... & .... \\ f''_{x_nx_1}(x_0) & f''_{x_nx_2}(x_0) & f''_{x_nx_3}(x_0) & ... & f''_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}, \qquad (36)$$

$$f''_{x_i x_j}(x_0) = f''_{x_j x_i}(x_0), \; i = 1, 2, ..., n, \; j = 1, 2, ..., n.$$

3. ЗАСТОВУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

3.1. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1.1. Умови зростання і спадання функції

Теорема 1 (необхідна умова зростання функції). Якщо диференційовна функція однієї змінної $y = f(x)$ зростає на деякому інтервалі, то її похідна на цьому інтервалі є невід"ємною.

■Нехай функція $y = f(x)$ зростає на інтервалі $(a,\ b)$, x – довільна точка інтервала, а приріст Δx арґументу x настільки малий, що точка $x+\Delta x$ лежить на $(a,\ b)$ (рис. 1). Якщо приріст арґументу додатний, $\Delta x > 0$, тобто $x < x+\Delta x < b$, то приріст функції в точці x додатний,

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) > 0,$$

а тому $\Delta f(x)/\Delta x > 0$. Якщо ж $\Delta x < 0$, $a < x+\Delta x < x$, то приріст функції в точці x від"ємний,

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) < 0,$$

тому $\Delta f(x)/\Delta x > 0$. Таким чином, в обох випадках ($\Delta x > 0$ і $\Delta x < 0$) відношення приросту функції до відповідного приросту арґументу $\Delta f(x)/\Delta x$ додатне. На основі теорії границь (див. п. 1.1.3. А, властивість 4) похідна функції в точці x є невід"ємною, тобто

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0.■$$

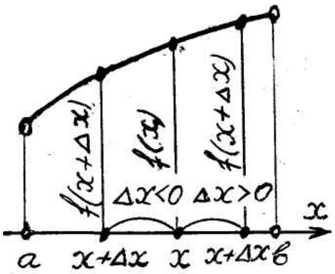


Fig. 1

Зауваження. Аналогічно, нерівність $f'(x) \leq 0$ на інтервалі $(a,\ b)$ є необхідною умовою спадання функції $y = f(x)$ на $(a,\ b)$.

Теорема 2 (достатня умова зростання функції). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на деякому відрізку $[a, b]$, а на інтервалі $(a,\ b)$ має додатну похідну, $f'(x) > 0$, то функція зростає на $[a, b]$.

■Нехай $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a,\ b)$, а x_1, x_2 - дві довільні точки відрізка

$[a,b]$ такі, що $x_1 < x_2$ (рис. 2). За теоремою Лагранжа існує точка $c \in (x_1, x_2)$,

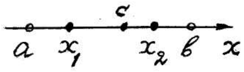


Рис. 2

для якої

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Оскільки $x_2 - x_1 > 0$ і, згідно з умовою теореми, $f'(c) > 0$, маємо

$$f(x_2) - f(x_1) > 0,\ f(x_1) < f(x_2),$$

тобто функція зростає на відрізку $[a,b]$.■

Зауваження. Аналогічно, нерівність $f'(x) < 0$ на інтервалі (a, b) є достатньою умовою спадання функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна на цьому відрізку.

Приклад. Довести, що функція, яка неявно задана рівнянням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

спадає на відрізку $[0, a]$.

■За правилом диференціювання неявної функції маємо

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0,\ \frac{yy'}{b^2} = -\frac{x}{a^2},\ y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y} < 0 \text{ для } x > 0,\ y > 0. ■$$

Приклад. Функції, які неявно задано відповідно рівняннями гіперболи і параболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ y^2 = 2px\ (p > 0),$$

зростають в першому квадранті.

Достатньо ще раз застосувати правило диференціювання неявної функції, згідно з яким відповідно

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0, \quad 2yy' = 2p.$$

Завершіть доведення самостійно.

3.1.2. Локальні екстремуми

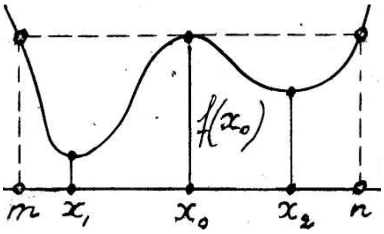


Рис. 3

Означення 1. Точка x_0 називається **точкою локального максимуму** функції $y = f(x)$, якщо існує деякий окіл U_{x_0} цієї точки ($U_{x_0} = (m, n)$ на рис. 3) такий, що для будь-якої точки x з проколеного околу $U'_{x_0} = U_{x_0} \setminus \{x_0\}$ виконується нерівність

$$f(x) < f(x_0), \quad \text{або} \quad \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0.$$

Значення функції в точці x_0, тобто $f(x_0)$, називається **локальним максимумом** функкії.

Аналогічно означається точка локального мінімуму і локальний мінімум функції (точки x_1, x_2 на рис. 3 і відповідні значення $f(x_1), f(x_2)$ функції).

Терміни локальний максимум і локальний мінімум об"єднуються спільним терміном **локальний екстремум**.

Означення 2. Точка x_0 з області визначення функції $y = f(x)$ називається **критичною точкою** функції, якщо її похідна в цій точці дорівнює нулю або не існує.

Зокрема,

Означення 3. Точка x_0 називається **стаціонарною точкою** функції, якщо її похідна в цій точці дорівнює нулю, $f'(x_0) = 0$.

Теорема 3 (необхідна умова існування локального екстремуму). Якщо функція $y = f(x)$ має локальний екстремум в точці x_0, то ця точка є критичною точкою функції.

Справедливість теореми випливає з теореми Ферма.

Зауваження. З теореми 3 випливає, що функція може мати локальний екстремум тільки в своїй критичній точці. З іншого боку, критична точка не обов"язково є точкою локального екстремуму, тобто необхідна умова існування екстремуму зовсім не є достатньою.

Приклад. Точка $x = 0$ є критичною (а саме стаціонарною) для функції $f(x) = x^3$ ($f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$), але вона не є точкою локального екстремуму, оскільки $f(x) < f(0) = 0$ при $x < 0$ і $f(x) > f(0) = 0$ при $x > 0$.

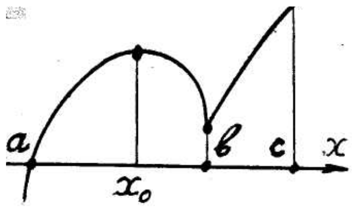


Рис. 4

Теорема 4 (перша достатня умова існування локального максимуму). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в своїй критичній точці x_0, $f'(x) > 0$ в інтервалі (a, x_0), $f'(x) < 0$ в інтервалі (x_0, b) (рис. 4), то функція має локальний максимум в цій точці.

■Доведення випливає з теореми 2 і подальшого зауваження до неї: функція зростає в інтервалі (a, x_0), спадає в інтервалі (x_0, b) і, крім того, є неперервною в точці x_0. Отже, вона має в цій точці локальний максимум.■

Аналогічно дається достатня умова існування локального мінімуму в критичній точці, якщо нерівності в умові теореми 4 замінити на такі: $f'(x) < 0$ в інтервалі (a, x_0), $f'(x) > 0$ в інтервалі (x_0, b). Функція, графік якої зображено на рис. 4, має локальний мінімум в критичній точці b (зауважмо, що похідна функції в цій точці не існує, бо точка $(b; f(b))$ є кутовою точкою графіка функції).

Теорема 5 (друга достатня умова існування локального екстремуму функції в її стаціонарній точці). Нехай x_0 - стаціонарна точка функції $y = f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$ (див. означення 3), і, крім того, друга похідна функції в цій точці відмінна від нуля, $f''(x_0) \neq 0$. За цих умов точка x_0 є точкою локального максимуму при $f''(x_0) < 0$ і точкою локального мінімуму при $f''(x_0) > 0$.

■Нехай, наприклад,

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} < 0.$$

З теорії границь випливає (див. п. 1.1.3. А, властивість 4), що для достатньо малого приросту арґументу Δx маємо

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0.$$

З останьої нерівності випливає, що $f'(x_0+\Delta x)>0$ при $\Delta x<0$ і $f'(x_0+\Delta x)<0$ при $\Delta x>0$. Отже, функція зростає зліва від точки x_0 і спадає праворуч від неї, і, таким чином, має локальний максимум в цій точці.■

Зауваження. З теорії границь (п. 1.1.3. А, властивість 3) випливає, що якщо функція $\varphi(x)$ є неперервною в точці a і має в ній додатне значення,

$$\lim_{\Delta x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)>0,$$

то вона є додатною в деякому околі точки a.

Виходячи з останнього зауваження, ми можемо дати інше доведення теореми 5, якщо додатково припустимо, що функція $y=f(x)$ в деякому околі U_{1,x_0} точки x_0 має похідну другого порядку, неперервну в самій точці. У цьому випадку ми в змозі застосувати для доведення теореми формулу Тейлора.

■ Нехай, наприклад, $f''(x_0)<0$. На підставі припущення і зробленого зауваження маємо $f''(x)<0$ в деякому околі U_{2,x_0} точки x_0. Візьмемо спільну частину $U_{x_0}=U_{1,x_0}\bigcup U_{2,x_0}$ околів U_{1,x_0} і U_{2,x_0} і подамо приріст функції в точці x_0 формулою Тейлора (див. (24) в п. 2.3.4. В) для $n=1$,

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{1\cdot 2}f''(c)\Delta x^2=\frac{1}{2}f''(c)\Delta x^2.$$

Тут $f'(x_0)=0$, а c – деяка точка з околу U_{x_0}, причому $f''(c)<0$. Отже, в U_{x_0} приріст $\Delta f(x_0)$ функції є від"ємним, тобто $f(x)-f(x_0)$>0 і тому $f(x)>f(x_0)$ для будь-якої точки $x\in U_{x_0}$, відмінної від x_0. Це значить, що функція має локальний максимум в точці x_0.■

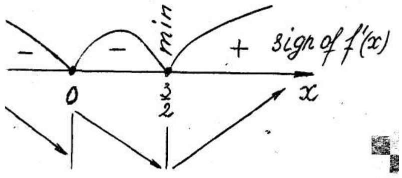


Рис. 5

Приклад. Знайти інтервали зростання, спадання і локальні екстремуми функції

$$y=f(x)=\sqrt[3]{x}(x-6).$$

Розв"язання. Функція визначена на множині всіх дійсних чисел. Її похідна дорівнює

$$f'(x)=(\sqrt[3]{x})'\cdot(x-6)+\sqrt[3]{x}\cdot(x-6)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-6)+\sqrt[3]{x}=\frac{4x-6}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

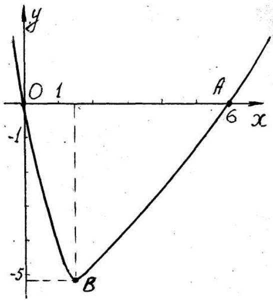


Рис. 6

вона дорівнює нулю в точці $x=3/2$ і не існує в точці $x=0$. Ці точки, тобто $x=0, x=3/2$, є критичними точками функції. Методом інтервалів знаходимо інтервали, в яких похідна функції має сталий знак (коротше – інтервали знакосталості похідної). Розподіл знаків (див. рис. 5) свідчить про те, що функція зростає на інтервалі $(3/2,\infty)$ і спадає на інтервалі $(-\infty,3/2)$. Отже, вона має локальний мінімум в точці $x=3/2$, рівний

$$y_{\min}=f(3/2)=-9/2\sqrt{3/2}\approx-5.15.$$

Зауваження. Задана функція дорівнює нулю в точках $x=0, x=6$, додатна на об"єднанні $(-\infty,0)\cup(6,\infty)$, від"ємна на $(0,6)$, її границя на $\pm\infty$ дорівнює $+\infty$. Приблизний графік функції показано на рис. 6. Графік проходить через точки

$$O(0;0),\ A(6;0),\ B\left(3/2;\frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right),$$

для $x\in(-\infty,0)\cup(6,\infty)$ лежить вище, а для $x\in(0,6)$ - нижче осі Ox. При прямуванні x до $\pm\infty$ він необмежено здіймається вгору.

3.1.3. Абсолютні екстремуми

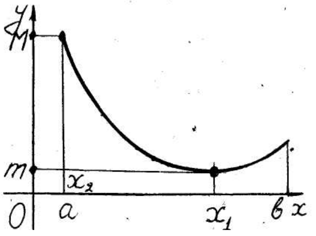


Рис. 7

Нехай функція $y=f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$. На підставі теореми 4 з п. 1.2.2 вона набуває на $[a,b]$ своїх найменшого m і найбільшого M значень, тобто існують такі точки $x_1\in[a,b], x_2\in[a,b]$, що

$$f(x_1)=m=\min_{[a,b]}f(x),\ f(x_2)=M=\max_{[a,b]}f(x).$$

Числа m, M називаються **абсолютними** (іноді кажуть глобальними, тотальними) **екстремумами** функції $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Задача полягає в їх знаходженні.

Розв"язуючи задачу на відшукання m, M , ми повинні взяти до уваги, що з двох згаданих точок x_1, x_2 або принаймні одна знаходиться всередині відрізка, або обидві вони є його кінцями. В першому випадку така внутрішня точка повинна бути, за теоремою Ферма, критичною точкою функції.

На рис. 7 показано графік функції, яка набуває найменшого значення m у внутрішній точці x_1 відрізка $[a, b]$ і найбільшого значення M на його кінці a (тобто $x_2 = a$).

На підставі сказаного ми можемо подати наступне

Правило. Щоб знайти найбільше й найменше значення (абсолютні екстремуми) функції, неперервної на відрізку, достатньо:

а) знайти всі її внутрішні критичні точки (тобто ті, які лежать всередині відрізка);

б) знайти значення функції в усіх знайдених точках, а також на кінцях відрізка;

в) з отриманих значень вибрати найбільше та найменше.

Приклад. Знайти найбільше й найменше значення функції $f(x) = \sqrt[3]{x}(x-6)$ на відрізку $[-1, 4]$.

Розв"язання. Функція має дві внутрішні критичні точки $x = 0, x = 3/2$ (див. попередній приклад). Значення функції в цих точках і на кінцях $x = -1, x = 4$ відрізка дорівнюють

$$f(0) = 0, f(3/2) = -9\sqrt[3]{3/2}\,/\,2 \approx -5.15, f(-1) = 7, f(4) = -2\sqrt[3]{4} \approx 3.17.$$

Таким чином,

$$m = \min_{[-1,\,4]} f(x) = f(3/2) = -9/2 \cdot \sqrt[3]{3/2} \approx -5.15, M = \max_{[-1,\,4]} f(x) = f(-1) = 7.$$

3.1.4. Опуклість, угнутість, точки перегину кривих

Означення 4. Крива L називається **опуклою,** якщо вона лежить нижче дотичної до неї в будь-якій точці $M(x; y)$ кривої (рис. 8 а).

Означення 5. Крива L називається **угнутою,** якщо вона лежить вище дотичної до неї в будь-якій точці $M(x;y)$ кривої (рис. 8 b).

Означення 6. Точка $M_0(x_0;y_0)$ називається **точкою перегину** кривої L, якщо вона відокремлює частини опуклості і угнутості кривої (рис. 8 c).

Теорема 6 (достатня умова опуклості графіка функції). Якщо друга похідна функції $y=f(x)$ від"ємна, $f''(x)<0$, на інтервалі (a,b), то графік функції є опуклим над цим інтервалом.

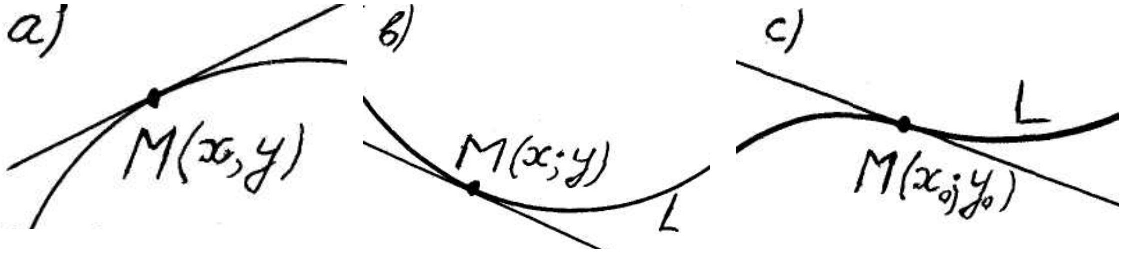


Рис. 8

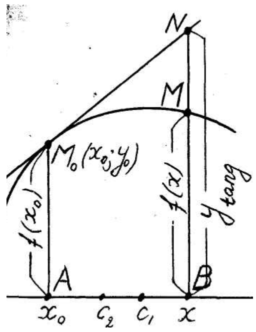


Рис. 9

■ Нехай $M_0(x_0;y_0)$, $y_0=f(x_0)$, $x_0\in(a,b)$, - деяка точка графіка функції $y=f(x)$, а M_0N - дотична до графіка в точці $M_0(x_0;\,y_0)$, яка має рівняння

$$y=y_{\text{tang}}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Щоб довести опуклість графіка у випадку $f''(x)<0$, ми повинні довести, що для будь-якого $x\in(a,b)$

$$BM-BN=f(x)-y_{\text{tang}}<0 \text{ (рис. 9)}.$$

Ми зробимо це в припущенні, що $x_0<x$. Двічі застосовуючи теорему Лагранжа, ми отримаємо

$$f(x)-y_{\text{tang}}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=f'(c_1)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=$$

$$=(f'(c_1)-f'(x_0))(x-x_0)=f''(c_2)(c_1-x_0)(x-x_0),\text{ де } x_0<c_2<c_1.$$

Оскільки $f''(c_2)<0,\ (c_1-x_0)(x-x_0)>0$, ми маємо $f(x)-y_{\text{tang}}<0$.■

Зауваження. Достатньою умовою угнутості графіка функції $y=f(x)$ є додатність її другої похідної, $f''(x)>0$.

Зауваження. Опуклість графіка функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0 за умови $f''(x) < 0$ можна довести за допомоги формули Тейлора для $n = 1$. Дійсно,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(c)(x - x_0)^2, c \in (x_0, x)$$

$$f(x) = y_{\text{tang}} + \frac{1}{2!} f''(c)(x - x_0)^2, f(x) - y_{\text{tang}} = \frac{1}{2!} f''(c)(x - x_0)^2 < 0.$$

Теорема 7 (необхідна умова існування точки перегину). Якщо деяка точка $M_0(x_0; y_0)$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$, перша похідна $f'(x)$ якої неперервна в деякому околі точки x_0, то $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує.

Теорема 8 (достатня умова існування точки перегину). Нехай: а) функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0; б) $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує; в) $f''(x) < 0$ (або $f''(x) > 0$) для $x < x_0$; d) $f''(x) > 0$ (відповідно $f''(x) < 0$) для $x > x_0$. За цих умов точка $M_0(x_0; y_0)$ є точкою перегину графіка функції.

Справедливість теореми є простим наслідком теореми 6.

Приклад. Дослідити функцію

$$y = \frac{1}{4} x^4 - 2x^2$$

і побудувати її графік.

Розв"язок. 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, $D(y) = \Re$.

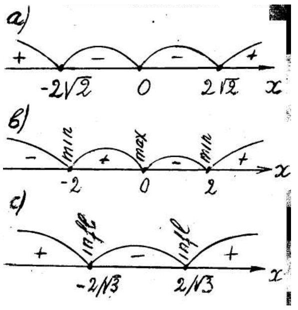


Рис. 10

2) Функція дорівнює нулю в точках $x = \pm 2\sqrt{2}$, є додатною на $\left(-\infty, -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}, \infty\right)$ і від"ємною на $\left(-2\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, 2\sqrt{2}\right)$ (див. рис. 10 а).

3) Графік функції проходить через точки $A\left(2\sqrt{2}; 0\right)$, $B\left(-2\sqrt{2}; 0\right)$, $O(0; 0)$.

4) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{4} x^4 - 2x^2\right) = \left|\frac{1}{4} x^4 - 2x^2 \sim \frac{1}{4} x^4\right| = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4} x^4 = +\infty$.

5) $y' = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$; $y' = 0$ при $x = 0, x = -2, x = 2$. Похідна додатна на $(-2,\, 0)\cup(2,+\infty)$, від"ємна на $(-\infty,\, -2)\cup(0,\, 2)$ (див. рис. 10b). Отже, функція зростає на $(-2,\, 0)\cup(2,+\infty)$, спадає на $(-\infty,\, -2)\cup(0,\, 2)$, має локальний мінімум -4 в точках $x = \pm 2$ і локальний максимум 0 в точці $x = 0$. Її графік проходить через точки $C(2;-4)$, $D(-2;-4)$, $O(0;\, 0)$.

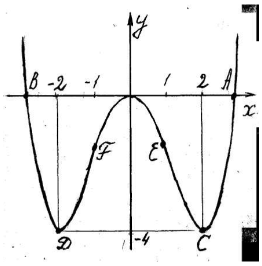


Рис. 11

6) $y'' = 3x^2 - 4$, $y'' = 0$ при $x = \pm 2/\sqrt{3}$. Друга похідна додатна на $(-\infty,-2/\sqrt{3})\cup(2/\sqrt{3},+\infty)$ і від"ємна на $(-2/\sqrt{3},2/\sqrt{3})$. Графік функції угнутий над об"єднанням інтервалів $(-\infty,-2/\sqrt{3})\cup(2/\sqrt{3},+\infty)$, опуклий над інтервалов $(-2/\sqrt{3},2/\sqrt{3})$ (рис. 10 c), має дві точки перегину $E(2/\sqrt{3};-20/9)$ і $F(-2/\sqrt{3};-20/9)$.

Графік функції зображено на рис. 11.

Приклад. Дослідити на опуклість, угнутість та існування точок перегину графік функції

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x}(x-6),$$

яку ми вже були розглядали вище.

Розв"язання. Друга похідна функції дорівнює

$$y'' = \frac{4(x+3)}{9x\sqrt[3]{x^2}},$$

Вона дорівнює нулю при $x = -3$ і не існує при $x = 0$; $y'' > 0$ на $(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$, $y'' < 0$ на інтервалі $(-3,0)$. Отже, графік функції опуклий над $(-3,0)$, угнутий над $(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$ і має дві точки перегину $O(0;\,0), C(-3;\,9\sqrt[3]{3})$.

Приклад. Довести опуклість еліпса, гіперболи і параболи

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ y^2 = 2px \quad (p > 0)$$

в верхній півплощині (для $y > 0$).

Розв"язок. У випадку еліпса ми знаємо (п. 3.1.1), що

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Друга похідна функції є від"ємною у верхній півплощині, а отже еліпс є там опуклим, оскільки

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y - x\cdot\left(-\frac{b^2 x}{a^2 y}\right)}{y^2} = -\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}{y^3} = -\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{1}{y^3} < 0 \text{ для } y > 0.$$

Випадки гіперболи і параболи розгляньте самостійно.

3.1.5. Асимптоти

Означення 7. Нехай поточна точка $M(x;y)$ кривої L віддаляється у нескінченність і одночасно наближається до деякої прямої l. Ця пряма l називається асимптотою кривої L (рис. 12).

Ми матимемо справу з асимптотами графіків функцій. Розрізнюють вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти графіків.

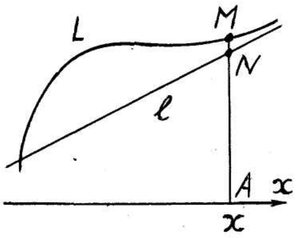


Рис. 12

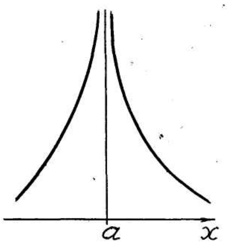


Рис. 13

1) Якщо функція $y = f(x)$ є нескінченно великою при прямуванні x до точки a ($x \to a$ або $x \to a-0$, або $x \to a+0$) то пряма

$$x = a \qquad (1)$$

є **вертикальною асимптотою** її графіка (рис. 13).

Приклад. Графіки функцій $y = \ln x$, $y = \tan x$ мають відповідно вертикальні асимптоти $x = 0, x = \pi/2 + \pi n\ (n \in \mathbb{Z})$, бо

$$\ln x \to -\infty, \text{ якщо } x \to 0+0,\ |\tan x| \to +\infty, \text{ якщо } x \to \pi/2 + \pi n.$$

2) Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = b\right),$$

то пряма

$$y = b \qquad (2)$$

є **горизонтальною асимптотою** для правої (відповідно для лівої) частини графіка функції.

Приклад. Горизонтальну асимптоту $y = 0$ (вісь Ox) мають ліві частини графіків показникових функцій

$$y = e^x, \ y = a^x \text{ для } a > 1,$$

оскільки

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \ \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

Якщо ж $0 < a < 1$, то горизонтальну асимптоту $y = 0$ має права частина графіка функції

$$y = a^x,$$

бо в цьому випадку границя функції дорівнює нулю при $x \to +\infty$.

3) Шукатимемо рівняння **похилої асимптоти** графіка функції $y = f(x)$ в формі

$$y = kx + b \qquad (3)$$

з невідомими k, b.

Для правої частини графіка ми повинні мати (див. рис. 12)

$$NM \to 0, \ \text{ або } f(x) - kx - b \to 0, \text{ якщо } x \to +\infty.$$

Поділивши на x, ми додатково отримуємо

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \to 0, \text{ якщо } \ x \to +\infty,$$

а отже

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right). \qquad (4)$$

Похилу асимптоту для лівої частини графіка функції шукають в тій же формі (3), але значення параметрів k, b даються формулами

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right) \qquad (5)$$

Якщо принаймні одна з границь (4), (5) нескінченна або взагалі не існує, то відповідна частина графіка функції не має похилої асимптоти.

Зауважимо, що горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої, якщо в процесі відшукання останньої ми отримуємо $k=0$. На практиці ж краще спочатку шукати горизонтальні асимптоти і тільки у випадку нескінченної границі функції на $+\infty$ (або на $-\infty$) переходити до знаходження похилої асимптоти для правої (відповідно лівої) частини її графіка.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції

$$y = \frac{x^3}{x^2-9}.$$

Розв"язок. Прямі

$$x=-3, x=3$$

є вертикальними асимптотами, бо $y\to\infty$ при $x\to\pm3$. Для похилих асимптот

$$y = kx+b$$

дістаємо

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-9} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1;\ k=1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x}{x^2-9} = 9\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2} = 0;\ b=0.$$

Отже, обидві частини графіка функції мають одну й ту ж похилу асимптоту

$$y = x.$$

Приклад. Графік функції

$$f(x) = 3\arctan x - x$$

не має вертикальних асимптот, бо функція неперервна на множині всіх дійсних чисел, але його ліва і права частини мають різні асимптоти. Дійсно,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(3\frac{\arctan x}{x}-1\right) = 0-1=-1;$$

$$b = b_{\text{left}} = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(3\arctan x - x - (-1)x\right) = \lim_{x\to-\infty} 3\arctan x = -\frac{3\pi}{2};$$

$$b = b_{\text{right}} = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(3\arctan x - x - (-1)x\right) = \lim_{x\to+\infty} 3\arctan x = \frac{3\pi}{2}.$$

Отже, прямі

$$y = -x - \frac{3\pi}{2},\ y = -x + \frac{3\pi}{2}$$

є асимптотами для лівої і правої частин графіка функції відповідно.

3.1.6. Загальна схема дослідження функцій та побудови їх графіків

Дослідження функції та побудова її графіка здійснюються за загальною схемою, сутність якої викладається нижче.

I. Перша частина. Попередній ескіз графіка функції.

1. Визначення області визначення і неперервності функції, фіксація точок нескінченного розриву і відповідних вертикальних асимптот.

2. Визначення інтервалів знакосталості функції, тобто інтервалів, на яких вона додатна або від"ємна.

3. Обчислення лівих і правих границь функції в точках її нескінченного розриву.

4. Знаходження точок перетину графіка з координатними осями.

5. Знаходження границь функції при $x \to \pm\infty$, фіксація можливих горизонтальних асимптот та точок їх перетину з графіком.

6. Знаходження похилих асимптот графіка у випадках нескінченної границі функції на $-\infty$ або $+\infty$ та точок їх перетину з графіком.

Корисно (як правило, з самого початку) з"ясувати такі два питання.

7. Чи є функція парною або непарною. Парність або непарність функції означає симетрію її графіка відносно осі Oy або початку координат відповідно і дозволяє досліджувати функцію тільки на інтервалі $[0,\infty)$.

8. Чи є функція періодичною? Якщо це так, то можна обмежитись дослідженням функції тільки на якомусь одному періоді.

9. Побудова попереднього ескізу графіка функції.

II. Друга частина. Дослідження функції на зростання, спадання та локальні екстремуми за допомогою першої похідної $y' = f'(x)$, фіксація точок графіка, які відповідають екстремальним значенням функції, перша корекція попереднього ескізу графіка.

III. Третя частина. Дослідження функції на опуклість або угнутість та наявність точок перегину її графіка за допомоги другої похідної $y'' = f''(x)$, друга корекція попереднього ескізу графіка. Корисно знайти кутові коефіцієнти дотичних (тобто значення першої похідної) до графіка в точках його перегину.

IV. Четверта частина. Остаточна побудова графіка функції.

Зауваження. Деякі методисти радять перед остаточною побудовою графіка функції скласти так звану **таблицю поведінки функції**, де зводяться до купи результати всіх проведених досліджень (нулі і точки розриву, екстремальні значення функції, точки перегину, знаки функції та обох її похідних на відповідних інтервалах тощо).

Приклад. Дослідити функцію

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

та побудувати її графік.

I. Перша частина.

1. Функція визначена і неперервна в усіх точках, відмінних від ± 3. Тому областю її визначення і неперервності є $D(y) = (-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,\infty)$, тобто об"єднання трьох інтервалів. Точки $x = \pm 3$ є точками нескінченного розриву функціі, а прямі $x = \pm 3$ - вертикальними асимптотами її графіка.

2. Очевидно,

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 9} = -\frac{x^3}{x^2 - 9} = -f(x).$$

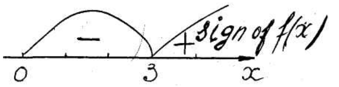


Рис. 14

Наша функція є непарною, а її графік – симетричним відносно початку координат. Тому ми можемо обмежитись її дослідженням тільки на інтервалі $[0,\infty)$.

3. Визначення інтервалів знакосталості функції (для $x \ge 0$).

Функція дорівнює нулю при $x = 0$ і не існує при $x = 3$. Методом інтервалів ми з"ясовуємо, що функція додатна на інтервалі $(3,\infty)$ і від"ємна на інтервалі $(0,3)$ (рис. 14).

4. Обчислення лівої і правої границь функції в точці $x = 3$, тобто точці її нескінченного розриву. З врахуванням знаків функції зліва і справа від цієї точки, маємо

$$f(3-0) = \lim_{x\to 3-0} f(x) = -\infty,\ f(3+0) = \lim_{x\to 3+0} f(x) = +\infty.$$

5. Існіє єдина точка перетину графіка функції з координатними осями, саме початок координат $O(0;0)$.

6. Границя функції на $+\infty$ дорівнює

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Отриманий результат свідчить про необхідність шукати похилу асимптоту графіка.

7. Шукаючи рівняння похилої асимптоти вигляду

$$y = kx + b,$$

отримуємо (див. один з попередніх прикладів)

$$y = x.$$

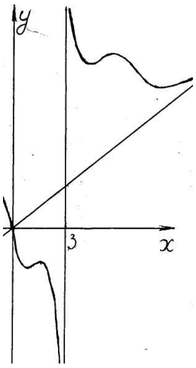


Рис. 15

8. Щоб з"ясувати, чи перетинається похила асимптота з графіком функції, ми повинні розв"язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{x^2-9}, \\ y = x, \end{cases}$$

Остання має єдиний розв"язок $(0,\,0)$, так що асимптота зустрі чається з графіком тільки в початку координат $O(0;0)$.

9. Тепер ми можемо зобразити попередній ескіз графіка функції (рис. 15).

II. Друга частина. Дослідження функції на зростання, спадання та локальні екстремуми за допомоги її першої похідної.

10. За правилом диференціювання частки маємо

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-9\right)-2x\cdot x^3}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{x^4-27x^2}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-27\right)}{\left(x^2-9\right)^2}.$$

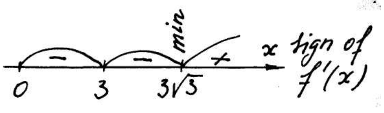


Рис. 16

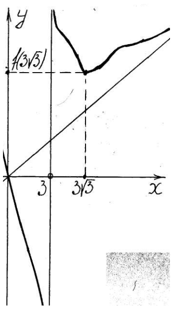


Рис. 17

Похідна дорівнює нулю при $x=0, x=3\sqrt{3}\approx 5.2$ і не існує при $x=3$. Точки $0,\ 3\sqrt{3}$ є критичними точками функції. Похідна є додатною на інтервалі $\left(3\sqrt{3},\infty\right)$ і від"ємною на інтервалах $(0;3)$ and $\left(3;3\sqrt{3}\right)$ (рис. 18). Отже, функція зростає на $\left(3\sqrt{3},\infty\right)$ і спадає на $(0,3)$ і $\left(3,3\sqrt{3}\right)$. В точці $x=3\sqrt{3}$ вона має локальний мінімум

$$y_{\min}=f\left(3\sqrt{3}\right)=\frac{\left(3\sqrt{3}\right)^3}{\left(3\sqrt{3}\right)^2-9}\approx 7.8;$$

йому відповідає точка $A\left(3\sqrt{3};f\left(3\sqrt{3}\right)\right)$ графіка функції.

11. Ми можемо здійснити першу корекцію попереднього ескізу графіка функції (рис. 17).

III. **Третя частина.** Дослідження графіка на опуклість, угнутість, відшукання точок перегину за допомоги другої похідної.

12. Друга похідна функції дорівнює

$$f''(x)=\frac{18x\left(x^2+27\right)}{\left(x^2-9\right)^3}.$$

Вона дорівнює нулю в точці $x=0$, не існує при $x=3$, є від"ємною в інтервалі $(0,3)$ і додатною в інтервалі $(3,\infty)$. Отже, графік функції опуклий над інтервалом $(0,3)$ і угнутий над інтервалом $(3,\infty)$. Для $x\in(0,\infty)$ він не має точок перегину. Але на підставі симетричності графіка відносно початку координат він має єдину точку перегину, а саме початок координат $O(0,0)$.

13. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка в початку координат дорівнює нулю, оскільки $f'(0)=0$. Це значить, що графік дотикається осі Ox в точці свого перегину.

14. Використовуючи результати проведених досліджень, ми можемо за бажанням скласти таблицю поведінки функції.

Тепер ми можемо здійснити другу корекцію попереднього ескізу графіка і перейти до заключної частини роботи.

IV. Четверта частина. Остаточна побудова графіка функції (див. рис.18).

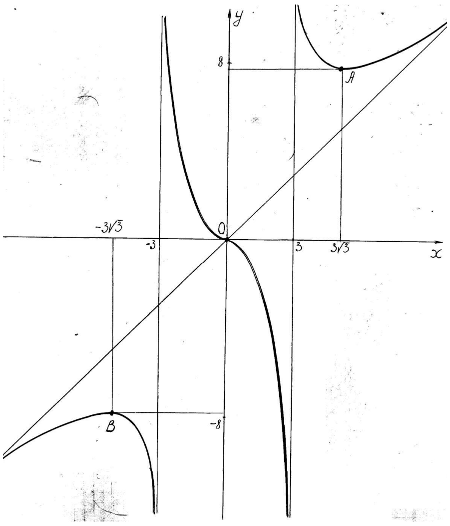


Рис. 18

Приклад. Дослідити функцію

$$y = e^{-x^2}$$

і побудувати її графік.

I. Перша частина.

1. Область визначення і неперервності функції $D(y)=(-\infty,+\infty)$. Її графік не має вертикальних асимптот.

2. Функція є парною, отже її графік симетричний відносно осі Oy і ми можемо обмежити дослідження інтервалом $[0,+\infty)$.

3. Функція є додатною для всіх $x \in [0,+\infty)$.

4. Точка $A(0;1) \in Oy$ є єдиною точкою перетину графіка з координатними осями.

5. Границя функції на $+\infty$ дорівнює нулю,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0,$$

отже графік має горизонтальну асимптоту $y = 0$ (вісь Ox) і не перетинається з нею.

II. Друга частина.

6. Перша похідна функції

$$y' = -2xe^{-x^2} = -2xy < 0$$

для $x \in (0,+\infty)$. Отже, функція спадає на інтервалі $[0,+\infty)$ і не має локальних екстремумів.

III. Третя частина.

7. Друга похідна функції

$$y'' = -2(y + xy') = -2(y + x(-2xy)) = 2y(2x^2 - 1).$$

Вона дорівнює нулю в точці $x = 1/\sqrt{2}$, від"ємна на інтервалі $(0, 1/\sqrt{2})$ і додатна на інтервалі $(1/\sqrt{2},+\infty)$. Графік функції є опуклим над інтервалом $(0, 1/\sqrt{2})$, угнутим над інтервалом $(1/\sqrt{2},+\infty)$ і має точку перегину при $x = 1/\sqrt{2}$ тобто точку

$$B(1/\sqrt{2}; f(1/\sqrt{2})) = B(1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{e}).$$

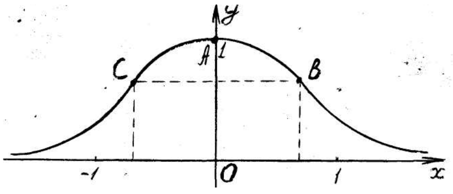


Рис. 19

IV. Четверта частина. Графік функції показано на рис. 19. Часто-густо його називають **дзвоноподібною кривою** або **кривою Ґаусса**).

Приклад. Дослідити функцію $y = 3\arctan x - x$ та побудувати її графік.

I. Перша частина.

1. Область визначення і неперервності функції $D(y) = (-\infty,+\infty)$. Її графік не має вертикальних асимптот.

2. Оскільки

$$f(-x) = 3\arctan(-x) - (-x) = -3\arctan x + x = -(3\arctan x - x) = -f(x),$$

функція є непарною, і ми можемо провести її дослідження тільки на інтервалі $[0,+\infty)$, бо графік функції є симетричним відносно початку координат.

3. Ми зразу знаходимо один нуль функції на інтервалі $[0,+\infty)$, саме $x = 0$, і це значить, що її графік проходить через початок координат $O(0;\,0)$. Але ми не знаємо, чи має функція на цьому інтервалі інші нулі, а тому не в змозі знайти інтервали знакосталості функції і можливі інші точки перетину графіка з віссю Ox.

4. Оскільки

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(3\arctan x - x) = 3\lim_{x\to+\infty}\arctan x - \lim_{x\to+\infty} x = 3\pi/2 - \lim_{x\to+\infty} x = -\infty,$$

ми повинні шукати похилу асимптоту графіка функції.

5. Відповідну асимптоту вже знайдено в одному з попередніх прикладів, а саме

$$y = -x + \frac{3\pi}{2}.$$

6. Графік функції не перетинається з похилою асимптотою, оскільки система рівнянь для відшукання можливих точок перетину, а саме

$$\begin{cases} y = 3\arctan x - x, \\ y = -x + \dfrac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

не має розв"язків (перевірте!).

7. Побудуємо попередній ескіз графіка функції, поки припускаючи, що він перетинає вісь Ox тільки в початку координат $O(0;\,0)$ (рис. 20).

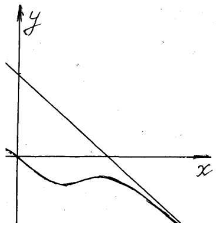


Рис. 20

II. Друга частина. Перша похідна функції дорівнює

$$y' = \frac{3}{1+x^2} - 1 = \frac{2-x^2}{1+x^2}.$$

Точка $x = \sqrt{2}$ є критичною (а саме, стаціонарною) точкою функції. На інтервалі

$\left(0,\sqrt{2}\right)$ маємо $y' > 0$, і функція зростає. На інтервалі $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ $y' < 0$, і функція спадає. Це означає, що вона має локальний максимум в точці $x = \sqrt{2}$, який дорівнює

$$y_{\max} = f\left(\sqrt{2}\right) = 3\arctan\sqrt{2} - \sqrt{2} \approx 3 \cdot 0.96 - 1.41 \approx 1.45.$$

Максимуму функції відповідає точка $A\left(\sqrt{2};\, f\left(\sqrt{2}\right)\right)$ її графіка, і, отже графік перетинає вісь Ox в деякій точці з абсцисою, яка ле-жить в інтервалі між $\sqrt{2}$ і $3\pi/2$.

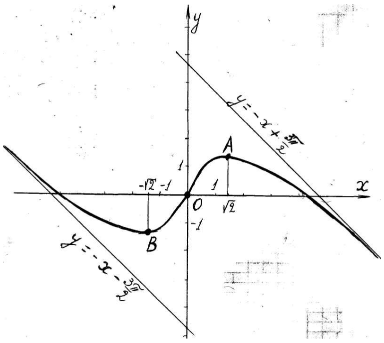


Рис. 21

III. Частина третя. Друга похідна функції

$$y'' = \frac{-2x\left(1+x^2\right) - 2x\left(2-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-6x}{\left(1+x^2\right)^2} < 0$$

є від"ємною для всіх $x > 0$, отже графік функції над інтервалом $\left(0,+\infty\right)$ є опуклим. Він має єдину точку перегину $O(0;\,0)$ з кутовим коефіцієнтом дотичної $f'(0) = 2$ в цій точці.

IV. Четверта частина. Остаточний графік функції зображено на рис. 21.

3.1.7. Текстові екстремальні задачі

Існує багато задач, висловлених словами, де треба знайти найбільше або найменше значення якоїсь величини. Розв"язання таких задач складається з трьох частин.

А. Зведення задачі до суто математичної.

Як правило, тут ми здійснюємо трикрокову процедуру:

(1) *Виконання рисунка* з заданими величинами і потрібною кількістю величин невідомих.

(2) *Утворення аналітичного виразу для величини, яку треба максимізувати (чи мінімізувати).* Як правило, цей вираз містить дві або більше змінних. Користуючись рисунком, ми шукаємо рівняння, які пов"язують ці змінні, щоб виключити в названому виразі їх всі, крім однієї.

(3) *Запис всіх обумовлених обмежень на змінну, що залишилась* в аналітичному виразі.

Тепер задачу повністю зведено до математичної екстремальної.

Як правило, такий процесс зведення є найскладнішою частиною розв"язання поставленої задачі.

Б. Розв"язання математичної задачі на екстремум.

Припустимо, що ми шукаємо найбільше (або найменше) значення функції $f(x)$, диференційовної на деякому інтервалі (a, b), $a \geq -\infty, b \leq +\infty$.

Ми шукаємо на (a, b) критичні точки функції. Часто трапляється ситуація, коли там існує єдина критична точка x_0. В такому випадку корисним є таке зауваження:

Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний максимум (мінімум), то останній є її абсолютним максимумом (відповідно мінімумом).

На підставі зауваження нам залишається дослідити точку x_0 на наявність в ній локального екстремуму функції. Як відомо, це можна здійснити як встановленням знаку похідної $f'(x)$ на інтервалах (a, x_0), (x_0, b), так і з"ясуванням знаку другої похідної $f''(x_0)$ в цій точці.

У випадку скінченного інтервалу (a, b) можна піти іншим шляхом. Ми можемо довизначити функцію $f(x)$ на кінцях a, b і зразу шукати абсолютний максимум (мінімум) функції, неперервної на відрізку $[a, b]$.

В. Відповідь на питання, яке було поставлене у віхідній задачі.

Приклад. Будують конус з твірною l. Яким може бути його максимальний об"єм?

Розв"язання. Нехай твірна конуса $AB = l$, його висота до-рівнює $OB = H$, а радіус основи $OA = R$ (рис. 22). Об"єм конуса дорівнює

$$V = 1/3\pi R^2 H$$

і залежить від двох змінних R, H. За теоремою Піфагора ми виражаємо R через

H з трикутника OAB, $R^2 = l^2 - H^2$, і отримуємо V як функцію тільки однієї змінної H,

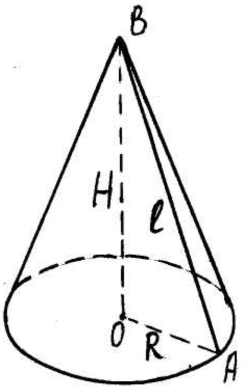


Рис. 22

$$V = f(H) = \frac{1}{3}\pi\left(l^2 - H^2\right)H = \frac{1}{3}\pi\left(l^2H - H^3\right),$$

де $0 < H < l$.

Перша похідна функції $V = f(H)$,

$$f'(H) = \frac{1}{3}\pi\left(l^2 - 3H^2\right),$$

дорівнює нулю при $H = l/\sqrt{3}$, бо $f'(H) = 0$, якщо маємо $l^2 - 3H^2 = 0$, звідки $H = l/\sqrt{3}$. Отже, точка $H = l/\sqrt{3}$ є критичною (стаціонарною) для функції $V = f(H)$.

Наступні міркування ми можемо, як сказано, провести двома способами.

Перший спосіб. Похідна $f'(H)$ є додатною на інтервалі $\left(0, l/\sqrt{3}\right)$ і від"ємною на інтервалі $\left(l/\sqrt{3}, l\right)$, оскільки для точок $l/2 \in \left(0, l/\sqrt{3}\right)$ і $l/\sqrt{2} \in \left(l/\sqrt{3}, l\right)$ маємо

$$f'\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(l^2 - 3\left(\frac{l}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi l^2}{12} > 0, \quad f'\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(l^2 - 3\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = -\frac{\pi l^2}{6} < 0.$$

Тому в точці $H = l/\sqrt{3}$ маємо локальний максимум.

В цьому ж можна впевнитись, знайшовши знак другої похідної в точці $H = l/\sqrt{3}$. Дійсно,

$$f''(H) = -2\pi H, \; f''\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\pi l}{\sqrt{3}} < 0 \; .$$

Внаслідок єдиності критичної точки $H = l/\sqrt{3}$ на інтервалі $(0, l)$ локальний максимум функції $V = f(H)$ є також її абсолютним максимумом. Тому

$$V_{\max} = \max_{[0,l]} f(H) = f\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2\right)\cdot\frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27}.$$

Другий спосіб. Помічаючи, що

$$\lim_{H\to 0+0} f(H) = \lim_{H\to l-0} f(H) = 0,$$

і покладаючи $f(0) = f(l) = 0$, ми визначаємо функцію $f(H)$ як неперервну на відрізку $[0, l]$. Задача зводиться до відшукання на $[0, l]$ її найбільшого значення.

Маємо

$$f\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2\right)\cdot\frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27} > 0,\ f(0) = f(l) = 0,$$

а отже, найбільше значення об"єму конуса дорівнює

$$V_{\max} = \max_{[0,\,l]} f(H) = f\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27}.$$

Зазначимо, що другий спосіб виявився набагато простішим першого.

Приклад. Знайти розміри прямокутника найбільшої площі, який можна вписати в коло радіуса R.

Розв"язання. Нехай (рис. 23) $AB = x, BC = y, AC = 2R$. Площа вписаного прямокутника $ABCD$ дорівнює

$$S = xy$$

і залежить від двох змінних x і y. З трикутника ABC за теоремою Піфагора знаходимо

$$y = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - x^2},$$

$$S = f(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2},\ 0 < x < 2R.$$

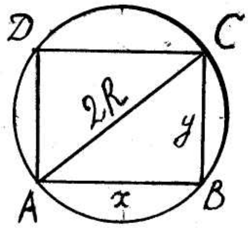


Рис. 23

Функція

$$S = f(x)$$

має на інтервалі $(0, 2R)$ єдину критичну (стаціонарну) точку $x = R\sqrt{2}$, бо

$$f'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} \text{ і } f'(x) = 0, \text{якщо } x = R\sqrt{2}.$$

Перший спосіб. Визначмо функцію $S = f(x)$ як неперервну на відрізку $[0, 2R]$, поклавши $f(0) = f(2R) = 0$. Оскільки

$$f(0) = f(2R) = 0 \text{ і } f\left(R\sqrt{2}\right) = R\sqrt{2}\cdot\sqrt{4R^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2} = 2R^2 > 0,$$

з"ясовуємо, що в точці $x = R\sqrt{2}$ функція набуває свого найбільшого значення, а отже шукані значення сторін прямокутника

$$x = R\sqrt{2}, y = \sqrt{4R^2 - x^2} = R\sqrt{2}.$$

Таким чином, вписаним прямокутником $ABCD$ найбільшої площі є квадрат з стороною $R\sqrt{2}$.

Другий спосіб є дещо громіздкішим. Враховуючи, що

$$0 < R < R\sqrt{2} < R\sqrt{3} < 2R, \quad f'(R) > 0, f'\left(R\sqrt{3}\right) < 0,$$

ми бачимо, що $f'(x) > 0$ на інтервалі $\left(0, R\sqrt{2}\right)$, $f'(x) < 0$ на $\left(R\sqrt{2}, 2R\right)$. Це значить, що точка $x = R\sqrt{2}$ є точкою локального максимуму функції $S = f(x)$, а внаслідок її єдиності – і точкою абсолютного максимуму.

Приклад (для самостійного розв"язання). Треба виготовити циліндричний бак з дном і кришкою, використавши для цього $S\,м^2$ матеріалу. Яким може бути максимальний об"єм такого циліндра?

Приклад. Треба транспортувати вантаж шляхом ABC (див. рис. 24, де позначено $AO \perp OC$, $AO = 9\ км$, $OC = 15\ км$). Витрати на транспортування одиниці вантажу на одиницю шляху вздовж AB і BC відносяться, як 5 : 4. Де повинна знаходитись точка B, щоб витрати на транспортування всього вантажу були мінімальними?

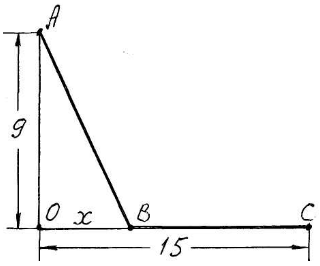


Рис.24

Розв"язання. Нехай $OB = x$, тоді $AB = \sqrt{81 + x^2}$, $BC = 15 - x$, і витрати на транспортування T одиниць вантажу вздовж AB і BC відповідно дорівнюють

$$S_{AB} = 5kT \cdot \sqrt{81 + x^2}, S_{BC} = 4kT \cdot (15 - x),$$

де k – деякий коефіцієнт пропорційності. Тоді функція

$$f(x) = S_{AB} + S_{BC} = 5kT \cdot \sqrt{81 + x^2} + 4kT \cdot (15 - x) = kT\left(5\sqrt{81 + x^2} + 4(15 - x)\right)$$

за очевидної умови $0 < x < 15$ визначає витрати вздовж ABC, і треба знайти її мінімум.

Критична точка функції $x = 12$, бо

$$f'(x) = kT \cdot \left(\frac{5x}{\sqrt{81 + x^2}} - 4 \right) = kT \cdot \frac{\left(5x - 4\sqrt{81 + x^2}\right)}{\sqrt{81 + x^2}},$$

і $f'(x) = 0$, якщо $5x - 4\sqrt{81 + x^2} = 0$, $x = 12$. При $x = 12$ функція набуває абсолютного мінімуму, оскільки $f'(x) < 0$ для $0 < x < 12$, $f'(x) > 0$ для $12 < x < 15$, а критична точка є єдиною.

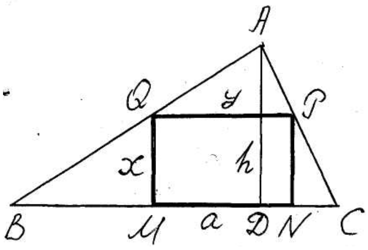


Рис. 25

Приклад. Вписати прямокутник найбільшої площі в трикутник з основою *a* і висотою *h*, якщо одна з сторін прямокутника повинна лежати на основі трикутника.

Розв"язання. Нехай $BC = a,\ AD = h$, а $x = MQ,\ y = PQ$ - сторони шуканого прямокутника $MNPQ$ (рис. 25). З подібності трикутників ABC, APQ випливає, що

$$PQ : BC = (h - x) : h,\ y : a = (h - x) : h,\ PQ = y = a/h \cdot (h - x),$$

а отже площа прямокутника $MNPQ$ дається функцією

$$S = f(x) = a/h \cdot x(h - x),\ 0 < x < h\,.$$

Її похідна

$$f'(x) = a/h \cdot (h - 2x)$$

дорівнює нулю в точці $x = h/2$, яка є точкою абсолютного максимуму функції $f(x)$ (доведіть це самлстійно!).

Приклад. Промінь світла рухається з точки *A* в точку *B*, причому точки *A* і *B* знаходяться в різних середовищах. Припустимо, що спільною границею обох середовищ є площина. Згідно з відомим принципом Ферма світло рухається вздовж такого шляху, для якого час руху є мінімальним. Нехай v_1 - швидкість світла в середовищі 1, а v_2 - в середовищі 2. Покажемо, що світло рухається вздовж шляху, який перетинає границю середовищ 1 і 2 відповідно до так званого закону Снелла:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2},$$

де θ_1 і θ_2 - кути (кути падіння і заломлення), позначені на рис. 26.

Розв"язання. Нехай (див. рис. 26)

$$AA_1 \perp A_1B_1,\ BB_1 \perp A_1B_1,\ AA_1=a,\ BB_1=b,\ A_1B_1=c \text{ і } x=A_1O.$$

Тоді

$$OB_1=c-x,\ AO=\sqrt{a^2+x^2},\ OB=\sqrt{b^2+(c-x)^2}.$$

Якщо T є час руху променя від A до B, то

$$T=\frac{AO}{v_1}+\frac{OB}{v_2}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2},\ T'=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=$$

$$=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{A_1O}{AO}-\frac{1}{v_2}\cdot\frac{OB_1}{OB}=\frac{1}{v_1}\cdot\sin\theta_1-\frac{1}{v_2}\cdot\sin\theta_2=\frac{\sin\theta_1}{v_1}-\frac{\sin\theta_2}{v_2};\ T'=0,\text{ якщо }\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}.$$

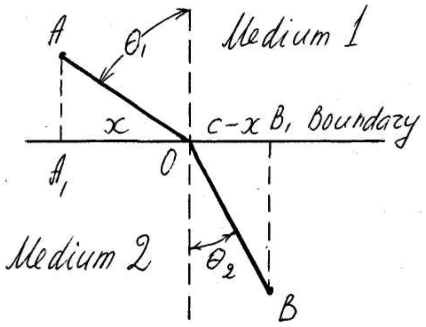


Рис. 26

Очевидно, за останньої умови реалізується саме мінімум часу T.

Приклад. Довести, що

$$\ln(1+x)<x$$

для $x>0$.

■Введімо функцію

$$f(x)=\ln(1+x)-x$$

з областю визначення $D(f)=(-1,+\infty)$ й дослідімо її на монотонність і локальні екстремуми.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x};$$

$$f'(x)=0 \text{ якщо } x=0;\ f'(x)>0 \text{ на } (-1,0),\ f'(x)<0 \text{ на } (0,+\infty).$$

Звідси випливає, що функція має в точці $x=0$ локальний максимум, рівний

$$f_{\max}=f(0)=\ln 1-0=0,$$

який в той же час є і абсолютним максимумом. Отже, $f(x)<0$ для $-1<x\neq 0$, а тому

$$\ln(1+x)-x<0,\ \ln(1+x)<x$$

при $-1<x\neq 0$, зокрема при $x>0$.■

Приклад. Довести, що

$$2x\arctan x\geq \ln\left(1+x^2\right).$$

■Для функції

$$f(x)=2x\arctan x-\ln\left(1+x^2\right)$$

ми маємо

$$f'(x)=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=2\arctan x;$$

$$f'(x)=0,\ \text{якщо}\ 2\arctan x=0,\ x=0;$$

$$f''(x)=\frac{2}{1+x^2},\ f''(0)=2>0.$$

Таким чином, функція має локальний, а в даній ситуації і абсолютний мінімум в точці $x=0$, який дорівнює $f(0)=0$, а тому $f(x)\geq 0$ для будь-якого x, тобто

$$2x\arctan x-\ln\left(1+x^2\right)\geq 0\ \text{ і }\ 2x\arctan x\geq \ln\left(1+x^2\right).$$■

Приклад. Довести самостійно, що при $x\neq 0$ виконується така нерівність

$$e^x>1+x.$$

Приклад. Скориставшись результатом попереднього прикладу, довести, що для всіх додатних значень x

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}.$$

■Функція

$$f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$$

має похідну

$$f'(x)=e^x-1-x,$$

яка дорівнює нулю в точці $x=0$, а при $x\neq 0$, за результатом попереднього прикладу, є додатною. Це означає, що функція зростає на своїй області визначення.

Але $f(0)=0$, а тому $f(x)>0$ для $x>0$, так що зазначена в умові нерівність виконується.■

За допомогою теорії екстремуму зручно розв"язуються деякі задачі елементарної математики.

Приклад. Розв"язати рівняння

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+\sqrt{x^2+2x+37}=5.$$

Вказівка. Розглянемо функцію

$$f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+\sqrt{x^2+2x+37}$$

і дослідимо її на локальний екстремум.

Похідна функції дорівнює

$$f'(x)=4x^3+12x^2+12x+4+\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+37}}=$$

$$=4\left(x^3+1\right)+12\left(x^2+x\right)+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+37}}=$$

$$=4(x+1)\left(x^2-x+1\right)+12x(x+1)+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+37}}=$$

$$=(x+1)\left(4\left(x^2-x+1\right)+12x+\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+37}}\right)=$$

$$=(x+1)\left(4\left(x^2-x+3x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+37}}\right)=(x+1)\left(4(x+1)^2+\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+37}}\right).$$

Вона перетворюється в нуль в єдиній точці $x=-1$, від"ємна ліворуч і додатна праворуч від неї. Отже, функція має в цій точці локальний мінімум, очевидно, рівний $f(-1)=5$. За єдиності критичної (стаціонарної) точки локальний мінімум є одночасно найменшим значенням функції. Оскільки ж права частина рівняння дорівнює 5, рівняння може мати єдиний корінь $x=-1$.

Відповідь: $x=-1$.

3.2. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

3.2.1. Локальні екстремуми

А. Означення

В цьому розділі ми розглядатимемо тільки **двічі неперервно диференційовні функції** декількох змінних.

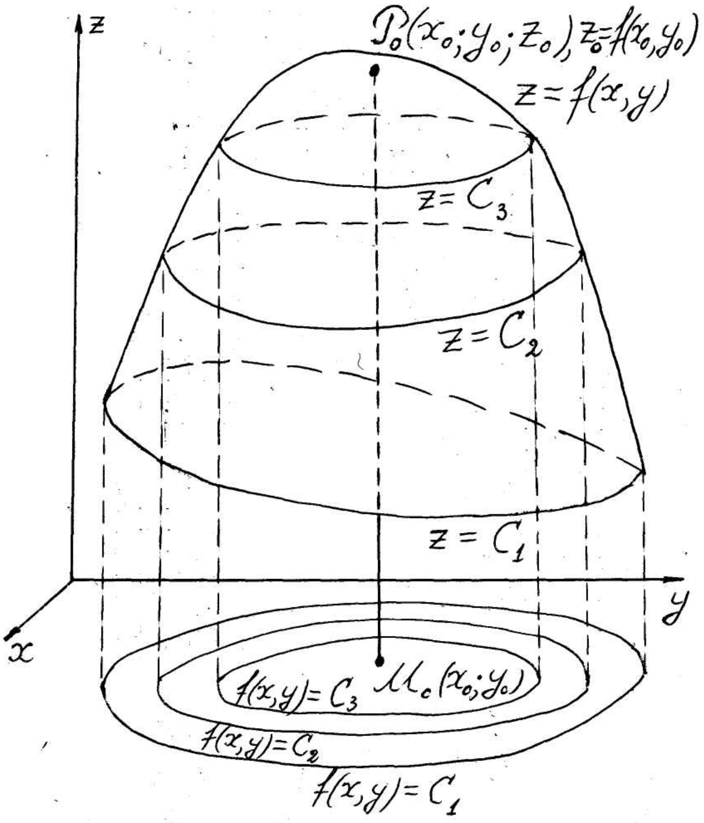


Рис. 1

Означення 1. Точка $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in \Re^n$ називається **точкою локального максимуму** функції n змінних $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо існує окіл U_{x_0} точки x_0, такий, що для будь-якої точки $x \in U'_{x_0} = U_{x_0} \setminus \{x_0\}$ виконується нерівність

$$f(x) < f(x_0) \text{ або } \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0. \qquad (1)$$

Значення функції в точці x_0, тобто $f(x_0)$, називается **локальним максимумом** функції.

Аналогічно означається точка **локального мініимуму** и локальний мінімум функції n змінних. Терміни локальний максимум і локальний мінімум об"єднуються, як завжди, загальним терміном **локальний екстремум**.

Випадок локального максимуму функції двох змінних

$$z = f(M) = f(x, y)$$

проілюстровано на рис. 1. Точка $M_0(x_0; y_0)$ є точкою локального максимума. Останній дорівнює

$$z_0 = f(M_0) = f(x_0, y_0) = M_0P_0,$$

де $P_0(x_0; y_0; z_0)$ - точка поверхні $z = f(x, y)$, графіка функції. На тому ж рисунку показано три лінії рівня функції, а саме:

$$f(x, y) = C_1,\ f(x, y) = C_2, f(x, y) = C_3.$$

Б. Необхідна умова існування локального екстремуму

Означення 2. Точка $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in \Re^n$ називається **стаціонарною** точкою функції n змінних $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо в ній всі частинні похідні фунеції дорівнюють нулю,

$$f'_{x_1}(x_0) = 0,\ f'_{x_2}(x_0) = 0, ...,\ f'_{x_n}(x_0) = 0. \qquad (2)$$

Зауваження. В стаціонарній точці диференціал функції дорівнює нулю,

$$df(x_0) = f'_{x_1}(x_0)dx_1 + f'_{x_2}(x_0)dx_2 + ... + f'_{x_n}(x_0)dx_n = 0. \qquad (3)$$

Теорема 1 (необхідна умова існування локального екстремуму). Якщо функція n змінних $f(x)$, $x \in \Re^n$ досягає локального экстремуму в точці $x_0 \in \Re^n$, то ця точка є стаціонарною точкою функції, тобто в ній виконуються рівності (2), (3).

■Нехай $x_2 = x_{20}, x_3 = x_{30}, ..., x_n = x_{n0}$ і $\varphi(x_1) = f(x_1, x_{20}, x_{30}, ..., x_{n0})$ - функція однієї змінної x_1. Якщо функція $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має локальный екстремум в точці $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, то функція $\varphi(x_1)$ має локальный екстремум в точці

x_{01}, а тому $\varphi'(x_{01}) = 0$. Це означає, що

$$f'_{x_1}(x_{01}, x_{20}, x_{30}, ..., x_{n0}) = f'_{x_1}(x_0) = 0.$$

Аналогічно доводиться, що $f'_{x_2}(x_0) = 0, ..., f'_{x_n}(x_0) = 0$.■

З теореми 1 випливає, що (двічі неперервно диференційовна) функція $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ може досягати локального екстремуму тільки в стаціонарній точці. Але стаціонарна точка не обов"язково є точкою локального экстремуму, тобто необхідна умова існування локального экстремуму не є достатньою.

Приклад. Точка $O(0;0)$ є стаціонарною для функції двох змінних

$$z = f(x, y) = xy \quad \left(f'_x = y, f'_y = x, f'_x = f'_y = 0 \; if \; x = y = 0\right),$$

але не є точкою локального екстремуму, бо $f(x, y) < f(0;0) = 0$ для $xy < 0$ (в другому і четвертому квадрантах) і $f(x, y) > f(0;0) = 0$ для $xy > 0$ (в першому і третьому квадрантах).

B. Достатня умова існування локального екстремуму

Щоб встановити достатню умову існування локального екстремуму, візьмемо до уваги деякі факти з теорії квадратичних форм.

Означення 3. Квадратичною формою n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називається вираз

$$F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \; a_{ij} = a_{ji}. \qquad (4)$$

Неважко помітити, що $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити в матричній формі,

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 \; x_2 ... \; x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

де матриця A називається матрицею квадратичної форми. Вона симетрична відносно головної діагоналі, оскільки $a_{ij} = a_{ji}$.

Приклад. Квадратична форма двох змінних x_1, x_2 - це є вираз

$$F(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, a_{12} = a_{21} \quad (6)$$

з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, a_{21} = a_{12} \quad (7)$$

Приклад. Квадратичною формою трьох змінних x_1, x_2, x_3 є вираз

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, a_{ji} = a_{ij}.$$

Означення 4. Квадратична форма (4) називається **додатно (від"ємно) визначеною**, якща вона має тільки додатні (відповідно від"ємні) значення для будь-якого $x \neq 0$, тобто якщо $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \neq 0$, і **невизначеною**, якщо вона може набувати як додатні, так і від’ємні значення.

Означення 5. Головними мінорами матриці (5) квадратичної форми (4) називаються її діагональні мінори

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = |A| \equiv \det A. \quad (8)$$

Теорема 2 (Сильвестр[15]**).** Квадратична форма (4) є **додатно визначеною** тоді і тільки тоді, якщо додатними є всі її головні мінори,

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, ..., \Delta_n > 0. \quad (9)$$

Вона є **від"ємно визначеною** тоді і тільки тоді, якщо її головні мінори мають наступні альтернуючі знаки:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, ... \quad (10)$$

---

[15] Сильвестр Джемс Джозеф (1814 - 1897) - английський математик.

Якщо всі головні мінори відмінні від нуля, але розподіл їх знаків відмінний від віпадків (9) і (10), то квадратична форма є невизначеною

Означення 6. Матрицею Гессе[16] функції $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ (в довільній точці $x=(x_1,x_2,...,x_n)$) називається матриця, елементами якої є частинні похідні другого порядку функції, а саме:

$$H(f,x)=\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(x) & f''_{x_1x_2}(x) & f''_{x_1x_3}(x) & ... & f''_{x_1x_n}(x) \\ f''_{x_2x_1}(x) & f''_{x_2x_2}(x) & f''_{x_2x_3}(x) & ... & f''_{x_2x_n}(x) \\ f''_{x_3x_1}(x) & f''_{x_3x_2}(x) & f''_{x_3x_3}(x) & ... & f''_{x_3x_n}(x) \\ .... & .... & .... & ... & .... \\ f''_{x_nx_1}(x) & f''_{x_nx_2}(x) & f''_{x_nx_3}(x) & ... & f''_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Надалі припускатимето, що в стаціонарній точці x_0 функції $f(x)$ принаймні одна її частинна похідна другого порядку відмінна від нуля. Це значить, що матриця $H(f,x_0)$ вважається ненульовою.

Теорема 3 (достатня умова існування локального экстремуму в стаціонарній точці). Нехай $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})\in\Re^n$ - стаціонарна точка функції

$$f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n),$$

другий диференціал якої не дорівнює тотожно нулю в цій точці (відносно dx_i, $i=\overline{1,n}$), і нехай $H(f,x_0)$ - значення матриці Гессе (11) в цій точці з **відмінними від нуля** головними мінорами.

а) Якщо всі головні мінори матриці $H(f,x_0)$ додатні,

$$\Delta_1>0,\Delta_2>0,\Delta_3>0,...,\Delta_n>0, \qquad (12)$$

то точка $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ є точкою локального мінімуму;

б) якщо знаки головних мінорів матриці $H(f,x_0)$ є альтернуючими,

$$\Delta_1<0,\Delta_2>0,\Delta_3<0,\Delta_4>0,..., \qquad (13)$$

то точка $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ є точкою локального максимуму;

в) в усіх інших випадках локальний екстремум відсутній.

---

[16] Гессе Людвиг Отто (1811 - 1874) – німецький математик.

■ За формулою Тейлора (див. формулу (30) в п. 2.3.4 Г (при $n=2$)) приріст (повний приріст) функції в точці $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ дорівнює

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(c),$$

де $c=(c_1,c_2,...,c_n)$ - деяка точка. За умови (3) маємо $df(x_0)=0$, так що

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}d^2f(c). \qquad (14)$$

З неперервності частинних похідних другого порядку функції $f(x)$ випливає, що знак правої частини рівності (14) в деякому околі U_{x_0} точки x_0 збігається з знаком значення $d^2f(x_0)$ другого диференціала функції в точці x_0. Але диффеpенціал $d^2f(x_0)$ дорівнює (див. формулу (35) в п. 2.3.4 Г)

$$d^2f(x_0)=d^2f(x_{10},x_{20},...,x_{n0})=\sum_{i,j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(x_0)dx_idx_j\,, \qquad (15)$$

тобто є квадратичною формою змінних dx_i ($dx_i=\Delta x_i=x_i-x_{i0}$) з матрицею $H(f,x_0)$ (див. (11)). При виконанні умов (12) ((13)) вона (за теоремою 2) є додатно (від'ємно) визначеною вU_{x_0}. В першому випадку в U_{x_0} маємо $d^2f(x_0)>0$, звідки $\Delta f(x_0)>0$, і функція f має локальний мінімум в точці x_0. В другому випадку $d^2f(x_0)<0$, так що $\Delta f(x_0)<0$ в U_{x_0}, і функція має в x_0 локальний максимум. При невиконанні умов (12) або (13) (але при відмінних від нуля головних мінорах матриці $H(f,x_0)$) квадратична форма (15) є невизначеною, диференціал $d^2f(x_0)$ і приріст $\Delta f(x_0)$ функції не зберігають знак в жодному околі точки x_0, а цу означає відсутність в x_0 локального екстремуму функції $f(x)$.■

Для випадку функції двох змінних $f(x)=f(x_1,x_2)$ доведення теореми 3 сильно спрощується. Воно не вимагає долучення теорії квадратичних форм, оскільки знак значення $d^2f(x_0)=d^2f(x_{10},x_{20})$ диференціала в стационарній точці $x_0=(x_{10},x_{20})$ визначається теорією квадратного тричлена. Дійсно, в цьому випадку

$$d^2 f(x_0) = f''_{x_1x_1}(x_0)\Delta x_1^2 + 2f''_{x_1x_2}(x_0)\Delta x_1\Delta x_2 + f''_{x_2x_2}(x_0)\Delta x_2^2.$$

Тут, як звичайно, $\Delta x_1 = dx_1 = x_1 - x_{10}$, $\Delta x_2 = dx_2 = x_2 - x_{20}$. Якщо, наприклад, $\Delta x_2 \neq 0$, то

$$d^2 f(x_0) = \Delta x_2^2 \left(f''_{x_1x_1}(x_0)\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)^2 + 2f''_{x_1x_2}(x_0)\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} + f''_{x_2x_2}(x_0) \right),$$

і квадратний тричлен в дужках (відносно $\Delta x_1 / \Delta x_2$) є додатнии (від"ємним) для всіх $\Delta x_1, \Delta x_2$, не рівних одночасно нулю, якщо $\Delta_1 = f''_{x_1x_1}(x_0) > 0$ (відповідно $\Delta_1 = f''_{x_1x_1}(x_0) < 0$), а дискримінант тричлена, рівний

$$D = 4\left(\left(f''_{x_1x_2}(x_0)\right)^2 - f''_{x_1x_1}(x_0)\cdot f''_{x_2x_2}(x_0)\right) =$$

$$= 4\begin{vmatrix} f''_{x_1x_2}(x_0) & f''_{x_1x_1}(x_0) \\ f''_{x_2x_2}(x_0) & f''_{x_1x_2}(x_0) \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(x_0) & f''_{x_1x_2}(x_0) \\ f''_{x_1x_2}(x_0) & f''_{x_2x_2}(x_0) \end{vmatrix} = -4\det H(f, x_0) = -4\Delta_2,$$

від'ємний (а отже, головний мянор Δ_2 додатний). Функція має в точці $x_0 = (x_{10}, x_{20})$ локальний мінімум при $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$, локальний максимум при $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$. В інших випадках ($\Delta_1 \neq 0$, но $\Delta_2 < 0$) екстремум не досягається.

Зауваження. Теорема 3 справедлива, якщо значення $d^2 f(x_0)$ диференціала не дорівнює тотожно нулю (відносно $dx_i, i = \overline{1, n}$). В протилежному випадку ми повинні звернутися до більш складної теорії (з використанням диференціалів порядків, вищих 2).

При розв'язанні конкретних задач можуть виникати, разом з названими в теоремі 3, і інші випадки, наприклад, коли принаймні один з головних мінорів Δ_i матриці (11) дорівнює нулю. Будемо вважати такі випадки сумнівними, такими, що вимагають додаткових досліджень. Але для функцій двох змінних $f(x) = f(x_1, x_2)$ ми в змозі вичерпати питання повністю.

Достатньо зупинитися на двох можливостях, коли в стаціонарній точці $x_0 = (x_{10}, x_{20})$ маємо: а) $\Delta_1 = 0$, але $\Delta_2 \neq 0$, б) $\Delta_2 = 0$.

а) Якщо $\Delta_1 = 0$, але $\Delta_2 \neq 0$, то $f''_{x_1x_2}(x_0) \neq 0$, $\Delta_2 < 0$, і формула (15) для значення диференціала другого порядку функції $f(x)=f(x_1,x_2)$ в стаціонарній точці $x_0=(x_{10},x_{20})$ набуває вигляду

$$d^2f(x_0)=2f''_{x_1x_2}(x_0)dx_1dx_2+f''_{x_2x_2}(x_0)dx_2^2.$$

Очевидно, что $d^2f(x_0)$ не зберігає сталий знак в жодному околі стаціонарної точки, а тому локальний екстремум в ній відсутній. Вище ми бачили, що він відсутній і при $\Delta_1\neq 0$, але $\Delta_2<0$.

Випадок $\Delta_2=0$, коли тричлен $d^2f(x_0)$ має два рівних дійсних корені, є сумнівним незалежно від значення мінора Δ_1 (нульового чи ні).

Виходячи з усього сказаного, достатню умову існування локального екстремуму **функції двох змінних** $f(x)=f(x_1,x_2)$ в стаціонарній точці $x_0=(x_{10},x_{20})$ можна сформулювати таким чином:

Теорема 4. Нехай $x_0=(x_{10},x_{20})$ - стаціонарна точка функції двох змінних $f(x)=f(x_1,x_2)$.

а) Якщо

$$\Delta_1=f''_{x_1x_1}(x_0)>0 \quad \left(\Delta_1=f''_{x_1x_1}(x_0)<0\right) \text{ и } \Delta_2=\det H(f,x_0)=\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(x_0) & f''_{x_1x_2}(x_0) \\ f''_{x_1x_2}(x_0) & f''_{x_2x_2}(x_0)\end{vmatrix}>0,$$

то в точці $x_0=(x_{10},x_{20})$ функція моє локальний мінімум (відповідно - локальний максимум).

б) У випадку

$$\Delta_2=\det H(f,x_0)=\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(x_0) & f''_{x_1x_2}(x_0) \\ f''_{x_1x_2}(x_0) & f''_{x_2x_2}(x_0)\end{vmatrix}<0$$

локальний екстремум не досягається.

в) Випадок

$$\Delta_2=\det H(f,x_0)=0$$

є сумнівним і вимагає додаткового дослідження з залученням диференціалів порядку вище другого.

Приклад. Знайти локальні екстремуми функції

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27.$$

Перший крок: знаходження стаціонарних точок функції.

$$z'_x = 3x^2 - 9y, \quad \begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 9y = 0, \\ 3y^2 - 9x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3y = 0, \\ y^2 - 3x = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 0, y_1 = 0; & O(0;\,0), \\ x_2 = 3, y_2 = 3; & M(3;\,3). \end{matrix}$$

$$z'_y = 3y^2 - 9x;$$

Другий крок: дослідження стаціонарних точок $O(0;\,0), M(3;\,3)$. Для цього ми можемо скористатися як умовами (12), (13) загальної теорії, так і умовами (12 а), (13 а), які стосуються функцій двох змінних.

Розпочнімо з загальної теорії. Утворимо перш за все матрицю Гессе заданої функції. Маємо

$$\begin{matrix} z''_{xx} = 6x, z''_{xy} = -9, \\ z''_{yx} = z''_{xy} = -9, z''_{yy} = 6y; \end{matrix} \quad H(z,(x,y)) = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}.$$

а) Для точки $M(3;\,3)$ відповідне значення матриці Гессе є

$$H(z,M(3,3)) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix};$$

всі головні мінори матриці $H(z,M(3,3))$ додатні,

$$\Delta_1 = 18 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} > 0;$$

отже, на підставі теореми 3 (умова (12)) функція має локальний мінімум в точці $M(3;\,3)$.

б) Для точки $O(0;\,0)$ матриця Гессе та її головні мінори дорівнюють

$$H(z,O(0;\,0)) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}; \ \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} = -81,$$

і на підставі теореми 4 функція не має локального екстремуму в точці $O(0;\,0)$.

Приклад. Знайти локальні екстремуми функції трьох змінних

$$u = -x^2 - y^2 - 10z^2 + 4xz + 3yz - 2x - y + 13z + 5.$$

1. Знаходження стаціонарних точок. Існує єдина стаціінарна точка, оскільки

$$u'_x = -2x + 4z - 2, u'_y = -2y + 3z - 1, u'_z = -20z + 4x + 3y + 13,$$

$$\begin{cases} -2x+4z-2=0, \\ -2y+3z-1=0, \\ -20z+4x+3y+13; \end{cases} \begin{cases} -2x & & +4z & = & 2, \\ & -2y & +3z & = & 1, \\ 4x & +3y & -20z & = & -13; \end{cases} \begin{matrix} x=y=z=1, \\ M_0(1;1;1). \end{matrix}$$

2. Дослідження стаціонарної точки $M_0(1;1;1)$. Частинні похідні другого порядку функції

$$u''_{xx}=-2, u''_{xy}=u''_{yx}=0, u''_{xz}=u''_{zx}=4, u''_{yy}=-2, u''_{yz}=u''_{zy}=3, u''_{zz}=-20$$

породжують матрицю Гессе з сталими елементами, так що

$$H(u, M(x;y;z))=H(u, M_0(x_0;y_0;z_0))=H(u, M_0(1;1;1))=$$

$$=\begin{pmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) & u''_{xz}(M_0) \\ u''_{yx}(M_0) & u''_{yy}(M_0) & u''_{yz}(M_0) \\ u''_{zx}(M_0) & u''_{zy}(M_0) & u''_{zz}(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -20 \end{pmatrix};$$

головні мінори значення матриці Гессе (в стационарній точці $M_0(1;1;1)$!)

$$\Delta_1=-2<0, \Delta_2=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=4>0, \Delta_3=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -20 \end{vmatrix}=-30<0,$$

і, отже, функція має в точкі $M_0(1;1;1)$ локальний максимум

$$u_{\max}=u(M_0)=u(1;1;1)=10.$$

Приклад. Знайти локальні екстремуми функції $u=x+y/x+z/y+2/z$.

1. $u'_x=1-y/x^2$, $u'_y=1/x-z/y^2$, $u'_z=1/y-2/z^2$;

$$\begin{cases} 1-y/x^2=0, \\ 1/x-z/y^2=0, \\ 1/y-2/z^2=0; \end{cases} \begin{cases} x^2=y, \\ y^2=xz, \\ z^2=2y; \end{cases} \begin{cases} x^2=y, \\ x^4=xz, \\ z^2=2x^2; \end{cases} \begin{cases} x^2=y, \\ x^3=z, \\ z^2=2x^2; \end{cases} \begin{cases} x^2=y, \\ x^3=z, \\ x^6=2x^2; \end{cases} \begin{cases} x=\pm 2^{1/4}, \\ y=2^{1/2}, \\ z=\pm 2^{3/4}. \end{cases}$$

Отримали дві стаціонарні точки $M_1(2^{1/4};2^{1/2};2^{3/4})$, $M_2(-2^{1/4};2^{1/2};-2^{3/4})$.

2. Тепер ми повінні дослідити стаціонарні точки на існування локальних екстремумів. Частинні похідні другого порядку даної функціх в довільній точці $(x;y;z)$ дорівнюють

$$
\begin{aligned}
&u_{xx}=2y/x^3, \quad u_{xy}=-1/x^2, \quad u_{xz}=0,\\
&u_{yx}=-1/x^2, \quad u_{yy}=2z/y^3, \quad u_{yz}=-1/y^2,\\
&u_{zx}=0, \quad u_{zy}=-1/y^2, \quad u_{zz}=4/z^3.
\end{aligned}
$$

a) Матриця Гессе і головні мінори в першій точці $M_1\left(2^{1/4};\,2^{1/2};\,2^{3/4}\right)$ є

$$
H\left(u, M_1\left(2^{1/4};2^{1/2};2^{3/4}\right)\right)=\begin{pmatrix} 2^{3/4} & -2^{-1/2} & 0 \\ -2^{-1/2} & 2^{1/4} & -2^{-1} \\ 0 & -2^{-1} & 2^{-1/4} \end{pmatrix}, \quad \mathit{\Delta}_1=2^{3/4}>0, \quad \mathit{\Delta}_2=\begin{vmatrix} 2^{3/4} & -2^{-1/2} \\ -2^{-1/2} & 2^{1/4} \end{vmatrix}=2-2^{-1}>0,
$$

$$
\Delta_3=\begin{vmatrix} 2^{3/4} & -2^{-1/2} & 0 \\ -2^{-1/2} & 2^{1/4} & -2^{-1} \\ 0 & -2^{-1} & 2^{-1/4} \end{vmatrix}=2^{3/4}-2\cdot 2^{-5/4}=2^{-5/4}\left(2^2-2\right)=2^{-1/4}>0.
$$

Отже, ми маємо локальний мінімум в точці $M_1\left(2^{1/4};\,2^{1/2};\,2^{3/4}\right)$.

b) Для другої точки $M_2\left(-2^{1/4};\,2^{1/2};\,-2^{3/4}\right)$ маємо

$$
H\left(u, M_2\left(-2^{1/4};2^{1/2};-2^{3/4}\right)\right)=\begin{pmatrix} -2^{3/4} & -2^{-1/2} & 0 \\ -2^{-1/2} & -2^{1/4} & -2^{-1} \\ 0 & -2^{-1} & -2^{-1/4} \end{pmatrix}, \quad \Delta_1=-2^{3/4}<0, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} -2^{3/4} & -2^{-1/2} \\ -2^{-1/2} & -2^{1/4} \end{vmatrix}>0,
$$

$$
\Delta_3=\begin{vmatrix} -2^{3/4} & -2^{-1/2} & 0 \\ -2^{-1/2} & -2^{1/4} & -2^{-1} \\ 0 & -2^{-1} & -2^{-1/4} \end{vmatrix}=-2^{3/4}+2\cdot 2^{-5/4}=2^{-5/4}\left(2-2^2\right)=-2^{-1/4}<0.
$$

Таким чином, в точкі $M_2\left(-2^{1/4};\,2^{1/2};\,-2^{3/4}\right)$ функція має локальний максимум.

Приклад. Функції

$$
z=f_1(x,y)=x^4+y^4, z=f_2(x,y)=-x^4-y^4, z=f_3(x,y)=x^4-y^4
$$

мають одну й ту ж стаціонарну точку $O(0;\,0)$. Їх диференціали другого порядку

$$
d^2f_1=12x^2dx^2+12y^2dy^2,\; d^2f_2=-12x^2dx^2-12y^2dy^2,\; d^2f_3=12x^2dx^2-12y^2dy^2,
$$

Тотожно дорівнюють нулю в стаціонарній точці, і теорема 3 для цих функцій незастосовна. Легко бачити, що функція $f_1(x,y)$ має в стаціонарній точці максимум, функція $f_2(x,y)$ - мінімум, а функція $f_3(x,y)$ взагалі не має екстремумів.

Дійсно, $f_1(x,y)>0$, $f_2(x,y)<0$ в довільній точці, відмінній від стаціонарної, тоді як $f_3(x,y)>0$ при $|x|>|y|$, $f_3(x,y)<0$ при $|x|<|y|$ і $f_3(x,y)=0$ при $|x|=|y|$.

3.2.2. Метод найменших квадратів

Припустимо, що ми вивчаємо дві змінні величини x, y і шукаємо вигляд функціональної залежності між ними. З цією метою ми здійснюємо n випробувань над x, y і подаємо отримані результати таблицею пар $(x_i; y_i)$ і відповідними точками $A_i(x_i; y_i)$ площини $x0y$ (див. таблицю 1 і рис. 2).

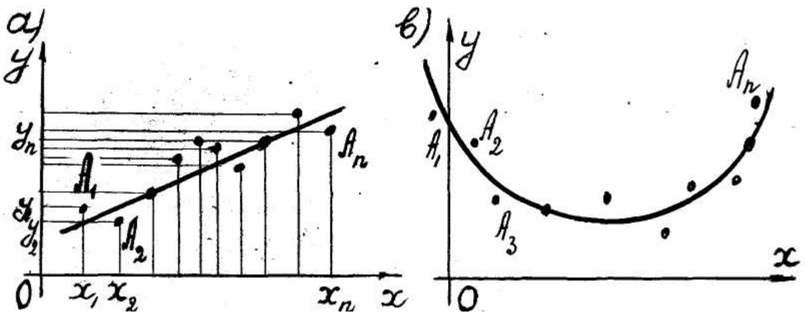


Рис. 2

Таблиця 1

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n
Точка	A_1	A_2	A_3	...	A_n

Розташування точок $A_1, A_2, ..., A_n$ іноді дозволяє нам висунути гіпотезу стосовно вигляду $y=f(x,a,b,...)$ залежності, про яку йдетья. Наприклад, рис. 2а веде до гіпотези про лінійну залежність між x, y, а саме

$$y=ax+b.$$

З іншого боку, рис. 2б породжує гіпотезу про параболічну (другого степеня) залежність

$$y=ax^2+bx+c.$$

Наша мета – знайти параметри $a, b, ...$ найкращим (в деякому сенсі) чином. Як один з таких часто-густо застосовується метод найменших квадратів.

Нехай, взагалі кажучи, ми припускаємо

$$y = f(x,a,b,...)\,. \qquad (16)$$

Введімо наступні величини (так звані помилки, або нев"язки)

$$\varepsilon_i = f(x_i,a,b...) - y_i\,, \qquad (17)$$

тобто різниці між теоретичними значеннями $f(x_i,a,b...)$ и результатами y_i експериментів над x і у. Метод найменших квадратів, розроблений Лежандром[17] і Ґауссом[18] і обґрунтований Ґауссом, полягає в наступному: ми шукаємо $a,b,...$ так, щоб зробити мінімальною (або мінімізувати) суму квадратів нев"язок. Це значить, що ми повинні знайти мінімум наступної функції змінних $a,b,...$:

$$\Phi(a,b,...) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i,a,b...) - y_i\right)^2. \qquad (18)$$

Для відшукання a, b, ... ми повинні розв"язати систему рівнянь

$$\Phi'_a(a,b,...) = 0, \Phi'_b(a,b,...) = 0, ... \qquad (19)$$

яка називається **нормальною системою** методу найменших квадратів.

Ми обмежимось двома гіпотезами, породженими розташуванням точок $A_i(x_i;y_i)$ на рис. 1 а, 1 б, саме $y = ax + b$ і $y = ax^2 + bx + c$.

Якщо ми припускаємо

$$y = ax + b\,, \qquad (20)$$

то ми повинні мінімізувати функцію

$$\Phi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2\,. \qquad (21)$$

Її частинні похідні по a и b дорівнюють

$$\Phi'_a = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i = 2\left(a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)$$

і

$$\Phi'_b = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 2\left(a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn - \sum_{i=1}^{n} y_i \right),$$

---

[17] Лежандр Адрієн Марі (1752 - 1833) – французький математик

[18] Гаусс Карл Фридрих (1777 - 1855) – знаменитий німецький математик, астроном, фізик і геодезист

і ми повинні розв"язати таку нормальну систему лінійних рівнянь відносно a, b

$$\begin{cases} \Phi'_a = 0, \\ \Phi'_b = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \quad a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (22)$$

В разі гіпотези

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (23)$$

ми повинні мінімізувати функцію трьох змінних a, b, c

$$\Phi(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^{\,2} + bx_i + c - y_i)^2 \qquad (24)$$

з наступними частинними похідними по a, b, c:

$$\Phi'_a = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^{\,2} + bx_i + c - y_i)x_i^{\,2} = 2\left(a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \right),$$

$$\Phi'_b = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^{\,2} + bx_i + c - y_i)x_i = 2\left(a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right),$$

$$\Phi'_c = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^{\,2} + bx_i + c - y_i) = 2\left(a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn - \sum_{i=1}^{n} y_i \right).$$

Отже, необхідно розв"язати таку систему рівнянь відносно a, b, c:

$$\begin{cases} \Phi'_a = 0, \\ \Phi'_b = 0, \\ \Phi'_c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \quad a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (25)$$

Приклад. Величина x товарообігу (в тисячах умовних міжнародних одиниць, у.м.о.) і витрати y обертання (в у.м.о.) задано таблицею 2.

Розташування точок A, B, C, D, E, F (див. рис. 3) дозволяє нам висунути гіпотезу, що

Table 2

№	x_i	y_i	Точки	$x_i y_i$	x_i^2
1	60	551	A	33060	3600

2	80	576	*B*	46080	6400
3	140	628.5	*C*	87990	19600
4	160	673	*D*	107680	25600
5	240	768.5	*E*	184440	57600
6	320	863	*F*	276160	102400
$\sum$	1000	4080		735410	215200

$$y = ax + b,$$

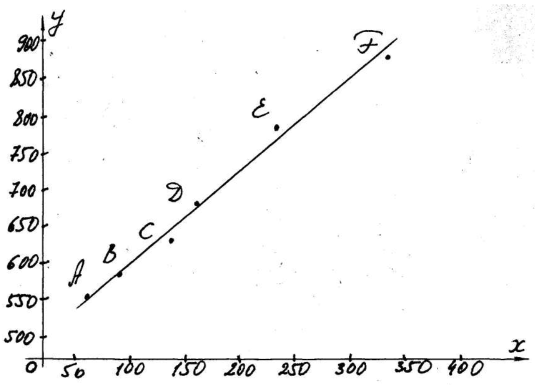


Рис.3

тобто що витрати y обертання і величина x товарообігу пов"язані лінійною залежністю. На підставі (22) ми повинні розв"язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 215200a + 1000b = 735410, \\ 1000a + 6b = 4080. \end{cases}$$

Розв"язок системи є

$$a \approx 1.13,\ b \approx 489.71,$$

так що залежність, про яку йдеться, дається рівнянням

$$y = 1.13x + 489.71.$$

3.2.3. Умовні екстремуми

А. Означення

Найпростіша задача на умовний екстремум:

Знайти екстремуми функції двох змінних

$$z = f(M) = f(x, y) \qquad (26)$$

за умови, що x і y зв"язані рівнянням [умовою, обмеженням, співвідношенням]

$$\varphi(x, y) = 0. \qquad (27)$$

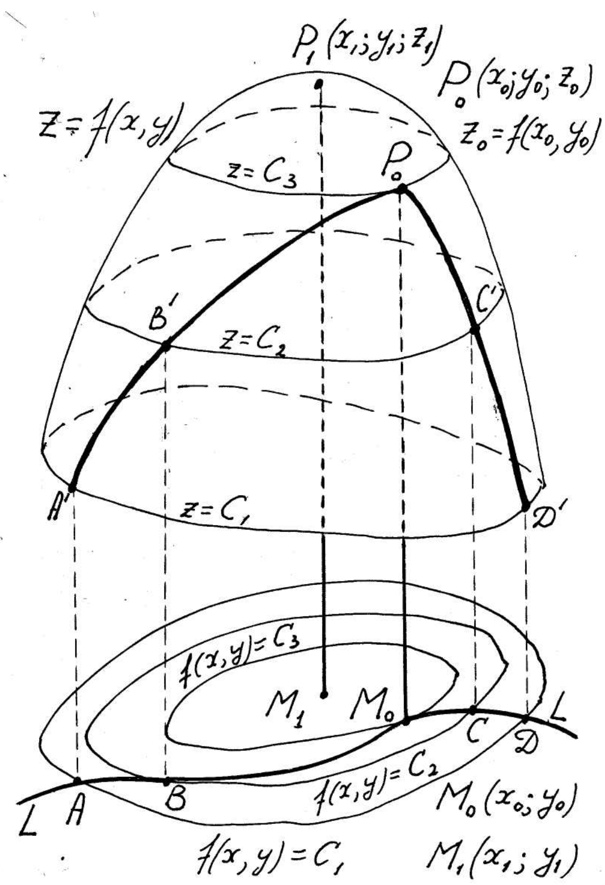


Рис. 4

Геометричний сенс задачі полягає у відшуканні екстремумів функції

$$z = f(x, y)$$

в точках кривої, визначеної рівнянням (27).

Умовний максимум функції двох змінних $z = f(x, y)$ на кривій $L = ABM_0CD$ показано на рис. 4. Він дорівнює

$$z_0 = f(M_0) = M_0P_0,$$

і функція досягає його в точці $M_0(x_0; y_0) \in L$ кривої. Для порівняння на рис. 4 показано локальний максимум тієї ж функції

$$z_1 = f(M_1) = f(x_1, y_1) = M_1P_1,$$

який відрізняється від умовного максимуму.

Загальна задача на умов-ний екстремум:

Знайти екстремуми функції n змінних

$$u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (28)$$

за умови, що змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ пов"язані наступними k $(k < n)$ рівняннями [умовами, обмеженнями, співвідношеннями]:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ &\varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{aligned} \qquad (29)$$

Б. Необхідна умова існування умовного екстремуму

Найпростіша задача (26), (27) на умовний екстремум.

Нехай умовний екстремум реалізується в точці $M_0(x_0;y_0)$, і принаймні одна частинна похідна функції $\varphi(x,y)$відмінна від нуля в цій точці, наприклад

$$\varphi'_y(M_0)=\varphi'_y(x_0;y_0)\neq 0. \qquad (30)$$

В цьому випадку рівняння (27) визначає y як неявну функцію від x в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$,

$$y=y(x)\ \ (\varphi(x,y(x))\equiv 0, \varphi(x_0,y_0)=0, y_0=y(x_0)). \qquad (31)$$

Якщо ми можемо безпосередньо знайти y з рівняння (27), то приходимо до задачі на звичайний локальний екстремум функції $z=z(x)=f(x,y(x))$однієї змінної x. Необхідна умова існування такого экстремуму є $z'(x_0)=0,$ детальніше

$$f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot y'(x_0)=0. \qquad (32)$$

Насправді нема необхідності выражати y через x з рівняння (27). Достатньо просто взяти до уваги, що y є функцією від x, неявно заданою цим рівнянням, і на підставі цього розглядами (27) як тотожність відносно x. Після його диференціювання (по x) отримуємо для точки $M_0(x_0;y_0)$

$$\varphi'_x(x_0,y_0)+\varphi'_y(x_0,y_0)\cdot y'(x_0)=0. \qquad (33)$$

Тепер з (32) і (33) маємо

$$y'(x_0)=-\frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)},\ y'(x_0)=-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}\Rightarrow\frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}=\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)},$$

$$\frac{f'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_x(x_0,y_0)}=\frac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)} \qquad (34)$$

Якщо позначити рівні відношення (34) символом $-\lambda$, де λ - деяке число, яке звичайно називається **невизначеним множником Лагранжа**, отримаємо

$$f'_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_y(x_0,y_0)=0,$$

$$\frac{f'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_x(x_0,y_0)}=\frac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}=-\lambda\Rightarrow f'_x(x_0,y_0)=-\lambda\varphi'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0)=-\lambda\varphi'_y(x_0,y_0).$$

Таким чином, ми довели таку теорему:

Теорема 4 (необхідна умова існування умовного екстремуму)**.** Якщо функція двох змінних $z=f(M)=f(x,y)$ досягає умовного екстремуму в точці $M_0(x_0;y_0)$, то її координати задовольняють наступну систему рівнянь відносно x,y,λ:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0,\\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0,\\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \tag{35}$$

Систему (35) легко запам"ятати, якщо ввести наступну допоміжну функцію (**функцію Лагранжа**)

$$L=L(\lambda,x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y). \tag{36}$$

Необхідна умова існування умовного екстремуму (26), (27) переходить в систему рівнянь

$$\begin{cases} L'_x(\lambda,x,y)=0,\\ L'_y(\lambda,x,y)=0,\\ \varphi(x,y)=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} L'_x(\lambda,x,y)=0,\\ L'_y(\lambda,x,y)=0,\\ L'_\lambda(\lambda,x,y)=0. \end{cases} \tag{37}$$

Означення 6. Кожний розв"язок $P_0(\lambda_0,x_0,y_0)$ системи (37) називається **стаціонарною точкою** функції Лагранжа (36). Відповідну геометричну точку $M_0(x_0,y_0)$ можна назвати стаціонарною точкою вихідної функції $z=f(x,y)$ (для найпростішої задачі на умовний екстремум (26), (27)).

З означення 6 і теореми 4 випливає, що функція $z=f(x,y)$ може досягати умовного екстремуму тільки в стаціонарній точці функції Лагранжа.

Загальна задача (28), (29) на умовний екстремум

В загальній задачі на умовний екстремум вводять таку **функцію Лагранжа:**

$$L = L(\lambda, x) = L(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, x_1, x_2, ..., x_n) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_k\varphi_k \qquad (38)$$

Теорема 5 (необхідна умова існування умовного екстремуму). Якщо функція n змінних $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ досягає умовного екстремуму в точці $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, то її координати задовольняють систему рівнянь відносно $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, x_1, x_2, ..., x_n$

$$\begin{cases} L'_{x_i} = 0 & \left(i = \overline{1, n}\right), \\ \varphi_j = 0 & \left(j = \overline{1, k}\right), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} L'_{x_i} = 0 & \left(i = \overline{1, n}\right), \\ L'_{\lambda_j} = 0 & \left(j = \overline{1, k}\right). \end{cases} \qquad (39)$$

Означення 7. Кожний розв"язок $(\lambda_0, x_0) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, ..., \lambda_{k0}, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ системи рівнянь (39) називається **стаціонарною точкою** функції Лагранжа (38). Відповідна геометрична точка $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ часто-густо називається стаціонарною точкою функції $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (для загальної задачі на умовний екстремум (28), (29)).

Функція $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ може досягати умовного екстремуму тільки в стаціонарній точці функції Лагранжа.

B. Достатня умова існування умовного екстремуму

Найпростіша задача (26), (27) на умовний екстремум

Нехай $P_0(\lambda_0, x_0, y_0)$ - деяка стаціонарна точка функції Лагранжа (36) для функції $z = f(x, y)$, тобто один з розв"язків системи рівнянь (37). Введімо матрицю Гессе для функції Лагранжа в довільній точці $P(\lambda; x; y)$ для двох випадків:

а) у випадку, коли $L''_{\lambda x}(\lambda_0, x_0, y_0) = \varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$, беремо її у вигляді

$$H(f, P(\lambda, x, y)) = H(f, \lambda, x, y) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(x, y) & L''_{\lambda x}(x, y) & L''_{\lambda y}(x, y) \\ L''_{x\lambda}(x, y) & L''_{xx}(\lambda, x, y) & L''_{xy}(\lambda, x, y) \\ L''_{y\lambda}(x, y) & L''_{yx}(\lambda, x, y) & L''_{yy}(\lambda, x, y) \end{pmatrix},$$

або ж

$$H(f, P(\lambda, x, y)) = H(f, \lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_x(x, y) & \varphi'_y(x, y) \\ \varphi'_x(x, y) & L''_{xx}(\lambda, x, y) & L''_{xy}(\lambda, x, y) \\ \varphi'_y(x, y) & L''_{yx}(\lambda, x, y) & L''_{yy}(\lambda, x, y) \end{pmatrix}; \quad (\,40\text{ а}\,)$$

б) коли ж $L''_{\lambda x}(\lambda_0, x_0, y_0) = \varphi'_x(x_0, y_0) = 0$, але $L''_{\lambda y}(\lambda_0, x_0, y_0) = \varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то беремо її у вигляді

$$H(f, P(\lambda, x, y)) = H(f, \lambda, y, x) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda, x, y) & L''_{\lambda y}(\lambda, x, y) & L''_{\lambda x}(\lambda, x, y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda, x, y) & L''_{yy}(\lambda, x, y) & L''_{yx}(\lambda, x, y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda, x, y) & L''_{yx}(\lambda, x, y) & L''_{yy}(\lambda, x, y) \end{pmatrix},$$

$$H(f, P(\lambda, x, y)) = H(f, \lambda, y, x) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_y(x, y) & \varphi'_x(x, y) \\ \varphi'_y(x, y) & L''_{yy}(\lambda, x, y) & L''_{yx}(\lambda, x, y) \\ \varphi'_x(x, y) & L''_{xy}(\lambda, x, y) & L''_{xx}(\lambda, x, y) \end{pmatrix}. \quad (\,40\text{ б}\,)$$

Перший головний мінор матриці дорівнює нулю, $\Delta_1 = 0$, а другий від"ємний, $\Delta_2 < 0$, в будь-якій точці. Розгляньмо значення третього головного мінора в стаціонарній точці $P_0(\lambda_0; x_0; y_0)$, тобто

$$\Delta_3(\lambda_0, x_0, y_0) = \det H(f, \lambda_0, x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{xy}(\lambda_0, x_0, y_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{yx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{yy}(\lambda_0, x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

для матриці (40 а) і

$$\Delta_3(\lambda_0, x_0, y_0) = \det H(f, \lambda_0, x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0, y_0) & \varphi'_y(x_0, y_0) \\ \varphi'_x(x_0, y_0) & L''_{xx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{xy}(\lambda_0, x_0, y_0) \\ \varphi'_y(x_0, y_0) & L''_{yx}(\lambda_0, x_0, y_0) & L''_{yy}(\lambda_0, x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

для матриці (40 б).

Теорема 6. Нехай для стаціонарної точки $P_0(\lambda_0, x_0, y_0)$ функції Лагранжа:

а) принаймні одна з частинних похідних функції $\varphi(x, y)$ відмінна від нуля в точці $M_0(x_0; y_0)$;

б) значення $\Delta_3(\lambda_0, x_0, y_0)$ третього головного мінора Δ_3 матриці Гессе в стаціонарній точці відмінне від нуля.

1. Якщо

$$\Delta_3(\lambda_0, x_0, y_0) < 0,$$

то функція $z = f(x, y)$ має **умовний мінімум** в (геометричній) точці $M_0(x_0; y_0)$.

2. Якщо ж

$$\Delta_3(\lambda_0, x_0, y_0) > 0,$$

то функція досягає в точці $M_0(x_0, y_0)$ умовного максимуму.

Приклад. Знайти умовні екстремуми функції

$$z = x^2 - y^2$$

за умови

$$x^2 + y^2 = 4,$$

тобто на колі радіуса 2 з центром в початку координат.

Перший крок: введення функції Лагранжа та знаходження її критичних точок.

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 4;$$

$$L(\lambda, x) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4);$$

$$L'_x(\lambda, x) = 2x + 2\lambda x = 2x(1+\lambda), L'_y(\lambda, x) = -2y + 2\lambda y = 2y(-1+\lambda), L'_\lambda(\lambda, x) = \varphi(x,y);$$

$$\begin{cases} L'_x(\lambda, x) = 0, \\ L'_y(\lambda, x) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(1+\lambda) = 0, & (a) \\ y(-1+\lambda) = 0, & (b) \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. & (c) \end{cases}$$

Системи рівнянь відносно критичних точок функцаї Лагранжа, як правило, нестандартні і вимагають час від часу неабиякої кмітливості. Так, отриману нами систему ми будемо розв"язувати для двох випадків, які визначаються рівнянням (a).

1 випадок: $x = 0$; $(c) \Rightarrow y = \pm 2, (b) \Rightarrow \lambda = 1$.

2 випадок: $1 + \lambda = 0, \lambda = -1$; $(b) \Rightarrow y = 0, (c) \Rightarrow x = \pm 2$.

Ми отримали чотири стаціонарні точки функції Лагранжа и відповідні геометричні стаціонарні точки заданої функції, саме:

$$P_1(\lambda_1; x_1; y_1) = P_1(-1; 2; 0), M_1(2; 0); P_2(\lambda_2; x_2; y_2) = P_2(-1; -2; 0), M_2(-2; 0);$$
$$P_3(\lambda_3; x_3; y_3) = P_3(1; 0; 2), M_3(0; 2); P_4(\lambda_4; x_4; y_4) = P_4(1; 0; -2), M_4(0; -2).$$

Другий крок: дослідження стаціонарних точок на існування в них умовного экстремуму.

Частинні похідні другого порядку функції Лагранжа дорівнюють

$$L''_{\lambda\lambda}(\lambda,x,y)=\varphi'_{\lambda}(x,\,y)=0,\, L''_{\lambda x}(\lambda,x,y)=\varphi'_{x}(x,\,y)=2x,\, L''_{\lambda y}(\lambda,x,y)=\varphi'_{y}(x,\,y)=2y,$$

$$L''_{xx}(\lambda,x,y)=2+2\lambda, L''_{xy}(\lambda,x,y)=L''_{yx}(\lambda,x,y)=0, L''_{yy}(\lambda,x,y)=-2+2\lambda.$$

А. Для точок $P_1(-1;2;0), M_1(2;0)$ і $P_2(-1;-2;0), M_2(-2;0)$ ми повинні взяти матрицю Гессе для функції Лагранжа в формі (40 а), бо частинна похідна $L''_{\lambda x}(\lambda,x,y)=\varphi'_{x}(x,\,y)=2x$ відмінна від нуля в точках $M_1(2;0), M_2(-2;0)$. Маємо

$$H(f,P(\lambda,\,x,\,y))=\begin{pmatrix} 0 & \varphi'_x(x,\,y) & \varphi'_y(x,\,y) \\ \varphi'_x(x,\,y) & L''_{xx}(\lambda,\,x,\,y) & L''_{xy}(\lambda,\,x,\,y) \\ \varphi'_y(x,\,y) & L''_{yx}(\lambda,\,x,\,y) & L''_{yy}(\lambda,\,x,\,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2+2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2+2\lambda \end{pmatrix},$$

або просто

$$H(f,P(\lambda,\,x,\,y))=H(f,\lambda,\,x,\,y)=\begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(x,\,y) & L''_{\lambda x}(x,\,y) & L''_{\lambda y}(x,\,y) \\ L''_{x\lambda}(x,\,y) & L''_{xx}(\lambda,\,x,\,y) & L''_{xy}(\lambda,\,x,\,y) \\ L''_{y\lambda}(x,\,y) & L''_{yx}(\lambda,\,x,\,y) & L''_{yy}(\lambda,\,x,\,y) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2+2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2+2\lambda \end{pmatrix}$$

а) Для точки $P_1(-1;2;0)$ (і відповідно для геометричної точки $M_1(2;0)$)

$$\Delta_3(-1,2,0)=\det H(f,P_1(-1,2,0))=\det H(f,-1,2,0)=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=64>0.$$

б) Для точки $P_2(-1;-2;0)$ (і відповідно для $M_2(-2;0)$)

$$\Delta_3(-1,-2,0)=\det H(f,P_2(-1,-2,0))=\det H(f,-1,-2,0)=\begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=64>0$$

На підставі теореми 6 в обох точках $M_1(2;0)$ и $M_2(-2;0)$ задана функція має умовний максимум, рівний $(\pm 2)^2-0^2=4$.

Б. Що стосується другої пари стаціонарних точок

$$P_3(\lambda_3; x_3; y_3) = P_3(1; 0; 2), M_3(0; 2) \text{ и } P_4(\lambda_4; x_4; y_4) = P_4(1; 0; -2), M_4(0; -2),$$

то для них ми беремо матрицю Гессе в формі (40 б), бо в точках $M_3(0; 2)$ і $M_4(0; -2)$ частинна похідна $L''_{\lambda x}(\lambda, x, y) = \varphi'_x(x, y) = 2x$ дорівнює нулю, але частинна похідна $L''_{\lambda y}(\lambda, x, y) = \varphi'_y(x, y) = 2y$ відмінна від нуля. Маємо

$$H(f, P(\lambda, x, y)) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_y(x, y) & \varphi'_x(x, y) \\ \varphi'_y(x, y) & L''_{yy}(\lambda, x, y) & L''_{yx}(\lambda, x, y) \\ \varphi'_x(x, y) & L''_{xy}(\lambda, x, y) & L''_{xx}(\lambda, x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 2x \\ 2y & -2+2\lambda & 0 \\ 2x & 0 & 2+2\lambda \end{pmatrix},$$

або просто

$$H(f, P(\lambda, x, y)) = H(f, \lambda, y, x) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(x, y) & L''_{\lambda y}(x, y) & L''_{\lambda x}(x, y) \\ L''_{y\lambda}(x, y) & L''_{yy}(\lambda, x, y) & L''_{yx}(\lambda, x, y) \\ L''_{y\lambda}(x, y) & L''_{yx}(\lambda, x, y) & L''_{yy}(\lambda, x, y) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2y & 2x \\ 2y & -2+2\lambda & 0 \\ 2x & 0 & 2+2\lambda \end{pmatrix}$$

а) Для точки $P_3(1; 0; 2)$ (відповідно для $M_3(0; 2)$)

$$\Delta_3(1; 0; 2) = \det H(f, P_3(1; 0; 2)) = \det H(f, 1, 2, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -64 < 0.$$

б) Для точки $P_4(1; 0; -2)$ (відповідно для $M_4(0; -2)$)

$$\Delta_3(1; 0; -2) = \det H(f, P_4(1; 0; -2)) = \det H(f, 1, -2, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -64 < 0.$$

На підставі тієї ж теореми функція в точках $M_3(0; 2)$ и $M_4(0; -2)$ має умовний мінімум, рівний $0^2 - (\pm 2)^2 = -4$.

Отже, дана функція в точках $M_1(2; 0)$ і $M_2(-2; 0)$ кола $x^2 + y^2 = 4$ досягає умовного максимуму, рівного 4, а в точках $M_3(0; 2)$ і $M_4(0; -2)$ кола - умовного мінімуму, рівного -4.

Загальна задача (28), (29) на умовний екстремум

Нехай $\left(\lambda_0, x_0\right) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, ..., \lambda_{k0}, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ - стаціонарна точка функції Лагранжа (38), тобто один з розв"язків системи (39). Введімо в розгляд дві матриці.

a) Першою з матриць є матриця частинних похідних функцій (29)

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \qquad (40)$$

Припускається, що значення матриці (40) в точці $\left(x_0\right) = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ має ранг k, тобто містить принаймні один ненульовий мінор k-го порядку. Ми зупинимось на випадку, коли відмінним від нуля є наступний мінор (так званий **якобі-ан**[19]):

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k)}{D(x_1, x_2, ..., x_k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1(x_0)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial\varphi_1(x_0)}{\partial x_k} \\ \frac{\partial\varphi_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2(x_0)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial\varphi_2(x_0)}{\partial x_k} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial\varphi_k(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_k(x_0)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial\varphi_k(x_0)}{\partial x_k} \end{vmatrix} \qquad (41)$$

b) Друга матриця – це матриця Гессе для функції Лагранжа (38)

$$H(L, \lambda, x) = H(L, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (42)$$

$$H(L, \lambda, x) = H(L, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1\lambda_2} & ... & L''_{\lambda_1\lambda_k} & L''_{\lambda_1 x_1} & ... & L''_{\lambda_1 x_n} \\ L''_{\lambda_2\lambda_1} & L''_{\lambda_2\lambda_2} & ... & L''_{\lambda_2\lambda_k} & L''_{\lambda_2 x_1} & ... & L''_{\lambda_2 x_n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ L''_{\lambda_k\lambda_1} & L''_{\lambda_k\lambda_2} & ... & L''_{\lambda_k\lambda_k} & L''_{\lambda_k x_1} & ... & L''_{\lambda_k x_n} \\ L''_{x_1\lambda_1} & L''_{x_1\lambda_2} & ... & L''_{x_1\lambda_k} & L''_{x_1 x_1} & ... & L''_{x_1 x_n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ L_{x_n\lambda_1} & L''_{x_n\lambda_2} & ... & L''_{x_n\lambda_k} & L''_{x_n x_1} & ... & L''_{\lambda_1 x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & L''_{\lambda_1 x_1} & ... & L''_{\lambda_1 x_n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & L''_{\lambda_k x_1} & ... & L''_{\lambda_k x_n} \\ L''_{x_1\lambda_1} & ... & L''_{x_1\lambda_k} & L''_{x_1 x_1} & ... & L''_{x_1 x_n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ L''_{x_n\lambda_1} & ... & L''_{x_n\lambda_k} & L''_{x_n x_1} & ... & L''_{x_n x_n} \end{pmatrix}.$$

---

[19] На честь німецького математика Якобі (Карла Густава Якоба) (1804 - 1851).

Елементи матриці, які знаходяться на перетині перших k рядків і стовпчиків, дорівнюють нулю, бо частинні похідні першого порядку функції Лагранжа по $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ - то є функції (29), які від $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ не залежать. Відповідно перші k головних мінорів матриці Гессе дорівнюють нулю,

$$\Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_k = 0.$$

Теорема 7 (достатня умова існування умовного екстремуму)**.** Нехай для стаціонарної точки $(\lambda_0, x_0) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, ..., \lambda_{k0}, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ функції Лагранжа:

1. Якобіан (41) відмінний від нуля;

2. Δ_i $(i > k)$ - перший ненульвий головний мінор значення $H(L, \lambda_0, x_0)$ матриці Гессе (42) в точці $(\lambda_0, x_0) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, ..., \lambda_{k0}, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$;

3. Знак цього мінора $sign\Delta_i = sign(-1)^k$, де k – кількість умов (29).

Тоді:

а) якщо всі наступні головні мінори Δ_j мають той же знак,

$$sign\Delta_j = sign(-1)^k,\ j = i+1, i+2, ..., n,$$

то геометрична точка $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ є точкою умовного мінімуму;

б) якщо знаки головних мінорів $\Delta_i, \Delta_{i+1}, \Delta_{i+2}, ..., \Delta_n$ чергуються,

$$sign\Delta_i = (-1)^k, sign\Delta_{i+1} = (-1)^{k+1}, sign\Delta_{i+2} = (-1)^{k+2}, ...,$$

то точка $x_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ є точкою умовного максимуму;

в) якщо принаймні один з головних мінорів $\Delta_j, i < j \le n,$ дорівнює нулю, отримуємо так званий сумнівний випадок, який для свого дослідження вимагає більш складної теорії;

г) в решті випадків умовний екстремум не досягається.

Приклад. Знайти умовні екстремуми функції

$$u = xyz$$

при двох обмеженнях (умовах)

$$\begin{aligned} x + y + z = 5 \quad & (\varphi_1(x,y,z) = x + y + z - 5), \\ xy + yz + zx = 8 \quad & (\varphi_2(x,y,z) = xy + yz + zx - 8). \end{aligned}$$

Перший крок: запровадження функції Лагранжа та відшукання її стаціонарних точок. Функція Лагранжа

$$L = L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = xyz + \lambda_1(x + y + z - 5) + \lambda_2(xy + yz + zx - 8).$$

Її частинні похідні першого порядку

$$L'_{\lambda_1} = \varphi_1 = x + y + z - 5, L'_{\lambda_2} = \varphi_2 = xy + yz + zx - 8,$$
$$L'_x = yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z), L'_y = xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z), L'_z = xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y).$$

Необхідна умова існування умовного екстремуму дається системою рівнянь

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_z = 0, \\ L'_{\lambda_1} = \varphi_1 = 0, \\ L'_{\lambda_2} = \varphi_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} yz + \lambda_1 + \lambda_2(y + z) = 0, & (a) \\ xz + \lambda_1 + \lambda_2(x + z) = 0, & (b) \\ xy + \lambda_1 + \lambda_2(x + y) = 0, & (c) \\ x + y + z - 5 = 0, & (d) \\ xy + yz + zx - 8 = 0. & (e) \end{cases}$$

Додамо рівняння (a), (b), (c), і, враховуючи (d), (e), отримаємо

$$3\lambda_1 + 10\lambda_2 + 8 = 0. \qquad (f)$$

Віднімаючи рівняння (*b*) з (*a*), а потім (*c*) з (*b*), отримаємо

$$\begin{matrix} (y - x)(z + \lambda_2) = 0, & (g) \\ (z - y)(x + \lambda_2) = 0. & (h) \end{matrix}.$$

Зауважимо, що рівняння (g), (h) можно скласти інакше. Саме, з рівнянь (a), (b), (c) маємо

$$\begin{matrix} yz + \lambda_2(y + z) = -\lambda_1, \\ xz + \lambda_2(x + z) = -\lambda_1, \\ xy + \lambda_2(x + y) = -\lambda_1, \end{matrix} \quad \begin{matrix} yz + \lambda_2(y + z) = xz + \lambda_2(x + z), & (y - x)z + \lambda_2(y - x) = 0, \\ xz + \lambda_2(x + z) = xy + \lambda_2(x + y), & (z - y)x + \lambda_2((z - y)) = 0, \end{matrix}$$

отже,

$$\begin{matrix} (y - x)(z + \lambda_2) = 0, & (g) \\ (z - y)(x + \lambda_2) = 0. & (h) \end{matrix}$$

Далі ми повинні розглянути такі чотири випадки:

$$1) y = x, z = y;\ 2) y = x, x = -\lambda_2;\ 3) z = -\lambda_2, z = y; 4) z = -\lambda_2, x = -\lambda_2.$$

1) Випадок $x = y = z$ неможливий на підставі рівнянь (d), (e).

2) У випадку $x = y = -\lambda_2$ рівняння (*c*) дає $\lambda_1 = \lambda_2^2$, отже, рівняння (*f*) веде

до квадратного рівняння $3\lambda_2^2+10\lambda_2+8=0$ з коренями $\lambda_{21}=-2,\ \lambda_{22}-\frac{4}{3}$. Звідси випливає, що $\lambda_{11}=(\lambda_{21})^2=4,\ \lambda_{12}=(\lambda_{22})^2=\frac{16}{9}$. Відповідні значення x, y b z (з огляду на рівняння (d)) такі: $2, 2, 1$ и $4/3, 4/3, 7/3$.

Остаточно отримуємо стаціонарні точки

$$P_1(4;-2;2;2;1),\ P_2\left(\frac{16}{9};-\frac{4}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{7}{3}\right)$$

функції Лагранжа і відповідні геометричні точки

$$M_1(2;2;1),\ M_2\left(\ \frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$$

даної функції.

У випадках 3) і 4) ми аналогічно знаходимо чотири стаціонарні точки

$$P_3(4,-2,1,2,2),\ P_4(4,-2,2,1,2), P_5\left(\frac{16}{9},-\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right), P_6\left(\frac{16}{9},-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$$

(парами P_3, P_5 і P_4, P_6) і відповідні геометричні точки даної функції

$$M_3(1;2;2),\ M_4(2;1;2), M_5\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right),\ M_6\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right).$$

Другий крок: дослідження стаціонарних точок на існування умовного екстремуму. З цією метою ми повинні провести підготовчу роботу, пов"язану з введенням матриці частинних похідних першого порядку функцій φ_1, φ_2, які задають обмеження вихідної задачі, і відповідних матриць Гессе.

А. Матриця функцій φ_1, φ_2 є

$$\Phi(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}.$$

Знайдімо значення матриці $\Phi(x,y,z)$ в геометричних точках M_1-M_6 даної функції і відповідні якобіани:

$$\varPhi(M_1)=\varPhi(x_1,y_1,z_1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ y_1+z_1 & x_1+z_1 & x_1+y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=0,\ \text{але}\ \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\neq 0;$$

$$\varPhi(M_2)=\varPhi(x_2,y_2,z_2)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ y_2+z_2 & x_2+z_2 & x_2+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{11}{3} & \frac{11}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix},$$

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{11}{3} & \frac{11}{3}\end{vmatrix}=0,\ \text{але}\ \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{11}{3} & \frac{8}{3}\end{vmatrix}\neq 0;$$

$$\varPhi(M_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 3\end{pmatrix},\ \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}\neq 0;\quad \varPhi(M_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix},\ \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}\neq 0;$$

$$\varPhi(M_5)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{8}{3} & \frac{11}{3} & \frac{11}{3}\end{pmatrix},\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{8}{3} & \frac{11}{3}\end{vmatrix}\neq 0;\varPhi(M_6)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{11}{3} & \frac{8}{3} & \frac{11}{3}\end{pmatrix},\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}\neq 0$$

Ми бачимо, що для всіх точок M_1-M_6 ранг матриці $\Phi(x,y,z)$ дорівнює 2.

Розгляд отриманих якобіанів показує, що для стаціонарних точок P_3-P_6 ми повинні використовувати матрицю Гессе у формі

$$H_1(L;\lambda_1,\lambda_2,x,y,z),$$

але для точок P_1, P_2 - матрицю Гессе іншої форми, а саме:

$$H_2(L;\lambda_1,\lambda_2,y,z,x).$$

Б. Утворюємо матриці Гессе в довільній точці $(\lambda_1,\lambda_2,x,y,z)$.

$$L''_{\lambda_1\lambda_1}=L''_{\lambda_1\lambda_2}=L''_{\lambda_2\lambda_1}=L''_{\lambda_2\lambda_2}=0;L''_{\lambda_1x}=L''_{x\lambda_1}=L''_{\lambda_1y}=L''_{y\lambda_1}=L''_{\lambda_1z}=L''_{z\lambda_1}=1;L''_{xx}=L''_{yy}=L''_{zz}=0;$$

$$L''_{\lambda_2x}=L''_{x\lambda_2}=y+z;\ L''_{\lambda_2y}=L''_{y\lambda_2}=x+z;\ L''_{\lambda_2z}=L''_{z\lambda_2}=x+y;$$

$$L''_{xy}=L''_{yx}=z+\lambda_2;\ L''_{xz}=L''_{zx}=y+\lambda_2;\ L''_{yz}=L''_{zy}=z+\lambda_2.$$

$$H_1(L,\lambda_1,\lambda_2,x,y,z)=$$

$$=\begin{pmatrix}L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1\lambda_2} & L''_{\lambda_1x} & L''_{\lambda_1y} & L''_{\lambda_1z}\\ L''_{\lambda_2\lambda_1} & L''_{\lambda_2\lambda_2} & L''_{\lambda_2x} & L''_{\lambda_2y} & L''_{\lambda_2z}\\ L''_{x\lambda_1} & L''_{x\lambda_2} & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz}\\ L''_{y\lambda_1} & L''_{y\lambda_2} & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz}\\ L''_{z\lambda_1} & L''_{z\lambda_2} & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & y+z & x+z & x+y\\ 1 & y+z & 0 & z+\lambda_2 & y+\lambda_2\\ 1 & x+z & z+\lambda_2 & 0 & x+\lambda_2\\ 1 & x+y & y+\lambda_2 & x+\lambda_2 & 0\end{pmatrix}$$

$$H_2(L,\lambda_1,\lambda_2,y,z,x)=$$

$$=\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1\lambda_2} & L''_{\lambda_1 y} & L''_{\lambda_1 z} & L''_{\lambda_1 x} \\ L''_{\lambda_2\lambda_1} & L''_{\lambda_2\lambda_2} & L''_{\lambda_2 y} & L''_{\lambda_2 z} & L''_{\lambda_2 x} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{y\lambda_2} & L''_{yy} & L''_{yz} & L''_{yx} \\ L''_{z\lambda_1} & L''_{z\lambda_2} & L''_{zy} & L''_{zz} & L''_{zx} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{x\lambda_2} & L''_{xy} & L''_{xz} & L''_{xx} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x+z & x+y & y+z \\ 1 & x+z & 0 & x+\lambda_2 & z+\lambda_2 \\ 1 & x+y & x+\lambda_2 & 0 & y+\lambda_2 \\ 1 & y+z & z+\lambda_2 & y+\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

В. Тепер ми вже можемо безпосередньо досліджувати стаціонарні точки функції Лагранжа на наявність в них умовних ектремумів. В задачі задано дві умови ($k=2$), тому $(-1)^k=(-1)^2=1>0$, і для застосовності теореми 6 ми очікуємо перш за все появи додатних перших ненульових головних мінорів в значеннях матриці Гессе для стаціонарних точок, які досліджуємо.

а) Для точки $P_1(4,-2,2,2,1)$ (і точки $M_1(2;2;1)$)

$$H_2(L;P_1)=H_2(L;4,-2,2,2,1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad \Delta_1=0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0;\ \Delta_4=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1>0,\ \Delta_5=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2>0.$$

Функція має умовний мінімум 4 в точці $M_1(2;2;1)$.

b) Для точки $P_2\left(\frac{16}{9},-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ (і точки $M_2(4/3;4/3;7/3)$)

$$H_2(L;P_2)=H_2\left(L;\frac{16}{9},-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{8}{3} & \frac{11}{3} \\ 1 & \frac{11}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{11}{3} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad \begin{gathered} \Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0, \\ \Delta_4=1>0, \\ \Delta_5=-2<0. \end{gathered}$$

Функція має умовний максимум 112/27 в точці $M_2(4/3;\,4/3;\,7/3)$.

Відзначимо такий факт. Якби ми спробували досліджувати точки

$$P_1(4;\,-2;\,2;\,2;\,1),\ P_2\left(\frac{16}{9};\,-\frac{4}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{7}{3}\right)$$

за допомоги матриці Гессе $H_1(L,\lambda_1,\lambda_2,x,y,z)$ (а не $H_2(L,\lambda_1,\lambda_2,y,z,x)$), отримали б

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=\Delta_4=0$$

і тільки $\Delta_5\neq 0,\ \Delta_5>0\ \left(sign\Delta_5=sign(-1)^k,\ k=2\right)$. Ми могли б говорити про досягнення функцією умовних екстремумів в цих точках, але нічого - про характер ектремумів.

c) Для точки $P_3(4,-2,1,2,2)$ (і точки $M_3(1;\,2;\,2)$)

$$H_1(L;P_3)=H_1(L;4,-2,1,2,2)=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&4&3&3\\1&4&0&0&0\\1&3&0&0&-1\\1&3&0&-1&0\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l}\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0,\\ \Delta_4=1>0,\\ \Delta_5=2>0.\end{array}$$

Функція має умовний мінімум 4 в точці $M_3(1;\,2;\,2)$.

d) Для точки $P_4(4,-2,2,1,2)$ (і точки $M_4(2;\,1;\,2)$)

$$H_1(L;P_4)=H_1(L;4,-2,2,1,2)=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&3&4&3\\1&3&0&0&-1\\1&4&0&0&0\\1&3&-1&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l}\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0,\\ \Delta_4=1>0,\\ \Delta_5=2>0.\end{array}$$

Функція має умовний мінімум 4 в точці $M_4(2;\,1;\,2)$.

e), f) Таким же чином ми встановлюємо, що для точок

$$P_5\left(\frac{16}{9},-\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),\ P_6\left(\frac{16}{9},-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0,\ \Delta_4=1>0,\ \Delta_5=-2<0,$$

і тому функція має в точках

$$M_5\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),\ M_6\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

умовний максимум $112/27$.

Відповідь. Дана функція досягає умовного мінімуму 4 в геометричних точках M_1, M_3, M_4 і умовного максимуму $112/27$ в точках M_2, M_5, M_6.

3.2.4. Абсолютні екстремуми

Нехай функція двох змінних $z = f(M) = f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області *D*. На підставі теореми 5 з п. 1.2.2 вона набуває найбільше *M* і найменше *m* значення в *D*: існують такі точки $M_1(x_1, y_1) \in D, M_2(x_2, y_2) \in D$, що

$$f(M_1) = f(x_1, y_1) = m = \min_D f(M) = \min_D f(x, y),$$
$$f(M_2) = f(x_2, y_2) = M = \max_D f(M) = \max_D f(x, y)$$

Числа m, M називаються **абсолютними ектремумами** функції в області *D*, і задача полягає в їх відшуканні.

Розв"язуючи задачу знаходження m, M, ми повинні взяти до уваги, що будь-яка з точок $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ може знаходитись або всередині області *D*, і тоді вона є стаціонарною точкою функції, або на її границі.

На підставі цього ми можемо сформулювати наступне

Правило. Щоб знайти найбільше і найменше значення (абсолютні екстремуми) функції двох змінних $z = f(M) = f(x,y)$, неперервної в замкненій обмеженій області *D*, достатньо діяти наступним чином:

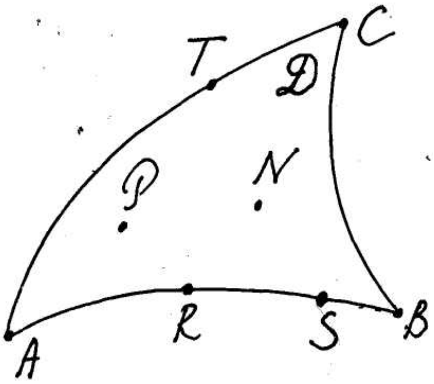


Рис. 5

1. Знайти всі внутрішні стаціонарні точки функції (наприклад, точки *N*, *P* на рис. 5).

2. Знайти стаціонарні точки на границі області (наприклад, точки *R*, S, T

на рис. 5).

3. Знайти значення функції в усіх цих точках, а також в кутових точках границі області, якщо вони є (наприклад, точки A, B, C на рис. 5)

4. Вибрати найбільше й найменше з отриманих значень.

Важливо відзначити наступне. Відшукання стаціонарних точок функції на границі області D є частиною задачі на умовний екстремум. Тому в разі потреби ці точки можна знаходити за допомоги функції Лагранжа.

Границя області D може складатися з декількох частин (наприклад, AB, BC, CA на рис. 5). В цьому випадку стаціонарні точки шукають на кожній з них.

Приклад. Знайти найбільше й найменше значення функції двох змінних

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

в області D, визначеній нерівностями $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 7$.

Функція неперервна в замкненій обмеженій області D, яка є трикутником OAB, утвореним координатними осями і прямою $x + y = 7$ (см. рис. 6).

1. $\begin{cases} z'_x = 2x - 2, \\ z'_y = 2y - 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y - 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

Точка $C(1; 2)$ є внутрішньою стаціонарною точкою області.

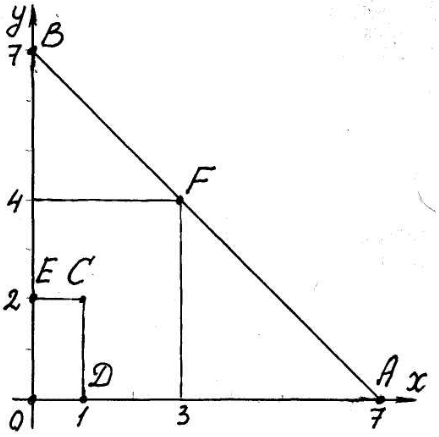


Рис. 6

2. Границя області D складається з трьох відрізків OA, OB, AB.

а) На відрізку OA, $y = 0 \Rightarrow z = x^2 - 2x, z' = 2x - 2$; $z' = 0$, якщо $2x - 2 = 0$, $x = 1$, і точка $D(1; 0)$ відрізка OA - стаціонарна.

б) На OB, $x = 0 \Rightarrow z = y^2 - 4y$; $z' = 0$, якщо $2y - 4 = 0$, $y = 2$, і ми отримуємо стаціонарну точку $E(0; 2)$.

в) На відрізку AB маємо

$y = 7 - x, z = x^2 + (7 - x)^2 - 2x - 4(7 - x) = 2x^2 - 12x + 21; z' = 0$, якщо $4x - 12 = 0$,

$x = 3$, і ми знаходимо ще одну стаціонарну точку $F(3;4) \in AB$.

3. Обчислимо значення функції в точках *C*, *D*, *E*, *F*, *O*, *A*, *B*.

$$z(C) = z(1,2) = -5;\ z(D) = z(1,0) = -1,\ z(E) = z(0,2) = -4,\ z(F) = z(3,4) = 3,$$

$$z(O) = z(0,0) = 0,\ z(A) = z(7,0) = 35,\ z(B) = z(0,7) = 21.$$

4. Відповідь: $\min\limits_D z = z(C) = z(1;2) = -5; \max\limits_D z = z(A) = z(7;0) = 35.$

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$z = x^2 - y^2$$

в області *D*, визначеній нерівністю $x^2 + y^2 \le 4$.

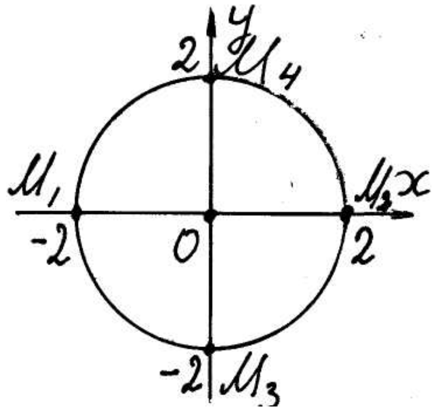


Рис. 7

Функція неперервна в замкненій обмеженій області *D* – крузі радіуса 2 с центром в початку координат $O(0;0)$ (рис. 7).

1. Початок координат $O(0;0)$ є єдиною стаціонарною точкою функції ($z'_x = 2x, z'_y = -2y; z'_x = z'_y = 0$ if $x = y = 0$).

2. При знаходженні стаціонарної точки на границі області ми маємо справу з задачею на умовний екстремум для даної функції з обмеженням (граничною умовою) $x^2 + y^2 = 4$. Функція Лагранжа задачі

$$L(\lambda, x) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4),$$

і відповідна система рівнянь, яка дає необхідну умову існування умовного екстремуму, є

$$\begin{cases} L'_x(\lambda, x) = 0, \\ L'_y(\lambda, x) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(1+\lambda) = 0, \\ y(-1+\lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв"язання системи (див. приклад з п.3.2.3 В) дає чотири стаціонарні точки, а саме:

$$M_1(-2;0), M_2(2;0), M_3(0;-2), M_4(0;2).$$

3. Значення функції в усіх знайдених точках

$$z(O)=z(0;0)=0, z(M_1)=z(-2;\,0)=0, z(M_2)=z(2;\,0)=4,$$
$$z(M_3)=z(0;\,-2)=-4, z(M_4)=z(0;\,2)=-4.$$

4. Відповідь:

$$m=\min_D z=z(M_3)=z(M_4)=-4;\ M=\max_D z=z(M_1)=z(M_2)=4\,.$$

ДЕЯКІ УКРАЇНСЬКО-РОСІЙСЬКІ ТЕРМІНИ І СЛОВОСПОЛУЧЕННЯ. ЧАСТИНА 1

Дійсні числа

1. абсолютна величина числа	абсолютная величина числа
2. взаємно-однозначна відповідність (*напр.* між множиною всіх дійсних чисел та множиною всіх точок числової [координатної] осі)	взаимно-однозначное соответствие (*напр.* между множеством всех вещественных чисел и множеством всех точек числовой [координатной] оси)
3. відповідати дійсному числу (про точку числової [координатної] осі)	соответствовать вещественному числу (о точке числовой [координатной] оси)
4. відповідати точці числової [координатної] осі (про дійсне число)	соответствовать точке числовой [координатной] оси (о вещественном числе)
5. вісь ~ координатна; ~ числова	ось ~ координатная; ~ числовая
6. добуток (переріз) множин X та Y, $X \cap Y$, X і Y	произведение (пересечение) множеств X и Y, $x \cap Y$, X и Y
7. дріб ~ звичайний; ~ десятковий; ~ десятковий скінченний; ~~ нескінченний; ~~~ неперіодичний; ~~~ періодичний	дробь ~ обыкновенная; ~ десятичная; ~ десятичная конечная; ~~ бесконечная; ~~~ непериодическая; ~~~ периодическая
8. еквівалентний/рівносильний	эквивалентный/равносильный
9. елемент множини ($x \in X$, x (мале) [мале x] є елементом множини X (великого) [великого X]; $x \notin X$, x не є елементом множини X)	элемент множества ($x \in X$, x (малое) [малое x] является элементом множества X (большого) [большого X]; $x \notin X$, x не является элементом множества X)
10.епсілон-окіл [ε-окіл] точки	эпсилон-окрестность [ε-окрестность] точки
11.за модулем	по модулю
12.інтервал ~ відкритий; ~~обмежений (інтервал $(a, b) \equiv]a, b[$; ~ замкнений [закритий] ; ~~ обмежений (відрізок $[a, b]$) ; ~ симетричний відносно точки	интервал ~ открытый ~~ ограниченный (интервал $(a, b) \equiv]\, a, b\, [$); ~ замкнутый [закрытый] ; ~~ ограниченный (отрезок $[a, b]$); ~ симметричный относительно точки
13.кінець інтервала (лівий/правий)	конец интервала (левый/правый)
14.координата точки	координата точки

15.містити щось (множина Y містить множину X, $Y \supseteq X$)	содержать что-либо (множество Y содержит множество X, $Y \supseteq X$)
16.міститися у множині (множина X міститься в множині Y, $X \subseteq Y$)	содержаться во множестве (множество X содержится во множестве Y, $X \subseteq Y$)
17.множина ~ всіх (натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних, дійсних *тощо*) чисел; ~ порожня; ~ яка має деяку властивість	множество ~ всех (натуральных, целых, рациональных, иррациональных, вещественных *и пр.*) чисел; ~ пустое; ~ обладающее некоторым свойством
18.модуль числа	модуль числа
19.належати множині ($x \in X$, x (мале) [(мале) x] належить множині X (великому) [(великому) X])	принадлежать множеству ($x \in X$, x (малое) [(малое) x] принадлежит множеству X (большому) [(большому) X])
20.напрям [напрямок] ~ додатний; ~~ числової [координатної] осі; ~ від"ємний; ~~ від"ємний числової [координатної] осі; ~ протилежний	направление ~ положительное; ~~ числовой [координатной] оси; ~ отрицательное; ~~ числовой [координатной] оси; ~ противоположное
21.об"єднання (сума) множин X і Y ($X \cup Y$, X чи Y)	объединение (сумма) множеств X и Y ($X \cup Y$, X или Y)
22.одиниця довжини/вимірювання	единица длины/измерения
23.окіл точки	окрестность точки
24.переріз (добуток) множин X та Y, $X \cap Y$, X і Y	пересечение (произведение) множеств X и Y, $X \cap Y$, X и Y
25.підмножина множини (множина X є підмножиною множини Y, $X \subseteq Y$, $Y \supseteq X$)	подмножество множества (множество X – подмножество множества Y, $X \subseteq Y$, $Y \supseteq X$)
26.початок координат	начало координат
27.представлятися [бути представленим/поданим] (у вигляді)	представляться [быть представленным] (в виде)
28.протилежний	противоположный
29.пряма (лінія)	прямая (линия)
30.рівносильний/еквівалентний	равносильный/эквивалентный
31.сенс нерівності	смысл неравенства
32.ставити у відповідність кожному дійсному числу цілком певну точку числової [координатної] осі	ставить в соответствие каждому вещественному числу вполне определённую точку числовой [координатной] оси

33.стрілка (визначає напрям числової [координатної] осі)	стрелка (определяет направление числовой [координатной] оси)
34.сума (об"єднання) множин X і Y ($X \cup Y$, X чи Y)	сумма (объединение) множеств X и Y ($X \cup Y$, X или Y)
35.число ~ від"ємне; ~ дійсне; ~ додатне; ~ дробове; ~ ірраціональне; ~ натуральне; ~ непарне; ~ обернене; ~ парне; ~ протилежне; ~ раціональне; ~ ціле	число ~ отрицательное; ~ вещественное; ~ положительное; ~ дробное; ~ иррациональное; ~ натуральное; ~ нечетное; ~ обратное; ~ четное; ~ противоположное; ~ рациональное; ~ целое

Відображення і функція

1. арґумент ~ проміжний ~ функції	аргумент ~ промежуточный ~ функции
2. арккосинус	арккосинус
3. арккотанґенс	арккотаненс
4. арксинус	арксинус
5. арктанґенс	арктангенс
6. відображення ~ взаємно однозначне; ~ множини X **в** множину Y; ~ множини X **на** множину Y; ~ обернене; ~ області визначення функції на множину її значень	отображение ~ взаимно однозначное; ~ множества X **в** множество Y; ~ множества X **на** множество Y; ~ обратное; ~ области определения функции на множество ее значений
7. відповідати елементу $x \in X$ (про елемент $y \in Y$)	соответствовать элементу $x \in X$ (об элементе $y \in Y$)
8. вільний член	свободный член
9. графік ~ висхідний (зліва направо); ~ низхідний (зліва направо); ~ функції;	график ~ восходящий (слева направо); ~ нисходящий (слева направо); ~ функции;

графік ~~ опуклий; ~~ угнутий [вгнутий]	график ~~ выпуклый ~~ вогнутый
10.загальний член числової послідовності	общий член числовой последовательности
11.змінна ~ залежна; ~ незалежна	переменная ~ зависимая; ~ независимая
12.значення арґументу	значение аргумента
13.значення функції в точці *a*	значение функции в точке *a*
14.зростати (про функцію)	возрастать (о функции)
15.коефіцієнт	коэффициент
16.косинус	косинус
17.косинусоїда	косинусоида
18.котанґенс	котангенс
19.котанґенсоїда	котангенсоида
20.кофункція	кофункция
21.максимум функції	максимум функции
22.мінімум функції	минимум функции
23.многочлен (*n*-го степеня)	многочлен (*n*-й степени)
24.множина значень функції	множество значений функции
25.набувати значення *b* в точці *a* (про функцію)	принимать значение *b* в точке *a* (о функции)
26.непарність функції	нечетность функции
27.арк-функція	арк-функция
28.область визначення функції	область определения функции
29.область значень функції	область значений функции
30.образ ~ елемента	образ ~ элемента
31.парність функції	четность функции
32.період функції	период функции
33.періодичність функції	периодичность функции
34.підніматися (зліва направо) (про графік/криву)	подниматься (слева направо) (о графике/кривой)
35.позначатися	обозначаться
36.позначення *чогось*	обозначение *чего-то*
37.позначити [позначати] *щось*	обозначать [обозначить] *что-л.*
38.прообраз ~ елемента	прообраз ~ элемента
39.пряма (лінія)	прямая (линия)
40.раціональний дріб	рациональная дробь
41.розташування кривої	расположение кривой

42.синус	синус
43.синусоїда	синусоида
44.спадати (про функцію)	убывать (о функции)
45.спадати/опускатися/спускатися (зліва направо) (про графік, криву)	нисходить/опускаться (слева направо) (о графике, функции)
46.спосіб ~ задання [визначення, подання, представлення] функції; ~ аналітичний; ~ графічний; ~ табличний	способ ~ задания [определения, представления] функции; ~ аналитический; ~ графический; ~ табличный
47.ставити у відповідність елементу $x \in X$ (x з X) елемент $y \in Y$ (y з Y)	ставить в соответствие элементу $x \in X$ (x из X) элемент $y \in Y$ (y из Y)
48.ставитись у відповідність елементу $x \in X$ (про елемент $y \in Y$)	ставиться в соответствие элементу $x \in X$ (об элементе $y \in Y$)
49.старший коефіцієнт	старший коэффициент
50.суперпозиція функцій	суперпозиция фунций
51.сходити/підійматися (зліва направо) (про криву, про графік)	восходить/подниматься (слева направо) (о кривой, о графике)
52.таблиця значень функції	таблица значений функции
53.танґенс	тангенс
54.танґенсоїда	тангенсоида
55.точка перегину	точка перегиба
56.точка перетину	точка пересечения
57.функція ~ від функції; ~ внутрішня; ~ гіперболічна; ~ елементарна; ~ зовнішня; ~ зростаюча; ~ ірраціональна; ~ логарифмічна; ~ монотонна; ~ незростаюча; ~ непарна; ~ неперіодична; ~ неспадна; ~ обернена; ~~ тригонометрична функція ~ опукла;	функция ~ от функции; ~ внутренняя; ~ гиперболическая; ~ элементарная; ~ внешняя; ~ возрастающая; ~ иррациональная; ~ логарифмическая; ~ монотонная; ~ невозрастающая; ~ нечетная; ~ непериодическая; ~ неубывающая; ~ обратная; ~~ тригонометрическая функция ~ выпуклая;

~ основна елементарна; ~ парна; ~ періодична; ~ показникова; ~ раціональна; ~ складена; ~ спадна; ~ стала; ~ степенева; ~ тригонометрична; ~ угнута	~ основная элементарная; ~ четная; ~ периодическая; ~ показательная; ~ рациональная; ~ сложная; ~ убывающая; ~ постоянная; ~ степенная; ~ тригонометрическая; ~ вогнутая
58.числова послідовність	числовая последовательность

Комплексні числа і многочлени

1. алгебрична форма комплексного числа	алгебраическая форма комплексного числа
2. алгебричне рівняння першого [другого, третього, *n*-го] степеня	алгебраическое уравнение первой [второй, третьей, *n*-ой] степени
3. аргумент комплексного числа	аргумент комплексного числа
4. взаємно спряжені комплексні числа	взаимно сопряжённые комплексные числа
5. віднімання комплексних чисел	вычитание комплексных чисел
6. дискримінант квадратного рівняння	дискриминант квадратного уравнения
7. дійсна вісь	вещественная ось
8. дійсна частина комплексного числа	вещественная часть комплексн. числа
9. ділення комплексних чисел	деление комплексных чисел
10.дільник (*напр.,* вільного члена)	делитель (*напр.,* свободного члена)
11.додавання комплексних чисел	сложение комплексных чисел
12.ен-кратний (*n*-кратний) корінь [*n*-кратний нуль]	эн-кратный (*n*-кратный) корень [*n*-кратный нуль]
13.зображення комплексного числа (на комплексній площині)	изображение комплексного числа (на комплексной плоскости)
14.зобразити комплексне число (на комплексній площині)	изобразить комплексное число (на комплексной плоскости)
15.квадратне рівняння [квадратна нерівність]	квадратное уравнение [квадратное неравенство]
16.квадратний тричлен	квадратный трёхчлен
17.комплексна площина	комплексная плоскость
18.комплексне число	комплексное число

19.комплексно-спряжене число	комплексно-сопряжённое число
20.корінь [нуль] многочлена	корень [нуль] многочлена
21.кратний корінь	кратный корень
22.многочлен з одиничним старшим коефіцієнтом	многочлен с единичным старшим коэффициентом
23.многочлен з цілими коефіцієнтами	многочлен с целыми коэффициентами
24.многочлен першого [другого, третього, *n*-го] степеня	многочлен первой [второй, третьей, *n*-ой] степени
25.множення комплексних чисел	умножение комплек-сных чисел
26.модуль комплексного числа	модуль комплексного числа
27.піднесення до степеня [степенювання] комплексного числа	возведение в степень комплексного числа
28.піднести до степеня [степенювати]	возвести в степень комплексное число
29.показникова форма комплексного числа	показательная форма комплексного числа
30.простий [однократний, одноразовий] корінь [нуль]	простой [однократный] корень [нуль]
31.розкладання многочлена на множники	разложение многочлена на множители
32.розкладатися в добуток многочленів степеня не вище другого (про многочлен)	разлагаться в произведение многочленов степени не выше второй (о многочлене)
33.розкласти многочлен на лінійні й квадратичні (з від"ємними дискримінантами) множники	разложить многочлен на линейные и квадратичные (с отрицательными дискриминантами) множители
34.розкласти на множники	разложить на множители
35.спряжене комплексне число	сопряжённое комплексное число
36.старший коефіцієнт	старший коэффициент
37.старший член (многочлена)	старший член (многочлена)
38.тригонометрична форма комплексного числа	тригонометрическая форма комплексного числа
39.уявна вісь	мнимая ось
40.уявна одиниця	мнимая единица
41.уявна частина комплексного числа	мнимая часть комплексного числа
42.уявне число	мнимое число
43.формула Муавра, Ейлера	формула Муавра, Эйлера
44.цілий корінь многочлена з цілими коефіцієнтами	целый корень многочлена с целыми коэффицентами
45.чисто уявне число	чисто мнимое число

Вступ до аналізу

1. анулюватися	аннулироваться
2. вибрати довільну точку на кожному інтервалі	выбрать произвольную точку на каждом интервале
3. відображення ~ множини X **в** множину Y; ~ множини X **на** множину Y; ~ області визначення функції на множину її значень	отображение ~ множества X **в** множество Y; ~ множества X **на** множество Y; ~ области определения функции на множество ее значений
4. властивість (*напр.,* границі)	свойство (*напр.,* предела)
5. границя ~ нескінченна; ~ скінченна; ~ функції; ~~ $f(x)$, якщо x прямує до… (при прямуванні x до…, при x прямуючому до …); ~~ в точці a двобічна/двостороння; ~~~~ зліва; ~~~~ ліва/лівобічна/лівостороння; ~~~~ однобічна/одностороння; ~~~~права/правобічна/правостороння ~~~~ справа; ~ стандартна; ~~ на нескінченності; ~~ на мінус нескінченності; ~~ на плюс нескінченності; ~ числової послідовності	предел ~ бесконечный; ~ конечный; ~ функции; ~~ $f(x)$, если x стремится к … (при стремлении x к …; при x, стремящемся к…); ~~ в точке a двусторонний; ~~~~ слева; ~~~~ левый/левосторонний; ~~~~ односторонний; ~~~~ правый/правосторонний; ~~~~ справа; ~ замечательный; ~~ на бесконечности; ~~ на минус бесконечности; ~~ на плюс бесконечности; ~ числовой последовательности
6. границя ~ множини; ~ області	граница ~ множества; ~ области
7. графік функції ~~ двох змінних ~~ однієї змінної, неперервної на відрізку ~~~~, яка має точки розриву	график функции ~~ двух переменных ~~ одной переменной, непрерывной на отрезке ~~~~, которая имеет точки разрыва
8. дірка в графіку функції (в точці її усувного розриву)	дыра в графике функции (в точке ее устранимого разрыва)
9. еквівалентні нескінченно великі	эквивалентные бесконечно большие
10.еквівалентні нескінченно малі	эквивалентные бесконечно малые

11.еквівалентність	эквивалентность
12.епсілон-окіл (ε-окіл)	эпсилон-окрестность (ε-окрестность)
13.єдиність границі	единственность предела
14.загальний член числової послідовності	общий член числовой последовательности
15.зазнавати розрив/скачок в точці a (про функцію)	претерпевать разрыв/скачок в точке a (о функции)
16.зберігати сталий/фіксований знак [не змінювати знак] на інтервалі	сохранять постоянный/фиксированный знак [не изменять знак] на интервале
17.збігатися (до числа a) (про числову послідовність)	сходиться (к числу a) (о числовой последовательности)
18.збіжність числової послідовності (до числа a)	сходимость числовой последовательности (к числу a)
19.знайти ~ границю (функції, числової послідовності); ~ знак функції на (кожному) інтервалі; ~ знак функції у вибраній точці; ~ інтервали знакосталості функції (*напр.,* методом інтервалів)	найти ~ предел (функции, числовой последовательности) ; ~ знак функции на (каждом) интервале; ~ знак функции в выбранной точке ~ интервалы знакопостоянства функции (*напр.,* методом интервалов)
20.зростання (строге, нестроге)	возрастание (строгое, нестрогое)
21.зростати (строго, нестрого)	возрастать (строго, нестрого)
22.зростаючий (строго, нестрого)	возрастающий (строго, нестрого)
23.інтервал знакосталості функції (*тобто* інтервал, на якому функція має сталий знак)	интервал знакопостоянства функции (*т.е.* интервал, на котором функция имеет постоянный знак)
24.корінь [нуль] (рівняння, чисельника, знаменника, функції *тощо*)	корень [нуль] (уравнения, числителя, знаменателя, функции *и пр.*)
25.круг (радіуса R з центром (в точці) a)	круг (радиуса R с центром (в точке) a)
26.куля (радіуса R з центром (в точці) a)	шар (радиуса R с центром (в точке) a)
27.лінія рівня функції двох змінних	линия уровня функции двух переменных
28.метод інтервалів	метод интервалов
29.множина ~ точок ~ точкова ~ зв"язка ~ незв"язна ~ необмежена ~ обмежена	множество ~ точек ~ точечное ~ связное ~ несвязное ~ неограниченное ~ ограниченное

множина ~ відкрита	множество ~ открытое
30.набувати значення різних знаків	принимать значения разных знаков
31.найбільше (M) значення функції, неперервної на відрізку	наибольшее (M) значение функции, непрерывной на отрезке
32.найменше (m) значення функції, неперервної на відрізку	наименьшее (m) значение функции, непрерывной на отрезке
33.невизначеність вигляду	неопределённость вида
34.неперервна/суцільна крива	непрерывная/сплошная кривая
35.неперервність ~ функції в точці (зліва/справа); ~~~~ двобічна [двостороння]; ~~~~ лівобічна/лівостороння; ~~~~ однобічна [одностороння]; ~~~~ правобічна/правостороння ~~ на інтервалі (відрізку, множині *тощо*)	непрерывность ~ функции в точке (слева/справа) ~~~~ двусторонняя; ~~~~ левосторонняя; ~~~~ односторонняя; ~~~~ правосторонняя ~~ на интервале (отрезке, множестве *и пр.*)
36.нескінченно велика (змінна величина, функція, числова послідовність)	бесконечно большая (переменная величина, функция, числовая последовательность)
37.нескінченно мала (змінна величина, функція, числова послідовність)	бесконечно малая (переменная величина, функция, числовая последовательность)
38.область ~ в площині xOy; ~ в просторі (тривимірному, $n-$вимірному); ~ визначення функции; ~ замкнена; ~ замкнена обмежена; ~ обмежена	область ~ в плоскости xOy; ~ в пространстве (трехмерном, $n-$мерном); ~ определения функции; ~ замкнутая; ~ замкнутая ограниченная; ~ ограниченная
39.обмежений ~ зверху ~ знизу	ограниченный ~ сверху ~ снизу
40.однобічна [одностороння] неперервність функції в точці a	односторонняя непрерывность функции в точке a
41.окіл ~ точки ~~ круговий ~~ кульовий ~~ проколений ~точки сферичний	окрестность ~ точки ~~ круговая ~~ шаровая ~~ проколотая ~точки сферическая

окіл ~ з виколеною точкою	окрестность ~ с выколотой точкой
42.перетворюватися на/в нуль	обращаться в нуль
43.перехід ~ граничний; ~ до границі	переход ~ предельный; ~ к пределу
44.поверхня рівня функції трьох змінних	поверхность уровня функции трёх переменных
45.поділити інтервал на частини нулями й точками розриву функції	разделить интервал на части нулями и точками разрыва функции
46.приріст ~ арґументу; ~ повний (функції декількох змінних) ~ функції в точці a; ~ частковий (функції декількох змінних)	приращение ~ аргумента; ~ полное (функции нескольких переменных) ; ~ функции в точке a; ~ частичное (функции нескольких переменных)
47.природна [натуральна] область визначення функції	естественная [натуральная] область определения функции
48.проколений ε-окіл точки	проколотая ε-окрестность точки
49.простір ~ n - вимірний ~ двовимірний ~ одновимірний ~ тривимірний	пространство ~ n - мерное ~ двумерное ~ одномерное ~ трехмерное
50.прямування до числа a (зліва, справа, до плюс чи мінус нескінченності)	стремление к числу a (слева, справа, к плюс или минус бесконечности)
51.прямувати до числа a (зліва, справа, до плюс чи мінус нескінченності)	стремиться к числу a (слева, справа, к плюс или минус бесконечности)
52.розв"язати нерівність (*напр.,* методом інтервалів)	решить неравенство (*напр.,* методом интервалов)
53.розкрити невизначеність	раскрыть неопределённость
54.розподіл знаків функції на интервалах	распределение знаков функции на интервалах
55.розрив ~ другого роду; ~ нескінченний; ~ першого роду; ~ скінченний; ~ усувний (функції в точці); ~ функції	разрыв ~ второго рода; ~ бесконечный; ~ первого рода; ~ конечный; ~ устранимый (функции в точке); ~ функции
56.спадання (строге, нестроге)	убывание (строгое, нестрогое)

57.спадати (строго, нестрого)	убывать (строго, нестрого)
58.спадний (строго, нестрого)	убывающий (строго, нестрого)
59.стрибок	скачок
~ графіка функції в точці її розриву;	~ графика функции в точке её разрыва;
~ нескінченний;	~ бесконечный
~ скінченний;	~ конечный
~ функції в точці її розриву	~ функции в точке её разрыва
60.суперпозиція функцій	суперпозиция функций
61.сфера (радіуса r з центром (в точці) a)	сфера (радиуса r с центром (в точке) a)
62.точка	точка
~ внутрішня;	~ внутренняя;
~ гранична;	~ граничная;
~ зовнішня;	~ внешняя;
~ множини;	~ множества;
~ неперервності;	~ непрерывности;
~ розриву;	~ разрыва;
~~ другого роду;	~~ второго рода;
~~ першого роду;	~~ первого рода;
~ усувного розриву	~ устранимого разрыва
63.функція	функция
~ від функції;	~ от функции;
~ двох [трьох, n, декількох] змінних;	~ двух [трёх, n, нескольких] переменных;
~ натурального арґументу;	~ натурального аргумента;
~ необмежена;	~ неограниченная;
~ неперервна;	~ непрерывная;
~ нескінченно велика;	~ бесконечно большая;
~ нескінченно мала;	~ бесконечно малая;
~ обмежена;	~ ограниченная;
~ однієї змінної;	~ одной переменной;
~ складена;	~ сложная;
~ неперервна в точці (зліва/справа);	~ непрерывная в точке (слева/справа) ;
~ неперервна на інтервалі (відрізку, множині *тощо*)	~ непрерывная на интервале (отрезке, множестве *и т.п.*);
~ розривна в точці	~ разрывная в точке
64.числова послідовність	числовая последовательность
~~ збіжна (до числа a);	~~ сходящаяся (к числу a);
~~ розбіжна	~~ расходящаяся
65.член числової послідовності	член числовой последовательности

Диференціальне числення

1. arґумент ~ проміжний; ~ функції	аргумент ~ промежуточный; ~ функции
2. властивість інваріантності форми диференціала	свойство инвариантности формы дифференциала
3. геометричний сенс	геометрический смысл
4. головна лінійна частина приросту функції	главная линейная часть приращения функции
5. ґрадієнт	градиент
6. границя відношення приросту функції до відповідного приросту арґументу при прямуванні останнього до нуля	предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента при стремлении последнего к нулю
7. граничне положення січної	предельное положение секущей
8. давати арґументу приріст	давать аргументу приращение
9. диференціал ~ першого [другого, третього, вищого, n-го] порядку; ~ повний; ~ частинний по x, y, …	дифференциал ~ первого [второго, третьего, высшего, n-го] порядка; ~ полный; ~ частный по x, y, …
10. диференціальне числення	дифференциальное исчисление
11. диференційовність (функції)	дифференцируемость (функции)
12. диференціювання ~ за допомогою логарифмування	дифференцирование ~ при помощи логарифмирования
13. диференціювати (функцію)	дифференцировать (функцию)
14. дотична ~ до кривої (в даній точці); ~ ліва; ~ площина (до поверхні); ~ права	касательная ~ к кривой (в данной точке); ~ левая; ~ плоскость (к поверхности); ~ правая
15. еластичність	эластичность
16. задавати/задати (функцію, криву) ~ в полярних координатах, полярним рівнянням; ~ неявно, неявним рівняням; ~ параметрично, параметричними рівнянями; ~ явно, явним рівнянням	задавать/задать (функцию, кривую) ~ в полярных координатах, полярым уравнением; ~ неявно, неявным уравнением; ~ параметрически, параметрическими уравнениями; ~ явно, явным уравнением
17. залишковий член	остаточный член
18. знайти/відшукати/обчислити похідну/диференціал	найти/отыскать/вычислить производную/дифференциал

19.знаходження/відшукання/обчислення похідної/диференціала	нахождение/отыскание/вычисление производной/дифференциала
20.зображати/зобразити (*напр*. криву)	изображать/изобразить (*напр*. кривую)
21.зображення (*напр*. кривої)	изображение (*напр*. кривой)
22.кут між двома кривими, що перетинаються	угол между двумя пересекающимися кривыми
23.кутова точка графіка	угловая точка графика
24.матриця Гессе	матрица Гессе
25.механічний сенс	механический смысл
26.наближатися до *чогось* (про точку кривої, графіка)	приближаться к *чему-то* (о точке кривой, графика)
27.наближене значення	приближённое значение
28.наближене обчислення величини	приближённое вычисление величины
29.наближено дорівнювати	приближённо равняться
30.напрям, напрямок ~ визначений двома даними точками (від точки *a* до точки *b*) ~ даного вектора	направление ~ определённое двумя данными точками (от точки *a* до точки *b*) ~ данного вектора
31.нормаль до кривої (в даній точці)	нормаль к кривой (в данной точке)
32.обчислити *щось* з точністю до 0.001	вычислить *что-л.* с точностью до 0,001
33.отримувати приріст	получать приращение
34.параметр	параметр
35.перетин *чогось з чимсь*	пересечение *чего-то с чем-то*
36.перетинати *щось*	пересекать *что-л.*
37.перетинатися з *чимсь* (в точці)	пересекаться с *чем-л.* (в точке)
38.піддотична	подкасательная
39.піднормаль	поднормаль
40.похибка ~ абсолютна; ~ відносна	погрешность абсолютная; относительная
41.похідна ~ *n*-го порядку ~ ліва ~ логарифмічна ~ нескінченна ~ неявної функції ~ першого/другого/третього/вищого порядку ~ повна (складеної функції) ~ права ~ скінченна ~ складеної функції	производная ~ *n*-го порядка ~ левая ~ логарифмическая ~ бесконечная ~ неявной функции ~ первого/второго/третьего/высшего порядка ~ полная (сложной функции) ~ правая ~ конечная ~ сложной функции

похідна ~ у напрямку [за напрямком] ~ функції (в точці) ~ функції у даному напрямку [за даним напрямком] ~ частинна *n*-го порядку ~ частинна мішана ~ частинна першого [другого, третього, вищого] порядку ~ частинна по *x*, *y*	производная ~ по направлению ~ функции (в точке) ~ функции в данном направлении ~ частная *n*-го поряда ~ частная смешанная ~ частная первого [второго, третьего, высшего] порядка ~ частная по *x*, *y*
42.правило диференціювання	правило дифференцирования
43.при фіксованому *x* (*або y*) і *y* (*відп. x*) як змінному	при фиксированном *x* (*или y*) и *y* (*соотв. x*) в качестве переменной
44.приріст ~ арґументу; ~ повний (функції декількох змінних); ~ функції (в точці); ~ частинний по *x*, *y*, … (функції)	приращение ~ аргумента; ~ полное (функции нескольких переменных); ~ функции (в точке); ~ частное по *x*, *y*, … (функции)
45.рівняння дотичної ~~ до кривої (в даній її точці); ~~ площини до поверхні	уравнение касательной ~~ к кривой (в данной её точке); ~~ плоскости к поверхности
46.рівняння нормалі до кривої [до поверхні] (в даній її точці)	уравнение нормали к кривой [к поверхности] (в данной её точке)
47.розвинення функції за допомогою формули (Тейлора, Маклорена)	разложение функции с помощью формулы (Тейлора, Маклорена)
48.січна	секущая
49.суперпозиція функцій	суперпозиция функций
50.точка ~ дотику; ~ перетину	точка ~ касания; ~ пересечения
51.точність наближеного обчислення	точность приближённого вычисления
52.фізичний сенс	физический смысл
53.функція ~ від функції; ~ внутрішня; ~ диференційовна; ~ допоміжна; ~ неявна; ~ обернена; ~ складена; ~ явна	функция ~ от функции; ~ внутренняя; ~ дифференцируемая; ~ вспомогательная; ~ неявная; ~ обратная; ~ сложная; ~ явная

Застосування диференціального числення

1. абсолютний ~ екстремум ~ максимум ~ мінімум	абсолютный ~ экстремум ~ максимум ~ минимум
2. асимптота ~ вертикальна; ~ горизонтальна; ~ похила	асимптота ~ вертикальная; ~ горизонтальная; ~ наклонная
3. висловити гіпотезу	высказать гипотезу
4. висхідний (зліва направо) графік	восходящий (слева направо) график
5. від"ємно-визначена квадратична форма	отрицательно определённая квадратичная форма
6. відносний (екстремум, мінімум, максимум)	относительный (экстремум, минимум, максимум)
7. відокремлювати ділянку/частину опуклості лінії від ділянки/частини її угнутості	отделять участок/часть выпуклости линии от участка/части её вогнутости
8. відповідати екстремуму (про точку кривої/графіка)	соответствовать экстремуму (о точке кривой/графика)
9. встановити умову	установить условие
10.гіпотеза	гипотеза
11.глобальний *див.* абсолютний	глобальный *см.* абсолютный
12.головний мінор першого [другого, третього, *n*-го] порядку	главный минор первого [второго, третьего, *n*-го] порядка
13.графік функції	график функции
14.дослідження (функції, поведінки функції, критичної/стаціонарної точки *тощо*)	исследование (функции, поведения функции, критической/стационарной точки *и пр.*)
15.дослідити (функцію, критичну/стаціонарну точку *і т.ін.*)	исследовать (функцию, критическую /стационарную точку *и пр.*)
16.дослідити функцію на (локальний, відносний, абсолютний, умовний) екстремум	исследовать функцию на (локальный, относитель-ный, абсолютный, условный) экстремум
17.достатня умова	достаточное условие
18.дотична в точці перегину	касательная в точке перегиба
19.екстремальна задача	экстремальная задача
20.екстремальна точка, точка екстремуму	экстремальная точка, точка экстремума
21.екстремум ~ абсолютний; ~ відносний; ~ глобальний;	экстремум ~ абсолютный; ~ относительный; ~ глобальный;

екстремум ~ локальний; ~ можливий; ~ передбачуваний; ~ умовний; ~ функції однієї [двох, трьох, *n*, декількох] змінних	экстремум ~ локальный; ~ возможный ~ предполагаемый; ~ условный; ~ функции одной [двух, трёх, *n*, нескольких] переменных
22.емпіричне співвідно-шення [емпірична залежність, емпіричний зв"язок] (між змінними)	эмпирическое соотно-шение [эмпирическая зависимость, эмпириче-ская связь] (между пере-менными)
23.ескіз графіка функції	эскиз, набросок графика функции
24.етап дослідження	этап исследования
25.загальна схема [загаль-ний план] дослідження функцій і побудови графіків	общая схема [общий план] исследования функций и построения графиков
26.залежність (лінійна, не-лінійна, квадратична, па-раболічна *і т.ін.*) між змінними…	зависимость (линейная, нелинейная, квадратиче-ская, параболическая *и т.д.*) между переменны-ми…
27.знайти (локальні, відно-сні, абсолютні, умовні) екстремуми [мінімуми, максимуми] даної функ-ції	найти (локальные, отно-сительные, абсолютные, условные) экстремумы [минимумы, максимумы] данной функции
28.знайти *щось* якнайкра-ще	найти *что-л.* наилучшим образом
*29.*знаходитись ~ вище *чогось* ~ зліва/ліворуч від *чогось* ~ нижче *чогось* ~ справа/праворуч від *чогось*	находиться ~ выше *чего-л.* ~ слева *от чего-л.* ~ ниже *чего-л.* ~ справа *от чего-л.*
30.знаходитись, бути розта-шованим	находиться/располагать-ся, быть расположенным
31.зображати/зобразити (*напр.* криву)	изображать/изобразить (*напр.* кривую)
32.зображення (*напр.* кривої)	изображение (*напр.*, кривой)
33.зростання (строге/нестроге)	возрастание (строгое/нестрогое)
34.зростати (строго/нестрого)	возрастать (строго/нестрого)
35.зростаючий (строго/нестрого)	возрастающий (строго/нестрого)
36.інтервал зростання функції	интервал возрастания функции
37.інтервал монотонності функції	интервал монотонности функции
38.інтервал спадання функції	интервал убывания функции
39.існування	существование
40.квадратична форма ~ від"ємно-визначена;	квадратичная форма ~ отрицательно определенная;

~ додатно-визначена	~ положительно определённая
41.квадратична форма	квадратичная форма
42.креслення	чертёж
43.кутова точка області	угловая точка области
44.лежати *див.* знаходитись	лежать *см.* находиться
45.лінія реґресії y на x	линия регрессии y на x
46.локальний (екстремум, мінімум, максимум)	локальный (экстремум, минимум, максимум)
47.максимізація	максимизация
48.максимізувати	максимизировать
49.максимум ~ абсолютний; ~ відносний; ~ глобальний; ~ локальний; ~ можливий; ~ передбачуваний; ~ умовний; ~ функції однієї [двох, трьох, *n*, декількох] змінних	максимум ~ абсолютный; ~ относительный; ~ глобальный; ~ локальный; ~ возможный ~ предполагаемый; ~ условный; ~ функции одной [двух, трёх, *n*, нескольких] переменных
50.матриця Гессе	матрица Гессе
51.метод ~ найменших квадратів; ~ невизначених множників (Лаґранжа)	метод ~ наименьших квадратов; ~ неопределённых множителей (Лагранжа)
52.мінімізація	минимизация
53.мінімізувати	минимизировать
54.мінімум ~ абсолютний; ~ відносний; ~ глобальний; ~ локальний; ~ можливий; ~ передбачуваний; ~ умовний; ~ функції однієї [двох, трьох, *n*, декількох] змінних	минимум ~ абсолютный; ~ относительный; ~ глобальный; ~ локальный; ~ возможный ~ предполагаемый; ~ условный; ~ функции одной [двух, трёх, *n*, нескольких] переменных
55.монотонний	монотонный
56.монотонність	монотонность
57.монотонно (зростати, спадати)	монотонно (возрастать, убывать)
58.наближатися до *чогось* (про точку графіка/лінії	приближаться к *чему-то* (о точке графика/линии

59.наближене значення	приближённое значение
60.наводити на думку, під-казувати (залежність між змінними … вигляду…)	наводить на мысль, под-сказывать (зависимость между переменными … вида…)
61.найбільше значення функції	наибольшее значение функции
62.найбільше значення функції, неперервної на відрізку [в замкненій обмеженій області]	наибольшее значение функции, непрерывной на отрезке [в замкнутой ограниченной области]
63.найбільше й найменше значення функції, неперервної на відрізку [в замкненій обмеженій області]	наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке [в замкнутой ограниченной области]
64.найменше значення функції	наименьшее значение функции
65.найменше значення функції, неперервної на відрізку [в замкненій обмеженій області]	наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке [в замкнутой ограниченной области]
66.не зростати	не возрастать
67.не спадати	не убывать
68.незростаючий	невозрастающий
69.необхідна умова	необходимое условие
70.неспадаючий	неубывающий
71.низхідний [той, що опускається] (зліва направо) (про графік/лінію)	нисходящий [опускающийся] (слева направо) (о графике/линии)
72.нормальна система методу найменших квадратів	нормальная система метода наименьших квадратов
73.опуклий	выпуклый
74.опуклість	выпуклость
75.перегин (графіка функції)	перегиб (графика функции)
76.побудова графіка по точках	построение графика по точкам
77.побудова графіка функції	построение графика функции
78.побудувати графік функції	построить график функции
79.побудувати лінію по точках	построить линию по точкам
80.поведінка (функції/кривої)	поведение (функции/кривой)
81.положення, розташування (*напр.* лінії)	положение, расположение (*напр.* линии)
82.попередній ескіз графіка функції	предварительный эскиз/набросок графика функции
83.проходити через точку	проходить через точку
84.пряма реґресії y на x	прямая регрессии y на x
85.рисунок ~ схематичний; ~ точний	рисунок ~ схематический; ~ точный
86.робити рисунок/креслення	делать рисунок/чертеж
87.розв"язати задачу на (локальний,	решить задачу на (локальный, абсолю-

абсолютний, умовний) екстремум	тный, условный) экстремум
88.розміщуватися, бути розташованим	располагаться, быть расположенным
89.спадання (строге/нестроге)	убывание (строгое/нестрогое)
90.спадати (строго/нестрого)	убывать (строго/нестрого)
91.спадати/опускатися/спускатися (зліва направо) (про графік/лінію)	нисходить/опускаться (слева направо) (о графике/линии)
92.спадаючий (строго/нестрого)	убывающий (строго/нестрого)
93.строгий [строга] (монотонність, зростання, спадання *тощо*)	строгий [строгая] (монотонность, возрастание, убывание *и пр.*)
94.строго (зростати, спадати, монотонний, зростаючий, спадаючий)	строго (возрастать, убывать, монотонный, возрастающий, убывающий)
95.сума квадратів (нев"язок/помилок/похибок)	сумма квадратов (невязок/ошибок/погрешностей)
96.сходити/підійматися (зліва направо) (про графік/лінію)	восходить/подниматься (слева направо) (о графике/линии)
97.точка ~ графіка/лінії; ~ екстремальна; ~ естремуму; ~ звороту; ~ критична; ~ кутова (границі області); ~ локального екстремуму ~ максимуму; ~ мінімуму; ~ можливого екстремуму; ~ перегину; ~ стаціонарна; ~ умовного екстремуму ~ яка відповідає екстремуму	точка ~ графика/линии; ~ экстремальная; ~ эктремума; ~ возврата; ~ критическая; ~ угловая (границы области); ~ локального экстремума ~ максимума; ~ минимума; ~ возможного экстремума; ~ перегиба; ~ стационарная; ~ условного экстремума ~ соответствующая экстремуму
98.угнутий	вогнутый
99.угнутість	вогнутость
100. умова *чогось*	условие *чего-л.*
101. умовний ~ екстремум; ~ максимум; ~ мінімум	условный ~ экстремум; ~ максимум; ~ минимум

ЧАСТИНА ДРУГА: ІНТЕҐРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РЯДИ

ІНТЕҐРАЛЬНЕ ЧИСЛЕНННЯ

4. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕҐРАЛ

4.1. ПЕРВІСНА

4.1.1. Означення первісної

Головна задача диференціального числення – знайти похідну $f'(x)$ або диференціал

$$df(x) = f'(x)dx$$

даної функції $f(x)$.

Головна задача інтеґрального числення – обернена: знайти функцію $F(x)$, знаючи її похідну $F'(x) = f(x)$ або диференціал

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x).$$

Приклад 1. Скласти рівняння лінії, яка проходить через точку $A(2;3)$, знаючи, що кутовий коефіцієнт дотичної до лінії в довільній її точці $M(x;y)$ дорівнює x^2.

Нехай $y = y(x)$ - шукане рівняння лінії. На підставі умови і геометричного сенсу похідної можемо записати

$$y'(x) = x^2.$$

Ми повинні знайти функцію $y(x)$, знаючи її похідну x^2.

Очевидно, що

$$y(x) = x^3/3 + C,$$

де C – деяка стала. Ми можемо знайти її значення з умови $y(2) = 3$, звідки

$$3 = 2^3/3 + C, C = 1/3.$$

Отже, лінія, про яку йдеться в прикладі, має рівняння

$$y(x) = x^3/3 + 1/3.$$

Означення 1. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на деякому інтервалі $[a, b]$, якщо для будь-якого $x \in [a, b]$ похідна $F'(x)$ функції $F(x)$ дорівнює $f(x)$,

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

Приклад 2. Функція $F(x) = x^3/3$ з попереднього прикладу є первісною функції $f(x) = x^2$, а функції

$$F_1(x) = \sin x, F_2(x) = \sin x - 5, F_3(x) = \sin x + 16$$

- первісними функції $f(x) = \cos x$ на множині всіх дійсних чисел $\Re^1 = (-\infty, \infty)$, бо для довільного $x \in \Re^1$ маємо

$$F'(x) = x^2, F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = \cos x = f(x).$$

Теорема 1 (існування первісної). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b]$, то вона має первісну на цьому інтервалі.

Справедливість теореми буде доведено пізніше.

4.1.2. Властивості первісної

1. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то для будь-якої сталої C сума $F(x) + C$ також є первісною.

■Дійсно, якщо $F'(x) = f(x)$, то для будь-якої сталої C маємо

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

тобто $F(x) + C$ - первісна функції $f(x)$.■

2. Якщо функції $F_1(x)$, $F_2(x)$ є первісними функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$, то вони відрізняються тільки сталим доданком, тобто їх різниця є сталою на $[a, b]$,

$$F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}.$$

■За умови $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, і тому тотожньо на $[a, b]$

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

На підставі наслідку з теореми Лаґранжа різниця $F_1(x)-F_2(x)$ є сталою на інтервалі $[a,b]$.■

Остання властивість дозволяє отримати загальну форму первісної даної функції $f(x)$: будь-яку первісну можна подати у вигляді суми

$$F(x)+C, \qquad (2)$$

де $F(x)$ - якась одна з первісних функції $f(x)$, а C – довільна стала.

Можна сказати, рівність (2) дає **множину всіх первісних** функції $f(x)$.

4.2. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕҐРАЛ

4.2.1. Означення невизначеного інтеґрала

Означення 2. Множина всіх первісних функції $f(x)$ називається **невизначеним інтеґралом** цієї функції і позначається символом

$$\int f(x)dx.$$

Символ $\int$ називається знаком невизначеного інтеґрала; $f(x)$ - підінтеґральною функцією, $f(x)dx$ - підінтеґральним виразом, x – змінною інтеґрування, C – сталою інтеґрування.

На підставі означення 2 і формули (2) ми можемо написати

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad (3)$$

де $F(x)$ - якась одна з первісних функції $f(x)$, а C – довільна стала.

Приклад 3. Ми вже знаємо, що функція $F(x)=x^3/3$ є однією з первісних функції $f(x)=x^2$, а тому

$$\int x^2dx = x^3/3+C.$$

Взагалі, для довільного дійсного числа α, відмінного від -1, функція

$$F(x)=x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$$

однією з первісних степеневої функції

$$f(x)=x^{\alpha},$$

отже

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$$

Зокрема, при $\alpha = 0$ маємо

$$\int dx = \int x^{0}dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} = x + C.$$

У випадку $\alpha = -1$ ми маємо функцію $f(x) = 1/x$, однією з первісних якої є функція $F(x) = \ln|x|$, так що

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Знаходження первісної (або невизначеного інтеґрала) функції $f(x)$ називається її **інтеґруванням**.

Проінтеґрувати функцію означаеє знайти її первісну (або її невизначений інтеґрал).

На підставі означення невизначеного інтеґрала і таблиці похідних ми можемо утворити таблицю найпростіших інтеґралів.

Таблиця найпростіших інтеґралів

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$

1 а) $\int dx = x + C$; **1 б)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$; **1 в)** $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$; **3 а)** $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$, k - стала.

4. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$; **4 а)** $\int a^{kx}dx = \frac{a^{x}}{k\ln a} + C$, k - стала.

5. $\int \cos xdx = \sin x + C$; **5 а)** $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + C$, a - стала.

6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$; **6 а)** $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$, a - стала.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} \equiv \tan x + C \equiv tgx + C$. **8.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} \equiv -\cot x + C \equiv -ctgx + C$.

9. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C = arctgx + C$ **10.** $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \equiv \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. **12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ **(формула високого логарифму).**

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$ **(формула довгого логарифму).**

Формули 1 – 9, 11 є очевидними, в справедливості інших, зокрема формул 13, 14, ми впевнимось нижче, але корисно записати їх в таблиці з самого початку. Всі інтеґрали таблиці будемо називати **табличними**.

Приєднаємо сюди ще чотири формули, які часто-густо зустрічаються в застосуваннях, а саме:

$$\textbf{15. } \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

$$\textbf{16. } \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

$$\textbf{17. } \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C.$$

$$\textbf{18. } \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C.$$

4.2.2. Властивості невизначеного інтеґрала

1. Похідна невизначеного ітеґрала дорівнює підінтеґральній функції; диференціал невизначеного інтеґрала дорівнює підінтеґральному виразу:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

$$\blacksquare \left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x), d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx \blacksquare$$

Наслідок. Справедливість інтеґрування можна перевірити диференціюванням результату.

Перевіримо, наприклад, справедливість формул 13, 14 таблиці найпростіших інтегралів. Маємо

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{1}{2a}\cdot\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{(x-a)'(x+a)-(x-a)(x+a)'}{(x+a)^2} =$$

$$=\frac{1}{2a}\cdot\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)^2}=\frac{1}{2a}\cdot\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{2a}{(x+a)^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{x^2-a^2};$$

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Таким чином, функції в правих частинах формул 13, 14 дійсно є первісними підінтеґральних функцій (пізніше ми дамо ще одне доведення цих важливих формул). Набагато простіше перевірити справедливість формул 1 а, 1 б, 1 в, 3 а, 4 а, 5 а, 6 а, 10. Що стосується формул (15)-(18), то ми їх виведемо пізніше з інших міркувань.

2. Невизначений інтеґрал похідної (диференціала) будь-якої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int F'(x)dx=\int dF(x)=F(x)+C.$$

Наслідок. За допомоги інтеґрування будь-яка функція може бути (з точністю до адитивної сталої C) відновлена з її похідної чи диференціала.

Приклад 4.

$$\int dx=\int x'dx=x+C.$$

3 (адитивність). Невизначений інтеґрал алгебричної суми скінченної кількості функцій дорівнює такій же алгебричній сумі їх інтеґралів, зокрема

$$\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$$

■Достатньо довести, що похідні лівої і правої частин останньої рівності збігаються. Але на підставі властивості 1 ми маємо з одного боку

$$\left(\int\left(f(x)+g(x)\right)dx\right)'=f(x)+g(x),$$

а з іншого

$$\left(\int f(x)dx+\int g(x)dx\right)'=\left(\int f(x)dx\right)'+\left(\int g(x)dx\right)'=f(x)+g(x).\ \blacksquare$$

4 (однорідність). Сталий множник може бути винесений за знак невизначеного інтеґрала:

$$k - const, \int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Доведіть цю властивість самостійно (диференціюванням).

Наслідок (лінійність). Для довільних функцій $f(x), g(x)$ і сталих k, l

$$\int (k \cdot f(x) + l \cdot g(x))dx = k \cdot \int f(x)dx + l \cdot \int g(x)dx.$$

На підставі властивості лінійності і таблиці найпростіших невизначених інтеґралів ми нерідко можемо здійснювати так зване **пряме, або безпосереднє інтеґрування**.

Приклади.

$$5.\ \int \frac{dx}{36+25x^2} = \int \frac{dx}{36+25x^2} = \int \frac{dx}{25(36/25+x^2)} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{36/25+x^2} =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{dx}{(6/5)^2+x^2} = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{6/5}\arctan\frac{x}{6/5} + C = \frac{1}{30}\arctan\frac{5x}{6} + C.$$

$$6.\ \int \frac{dx}{\sqrt{13-15x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{15(13/15-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{13/15}\right)^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{13/15}} + C = \frac{1}{\sqrt{15}}\arcsin\frac{\sqrt{15}x}{\sqrt{13}} + C.$$

$$7.\ \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x dx}{\sin^2 x\cos^2 x} + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = (\tan x + C_1) + (-\cot x + C_2) = \tan x - \cot x + C =$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x\cos x} + C = \frac{-2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2\sin x\cos x} + C = -2\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -2\cot 2x + C,$$

де $C = C_1 + C_2$ - довільна стала з огляду на довільність C_1 и C_2.

8. Як наслідок маємо

$$\int \left(\frac{11}{36+25x^2} - \frac{9}{\sqrt{13-15x^2}} + \frac{7}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx =$$

$$=11\cdot\int\frac{dx}{36+25x^2}-9\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{13-15x^2}}+7\cdot\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=11\cdot\left(\frac{1}{30}\arctan\frac{5x}{6}+C_1\right)-9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\arcsin\frac{\sqrt{15}x}{\sqrt{13}}+C_2\right)+7\cdot\left(-2\cot 2x+C_3\right)=$$

$$=\frac{11}{30}\arctan\frac{5x}{6}-\frac{9}{\sqrt{15}}\arcsin\frac{\sqrt{15}x}{\sqrt{13}}-14\cot 2x+C,$$

де $C=11C_1-9C_2+7C_3$ - довільна стала (внаслідок довільності C_1, C_2, C_3).

Далі ми не будемо вводити довільні сталі для кожного невизначеного інтеґрала, а сразу використовуватимемо одну довільну сталу *C*.

Основними методами обчислення невизначених (а пізніше і визначених) інтеґралів є заміна змінної (спосіб підстановки) і інтеґрування частинами. До ґрунтовного вивчення цих методів ми зараз і переходимо.

4.3. ІНТЕҐРУВАННЯ ПІДСТАНОВКОЮ (ЗАМІНА ЗМІННОЇ)

Теорема 2. Нехай функції $f(x),\ x=\varphi(t),\ \varphi'(t)$ неперервні у відповідних інтервалах, а функція $x=\varphi(t)$ має неперервно диференційовну обернену функцію $t=\phi(x)$. В такому випадку є справедливою така формула (**формула заміни змінної**)

$$\int f(x)dx=\left|\begin{matrix}x=\varphi(t)\\ \text{диференціювання}\\ dx=\varphi'(t)dt\end{matrix}\right|=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (4)$$

Формула передбачає повернення до попередньої змінної *x* після інтеґрування по змінній *t*. Слово “диференціювання” завжди означає обчислення диференціала.

■Перший спосіб доведення. Достатньо довести, що похідні лівої и правої частин формули (4) рівні. Маємо:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x);$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t\cdot t'_x=f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{x'_t}=f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=$$
$$=f(\varphi(t))=f(x)$$

Другий спосіб доведення. Якщо $F(x)$ - первісна функції $f(x)$, то функція $F(\varphi(t))$ є первісною функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, бо

$$(F(\varphi(t)))'_t=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Отже, на підставі означення невизначеного інтеґрала маємо

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C=F(x)+C=\int f(x)dx.\blacksquare$$

Формула (4) часто-густо застосовується “справа наліво”, і в цьому випадку зручніше записати її в такому вигляді

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\left|\begin{array}{c}\varphi(x)=t\\ \text{диференціювання}\\ \varphi'(x)dx=dt\end{array}\right|=\int f(t)dt. \qquad (5)$$

Формулу (5) можна витлумачити таким чином: якщо підінтеґральна функція є добутком функції f від функції $\varphi(x)$ на похідну $\varphi'(x)$ цієї останньої, то треба покласти $\varphi(x)=t$.

В формулах (4), (5) замість *t* можна використовувати будь-яку іншу літеру (крім, звичайно, літери *x*).

Приклад 9. Довести справедливість формули 5а в таблиці найпростіших інтеґралів

$$\int\cos axdx=\left|\begin{array}{c}\text{Нехай } ax=t,\\ d(ax)=dt,\\ adx=dt, dx=\frac{1}{a}dt\end{array}\right|=\int\cos t\cdot\frac{1}{a}dt=\frac{1}{a}\int\cos tdt=\frac{1}{a}\sin t+C=\frac{1}{a}\sin ax+C$$

Таким чином,

$$\int\cos axdx=\frac{1}{a}\sin ax+C$$

Приклад 10. Доведіть самостійно, що $\int\sin axdx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$.

Приклад 11. Доведення справедливості формули 5а в таблиці найпростіших інтеґралів

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \left| \begin{array}{c} \text{Нехай } x = at, \\ dx = d(at), \\ dx = adt \end{array} \right| = \int \frac{adt}{(at)^2+a^2} = \int \frac{adt}{a^2(t^2+1)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctan} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctan}\frac{x}{a} + C.$$

Приклад 12. Обчислити невизначений інтеґрал

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx.$$

Підінтеґральна функція

$$\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot x$$

є добутком функції від $\varphi(x) = 4-x^2$, а саме функції $2\big/\sqrt{\varphi(x)}$, на похідну функції $\varphi(x)$ (з точністю до сталого множника -2), бо $\varphi'(x) = \left(4-x^2\right)' = -2x$. На підставі формули (5) ми можемо покласти $\varphi(x) = 4-x^2 = t$, або навіть краще

$$4-x^2 = t^2.$$

Припускаючи для визначеності, що $t > 0$, маємо $t = \sqrt{4-x^2}$. Отже,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{c} 4-x^2 = t^2, t > 0, \\ d\left(4-x^2\right) = d\left(t^2\right), \\ -2xdx = 2tdt, \\ xdx = -tdt \end{array} \right| = \int \frac{-tdt}{\sqrt{t^2}} = -\int \frac{tdt}{t} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{4-x^2} + C.$$

Приклад 13. Обчислити невизначений інтеґрал

$$\int \frac{\sin 20xdx}{\sqrt{100-\cos^2 20x}}.$$

Підінтеґральна функція

$$\frac{\sin 20x}{\sqrt{100-\cos^2 20x}} = \frac{1}{\sqrt{100-\cos^2 20x}}\cdot \sin 20x$$

є добутком функції від $\varphi(x) = \cos 20x$, а саме функції $1\big/\sqrt{100-\varphi^2(x)}$, на похідну функції $\varphi(x)=\cos 20x$ (з точністю до сталого множника -20), оскільки $\varphi'(x)=$ $=-20\sin 20x$. Тому, поклавши

$$\varphi(x)=\cos 20x=y,$$

ми зводимо даний інтеґрал до табличного, а саме до інтеґрала № 12 (з $a=10$),

$$\int\frac{\sin 20x dx}{\sqrt{100-\cos^2 20x}}=\left|\begin{matrix}\cos 20x=y, d(\cos 20x)=dy,\\ -20\sin 20x dx=dy, \sin 20x dx=-\dfrac{1}{20}dy\end{matrix}\right|=\int\frac{-\dfrac{1}{20}dy}{\sqrt{10^2-y^2}}=$$

$$=-\frac{1}{20}\int\frac{dy}{\sqrt{10^2-y^2}}=-\frac{1}{20}\arcsin\frac{y}{10}+C=-\frac{1}{20}\arcsin\frac{\cos 20x}{10}+C.$$

Приклад 14. Випадок, коли підінтеґральна функція є дріб, **чисельник** якого **є похідною знаменника**. Інтеґрал зводиться до табличного інтеґрала № 2, бо

$$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\left|\begin{matrix}\text{Нехай } f(x)=z,\\ d(f(x))=dz,\\ f'(x)dx=dz\end{matrix}\right|=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln|f(x)|+C \qquad (6)$$

Наведімо декілька прикладів застосування формули (6).

$$\text{а) } \int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{adx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{(ax+b)'dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C, \qquad (7)$$

зокрема

$$\int\frac{dx}{x+b}=\int\frac{(x+b)'dx}{x+b}=\ln|x+b|+C. \qquad (7\text{ а})$$

$$\text{б) } \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\left|\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\right|=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{(x-a)'}{x-a}dx-\int\frac{(x+a)'dx}{x+a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

$$\text{в) } \int\frac{x^2}{x+1}dx=\int\frac{x^2-1+1}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\int xdx-\int dx+\int\frac{dx}{x+1}=\int xdx-\int dx+\int\frac{(x+1)'dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C.$$

г) $$\int\frac{xdx}{ax^2+b}=\frac{1}{2a}\int\frac{2axdx}{ax^2+b}=\frac{1}{2a}\int\frac{\left(ax^2+b\right)'dx}{ax^2+b}=\frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+b\right|+C. \qquad (8)$$

Приклад 15. Довести, що

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{ax^2+b}}=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+b}+C \qquad (9)$$

■Нехай

$$ax^2+b=z^2,\ z>0,\ z=\sqrt{ax^2+b}.$$

Тоді

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{ax^2+b}}=\left|\begin{array}{c}ax^2+b=z^2,\\ d\left(ax^2+b\right)=d\left(z^2\right)\\ 2axdx=2zdz\\ xdx=\frac{1}{a}zdz\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{a}zdz}{z}=\frac{1}{a}\int dz=\frac{1}{a}z+C=\frac{1}{a}\sqrt{ax^2+b}+C.$$

Приклад 16. Часто-густо доводиться мати справу з інтеґралами

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c},\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (10)$$

які містять квадратний тричлен

$$ax^2+bx+c.$$

Вони зводяться до суми двох інтеґралів - типу (8) або (9) і табличного – за допомоги заміни змінної

$$\frac{1}{2}\left(ax^2+bx+c\right)'=t. \qquad (11)$$

Після обчислення похідної і заміни змінної x на t маємо

$$\frac{1}{2}(2ax+b)=t,\ ax+\frac{b}{2}=t,\ x=\frac{1}{a}\left(t-\frac{b}{2}\right),\ dx=\frac{1}{a}dt;$$

$$Ax+B=\frac{A}{a}\left(t-\frac{b}{2}\right)+B=\frac{A}{a}t+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right);$$

$$ax^2+bx+c=a\cdot\frac{1}{a^2}\left(t-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b}{a}\left(t-\frac{b}{2}\right)+c=\frac{1}{a}\left(t^2-bt+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{b}{a}t-\frac{b^2}{2a}+c=$$

$$=\frac{1}{a}\left(t^2-bt+bt+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}+ac\right)=\frac{1}{a}\left(t^2-\frac{b^2}{4}+ac\right)=\frac{1}{a}\left(t^2-\frac{b^2-4ac}{4}\right)=\frac{1}{a}\left(t^2-\frac{D}{4}\right),$$

де

$$D=b^2-4ac$$

- дискриминант квадратного трехчлена.

Наведімо два приклади застосування зазначеного методу.

а) Використовуючи заміну (11), формулу (8) і табличний інтеґрал № 13 (формулу високого логарифму), обчислимо інтеґрал

$$\int\frac{(3x-2)dx}{4-8x-x^2}.$$

$$\int\frac{(3x-2)dx}{4-8x-x^2}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(4-8x-x^2\right)'=\frac{1}{2}(-8-2x)=-4-x=t,\\ x=-4-t,\,dx=-dt,\,3x-2=3(-4-t)-2=\\ =-14-3t,\,4-8x-x^2=4-8(-4-t)-\\ -(-4-t)^2==4+32+8t-\left(16+8t+t^2\right)\\ =20-t^2=-\left(t^2-20\right)\end{array}\right|=\int\frac{(-14-3t)(-dt)}{20-t^2}=$$

$$=-\int\frac{(3t+14)dt}{t^2-20}=-\left(3\int\frac{tdt}{t^2-20}+14\int\frac{dt}{t^2-20}\right)=-\left(\frac{3}{2}\ln\left|t^2-20\right|+\frac{14}{2\sqrt{20}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{20}}{t+\sqrt{20}}\right|\right)+C=$$

$$=-\left(\frac{3}{2}\ln\left|-\left(4-8x-x^2\right)\right|+\frac{7}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{-4-x-\sqrt{20}}{-4-x+\sqrt{20}}\right|\right)+C=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left|4-8x-x^2\right|-\frac{7}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{4+x+\sqrt{20}}{4+x-\sqrt{20}}\right|+C$$

b) За допомоги формул (11), (9) і табличного інтеґрала № 12 отримуємо

$$\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4-8x-x^2}}=\left|\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left(4-8x-x^2\right)'=-4-x=t,\\ x=-4-t,\,dx=-dt,\,3x-2=-14-3t,\\ 4-8x-x^2=20-t^2\end{array}\right|=\int\frac{(-14-3t)(-dt)}{\sqrt{20-t^2}}=$$

$$=\int\frac{(3t+14)dt}{\sqrt{20-t^2}}=3\int\frac{tdt}{\sqrt{20-t^2}}+14\int\frac{dt}{\sqrt{20-t^2}}=-3\sqrt{20-t^2}+14\,arcsin\frac{t}{\sqrt{20}}+C=$$

$$=-3\sqrt{4-8x-x^2}+14\,arcsin\frac{-4-x}{2\sqrt{5}}+C$$

Приклад 17. Щоб обчислити невизначений інтеґрал

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3+2e^{5x}}},$$

покладімо

$$3+2e^{5x}=z^2,\ z>0,$$

звідки за допомоги інтеґрала № 13 (формули високого логарифму)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3+2e^{5x}}}=\left|\begin{array}{l} \quad 3+2e^{5x}=z^2, \\ \quad 10e^{5x}dx=2zdz, \\ dx=\dfrac{zdz}{5e^{5x}}=\dfrac{2zdz}{5(z^2-3)} \end{array}\right|=\frac{2}{5}\int\frac{zdz}{z(z^2-3)}=\frac{2}{5}\int\frac{dz}{z^2-3}=\frac{2}{5}\int\frac{dz}{z^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{5\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3+2e^{5x}}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+2e^{5x}}+\sqrt{3}}\right|+C.$$

Приклад 18. Для доведення табличної формули № 14 використаємо так звану **підстановку Ейлера**

$$\sqrt{x^2+a}=t-x,$$

за допомогою якої виразимо x, dx і квадратний корінь $\sqrt{x^2+a}$ через t. Маємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\left|\begin{array}{c} \sqrt{x^2+a}=t-x, x^2+a=t^2-2tx+x^2, \\ x=\dfrac{t^2-a}{2t}, dx=\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt, \sqrt{x^2+a}=t-\dfrac{t^2-a}{2t}=\dfrac{t^2+a}{2t} \end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt}{\dfrac{t^2+a}{2t}}=$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+C$$

4.4. ІНТЕҐРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Теорема 3. Нехай $u=u(x), v=v(x)$ - дві неперервно диференційовні функції. Справедливою є наступна формула (**формула інтеґрування частинами**):

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (12)$$

■Диференціал добутку функцій $u = u(x), v = v(x)$ дорівнює

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Інтеґруючи цю рівність (з використанням властивості 2 невизначеного інтеґрала), отримуємо

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu, uv = \int udv + \int vdu, \int udv = uv - \int vdu.■$$

Відповідно формулі (12) ми подаємо підінтеґральний вираз у вигляді добутку двох функцій, саме *u* і *dv*. Після цього ми першу функцію диференціюємо, а другу інтеґруємо.

Приклад 19.

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left| \text{Нехай } u = x, dv = \frac{dx}{\cos^2 x}; \text{ тоді } du = dx, v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \right| =$$

$$= x\tan x - \int \tan xdx = x\tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = x\tan x + \int \frac{(\cos x)'dx}{\cos x} =$$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| + C.$$

Приклад 20.

$$\int x\sin 3xdx = \left| \begin{array}{c} \text{Нехай } u = x, dv = \sin 3xdx; \\ du = dx, v = \int \sin 3xdx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| = x \cdot \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3xdx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

В разі необхідності інтеґрування частинами можна здійснювати кілька разів.

Приклад 21. Обчислити інтеґрал

$$\int (3x^2 - 5x + 9)e^{4x}dx.$$

До бажаного результату ведуть два інтеґрування частинами.

$$\int (3x^2 - 5x + 9)e^{4x}dx = \left| \begin{array}{c} u = 3x^2 - 5x + 9, dv = e^{4x}dx; \\ du = (6x - 5)dx, v = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array} \right| = \frac{1}{4}(3x^2 - 5x + 9)e^{4x} -$$

$$-\frac{1}{4}\int (6x-5)e^{4x}dx = \left|\begin{array}{l} u=6x-5,\ dv=e^{4x}dx; \\ du=6dx,\ v=\frac{1}{4}e^{4x}\end{array}\right| = \frac{1}{4}(3x^2-5x+9)e^{4x} -$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(6x-5)e^{4x}-\frac{6}{4}\int e^{4x}dx\right)=\frac{1}{4}(3x^2-5x+9)e^{4x}-\frac{1}{16}(6x-5)e^{4x}+\frac{3}{32}e^{4x}+C.$$

Приклад 22.

$$\int \ln^2 x dx = \left| u=\ln^2 x,\ dv=dx \Rightarrow du=2\ln x\cdot\frac{dx}{x},\ v=\int dx=x \right| =$$

$$= x\ln^2 x-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{dx}{x}=x\ln^2 x-2\int \ln x dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ dv=x; \\ du=dx/x;\ v=x\end{array}\right| =$$

$$= x\ln^2 x-2\left(x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}\right)=x\ln^2 x-2\left(x\ln x-\int dx\right)=x\ln^2 x-2(x\ln x-x)+C.$$

Иноді інтеґрування частинами веде до простого рівняння відносно шуканого інтеґрала

Приклад 23. Нехай

$$I=\int e^{2x}\cos 3xdx\,.$$

Після двох інтеґрувань частинами отримуємо

$$I=\int e^{2x}\cos 3xdx=\left|\begin{array}{c} \textit{пусть}\ u=e^{2x}, dv=\cos 3xdx; \\ du=2e^{2x}dx, v=\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\sin 3x\end{array}\right|=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-$$

$$-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3xdx=\left|\begin{array}{c} \textit{положим}\quad u=e^{2x}, dv=\sin 3xdx; \\ du=2e^{2x}dx, v=\int\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right|=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-$$

$$-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3xdx\right)=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}I,$$

$$I=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}I\,.$$

Ми прийшли до рівняння відносно *I*, а отже

$$\frac{13}{9}I=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x,\ I=\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x+C\,.$$

Таким чином,

$$I=\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$$

Аналогічними міркуваннями ми можемо отримати загальні формули 17, 18 таблиці найпростіших інтеґралів.

Приклад 24. Обчислити невизначений інтеґрал

$$I=\int\sqrt{x^2+a}dx.$$

$$I=\int\sqrt{x^2+a}dx=\left|\begin{array}{c}u=\sqrt{x^2+a},dv=dx\\ du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a}},v=\int dx=x\end{array}\right|=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-I+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|.$$

Таким образом,

$$2I=x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|,$$

$$I=\int\sqrt{x^2+a}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,$$

і ми довели справедливість формули 15 в таблиці найпростіших інтеґралів. Формулу 16 спробуйте довести самостійно.

Зауваження. Не існує загальних правил для вибору u, dv. Але в деяких випадках відповідні вказівки зробити можна.

Для інтеґралів вигляду

$$\int P(x)e^{kx}dx,\quad \int P(x)\sin kxdx,\quad \int P(x)\cos kxdx,$$

де $P(x)$ - многочлен, слід покласти $u=P(x)$.

У випадках інтеґралів вигляду

$$\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\arctan dx, \int P(x)arc\cot dx$$

треба покласти $dv=P(x)dx$.

Наведімо декілька прикладів.

Приклад 25.

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x, dv = dx; \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{нехай } 1-x^2 = t^2 \text{ і } t > 0; \\ \text{тоді } -2xdx = 2tdt, xdx = -tdt \end{matrix} \right| = x \arcsin x - \int \frac{-tdt}{\sqrt{t^2}} = x \arcsin x + \int dt =$$

$$= x \arcsin x + t = \left| t = \sqrt{1-x^2} \right| = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Для обчислення проміжного інтеґрала можна було б застосувати готову формулу (9) при $a = -1, b = 1$.

Приклад 26.

$$\int x arc\cot x dx = \left| u = arc\cot x, dv = xdx; du = -\frac{dx}{x^2+1}, v = \frac{x^2}{2} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} arc\cot x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} arc\cot x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arc\cot x + \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} arc\cot x + \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} arc\cot x + \frac{1}{2} \left(x - \arctan x \right) + C.$$

При обчисленні невизначених інтеґралів часто доводиться комбінувати методи заміни змінної та інтеґрування частинами. Наводимо приклади.

Приклад 27.

$$\int \sin \sqrt{x} dx = \left| \begin{matrix} x = t^2, \text{let } t \geq 0, \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \sin t \cdot 2tdt = 2 \int t \sin t dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t, dv = \sin t dt, \\ du = dt, v = -\cos t \end{matrix} \right| == -t \cos t - \int (-\cos t) dt = -\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \int \cos t dt =$$

$$= -\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin t + C = -\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x} + C.$$

Приклад 28.

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx = \left| \begin{matrix} x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{matrix} \right| = 3 \int t^2 e^t dt = \left| \begin{matrix} u = t^2, dv = e^t dt \\ du = 2tdt, v = e^t \end{matrix} \right| = 3 \left(t^2 e^t - 2 \int t e^t dt \right) =$$

$$=3\left(t^2e^t-2\int te^tdt\right)=\left|\begin{matrix}u=t, & dv=e^tdt,\\ du=dt, & v=e^t\end{matrix}\right|=3\left(t^2e^t-2\left(te^t-\int e^tdt\right)\right)=$$

$$=3\left(t^2e^t-2\left(te^t-e^t\right)\right)=3\left(\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}}-2\left(\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}}-e^{\sqrt[3]{x}}\right)\right)+C=e^{\sqrt[3]{x}}\left(3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+6\right)+C.$$

Приклад 29.

$$\int\frac{xe^xdx}{\sqrt{1+e^x}}=\left|\begin{matrix}u=x,\ dv=\dfrac{e^xdx}{\sqrt{1+e^x}},\ du=dx, v=\displaystyle\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1+e^x}}=\\ =\left|\begin{matrix}1+e^x=t^2\\ e^xdx=2tdt\end{matrix}\right|=\displaystyle\int\frac{2tdt}{t}=2\int dt=2t=2\sqrt{1+e^x}\end{matrix}\right|=$$

$$=2x\sqrt{1+e^x}-2\int\sqrt{1+e^x}dx=\left|1+e^x=t^2,\ e^xdx=2tdt,\ dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2-1}\right|=$$

$$=2x\sqrt{1+e^x}-2\int t\cdot\frac{2tdt}{t^2-1}=2x\sqrt{1+e^x}-4\int\frac{t^2dt}{t^2-1}=$$

$$=2x\sqrt{1+e^x}-4\int\frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1}=2x\sqrt{1+e^x}-4\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=2x\sqrt{1+e^x}-4\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C=2x\sqrt{1+e^x}-4\left(\sqrt{1+e^x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|\right)+C.$$

Приклад 30.

$$\int\frac{x^2e^{3x}dx}{(3x+2)^2}=\left|\begin{matrix}u=x^2e^{3x},\ dv=dx/(3x+2)^2\Rightarrow du=x(2+3x)e^{3x},\\ v=\displaystyle\int\frac{dx}{(3x+2)^2}=\left|3x+2=t,\ dx=\frac{1}{3}dt\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t}=-\frac{1}{3(3x+2)}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{x^2e^{3x}}{3(3x+2)}-\int\left(-\frac{1}{3(3x+2)}\right)x(2+3x)e^{3x}=-\frac{x^2e^{3x}}{3(3x+2)}+\frac{1}{3}\int xe^{3x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x,\ dv=e^{3x}dx;\\ du=dx,\ v=\displaystyle\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right|=-\frac{x^2e^{3x}}{3(3x+2)}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=$$

$$=-\frac{x^2e^{3x}}{3(3x+2)}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\right)+C=\frac{e^{3x}}{3}\left(-\frac{x^2}{3x+2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)+C=\frac{(3x-2)e^{3x}}{27(3x+2)}+C.$$

Приклад 31. Розглянемо останній приклад, в якому успішно застосовуються два інтеґрування частинами і заміна змінної.

$$\int (\arccos x)^2 dx = \left| u = (\arccos x)^2, dv = dx; du = -\frac{2\arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = x \right| =$$

$$= x(\arccos x)^2 + 2\int \frac{x \arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{нехай } \arccos x = t \ \ (0 \le t \le \pi); \\ \text{тоді } \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -dt, x = \cos t, \sin t = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= x(\arccos x)^2 - 2\int t \cos t dt = \left| u = t, dv = \cos t dt; du = dt, v = \sin t \right| =$$

$$= x(\arccos x)^2 - 2\left(t \sin t - \int \sin t dt\right) = x(\arccos x)^2 - 2(t \sin t + \cos t) + C =$$

$$= x(\arccos x)^2 - 2\left(\sqrt{1-x^2} \arccos x + x\right) + C .$$

Переважна більшість наведених вище прикладів засвідчує, що операція інтеґрування є набагато складнішою, і в усякому разі набагато громіздкішою, ніж операція диференціювання. Більш того, нижче ми наведемо приклади функцій, які взагалі не можна проінтеґрувати (тобто подати результат інтеґрування у вигляді елементарної функції). Проте існують класи функцій (або класи інтеґровних функцій), про які можна сказати, що їх принципово можна проінтеґрувати. Деякі з таких класів ми розглянемо нижче.

4.5. ІНТЕҐРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ ТА ФУНКЦІЙ

Означення 1. Раціональною функцією називається функція, яку можна представити у вигляді раціонального дробу, тобто у вигляді відношення двох многочленів

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0},\ a_n\neq 0,\ b_m\neq 0. \qquad (1)$$

Означення 2. Раціональний дріб (1) називається **правильним**, якщо многочлен в чисельнику є меншого степеня, ніж в знаменнику ($n<m$), і **неправильним** в протилежному випадку ($n\geq m$).

Теорема 1 (виділення цілої частини неправильного раціонального дробу)**.** Кожний неправильний раціональний дріб може бути поданий у вигляді суми деякого многочлена (так званої **цілої частини**) і правильного раціонального дробу.

■Нехай $n\geq m$. Поділивши чисельник $P_n(x)$ на знаменник $Q_m(x)$ за допомоги відомої процедури ділення многочленів з остачею, ми отримаємо

$$P_n(x)=Q_m(x)S(x)+r(x),$$

де $S(x)$ і $r(x)$ - многочлени (відповідно частка і остача), причому остача є многочленом меншого степеня, ніж $Q_m(x)$. Замінивши тепер чисельник правою частиною останньої рівності та почленно поділивши на $Q_m(x)$, матимемо

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{Q_m(x)S(x)+r(x)}{Q_m(x)}=S(x)+\frac{r(x)}{Q_m(x)},$$

де раціональний дріб

$$\frac{r(x)}{Q_m(x)}$$

є правильним.■

Приклад 1. Виділити цілу частину неправильного раціонального дробу

$$R(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

а) Перший (теоретичний) спосіб. Після ділення x^2 на $x+1$ маємо

$$x^2=(x+1)(x-1)+1,\ S(x)=x-1,\ r(x)=1,\quad \frac{x^2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$$

b) Другий спосіб. Віднімаючи і додаючи 1 в чисельнику, отримаємо

$$\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{(x^2-1)+1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$$

Серед правильних раціональних дробів слід особливо виділити так звані елементарні, або найпростіші, раціональні дроби 1- 4 типів

1. $\frac{A}{ax+b}$, де A, a, b - довільні сталі;

2. $\frac{A}{(ax+b)^k}$, A, a, b - сталі, а k – довільне натуральне число;

3. $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, де A, B, a, b, c - довільні сталі, а ax^2+bx+c - квадратний тричлен з від"ємним дискримінантом $(D=b^2-4ac<0)$;

4. $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, k – довільне натуральне число, і $D=b^2-4ac<0$.

Дроби типів 1, 3 ми вже інтеґрували в п. 4.3.

Для інтеґрування найпростішого раціонального дробу 2-го типу можемо здійснити заміну змінної

$$ax+b=t$$

(зробіть це самостійно!).

Інтеґрування найпростішого раціонального дробу 4-го типу за допомоги підстановки

$$\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'=t$$

веде до лінійної комбінації простого інтеґрала

$$\int\frac{tdt}{(t^2+m^2)^k}=\left|\begin{matrix}t^2+m^2=z,\\ tdt=\frac{1}{2}dz\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dz}{z^k}=\frac{1}{2}\int z^{-k}dz=\frac{z^{-k+1}}{2(-k+1)}+C=\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{2(-k+1)}+C$$

та інтеґрала

$$J_k = \int \frac{dt}{\left(t^2 + m^2\right)^k} .$$

Для його обчислення при малих значеннях k ($k = 2, k = 3$) можна застосувати заміну змінної $t = m \tan z$. В загальному випадку існує спеціальна (так звана рекурентна) формула, яка дозволяє звести J_k до J_{k-1}, J_{k-1} до J_{k-2}, …, J_2 до J_1 з відомим (табличним) інтеґралом

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \arctan \frac{t}{m} + C.$$

Приклад 2.

$$\int \frac{dt}{\left(x^2+4\right)^2} = \left| \begin{array}{c} x = 2\tan z,\, dx = \dfrac{2dz}{\cos^2 z}, \\ x^2 + 4 = 4\tan^2 z + 4 = \\ = 4\left(\tan^2 z + 1\right) = \dfrac{4}{\cos^2 z} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{2dz}{\cos^2 z}}{\left(\dfrac{4}{\cos^2 z}\right)^2} = \frac{1}{8} \int \cos^2 z dz = \frac{1}{8} \int \frac{1 + \cos 2z}{2} dz =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\int dz + \int \cos 2z dz\right) = \frac{1}{16}\left(z + \frac{1}{2}\sin 2z \right) + C = \frac{1}{16}\left(\arctan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\arctan\frac{x}{2}\right) + C .$$

Таким чином, можна сказати, що ми вміємо інтеґрувати найпростіші раціональні дроби. Це дає нам можливість інтеґрувати довільниі раціональні дроби з огляду на наступну теорему.

Теорема 2 (розвинення правильного раціонального дробу в суму найпростіших)**.** Кожний правильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми найпростіших раціональних дробів.

Справедливість теореми заснована на тому відомому факті, що будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти в добуток лінійних двочленів і квадратних тричленів з від"ємними дискримінантами. В основі ж цього факту лежить основна теорема алгебри про існування кореня у будь-якого многочлена степеня не нижче першого.

Ми не будемо доводити теорему 2 і не писатимемо відповідних загальних формул, а обмежимось кількома частинними випадками розвинень, які найчастіше зустрічаються на практиці.

а) Знаменник правильного дробу розкладений в добуток двох лінійних двочленів $(ax+b)(cx+d)$. Відповідне розвинення в суму найпростіших раціональних дробів має вигляд

$$\frac{Ax+B}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{P}{ax+b}+\frac{Q}{cx+d}$$

з невизначеними коефіцієнтами P, Q, які знаходяться так званим **методом невизначених коефіцієнтів**.

б) Знаменник дробу розкладений в добуток $(ax+b)(cx^2+dx+e)$ лінійного двочлена і квадратного тричлена. Відповідне розвинення в суму найпростіших раціональних дробів має вигляд

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(ax+b)(cx^2+dx+e)}=\frac{P}{ax+b}+\frac{Qx+R}{cx^2+dx+e}$$

з невизначеними коефіцієнтами P, Q, R.

в) Знаменник розкладений в добуток $(ax+b)^2(cx^2+dx+e)$ квадрата лінійного двочлена і квадратного тричлена. Відповідне розвинення є

$$\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(ax+b)^2(cx^2+dx+e)}=\frac{P}{(ax+b)^2}+\frac{Q}{ax+b}+\frac{Rx+S}{cx^2+dx+e}$$

з невизначеними коефіцієнтами P, Q, R, S.

г) Знаменник розкладений в добуток $(cx^2+dx+e)(fx^2+gx+h)$ двох квадратних тричленів. Цьому випадку відповідає розвинення

$$\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(cx^2+dx+e)(fx^2+gx+h)}=\frac{Px+Q}{cx^2+dx+e}+\frac{Rx+S}{fx^2+gx+h}$$

з невизначеними коефіцієнтами P, Q, R, S.

З теореми 2 і властивості лінійності невизначеного інтеґрала випливає можливість проінтеґрувати будь-яку раціональну функцію.

Правило інтеґрування раціональної функції. Щоб проінтеґрувати раціональну функцію, необхідно:

1. Виділити її цілу частину, якщо функція є неправильним дробом або мі-

стить неправильний дріб.

2. Розкласти знаменник отриманого правильного дробу в добуток многочленів степеня не вище другого.

3. Розкласти правильний раціональний дріб в суму найпростіших.

4. Проінтеґрувати всі члени отриманої алгебричної суми.

5. Записати відповідь.

Приклад 3.

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}dx = \int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \int xdx - \int dx +$$

$$+\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{(x+1)'}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C\,.$$

Приклад 4. Обчислити невизначений інтеґрал

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2},$$

тобто довести формулу високого логарифму 13 в таблиці найпростіших інтеґралів.

1-й крок (розкладання на множники знаменника правильного дробу).

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a).$$

2-й крок (розвинення дробу в суму найпростіших дробів з використанням методу невизначених коефіцієнтів).

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}\Bigg|\cdot(x-a)(x+a),\qquad 1=A(x+a)+B(x-a)\quad (*)$$

Дамо змінній x в (*) будь-які два значення, краще за все $x=a,\ x=-a$. Дістанемо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів A, B,

$$\begin{array}{r|l} x=a & 1=2aA,\quad A=\dfrac{1}{2a}; \\ x=-a & 1=-2aB,\ B=-\dfrac{1}{2a}; \end{array} \Rightarrow \frac{1}{x^2-a^2}=\frac{\frac{1}{2a}}{x-a}+\frac{-\frac{1}{2a}}{x+a}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

3-й крок (інтеґрування отриманої алгебричної сумми). Маємо

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

Приклад 5. Обчислити невизначений інтеґрал

$$I=\int\frac{\left(x^2-27x+14\right)dx}{(x-3)\left(4-8x-x^2\right)}$$

1-й крок (розвинення підінтеґральної функції, котра є правильним раціональлним дробом з розкладеним на множники знаменником, в суму найпростіших дробів).

$$\frac{x^2-27x+14}{(x-3)\left(4-8x-x^2\right)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{4-8x-x^2}\ \left|\cdot(x-3)\left(4-8x-x^2\right),\right.$$

$$x^2-27x+14=A\left(4-8x-x^2\right)+(Bx+C)(x-3). \qquad (^{**})$$

Надаючи змінній x в (**) три довільні значення, наприклад $x=3,\ x=0,\ x=1$, дістаємо систему линийних рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів A, B, C,

$$\begin{array}{r|l} x=3 & \\ x=0 & \\ x=1 & \end{array}\left\{\begin{array}{rl} -58=-29A, & A=2,\\ 14=4A-3C, & C=-2,\Rightarrow\\ -12=-5A-2B-2C; & B=3; \end{array}\right. \frac{x^2-27x+14}{(x-3)\left(4-8x-x^2\right)}=\frac{2}{x-3}+\frac{3x-2}{4-8x-x^2}.$$

2-й крок (інтеґрування всіх членів отриманого розвинення)

$$\int\frac{2dx}{x-3}=2\int\frac{dx}{x-3}=2\int\frac{(x-3)'\,dx}{x-3}=2\ln|x-3|+C_1;$$

другий доданок вже було проінтеґовано в п. 4.3, так що

$$\int\frac{3x-2}{4-8x-x^2}dx=-\frac{3}{2}\ln\left|4-8x-x^2\right|-\frac{7}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{4+x+\sqrt{20}}{4+x-\sqrt{20}}\right|+C_2.$$

Відповідь. $I=2\ln|x-3|-\frac{3}{2}\ln\left|4-8x-x^2\right|-\frac{7}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{4+x+2\sqrt{5}}{4+x-2\sqrt{5}}\right|+C$

4.6. ІНТЕҐРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В цьому пункті ми роглядаємо деякі методи інтеґрування функції

$$R(\cos x,\sin x), \qquad (2)$$

яка є раціональною функцією двох арґументів $\cos x$, $\sin x$.

4.6.1. Універсальна тригонометрична підстановка

Теорема 3. Інтеґрування функції (2) завжди зводиться до інтеґрування раціональної функції однієї змінної *t* за допомогою так званої **універсальної тригонометричної підстановки (УТП)**

$$\tan\frac{x}{2}=t \tag{3}$$

■На підставі (3) ми маємо

$$cos\,x=\frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}}=\left|\frac{:cos^2\frac{x}{2}}{:cos^2\frac{x}{2}}\right|=\frac{1-tan^2\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x=\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{1}=\frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\left|\frac{:\cos^2\frac{x}{2}}{:\cos^2\frac{x}{2}}\right|=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\frac{x}{2}=\arctan t,\ x=2\arctan t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

отже,

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \tag{4}$$

і

$$\int R(\cos x,\sin x)dx=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt,$$

де функція арґументу *t*

$$R_1(t)=R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$$

є раціональною.■

Приклад 6. Використовуючи УТП, маємо

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\left|\begin{array}{c}\text{УТП}\\ \tan\frac{x}{2}=t\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^3}=\frac{2}{8}\int\frac{\left(t^2+1\right)^3dt}{t^3\left(t^2+1\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{\left(t^2+1\right)^2}{t^3}dt=\frac{1}{4}\int\frac{t^4+2t^2+1}{t^3}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2\ln|t|+\frac{t^{-3+1}}{-3+1}\right)+C=\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{8}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{8\tan^2\frac{x}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}\right)\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C=-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\,.$$

Зауважимо, що застосування УТП до схожого інтеґрала

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}$$

не дає нічого доброго, бо веде до надзвичайно громіздкого раціонального дробу. Дійсно,

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\left|\begin{array}{c}\text{УТП}\\ \tan\frac{x}{2}=t\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\left(\frac{1-t^2}{t^2+1}\right)^3}=2\int\frac{\left(t^2+1\right)^2dt}{\left(1-t^2\right)^3}.$$

Приклад 7. Для обчислення інтеґрала

$$\int\frac{dx}{\cos^3 11x}$$

можна звести його до попереднього інтеґрала заміною змінної, а саме:

$$\int\frac{dx}{\cos^3 11x}=\int\frac{dx}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-11x\right)}=\left|\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}-11x=y\\ -11dx=dy\\ dx=-\frac{1}{11}dy\end{array}\right|=-\frac{1}{11}\int\frac{dy}{\sin^3 y}=\left|\begin{array}{c}UTS\\ \tan\frac{y}{2}=t\end{array}\right|,$$

і далі діяти як в попередньому прикладі.

Приклад 8.

$$\int \frac{dx}{2-4\cos 5x+5\sin 5x}=\left|\begin{matrix}5x=y, 5dx=dy,\\ dx=1/5dy\end{matrix}\right|=\frac{1}{5}\int\frac{dy}{2-4\cos y+5\sin y}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\tan\frac{y}{2}=t, dy=\frac{2dt}{t^2+1}\\ \cos y=\frac{1-t^2}{t^2+1}, \sin y=\frac{2t}{t^2+1}\end{matrix}\right|=\frac{1}{5}\int\frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{2-4\frac{1-t^2}{t^2+1}+5\cdot\frac{2t}{t^2+1}}=\left|\begin{matrix}\cdot\left(t^2+1\right)\\ \cdot\left(t^2+1\right)\end{matrix}\right|=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{3t^2+5t-1}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\left(3t^2+5t-1\right)'=3t+\frac{5}{2}=z, t=\frac{z}{3}-\frac{5}{6}, dt=\frac{dz}{3}\\ 3t^2+5t-1=3\left(\frac{z}{3}-\frac{5}{6}\right)^2+5\left(\frac{z}{3}-\frac{5}{6}\right)-1=\frac{z^2}{3}-\frac{37}{12}\end{matrix}\right|=\frac{1}{5}\int\frac{\frac{dz}{3}}{\frac{z^2}{3}-\frac{37}{12}}=\frac{1}{5}\int\frac{dz}{z^2-\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{5\sqrt{37}}\ln\left|\frac{z-\frac{\sqrt{37}}{2}}{z+\frac{\sqrt{37}}{2}}\right|+C=\left|\begin{matrix}z=3t+\frac{5}{2}=\\ =3\tan\frac{y}{2}+\frac{5}{2}=\\ =3\tan\frac{5x}{2}+\frac{5}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{5\sqrt{37}}\ln\left|\frac{6\tan\frac{5x}{2}+5-\sqrt{37}}{6\tan\frac{5x}{2}+5+\sqrt{37}}\right|+C.$$

4.6.2. Інші підстановки

I. Якщо функція (2) непарна відносно $\cos x$, тобто

$$R(-\cos x,\sin x)=-R(\cos x,\sin x), \qquad (5)$$

то її можна перетворити до вигляду:

$$R(\cos x,\sin x)=R_2(\sin x)\cos x,$$

де $R_2(\sin x)$ - раціональна функція однієї змінної $\sin x$. Заміна

$$\sin x=t \qquad (6)$$

зводить інтеґрування до інтеґрування рациінальної функції від *t*.

II. Якщо функція (2) є непарною відносно $\sin x$, тобто

$$R(\cos x,-\sin x)=-R(\cos x,\sin x), \qquad (7)$$

то її можна звести до вигляду

$$R(\cos x,\sin x)=R_3(\cos x)\sin x$$

($R_3(\cos x)$ - раціональна функція арґумену $\cos x$) і застосувати підстановку

$$\cos x = t \tag{8}$$

III. Якщо функція (2) є парною відносно сукупності обох арґументів $\sin x$ і $\cos x$, тобто

$$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x) \tag{9}$$

то її можна привести до раціональної функції $R_4(\tan x)$ від $\tan x$,

$$R(\cos x, \sin x) = R_4(\tan x),$$

и проінтеґрувати за допомоги однієї з підстановок

$$\tan x = t, \quad \cot x = t. \tag{10}$$

Приклад 9. Обчислити невизначений інтеґрал

$$\int \cos^5 7x \sin^6 7x dx.$$

Підінтеґральна функція $\cos^5 7x \sin^6 7x$ непарна відносно $\cos 7x$, бо

$$(-\cos 7x)^5 \sin^6 7x = -\cos^5 7x \sin^6 7x,$$

і тому маємо справу з випадком I, коли підінтеґральна функція перетворюється в добуток $\cos 7x$ на функцію від $\sin 7x$. Можна діяти наступним чином:

$$\int \cos^5 7x \sin^6 7x dx = \int \cos^4 7x \sin^6 7x \cos 7x dx = \int (\cos^2 7x)^2 \sin^6 7x \cos 7x dx =$$

$$= \int (1 - \sin^2 7x)^2 \sin^6 7x \cos 7x dx = \left| \begin{matrix} \sin 7x = t, 7\cos 7x dx = dt, \\ \cos 7x dx = \frac{1}{7} dt \end{matrix} \right| = \int (1 - t^2)^2 t^6 \frac{1}{7} dt =$$

$$= \frac{1}{7} \int (t^{10} - 2t^8 + t^6) dt = \frac{1}{7}\left(\frac{t^{11}}{11} - \frac{2t^9}{9} + \frac{t^7}{7}\right) + C = \frac{1}{7}\left(\frac{\sin^{11} 7x}{11} - \frac{2\sin^9 7x}{9} + \frac{\sin^7 7x}{7}\right) + C.$$

Приклад 10. Підінтеґральна функція невизначеного інтеґрала

$$\int \sin^5 10x dx$$

непарна відносно $\sin 10x$ і тому, згідно з випадком II, перетворюється в добуток $\sin 10x$ на функцію від $\cos 10x$ з наступною заміною змінної $\sin 10x = t$. Маємо

$$\int \sin^5 10x dx = \int \sin^4 10x \sin 10x dx = \int (\sin^2 10x)^2 \sin 10x dx = \int (1 - \cos^2 10x)^2 \sin 10x dx =$$

$$=\left|\begin{array}{c}\cos 10x=t,\,-10\sin 10xdx=dt\\ \sin 10xdx=-\dfrac{1}{10}dt\end{array}\right|=-\frac{1}{10}\int\left(1-t^2\right)^2dt=-\frac{1}{10}\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{10}\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right)+C=-\frac{1}{10}\left(\cos 10x-\frac{2}{3}\cos^3 10x+\frac{1}{5}\cos^5 10x\right)+C.$$

Приклад 11. Обчислити інтеґрал

$$\int\frac{dx}{\cot^5 8x}.$$

Переходячи від котанґенса до танґенса, діємо відповідно до випадку III.

$$\int\frac{dx}{\cot^5 8x}=\int\tan^5 8xdx=\left|\begin{array}{c}\tan 8x=z,\,8x=\arctan z,\\ x=\dfrac{1}{8}\arctan z,\,dx=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{dz}{1+z^2}\end{array}\right|=\frac{1}{8}\int\frac{z^5dz}{z^2+1}=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{\left(z^3-z\right)\left(z^2+1\right)+z}{z^2+1}dz=\frac{1}{8}\int\left(z^3-z+\frac{z}{z^2+1}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{z^4}{4}-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{2zdz}{z^2+1}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{\tan^4 8x}{4}-\frac{\tan^2 8x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\tan^2 8x+1\right)\right)+C.$$

Приклад 12. Обчисліть самостійно інтеґрал

$$\int\frac{dx}{\tan^5 8x}.$$

Вказівка. Перейдіть до котанґенса і покладіть $\cot 8x=t$.

Приклад 13. Знайти невизначений інтеґрал

$$\int\frac{dx}{\sin^{10}3x}.$$

Ми маємо справу з випадком III, і тому можемо перетворити підінтеґральну функцію в функцію від $\tan 3x$. Ми зробимо ще краще – перетворимо її в добуток функції від $\tan 3x$ на похідну від $\tan 3x$. Отримаємо

$$\int\frac{dx}{\sin^{10}3x}=\int\frac{dx}{\sin^8 3x\sin^2 3x}=\int\left(\frac{1}{\sin^2 3x}\right)^4\frac{dx}{\sin^2 3x}=\int\left(1+\cot^2 3x\right)^4\frac{dx}{\sin^2 3x}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\cot 3x=t,\,-\dfrac{3dx}{\sin^2 3x}=dt,\\ \dfrac{dx}{\sin^2 3x}=-\dfrac{1}{3}dt\end{array}\right|=-\frac{1}{3}\int\left(t^2+1\right)^4dt=-\frac{1}{3}\int\left(t^8+4t^6+6t^4+4t^2+1\right)dt=-\frac{1}{3}\left(\frac{t^9}{9}+\right.$$

$$\left.+\frac{4t^7}{7}+\frac{6t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}+t\right)+C=-\frac{\cot^9 3x}{27}-\frac{4\cot^7 3x}{21}-\frac{6\cot^5 3x}{15}-\frac{4\cot^3 3x}{9}-\frac{1}{3}\cot 3x+C$$

Приклад 14. Невизначений інтеґрал

$$\int\frac{\sin 9x\cos 9x dx}{\sin^4 9x+\cos^4 9x}$$

також можна обчислювати відповідно до випадку III, оскільки підінтеґральна функція

$$\frac{\sin 9x\cos 9x}{\sin^4 9x+\cos^4 9x}$$

є парною по сукупності обох арґументів $\sin 9x$ и $\cos 9x$, тобто

$$\frac{(-\sin 9x)(-\cos 9x)}{(-\sin 9x)^4+(-\cos 9x)^4}=\frac{\sin 9x\cos 9x}{\sin^4 9x+\cos^4 9x}.$$

Перетворюючи підінтеґральну функцію в добуток функції від $\tan 9x$ на похідну від $\tan 9x$, отримуємо

$$\int\frac{\sin 9x\cos 9x dx}{\sin^4 9x+\cos^4 9x}=\int\frac{\sin 9x\cos 9x dx}{\cos^4 9x\left(\tan^4 9x+1\right)}=\int\frac{\tan 9x dx}{\cos^2 9x\left(\tan^4 9x+1\right)}=\left|\begin{array}{c}\tan 9x=t\\ \dfrac{dx}{\cos^2 9x}=\dfrac{1}{9}dt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{tdt}{t^4+1}=\left|\begin{array}{l}t^2=y,\\ tdt=\dfrac{1}{2}dy\end{array}\right|=\frac{1}{18}\int\frac{dy}{y^2+1}=\frac{1}{18}\arctan y+C=\frac{1}{18}\arctan\left(\tan^2 9x\right)+C$$

Зауваження. Зазначені підстановки можуть бути застосовними до деяких ірраціональніх функцій від $\sin x$ і $\cos x$.

Приклад 15.

$$\int\sqrt[6]{\cos 13x}\sin 13x dx=\left|\begin{array}{c}\cos 13x=y^6,\ y\geq 0,\ y=\sqrt[6]{\cos 13x},\\ -13\sin 13x dx=-6y^5dy,\ \ \sin 13x dx=-\dfrac{6}{13}y^5dy\end{array}\right|=-\frac{6}{13}\int y^6dy=$$

$$=-\frac{6}{13}\cdot\frac{y^7}{7}+C=-\frac{6}{91}\left(\sqrt[6]{\cos 13x}\right)^7+C=-\frac{6}{91}\sqrt[6]{\cos^7 13x}+C.$$

Приклад 16. Для додатних $\sin x, \cos x$

$$\int\frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}dx=\int\frac{\sqrt{(2\sin x\cos x)^3}}{\sin^5 x}dx=\int\frac{\sqrt{8\sin^3 x\cos^3 x}}{\sin^5 x}dx=\int\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\sin^3 x\cos^3 x}}{\sin^3 x}\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$= 2\sqrt{2}\int \sqrt{\frac{\sin^3 x\cos^3 x}{\sin^6 x}}\,\frac{dx}{\sin^2 x} = 2\sqrt{2}\int \sqrt{\cot^3 x}\,\frac{dx}{\sin^2 x} = \left|\begin{array}{l}\cot x = t,\\ \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -dt\end{array}\right| = -2\sqrt{2}\int t^{\frac{3}{2}}dt =$$

$$= -2\sqrt{2}\,\frac{t^{5/2}}{5/2} + C = -\frac{4\sqrt{2}}{5}\cot^{5/2} x + C = C - \frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\cot^5 x} = C - \frac{4\sqrt{2}}{5}\cot^2 x\sqrt{\cot x}\,.$$

4.6.3. Деякі інші методи

а) Застосування формул зниження степеня

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad (11)$$

Приклад 17. $\int \sin^2 15x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 30x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{30}\sin 30x\right) + C\,.$

Приклад 18. $\int \cos^4 5x dx = \int \left(\cos^2 5x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 10x}{2}\right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 10x + \cos^2 10x\right)dx == \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 10x + \frac{1+\cos 20x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (3 + 4\cos 10x + \cos 20x)dx == \frac{1}{8}\left(3x + \frac{2}{5}\sin 10x + \frac{1}{20}\sin 20x\right) + C\,.$$

Приклад 19.

$$\int \sin^6 3x dx = \int \left(\sin^2 3x\right)^3 dx = \int \left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos 6x + 3\cos^2 6x - \right.$$

$$\left. -\cos^3 6x\right)dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{3}{6}\sin 6x + 3\int \frac{1+\cos 12x}{2}dx - \int \left(1-\sin^2 6x\right)\cos 6x dx\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\sin 6x = t\\ \cos 6x dx = \dfrac{1}{6}dt\end{array}\right| = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{12}\sin 12x\right) - \frac{1}{6}\int \left(1-t^2\right)dt\right) =$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 12x - \frac{1}{6}\left(\sin 6x - \frac{\sin^3 6x}{3}\right)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - \frac{2}{3}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 12x + \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + C\,.$$

б) Застосування формул перетворення добутку тригонометричних функцій в алгебричну суму

$$1)\ \sin x\cdot\cos y=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2};\quad 2)\ \cos x\cdot\cos y=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2};$$

$$3)\ \sin x\cdot\sin y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}. \qquad (12)$$

Приклад 20.

$$\int\sin 7x\cos 4x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 11x+\sin 3x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{11}\cos 11x-\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C.$$

Приклад 21. $\int\cos^2 x\sin^2 2x dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\frac{1-\cos 4x}{2}dx=$

$$=\frac{1}{4}\int(1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 2x\cos 4x)dx=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x-\right.$$

$$\left.-\int\frac{\cos 6x+\cos 2x}{2}dx\right)=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{12}\sin 12x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)+C.$$

4.7. ІНТЕҐРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

4.7.1. Лінійні і дробово-лінійні ірраціональності

Обчислення невизначених інтеґралів вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx, \qquad (13)$$

які містять так звану **лінійну ірраціональність**

$$\sqrt[n]{ax+b},$$

зводиться до інтеґрування раціональної функції однієї змінної *t* за допомоги підстановки

$$ax+b=t^n \qquad (14)$$

■На підставі (14) маємо

$$x=\frac{1}{a}\left(t^n-b\right), dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt, \int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx=\frac{n}{a}\int R\left(\frac{1}{a}\left(t^n-b\right),t\right)t^{n-1}dt=\frac{n}{a}\int R_1(t)dt.$$

Ми отримуємо інтеграл від раціональної функції

$$R_1(t) = R\left(\frac{1}{a}\left(t^n - b\right), t\right)t^{n-1}. \blacksquare$$

Невизначені інтеґрали вигляду

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad (15)$$

з дробово-лінійною ірраціональністю

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

зводяться до інтеґралів від раціональних функцій за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \qquad (16)$$

■Дійсно, з (16) отримуємо (детальні перетворення зробіть самостійно)

$$x = \frac{dt^n - c}{a - ct^n}, \quad dx = \frac{n\left(ad - c^2\right)t^{n-1}}{\left(a - ct^n\right)^2}dt,$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n - c}{a - ct^n}, t\right)\frac{n\left(ad - c^2\right)t^{n-1}}{\left(a - ct^n\right)^2}dt,$$

і залишається проінтеґрувати раціональну функцію

$$R_1(t) = R\left(\frac{dt^n - c}{a - ct^n}, t\right)\frac{n\left(ad - c^2\right)t^{n-1}}{\left(a - ct^n\right)^2}.$$

Приклад 22.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3} - 2\sqrt[3]{2x+3}} = \left|\begin{matrix} 2x+3 = t^6,\, t > 0, \\ 2dx = 6t^5dt, dx = 3t^5dt \end{matrix}\right| = 3\int\frac{t^5dt}{t^3 - 2t^2} = 3\int\frac{t^3dt}{t-2} =$$

$$3\int\frac{t^3 - 8 + 8}{t-2}dt = 3\int\left(t^2 + 2t + 4 + \frac{8}{t-2}\right)dt = 3\left(\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^2}{2} + 4t + 8\ln|t-2|\right) + C =$$

$$= 3\left(\frac{\left(\sqrt[6]{2x+3}\right)^3}{3} + 2\frac{\left(\sqrt[6]{2x+3}\right)^2}{2} + 4\sqrt[6]{2x+3} + 8\ln\left|\sqrt[6]{2x+3} - 2\right|\right) + C =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{2x+3}}{3} + 2\frac{\sqrt[3]{2x+3}}{2} + 4\sqrt[6]{2x+3} + 8\ln\left|\sqrt[6]{2x+3} - 2\right|\right) + C.$$

Приклад 23.

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1+x}{1-x}=t^2, t\geq 0, x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1},\\ dx=\dfrac{4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}, \dfrac{1}{1-x}=\dfrac{t^2+1}{2}\end{array}\right|=\int t\cdot\frac{t^2+1}{2}\cdot\frac{4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2(t-\arctan t)+C=2\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)+C$$

4.7.2. Квадратичні ірраціональності. Тригонометричні підстановки

Невизначений інтеґрал вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \qquad (17)$$

позбавляється кореня і зводиться до інтеґрала від раціональної функції арґументів $\sin x, \cos x$ за допомогою тригонометричної підстановки

$$x=a\sin t. \qquad (18)$$

Те ж саме справедливо стосовно інтеґрала

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \qquad (19)$$

якщо застосувати підстановку

$$x=a\tan t, \qquad (20)$$

і для інтеґрала

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx, \qquad (21)$$

якщо покласти

$$x=a\sec t=\frac{a}{\cos t}. \qquad (22)$$

■Розгляньмо інтеграл (17) і покладімо

$$x=a\sin t.$$

Отримаємо

$$dx=a\cos tdt,\ a^2-x^2=a^2-a^2\sin^2 t=a^2\left(1-\sin^2 t\right)=a^2\cos^2 t, \sqrt{a^2-x^2}=a|\cos t|,$$

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\int R\left(a\sin t,\,a|\cos t|\right)a\cos t\,dt=\int R_1(\sin t,\cos t)\,dt,$$

де $R_1(\sin t,\cos t)=R\left(a\sin t,\,a|\cos t|\right)a\cos t$.■

Інтеґрали (19), (21) розгляньте самостійно.

Приклад 24.

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=\left|\begin{array}{c}x=2\sin t,\text{ припускаємо } 0<t\le\frac{\pi}{2},\\ dx=2\cos t\,dt,\ 4-x^2=4\cos^2 t\end{array}\right|=\int\frac{2|\cos t|}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=\int\cot^2 t\,dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\cot t-t+C=\left|\begin{array}{c}\sin t=\frac{x}{2},\ \cos t=\\ =\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\end{array}\right|=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

Приклад 25.

$$\int\frac{dx}{\left(\sqrt{25+x^2}\right)^3}=\left|\begin{array}{c}x=5\tan t,\text{ припускаємо } 0\le t<\frac{\pi}{2},\\ dx=\frac{5dt}{\cos^2 t},\ 25+x^2=25\left(1+\tan^2 t\right)=\frac{25}{\cos^2 t}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{5dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{5}{\cos t}\right)^3}=$$

$$=\frac{1}{25}\int\cos t\,dt=\frac{1}{25}\sin t+C=\left|\sin t=\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{25+x^2}}\right|=\frac{x}{25\sqrt{25+x^2}}+C.$$

Приклад 26.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\left|\begin{array}{c}x=\frac{3}{\cos t},\text{ припускаємо } 0\le t<\frac{\pi}{2},\ dx=\frac{3\sin t\,dt}{\cos^2 t}\\ x^2-9=9\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)=9\left(\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\right)=9\tan^2 t\end{array}\right|=\int\frac{\frac{3\sin t\,dt}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t}\cdot 3\tan t}=$$

$$=\frac{1}{9}\int\cos t\,dt=\frac{1}{9}\sin t+C=\left|\cos t=\frac{3}{x},\ \sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right|=\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C.$$

4.7.3. Квадратичні ірраціональності (загальний випадок)

Невизначений інтеґрал вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad (23)$$

може бути зведений до одного з інтеґралів (17), (19), (21) за допомогою підстановки

$$\frac{1}{2}\left(ax^2+bx+c\right)'=t \qquad (24)$$

Існує багато інших методів обчислення інтеґралів вигляду (23). Зокрема, можна звести інтеґрування до інтеґрування раціональної функціх за допомоги так званих підстановок Ейлера.

Перша підстановка Ейлера (якщо $a>0$):

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t\,; \qquad (25)$$

друга підстановка Ейлера (якщо $c>0$):

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}\,; \qquad (26)$$

третя підстановка Ейлера (якщо тричлен ax^2+bx+c має два дійсних кореня x_1, x_2):

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left(x-x_1\right)t\,. \qquad (27)$$

Приклад 27. Нехай

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,.$$

Застосовуючи першу підстановку Ейлера (25) в наступному вигляді

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x,$$

отримуємо

$$x^2+x+1=t^2-2tx+x^2,\ x=\frac{t^2-1}{2t+1},dx=\frac{2\left(t^2+t+1\right)dt}{\left(2t+1\right)^2},x+\sqrt{x^2+x+1}=t\,,$$

так що

$$I=\int\frac{\frac{2\left(t^2+t+1\right)dt}{\left(2t+1\right)^2}}{t}=2\int\frac{\left(t^2+t+1\right)dt}{t\left(2t+1\right)^2}\,.$$

Розвинимо підінтеґральну функцію (правильний раціональний дріб) в суму найпростіших раціональних дробів. Перш за все покладаємо

$$\frac{t^2+t+1}{t\left(2t+1\right)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{\left(2t+1\right)^2}+\frac{C}{2t+1}\,.$$

Помножаючи обидві частини тотожності на спільний знаменник $t(2t+1)^2$, доходимо тотожності

$$t^2+t+1=A(2t+1)^2+Bt+Ct(2t+1).$$

Дамо далі змінній t три довільних значення, наприклад $0, -\frac{1}{2}, -1$, звідки

$$\begin{array}{r|l} t=0 & \\ t=-1/2 & \\ t=-1 & \end{array}\left|\begin{cases} 1=A,\ A=1; \\ 3/4=-1/2\,B,\ B=-3/2; \\ 1=A-B+C,\ C=-3/2; \end{cases}\right. \quad \frac{t^2+t+1}{t(2t+1)^2}=\frac{1}{t}-\frac{3/2}{(2t+1)^2}-\frac{3/2}{2t+1}.$$

Повертаємось до обчислення даного інтеґрала. Маємо

$$I=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3/2}{(2t+1)^2}-\frac{3/2}{2t+1}\right)dt=2\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dt}{(2t+1)^2}-3\int\frac{dt}{2t+1}=\left|\begin{matrix}2t+1=y\\ 2dt=dy\end{matrix}\right|=$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\int\frac{dy}{y^2}-\frac{3}{2}\int\frac{dy}{y}=2\ln|t|+\frac{3}{2y}-\frac{3}{2}\ln|y|+C=2\ln|t|+\frac{3}{2(2t+1)}-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+C=$$

$$=\frac{3}{2(2t+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3}+C=\frac{3}{2\left(2\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)+1\right)}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)^4}{\left|2\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)+1\right|^3}+C$$

4.8. ПОНЯТТЯ ПРО ІНТЕҐРАЛИ, ЯКІ НЕ "БЕРУТЬСЯ"

Вище ми обчислили велику кількість невизначених інтеґралів. Успішність проведеної роботи не повинна вводити нас в оману. Далеко не всякий інтеґрал може бути обчислений так же просто, как це було в нас. Більш того, існує велика кількість невизначених інтеґралів, які взагалі неможливо взяти за допомогою елементарних функцій. Не входячи в деталі, наведемо декілька прикладів таких інтеґралів, які не "беруться". Так, до їх числа належать такі достатньо прості за формою інтеґрали

$$\int e^{\pm x^2}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x},\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\sin x^2dx,\ \int\cos x^2dx,\ \int\frac{e^x}{x^k}dx,$$

де k - довільне натуральне число.

5. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕҐРАЛ

5.1. ЗАДАЧІ, ЯКІ ВЕДУТЬ ДО ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕҐРАЛА

5.1.1. Площа криволінійної трапеції

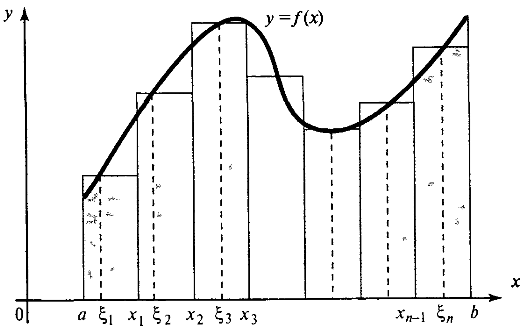


Fig. 1

Означення 1. Криволінійною трапецією (першого типу) в площині xOy називається фигура, обмежена двома прямими $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, віссю Ox і кривою $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$ (рис.1).

Зручно визначати криволінійну трапецію як наступну точкову множину в площині xOy:

$$\{(x; y): a \leq x \leq b; \forall x \in (a, b): (0 \leq y \leq f(x))\}. \qquad (1)$$

Щоб означити поняття площі криволінійної трапеції (1), виконаємо наступні дії.

1. Точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

поділимо відрізок $[a, b]$ на n частин (підінтервалів)

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

з довжинами

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1},$$

відповідно, і нехай λ - найбільша з цих довжин, тобто

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n\}.$$

2. Візьмемо довільну точку ξ_i в кожній частині $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, знайдемо значення функції в цій точці і помножимо його на $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

3. Склавши всі такі добутки $f(\xi_i)\Delta x_i$, отримаємо суму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_i)\Delta x_i + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

- площу ступінчастої фігури, утвореної прямокутниками з основами Δx_i, $i = \overline{1,n}$, і висотами $f(\xi_i)$, $i = \overline{1,n}$.

4. Нехай λ прямує до нуля. Якщо існує границя сумы (2), вона називається площею криволінійної трапеції (1) (рис.1) і позначається

$$S = S_{curv\_trap} = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (3)$$

5.1.2. Кількість виготовленої продукції

Нехай $f(t)$ - продуктивність праці деякого підприємства в момент часу t. Знайдемо кількість U продукції, виготовленої протягом проміжка часу $[0, T]$.

Якщо $f(t) = const = F$, то $U = F \cdot T$.

Але, як правило, $f(t) \neq const$, і тому ми чинимо наступним чином.

1. Поділимо інтервал часу [*0, T*] на *n* частин

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{i-1}, t_i], ..., [t_{n-1}, t_n], \; t_0 = 0, \; t_n = T; \; \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \; i = \overline{1,n},$$

і покладемо $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_i, ..., \Delta t_n\}$.

2. Візьмемо довільну точку τ_i в кожній частині $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1,n}$, знайдемо значення функції $f(t)$ в цій точці і помножимо його на $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

3. Додаючи всі добутки $\Delta U_i = f(\tau_i)\Delta t_i$, знаходимо наближене значення кількості U продукції, виготовленої протягом проміжка часу [0, *T*], тобто

$$U = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i \approx \sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta t_i . \qquad (4)$$

4. Спрямовуючи λ до нуля, знаходимо точне значення кількості виготовленої продукції

$$U = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta t_i . \qquad (5)$$

5.1.3. Довжина пройденого шляху.

Знайдемо довжину L шляху, пройденого матеріальною точкою, що рухається з швидкістю $v(t)$, протягом проміжку часу тривалості T (від $t = 0$).

Якщо $v(t) = const = v$, то $L = v \cdot T$.

У випадку змінної швидкості $v(t)$ ми діємо таким же чином, як і в попередніх задачах.

1. Ділимо відрізок [*0, T*] на *n* частин

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{i-1}, t_i], ..., [t_{n-1}, t_n], t_0 = 0, t_n = T; \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = \overline{1, n}$$

і покладаємо $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_i, ..., \Delta t_n\}$.

2. В кожному інтервалі часу $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, беремо довільний момент τ_i, знаходимо значення швидкості в цей момент і помножаємо його на довжину інтервала $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

3. Додаючи всі добутки $\Delta L_i = v(\tau_i)\Delta t_i$, знаходимо наближене значення довжини L шляху, пройденого матеріальною точкою протягом часового інтервалу [0, *T*], тобто

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i \approx \sigma = \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i . \qquad (6)$$

4. Спрямовуючи λ до нуля, знаходимо точне значення величини пройденого шляху L,

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i . \qquad (7)$$

5.2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕҐРАЛ

Означення 2. Нехай функцію $y = f(x)$ задано на відрізку [*a*, *b*] (рис. 2).

1. Поділимо відрізок на *n* частин (підінтервалів)

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{i-1}, x_i], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

точками (точками поділу)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b;$$

нехай

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1, ...,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, ...,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1},$$

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_i, ..., \Delta x_n\}.$$

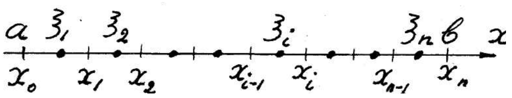


Рис. 2

2. Візьмемо довільну точку ξ_i в кожному підінтервалі $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, знайдемо значення функції $f(x)$ в цій точці і помножимо його на довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ підінтервала.

3. Додаючи всі такі добутки $f(\xi_i)\Delta x_i$, отримуємо суму (так звану **інтеґральну суму Коші[1]-Рімана[2]**)

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_i)\Delta x_i + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (8)$$

4. Якщо існує скінченна границя інтеґральної суми (8) при $\lambda \to 0$, ця границя називається **визначеним інтеґралом** функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (9)$$

Ми читаємо ліву частину в (9) наступним чином: “(визначений) інтеґрал від *a* до *b* (функції) $f(x)$ dx” (слова в дужках можна випускати).

$f(x), f(x)dx, x$ мають ті ж назви, що й в невизначеному інтеґралі; число *a* називається нижньою межею інтеґрування, *b* – верхньою межею інтеґрування.

Означення 3. Функція $f(x)$ називається **інтеґровною** на відрізку $[a, b]$, якщо існує її визначений інтеґрал (9).

Теорема 1 (*теорема існування*). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтеґровна на ньому.

---

[1] Коші Огюстен Луї (1780 - 1859) – видатний французький математик

[2] Ріман Георг Фрідріх Бернгард (1826 - 1866) – видатний німецький математик

Геометричний сенс визначеного інтеґрала. Якщо підінтеґральна функція неперервна і невід"ємна, $f(x) \geq 0$, на відрізку $[a, b]$, то на підставі (2), (3) її визначений інтеґрал дає площу криволінійної трапеції (1), рис. 1,

$$S = S_{curv\_trap} = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \qquad (10)$$

Економічний сенс визначеного інтеґрала. Якщо неперервна функція $f(t)$ визначає продуктивність праці деякого підприємства, то кількість U продукції, виробленої ним протягом інтервалу часу $[0, T]$, на підставі (4), (5) дається визначеним інтеґралом,

$$U = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i) \Delta t_i = \int_0^T f(t) dt . \qquad (11)$$

Фізичний сенс визначеного інтеґрала. Якщо неперервна функція $v(t)$ є швидкістю матеріальної точки, то на підставі (6), (7) довжина L шляху, пройденого нею протягом інтервалу часу від $t = 0$ до $t = T$, виражається визначеним інтеґралом

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \Delta t_i = \int_0^T v(t) dt \qquad (12)$$

Приклад 1. Довести, що

$$\int_a^b dx = b - a \qquad (13)$$

■Підінтеґральна функція $f(x) \equiv 1$, і тому інтеґральна сума (8) дорівнює довжині відрізка $[a, b]$, тобто

$$\sigma = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_i + \ldots + \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a ,$$

а отже, її границя, яка є інтеґралом (13), дорівнює $b - a$.■

Зауваження. Визначений інтеґрал не залежить від змінної інтеґрування:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(t) dt = \ldots \qquad (14)$$

Означення 4 (визначений інтеґрал з рівними межами інтеґрування). Визначений інтеґрал з рівними межами інтеґрування вважається за означенням рівним нулю,

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (15)$$

Доречність такого означення випливає, наприклад, з геометричного сенсу визначеного інтеґрала, якщо уявити собі, що $b \to a$ і при цьому площа криволінійної трапеції прямує до нуля.

Означення 5 (зміна місцями меж інтеґрування).

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (16)$$

Замість означення 5 ми могли б дати інше, а саме – означення інтеґрала в правій частині рівності (16) (при $b > a$). Тоді б ми отримали цю рівність як наслідок. Дійсно,

$$\int_b^a f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i+1}) = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = -\int_a^b f(x)dx.$$

Але такий шлях є набагато громіздкішим.

5.3. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕҐРАЛА

5.3.1. Лінійність та адитивність

1 (однорідність). Сталий множник k може бути винесений за знак визначеного інтеґрала,

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

■Утворимо інтеґральні суми для лівої и правої частин. Вони рівні, оскільки

$$\sigma_{kf(x)}=\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=k\sigma_{f(x)}.$$

Тому їх границі, тобто відповідні визначені інтеґрали, є також рівними.■

2 (адитивність відносно підінтеґральної функції). Якщо $f_1(x)$, $f_2(x)$ - дві інтеґровні функції, то

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx.$$

Доведіть цю властивість самостійно.

Наслідок (лінійність). Для будь-яких двох інтеґровних функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$ і довільних сталих k_1, k_2

$$\int_a^b (k_1f_1(x)+k_2f_2(x))dx=k_1\int_a^b f_1(x)dx+k_2\int_a^b f_2(x)dx.$$

3 (адитивність відносно інтервалу інтеґрування). Для будь-яких a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$

якщо принаймні два з трьох інтеґралів існують.

■1) Нехай спочатку $c\in(a, b)$. Утворимо інтеґральну суму так, щоб c було точкою ділення. В такому випадку (позначення зрозумілі)

$$\sigma_{[a,b]}=\sigma_{[a,c]}+\sigma_{[c,b]},$$

і перехід до границі при $\lambda\to 0$ доводить властивість.

2) Нехай тепер розташування точок a, b, c довільне, наприклад, $a<b<c$. Застосовуючи перший випадок до інтервала $[a, c]$ і означення 5, отримаємо

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_c^b f(x)dx,$$

звідки

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.■$$

5.3.2. Інтеґрування нерівностей. Теорема про середнє

4. Якщо $a < b$ і підінтеґральна функція $f(x)$ невід"ємна на відрізку $[a, b]$, $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Інтеґрал строго додатний, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і не дорівнює нулю тотожно.

■ Невід"ємність інтеґрала безпосередньо випливає з додатності інтеґральної суми для функції $f(x)$. Його строга додатність, як можна довести більш складними міркуваннями, є результатом неперервності функції. ■

5. Якщо $a < b$ і $f(x) \leq g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Інтеґрали пов"язані строгою нерівністю, якщо функції $f(x)$, $g(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$ і не рівні тотожно.

■Достатньо застосувати попередню властивість до різниці $f(x) - g(x)$.■

Приклад 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx,$$

оскільки $\sin^2 x \leq \sin x$ на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Якщо $a < b$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (17)$$

■ Достатньо застосувати властивість 5 до подвійної нерівності

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$ ■

7 (двобічна оцінка визначеного інтеґрала). Якщо $a < b$ і функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то справедливою є подвійна нерівність

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a), \text{ де } m = \min_{[a,b]} f(x),\ M = \max_{[a,b]} f(x). \qquad (18)$$

■Доведення випливає з властивості 5, нерівності $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$ та формули (13).■

Приклад 3. Оцінити інтеґрал

$$I = \int_1^4 \left(3x^2 - 12x + 14\right)dx.$$

Маємо

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 14, f'(x) = 6x - 12, f'(x) = 0 \text{ if } x = 2;\ f(1) = 5, f(2) = 2, f(4) = 14;$$
$$m = \min_{[1,\,4]} f(x) = f(2) = 2,\ M = \max_{[1,\,4]} f(x) = f(4) = 14,\ a = 1,\ b = 4,\ b - a = 3,$$

і на підставі формули (18)

$$2 \cdot 3 \le \int_1^4 \left(3x^2 - 12x + 14\right)dx \le 14 \cdot 3, \qquad 6 \le \int_1^4 \left(3x^2 - 12x + 14\right)dx \le 42.$$

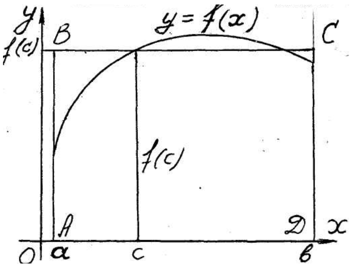


Рис. 3

8. ***Теорема про середнє.*** Якщо функція $f(x)$ непнрервна на відрізку $[a, b]$, то існує точка $c \in (a, b)$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (19)$$

■Нехай, наприклад, $a < b$. Діленням обох частин нерівності (18) на додатне число $b - a$ отримуємо

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Згідно з теоремою Больцано[1]–Коші для функції, яка неперервна на відрізку $[a, b]$, існує точка $c \in (a, b)$ така, що

---

[1] Больцано Бернард (1781 - 1848) – чешский математик, философ и логик

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Випадок $a > b$ розглядається таким же чином. Зробіть це самостійно.■

Геометричний сенс теореми про середнє (рис. 3). Площа криволінійної трапеції (1) дорівнює площі прямокутника *ABCD* з тією ж основою *AD*=[*a, b*] і висотою $f(c)$.

Означення 6. Вираз

$$f_{mean} = f_{av} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (20)$$

називається **середнім значенням** функції $f(x)$ на відрізку [*a, b*].

5.4. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕҐРАЛ ЯК ФУНКЦІЯ СВОЄЇ ВЕРХНЬОЇ МЕЖІ

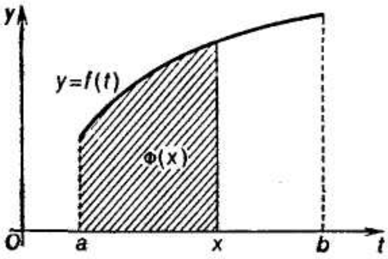


Рис. 4

Нехай $x \in [a, b]$. Розглядемо функцію

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad (21)$$

тобто визначений інтеґрал с змінною верхньою межею *x*. Геометрично (для невід"ємної підінтеґральної функції $f(t) \geq 0$) цей інтеґрал дає площу тієї частини криволінійної трапеції

$$\{(t, y): a \leq t \leq b, 0 \leq y \leq f(t)\},$$

яка лежить між прямими $t = a, t = x$ (рис. 4).

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрезку [*a*, *b*], то для будь-якого $x \in [a, b]$ похідна інтеґрала (21) дорівнює

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \qquad (22)$$

тобто похідна визначеного інтеґрала з змінною верхнью межею *x* по цій межі дорівнює значенню підінтеґральної функції в точці *x*.

■За означенням похідної

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}.$$

Використовуючи адитивність визначеного інтеґрала відносно інтервалу інтеґрування, маємо

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt,\ \Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt.$$

Нехай, наприклад, $\Delta x>0$. На підставі теореми про середнє існує така точка c в інтервалі $(x,x+\Delta x)$, що

$$\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=f(c)((x+\Delta x)-x)=f(c)\Delta x.$$

При цьому $c\to x$, якщо $\Delta x\to 0$. Беручи до уваги неперервність функції *f*, ми дістаємо

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=f(x).■$$

Наслідок **(*основна теорема інтеґрального числення*).** Кожна функція, неперервна на відрізку [*a, b*], має первісну на [*a, b*].

■Однією з таких первісних є інтеґрал (21) з змінною верхньою межею *x*.■

Приклад 4. Знайти похідну функції

$$f(x)=\int_0^x\left(t^2+\sin t\right)dt.$$

Згідно з формулою (22)

$$f'(x)=\left(\int_0^x\left(t^2+\sin t\right)dt\right)'=x^2+\sin x.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції

$$\int_{\sin x}^{\cos x}t^2dt.$$

Використовуючи властивість адитивності визначеного інтеґрала відносно інтервалу інтеґрування, правило диференціювання складеної функції та формулу (22), отримуємо

$$\left(\int_{\sin x}^{\cos x} t^2 dt\right)' = \left(\int_0^{\cos x} t^2 dt - \int_0^{\sin x} t^2 dt\right)' = \frac{d}{d\cos x}\left(\int_0^{\cos x} t^2 dt\right)\cdot(\cos x)' - \frac{d}{d\sin x}\left(\int_0^{\sin x} t^2 dt\right)\cdot(\sin x)' =$$

$$= -\cos^2 x\cdot\sin x - \sin^2 x\cdot\cos x = -\sin x\cos x(\cos x + \sin x) = -\frac{1}{2}\sin 2x(\cos x + \sin x).$$

5.5. ФОРМУЛА НЬЮТОНА - ЛЕЙБНІЦА

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $F(x)$ - одна з її первісних, то обчислення визначеного інтеґрала функції по відрізку можна здійснити за допомогою так званої **формули Ньютона[1]-Лейбніца[2]**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (23)$$

■ Ми маємо дві первісні для функції $f(x)$, а саме: названу первісну $F(x)$ і, крім того, визначений інтеґрал $\Phi(x)$ (формула (21)) з змінною верхньою межею x. За відповідною властивістю первісної різниця функцій $\Phi(x)$ і $F(x)$ є сталою, тобто

$$\Phi(x) - F(x) = \int_a^x f(t)dt - F(x) = C = \text{const}.$$

Щоб знайти значння сталої C, покладімо $x = a$. Матимемо

$$\Phi(a) - F(a) = \int_a^a f(t)dt - F(a) = 0 - F(a) = C,\ C = -F(a),$$

і тому

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Замінюючи x на b і t на x, отримуємо формулу (23).■

---

[1] Ньютон Исаак (1643 - 1727) – великий английский ученый

[2] Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646 – 1717) - выдающийся немецкий математик, физик и философ

Зауваження. Вираз

$$F(x)\Big|_a^b ,$$

який означає дію $F(b)-F(a)$, називається **подвійною підстановкою**.

Приклад 6. Обчислити визначений інтеґрал

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx.$$

Первісною для $\cos x$ є $\sin x$, і за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

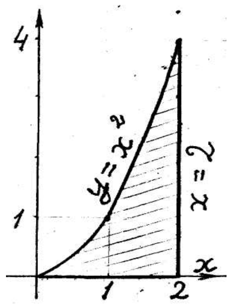


Рис. 5

Приклад 7. Знайти площу фігури, обмеженої наступними лініями: $y = x^2$, $x = 2, y = 0$ (рис. 5).

Задана фігура є криволінійною трапецією, і за формулою (10) її площа дорівнює визначеному інтеґралу від функції $f(x) = x^2$ по відрізку $[1, 2]$,

$$S = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} \approx 2.67 .$$

Приклад 8. Частинка рухається вздовж прямої, і її швидкість через t с після проходження точки O дорівнює $v(t) = \left(1 - 1/4t^2\right)$ м/с. Знайти відстань частинки від точки O через 2 с, а також середнє значення її швидкості протягом проміжку часу від $t = 0$ до $t = 2$.

Згідно з формулою (12) шукана відстань дорівнює

$$L = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 \left(1 - 1/4t^2\right)dt = \left(t - 1/12t^3\right)\Big|_0^2 = \left(2 - 1/12 \cdot 2^3\right) = 4/3 \text{ м.}$$

Використовуючи далі формулу (20) і результат щойно проведеного інтеґрування, маємо

$$v_{mean} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 v(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(1 - 1/4\,t^2\right)dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 9. Знайти середнє значення функції $y = \sin x$ на відрізку $\left[0, \pi/2\right]$.

За формулою (20)

$$y_{mean} = \frac{1}{\pi/2 - 0}\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{2}{\pi}\cdot \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}(\sin\pi/2 - \sin 0) = \frac{2}{\pi}(1-0) = \frac{2}{\pi}.$$

5.6. ОСНОВНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕҐРАЛА

5.6.1. Заміна змінної (спосіб підстановки)

Теорема 4. Нехай: 1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$; 2) функція $x = \varphi(t)$ неперервна зі своєю похідною на відрізку $[\alpha, \beta]$; 3) виконуються рівності $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тоді має місце наступна формула (**формула заміни змінної**)

$$\int_a^b f(x)dx = \left|\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt,} \\ x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array}\right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (24)$$

■ Нехай $F(x)$ - якась первісна функції $f(x)$. Тоді $F(\varphi(t))$ є первісною функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. За формулою Ньютона-Лейбніца

а) інтеґрал ліворуч дорівнює

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a);$$

б) інтеґрал праворуч має таке ж саме значення, оскільки

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).■$$

Зауваження. На відміну від невизначеного інтеґрала після застосування формули (24) не треба повертатися до попередньої змінної інтеґрування.

Приклад 10. Обчислити визначений інтеґрал

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos xdx}{4+\sin^2 x}.$$

Покладімо $\sin x=t$. Тоді $\cos xdx=dt,\ \begin{array}{c|c|c} x & -\pi/2 & \pi/2 \\ \hline t & -1 & 1 \end{array}$, так що

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos xdx}{4+\sin^2 x}=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1}{2}-\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\arctan\frac{1}{2}$$

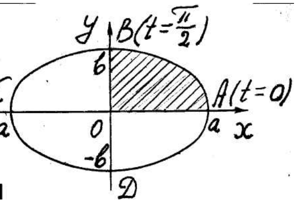


Рис. 6

Приклад 11. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (рис. 6).}$$

Достатньо знайти почетверену площу частини OAB фігури.

Перший спосіб. З рівняння еліпса

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

і тому

$$S=4S_{OAB}=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{array}{c} x=a\sin t, dx=a\cos tdt, \\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t, \begin{array}{c|c|c} x & 0 & a \\ \hline t & 0 & \pi/2 \end{array} \end{array}\right|=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2ab\left(\int_0^{\pi/2}dt+\int_0^{\pi/2}\cos 2tdt\right)=2ab\left(t\bigg|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\sin 2t\bigg|_0^{\pi/2}\right)=\pi ab$$

Другий спосіб. Краще перейти до параметричних рівнянь еліпса, а саме: $x=a\cos t, y=b\sin t$. В цьому випадку заміна змінної $x=a\cos t,$ в результаті якої ми повинні взяти $y=b\sin t$, дає той же результат значно простіше,

$$S=4S_{OAB}=4\int_0^a ydx=\left|\begin{array}{c} x=a\cos t, y=b\sin t \\ dx=-a\sin tdt\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & a \\ \hline t & \pi/2 & 0 \end{array} \end{array}\right|=-4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 tdt=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 tdt=$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left(\int_0^{\pi/2}dt - \int_0^{\pi/2}\cos 2t dt\right) = 2ab\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \pi ab.$$

5.6.2. Інтеґрування частинами

Теорема 5. Якщо функції $u = u(x), v = v(x)$ неперервні з своїми похідними на відрізку $[a,b]$, то справедливою є наступна формула (**формула інтеґрування частинами**):

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du \qquad (25)$$

■Для доведення формули достатньо проінтеґрувати від a до b обидві частини рівності

$$udv = d(uv) - vdu$$

і застосувати формулу Ньютона-Лейбніца для інтеґрала від функції $d(uv)$.■

Приклад 12. Обчислити визначений інтеґрал

$$\int_0^1 \arctan x dx.$$

Використовуючи інтеґрування частинами, отримуємо

$$\int_0^1 \arctan x dx = \left| \begin{array}{c} u = \arctan x, dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, v = x \end{array} \right| = (x\arctan x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xdx}{1+x^2} =$$

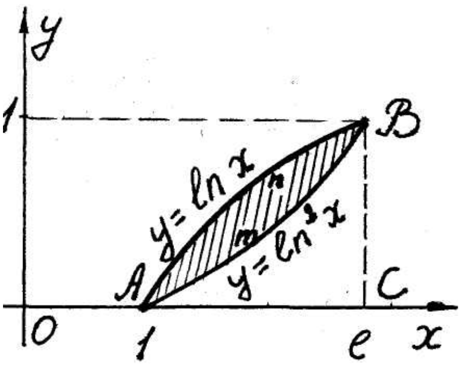


Рис. 7

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)' dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.785 - 0.347 \approx 0.44.$$

Приклад 13. Обчислити площу фігури, обмеженої двома лініями $y = \ln x, y = \ln^2 x$ (див. рис. 7).

Лінії $y = \ln x, y = \ln^2 x$ перетинаються в точках $A(1;\,0)$, $B(e;\,1)$ і утворюють фігуру $AmBnA$ (рис. 7). Її площа дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій $AnBC$, $AmBC$. Тому

$$S=S_{AnBC}-S_{AmBC}=\int_1^e\left(\ln x-\ln^2 x\right)dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x-\ln^2 x,\ dv=dx,\\ du=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}\right)dx,\ v=x\end{array}\right|=\left.\left(x\left(\ln x-\ln^2 x\right)\right)\right|_1^e-$$

$$-\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)xdx=\int_1^e(2\ln x-1)dx=\left|\begin{array}{c}u=2\ln x-1,\ dv=dx,\\ du=\dfrac{2dx}{x},\ v=x\end{array}\right|=\left.\left(x(2\ln x-1)\right)\right|_1^e-2\int_1^e dx=$$

$$=e-(-1)-2(e-1)=3-e\approx 0.28.$$

Приклад 14. Нехай

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx,\ J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx,\ n=0,1,2,3,\ldots.$$

Довести, що

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\ J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

$$\blacksquare\, I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\left|\begin{array}{c}u=\sin^{n-1}x,\ dv=\sin xdx\\ du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos xdx, v=-\cos x\end{array}\right|=\left.\left(-\sin^{n-1}x\cos x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

$$I_n+(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2},\ nI_n=(n-1)I_{n-2},\ I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\,\blacksquare$$

Наприклад,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 xdx=I_5=\frac{4}{5}I_3=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1=\frac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{8}{15}\cdot 1=\frac{8}{15}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 xdx=J_6=\frac{5}{6}J_4=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}J_2=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}J_0=\frac{15}{48}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{15}{48}\cdot\frac{\pi}{2}\approx 0.49.$$

Приклад 15. Знайти залишковий член $R_n(x)$ формули Тейлора в формі Лаґранжа.

Нехай, наприклад, $n = 1$, і

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x).$$

За формулою Лаґранжа $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(c)(x - x_0)$. Взявши

$$\varphi(x) = f'(x),$$

маємо

$$f'(x) - f'(x_0) = f''(c)(x - x_0),$$

і після інтеґрування по відрізку $[x_0, x]$ отримуємо

$$\int\limits_{x_0}^{x} f'(x)dx - f'(x_0)\int\limits_{x_0}^{x} dx = f''(c)\int\limits_{x_0}^{x} (x - x_0)dx,\ f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2,$$

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Таким чином,

$$R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 = \frac{f''(c)}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Щоб знайти $R_n(x)$ для довільного n ми пишемо

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x),$$

потім покладаємо $\varphi(x) = f^{(n)}(x)$, і за формулою Лаґранжа маємо

$$f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0) = f^{(n+1)}(c)(x - x_0).$$

Далі ми n раз інтеґруємо по відрізку $[x_0, x]$ і отримуємо

$$f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2,$$

$$f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(x_0) - f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 = \frac{f^{(n+1)}(c)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - x_0)^3, \ldots$$

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

тобто

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

6. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕҐРАЛА

6.1. ДВІ СХЕМИ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ИНТЕҐРАЛА

Розглядають дві схеми застосування визначеного інтеґрала для знаходження деякої величини *Q*.

1) Складання інтеґральної суми і подання *Q* як границі інтеґральної суми, тобто у вигляді визначеного інтеґрала.

Приклад 1. Як приклад див. три задачі в п. 5.1 і відповідні формули (10), (11), (12) в п. 5.2.

2) Відшукання елементу (фактично диференціала) *dQ* величини *Q* і подання *Q* як суми всіх цих элементів. Така процедура іншим шляхом веде до визначеного інтеґрала для знаходження *Q*.

Для ілюстрації другої схеми ми розглянемо ті ж самі задачі, що і пп. 5.1, 5.2.

Приклад 2. Площа криволінійної трапеції першого типу

$\{(x;y): a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ (рис. 1).

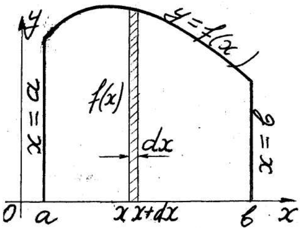


Рис. 1

Елемент (диференціал) *dS* площі *S* (площа заштрихованої смужки з основою $[x, x+dx]$ на рис.1) дорівнює

$$dS = f(x)dx.$$

Підсумовуючи всі ці елементи від *a* до *b*, отримуємо шукану площу как вже відомой визначений інтеґрал

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Приклад 3. Кількість *U* продукції, виготовленої підприємством протягом інтервалу часу [0, *T*].

Нехай $f(t)$ - продуктивність праці в довільний момент часу t. Елемент dU кількості продукції, виготовленої протягом нескінченно малого інтервалу часу $[t, t+dt]$, дорівнює

$$dU = f(t)dt.$$

Беручи сумі всіх цих елементів від 0 до T, ми отримуємо шукану кількість продукції U, а саме:

$$U = \int_0^T f(t)dt \qquad (2)$$

Приклад 4. Довжина L шляху, пройденого матеріальною точкою протягом проміжку часу від $t = 0$ до $t = T$ з швидкістю $v(t)$.

Елемент dL шляху, пройденого протягом нескінченно малого проміжку часу $[t, t+dt]$, дорівнює

$$dL = v(t)dt,$$

а сума всіх цих элементів від 0 до T дає шукану довжину шляху L

$$L = \int_0^T v(t)dt. \qquad (3)$$

Звичайно, результати (1), (2), (3) збігаються з результатами (10), (11), (12), які було отримано в п. 5.2.

6.2. ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР: ДОПОВНЕННЯ

а) Випадок **недодатної функції**. Площа фігури

$$\{(x, y): a \le x \le b, f(x) \le y \le 0\}, f(x) \le 0,$$

яку зображено на рис. 2, дорівнює

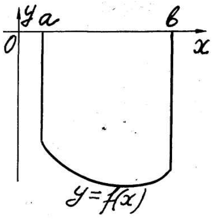


Fig. 2

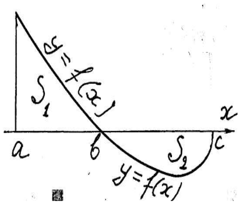


Fig. 3

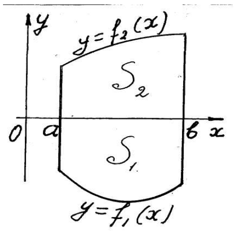


Fig. 4

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (4)$$

б) Випадок, коли функція має **різні знаки** на різних інтервалах. Нехай функція $f(x)$ невід"ємна на інтервалі $[a,b]$ і недодатна на інтервалі $[b,c]$. Площа відповідної фігури, зображеної на рис. 3, дорівнює

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx. \qquad (5)$$

в) Випадок, коли фігура міститься **між двома кривими**. Площа фігури

$$\{(x,y): a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\},$$

зображеної на рис. 4, дорівнює

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (6)$$

Приклад 5. Знайти площу фігури, заключеної між двома лініями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2$ (рис. 5).

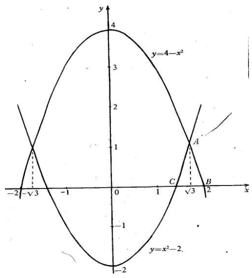


Рис. 5

Точки перетину кривих мають абсциси $\pm\sqrt{3}$. Фігура симетрична відносно осі *Oy*; ми можемо знайти подвоєну площу її правої частини.

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left((4 - x^2) - (x^2 - 2)\right)dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} (6 - 2x^2)dx = 2\left[6x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(6\sqrt{3} - \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}\right) = 8\sqrt{3} \approx 13.9.$$

г) Фігури, **орієнтовані відносно осі *Oy***. Площі фігур

$$\{(x,y): c \le y \le d, 0 \le x \le g(y)\} \text{ (рис. 6)},$$

$$\{(x,y): c \le y \le d,\ g(y) \le x \le 0\},\ g(y) \le 0 \text{ (рис. 7)},$$

$$\{(x,y): c \le y \le d, 0 \le x \le g(y)\} \cup \{(x,y): d \le y \le e,\ g(y) \le x \le 0\} \text{ (рис. 8)},$$

$$\{(x,y): c \le y \le d,\ g_1(y) \le x \le g_2(y)\} \text{ (рис. 9)}$$

відповідно дорівнюють

$$S = \int_c^d g(y)dy, \qquad (7)$$

$$S=-\int_c^d g(y)dy, \qquad (8)$$

$$S=S_1+S_2=\int_c^d g(y)dy-\int_d^e g(y)dy, \qquad (9)$$

$$S=\int_c^d (g_2(y)-g_1(y))dy. \qquad (10)$$

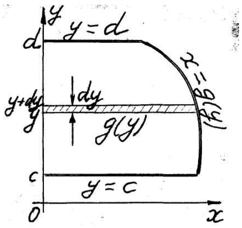


Рис. 6

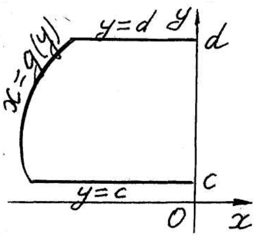


Рис. 7

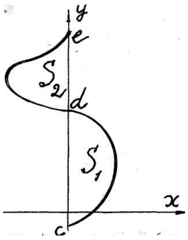


Рис. 8

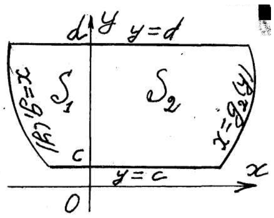


Рис. 9

Приклад 6. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$ (рис. 10).

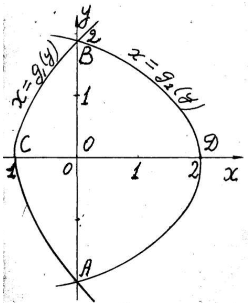


Рис. 10

Запишемо рівняння кривих у вигляді

$$x=g_1(y)=\frac{y^2-4}{4}\ (ACB),\ x=g_2(y)=\frac{4-y^2}{2}\ (ADB)$$

і застосуємо формулу (10).

З огляду на симетричність фігури відносно осі Ox знайдемо подвоєну площу її верхньої частини,

$$S=2S_{BCD}=2\int_0^2 (g_2(y)-g_1(y))dy=2\int_0^2\left(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^2 (12-3y^2)dy=2.$$

д) Випадок кривої, заданої **параметрично**.

Нехай, наприклад, дано криволінійну трапецію

$$\{(x;y): a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\},\ \text{(рис. 1)},$$

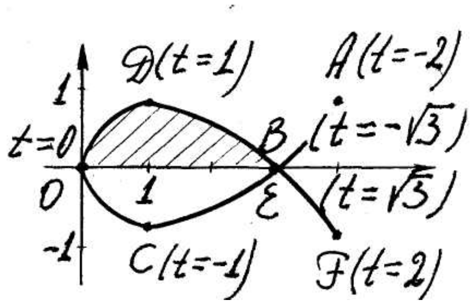
але криву $y=f(x)$ задано параметричними рівняннями

$$x=x(t),\ y=y(t)$$

($x=a$ для $t=\alpha$ і $x=b$ для $t=\beta$)

Для знаходження площі такої криволінейної трапеції ми замінимо змінну в формулі (1), а саме:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\left|\begin{array}{l} x=x(t),\ f(x)=y(t) \\ dx=x'(t)dt,\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array}\right|=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$



Приклад 7. Знайти площу петлі лінії $x=t^2, y=t-\frac{t^3}{3}$ (рис. 11).

Щоб побудувати криву за точками і побичити петлю, ми прирівняємо до нуля вирази

Рис. 11

$$x=t^2,\ y=t-\frac{t^3}{3},\ x'=2t,\ y'=1-t^2$$

і складемо таблицю

t	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
x	4	3	1	0	1	3	4
y	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
Point	A	B	C	O	D	E	F

З рис. 11 ми бачимо, що $S=2S_{ODEO}$, а тому

$$S=2S_{ODEO}=2\int_0^3 f(x)dx=\left|\begin{array}{l} x=t^2, f(x)=t-\frac{t^3}{3} \\ dx=2tdt,\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline t & 0 & \sqrt{3} \end{array} \end{array}\right|=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)2tdt=4\int_0^{\sqrt{3}}\left(t^2-\frac{t^4}{3}\right)dt=\frac{8\sqrt{3}}{5}.$$

е) Площа **в полярних координатах**.

Нехай задано **криволінійний сектор** (або **криволінійний трикутник**), тобто плоска фігура, обмежена двома променями $OA:\varphi=\alpha, OB:\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ і кривою AB, заданою в полярних координатах рівнянням $\rho=f(\varphi)$ (рис. 12).

Треба отримати формулу для знаходження площі криволінійного сектора.

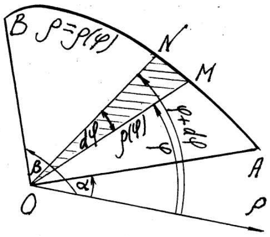


Рис. 12

Елементом dS площі тут є площа заштрихованого криволінійного сектора з радіусом $OM = \rho = f(\varphi)$ і центральним кутом $d\varphi$,

$$dS = \frac{\pi \cdot OM^2}{2\pi} \cdot d\varphi = \frac{1}{2} OM^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{2}\rho^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{2} f^2(\varphi) \cdot d\varphi .$$

Додаючи всі ці елементи від α до β, дістаємо шукану формулу

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi \qquad (11)$$

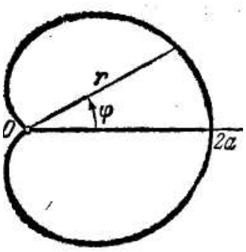


Рис. 13

Приклад 8. Знайти площу фігури, обмеженої кардиоїдою $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (рис. 13).

Шукана площа дорівнює подвоєній площі верхньої частини фігури, яка є криволінійним сектором, обмеженим кардиоїдою і променями $\varphi = 0, \varphi = \pi$. За формулою (11)

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \rho^2 d\varphi = \int_{0}^{\pi} (a(1+\cos\varphi))^2 d\varphi = a^2 \int_{0}^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= a^2 \int_{0}^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}) d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2 .$$

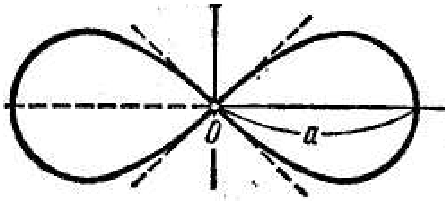


Рис. 14

Приклад 9. Знайти площу фігури, обмеже-ної лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (рис. 14).

Фігура симетрична відносно координатних осей і знаходиться всередині кута, визначеного бісектрисами координатних кутів $y = \pm x$ $(|y| \le |x|)$ (рис. 14).

Переходячи до полярних координат $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, x^2 + y^2 = \rho^2$, ми переписаємо рівняння лемніскати у вигляді

$$\left((\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2\right)^2=a^2\left((\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2\right),\ \rho^4\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=$$

$$=a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right),\ \rho^2=a^2\cos 2\varphi,\ \rho=a\sqrt{\cos 2\varphi},$$

$$\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}\,.$$

Пісня цього ми знаходимо почетверену площу криволінійного сектора, обмеженого лемніскатою і променями $\varphi=0$ $\varphi=\pi/4$. Дістаємо

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2d\varphi=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=a^2\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2\,.$$

6.3. ДОВЖИНА ДУГИ КРИВОЇ

Нехай ˘ AB - дуга деякої кривої, довжину якої треба знайти.

Перший метод. Поділимо дугу ˘AB на n частин точками

$$M_0=A, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n=B$$

і впишемо ламану лінію $M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$ в ˘AB (рис. 15). Нехай

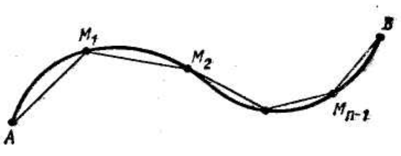


Fig. 15

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}M_{i-1}M_i=M_0M_1+M_1M_2+\ldots+M_{n-1}M_n \quad (12)$$

- периметр ламаної і $\lambda=\max_i M_{i-1}M_i$. Якщо існує границя

$$L=\lim_{\lambda\to 0}P_n, \qquad (13)$$

вона називається довжиною дуги ˘AB.

Припустимо, що дуга ˘ AB кривої визначена в декартових координатах рівнянням

$$y=f(x) \qquad (14)$$

на відрізку $[a,b]$, x_i, y_i $\left(i=\overline{0,n}\right)$ - координати довільної точки M_i, $M_i(x_i,y_i)$, кривої і $x_0=a, x_n=b$. В цьому випадку

$$M_{i-1}M_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}\,,$$

і на підставі теореми Лаґранжа існує точка $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ така, що

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(c_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Позначивши $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$, отримуємо $M_{i-1}M_i=\sqrt{1+f'^2(c_i)}\Delta x_i$, і тому

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(c_i)}\Delta x_i\,.$$

Перехід до границі при $\lambda=\max\limits_i \Delta x_i \to 0$ дає значення довжини дуги у вигляді визначеного інтеґрала від a до b,

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx\,. \qquad (15)$$

Довжина L дуги існує, якщо функція $f(x)$ неперервна зі своєю першою похідною на відрізку $[a,b]$.

Другий метод. Знайдімо спочатку елемент (диференціал) ds шуканої довжини дуги, а потім саму довжину дуги як суму всіх елементів.

За теоремою Піфагора $ds^2=dx^2+dy^2$, и

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}\,. \qquad (16)$$

Для дуги $\smile AB$, визначеної рівнянням (14),

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{1+f'^2(x)}dx\,,$$

і сума всіх елементів від a до b приводить до тієї ж формули (15).

Якщо дуга $\smile AB$ кривої визначена параметричими рівняннями

$$x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha\le t\le\beta\,, \qquad (17)$$

ми з (16) маємо

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt\,,$$

а тому

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt\,. \qquad (18)$$

Якщо дугу $\smile AB$ задано в полярних координатах рівнянням

$$\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta\,, \qquad (19)$$

ми переходимо до її параметричних рівнянь

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ \alpha\le\varphi\le\beta \qquad (20)$$

і застосовуємо формулу (18). Оскільки

$$dx=\left(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi\right)d\varphi,\ dy=\left(\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi\right)d\varphi,\ dx^2+dy^2=\left(\rho^2+\rho'^2\right)d\varphi,$$

$$ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi,$$

формула (18) дає

$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi. \qquad (21)$$

Приклад 10. Знайти довжину дуги кривої $y=\ln x$ для $1\le x\le\sqrt{3}$.

На підставі формули (15) маємо

$$L=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\left(\ln x\right)'^2}\,dx=\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\left|\begin{array}{l|c|c|c} 1+x^2=t^2, & x & 1 & \sqrt{3} \\ \hline xdx=tdt, & t & \sqrt{2} & 2 \end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\sqrt{t^2}\cdot tdt}{x\cdot x}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\left(t^2-1+1\right)dt}{t^2-1}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}\approx 0.04$$

Приклад 11. Знайти довжину петлі кривої

$$x=t^2,\ y=t-\frac{t^3}{3}$$

(див. приклад і рис. 11 вище).

За формулою (18)

$$L=2L_{ODE}=2\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(t^2\right)'^2+\left(t-\frac{t^3}{3}\right)'^2}\,dt=2\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(2t\right)^2+\left(1-t^2\right)^2}\,dt=2\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(t^2+1\right)^2}\,dt=2\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\left(t^2+1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}\approx 6.93.$$

Приклад 12. Знайти довжину кардиоїди $\rho=a\left(1+\cos\varphi\right)$ (див. рис. 13).

За допомоги формули (21) отримуємо

$$L=2\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=2\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{a^2\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$= 2a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi = 2a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 4a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 8a\,.$$

Приклад 13. Знайти довжину еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Параметричні рівняння еліпса $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi,$ і згідно з формулою (18)

$$L = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt\,.$$

Інтеґрал може бути знайдений в скінченному вигляді для деяких значень a і b, наприклад, якщо $a = b$, тобто якщо еліпс вироджується в коло. В загальному випадку ми можемо знайти тільки наближені значення L для конкретних значень a і b, оскільки первісна підінтеґральної функції, как відомо з більш ґрунтовних курсів математичного анализу, не виражається через елементарні функції.

Приклад 14. Довести, що довжину лемніскати Бернуллі

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$$

(рис. 14) можна представити наступним інтеґралом:

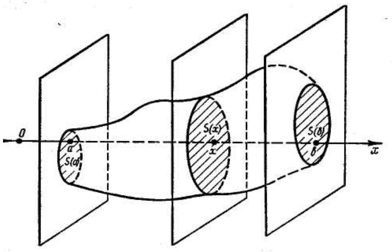
$$L = 4a\int\limits_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 4a\int\limits_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}\,.$$

Тут первісна підінтеґральної функції також не виражається в елементарних функціях.

6.4. ОБ"ЄМИ

6.4.1. Об"єм тіла з відомими площами паралельних поперечних перерізів

Нехай деяке тіло є заключеним між площинами $x = a$, $x = b$, і для будь-якого $x \in (a, b)$ відома площа $S(x)$ поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до



осі Ox (див. рис. 16). В такому разі об"єм тіла до-рівнює інтеґралу

$$V=\int_a^b S(x)dx. \qquad (22)$$

Рис. 16 ■ Елемент об"єму dV - це є об"єм прямого циліндра з основою $S(x)$ і висотою dx,

$$dV=S(x)dx.$$

Підсумовуючи всі ці елементи, дістаємо шуканий об"єм.■

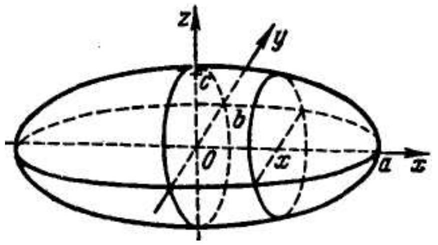


Рис. 17

Приклад 15. Знайти об"єм тривісного еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(рис. 17).

Очевидно, $|x|\le a, -a\le x\le a$. Для будь-якого $x\in(-a,a)$ переріз тіла, перпендикулярний до осі Ox – еліпс

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

с півосями

$$b_x=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\ c_x=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

и площею

$$S(x)=\pi b_xc_x=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Отже, об"єм эліпсоїда на підставі формули (22) дорівнює

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-x^2/a^2\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Зауважимо, що при $a=b=c$ ми дістаємо об"єм кулі $x^2+y^2+z^2\le a^2$,

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

6.4.2. Об"єм тіла обертання

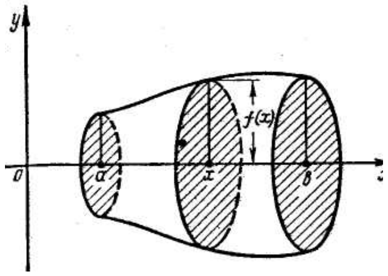


Рис. 18

Криволінійна трапеція

$$\{(x,y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$ (див. рис. 1)

обертається навколо осі Ox. Довести, що об"єм відповідного тіла (**тіла обертання**, рис.18) виражається визначеним інтеґралом

$$V = V_{rotOx} = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \qquad (23)$$

■Для довільного $x \in (a, b)$ поперечний переріз тіла обертання площиною, перпендикулярною до осі Ox, - круг радіуса $f(x)$ (рис. 18). Отже, його площа $S(x) = \pi f^2(x)$, і за формулою (22) об"єм тіла дається формулою (23).■

Нехай тепер та ж сама криволінійна трапеція

$$\{(x,y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$ (рис. 1)

обертається навколо осі Oy, причому остання не проходить через внутрішність трапеції[1]. Довести, що об"єм тіла її обертання визначається наступним інтеґралом:

$$V = V_{rotOy} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \qquad (24)$$

Вказівка. За елемент об"єму можна взяти об"єм частини тіла, утвореної обертанням навколо осі Oy прямокутника з сторонами $y = f(x)$ і dx. Тоді елемент об"єму дорівнює

$$dV = 2\pi x f(x),$$

звідки випливає формула (24).

Приклад 16. Нехай дуга синусоїди

$$y = \sin x, 0 \le x \le \pi$$

обертається навколо осей Ox і Oy. Знайти об"єми видповідних тіл обертання.

---

[1] То есть $a \ge 0$ или $b \le 0$.

За допомоги формул (23), (24) отримуємо

$$V_{rotOx}=\pi\int_0^\pi f^2(x)dx=\pi\int_0^\pi \sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{1}{2}\pi^2.$$

$$V_{rotOy}=2\pi\int_0^\pi xf(x)dx=2\pi\int_0^\pi x\sin xdx=\begin{vmatrix}u=x,dv=\sin xdx,\\ du=dx,v=-\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=2\pi\left(-(x\cos x)\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos xdx\right)=2\pi\left(\pi+\sin x\Big|_0^\pi\right)=2\pi^2.$$

Розгляньмо тепер криволінійну трапецію

$$\{(x,y):c\le y\le d,\,0\le x\le g(y)\},$$

орієнтовану відносно осі Oy (див. рис. 6), і нехай вона обертається навколо осі Oy. Доведіть, що об"єм відповідного тіла обертання дається інтеґралом, цілком аналогічним інтеґралу (23),

$$V=V_{rotOy}=\pi\int_c^d g^2(y)dy. \qquad (25)$$

Приклад 17. Еліпс з півосями a,b обертається навколо осі Ox, а потім навколо осі Oy. Знайти об"єми відповідних тіл обертання.

З канонічного рівняння еліпса маємо

$$y^2=f^2(x)=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right),\quad -a\le x\le a;$$

$$x^2=g^2(y)=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right),\quad -b\le y\le b,$$

і за формулами (23), (25) отримуємо

$$V_{rotOx}=\pi\int_{-a}^a y^2dx=\pi\int_{-a}^a f^2(x)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^a\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{8\pi ab^2}{3},$$

$$V_{rotOy}=\pi\int_{-b}^b x^2dy=\pi\int_{-b}^b g^2(y)dy=\frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^b\left(b^2-y^2\right)dy=\frac{8\pi a^2b}{3}.$$

6.5. ДЕЯКІ ЕКОНОМІЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ

Приклад 18. Нехай продуктивність праці підприємства визначається функцією

$$f(t)=(1-t)^2,$$

причому $0 \le t \le 2$. Тоді кількість виготовленої ним продукції протягом проміжка часу $[0, 2]$ на підставі формули (2) дорівнює

$$U=\int_0^2 (1-t)^2 dt = \left| \begin{array}{c} 1-t=y,\ dt=-dy, \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 2 \\ \hline y & 1 & -1 \end{array} \end{array} \right| = -\int_1^{-1} y^2 dy = \int_{-1}^{1} y^2 dy = \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Приклад 19 (вартість зберігання товару). Нехай $f(t)$ - кількість товару на складі в момент часу t, а стала величина h – ціна зберігання одиниці товару протягом одиниці часу. Тоді вартість зберігання товару протягом проміжка часу $[t, t+dt]$ (елемент вартості зберігання) дорівнює

$$dQ = hf(t)dt,$$

а вартість зберігання всього товару протягом інтервалу часу $[0, T]$ дорівнює

$$Q=\int_0^T hf(t)dt.$$

Нехай, наприклад, P - початкова кількість товару, який рівномірно і повністю витрачається протягом часу T. Тоді кількість товару в момент часу t дорівнює

$$f(t)=P-P\cdot t/T,$$

а загальна вартість зберігання товару дорівнює

$$Q=\int_0^T hf(t)dt = hP\int_0^T \left(1-\frac{t}{T}\right)dt = hP\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)\Bigg|_0^T = \frac{hPT}{2}.$$

7. НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕҐРАЛА

В попередньому розділі ми розглянули деякі з надзвичайно численних застосувань визначеного інтеґрала. Успіх цих застосувань великою мірою залежать від нашої спроможності обчислювати інтеґрали, краще за все – за допомогою формули Ньютона-Лейбніца. Але формула незастосовна, якщо первісна підінтеґральної функції не виражається в елементарних функціях. В таких випадках ми можемо вдаватися до відшукання наближених значень відповідних інтеґралів.

Для достатньо простого виведення формул наближеного інтеґрування ми припускатимемо підінтеґральну функцію $y = f(x)$ невід"ємною, $f(x) \geq 0$. В такому випадку визначений інтеґрал

$$\int_a^b f(x)dx$$

визначає площу криволінійної трапеції

$$\{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, віссю Ox і графіком функції. Отримані результати залишаються вірними і в загальному випадку.

7.1. ФОРМУЛИ ПРЯМОКУТНИКІВ

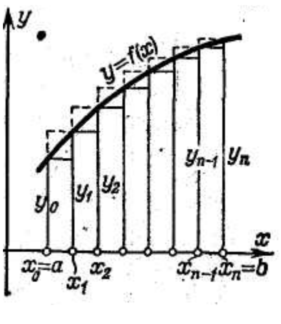


Рис. 1

Поділимо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин довжини

$$h = \frac{b-a}{n}$$

точками

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, ..., x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Прямі

$$x = x_1, x = x_2, x = x_3, ..., x = x_{n-1}$$

поділяють графік функції $y = f(x)$ на n частин (рис. 1). Введімо наступні позначення для значень функції в точках поділу:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ldots,\ y_n = f(x_n).$$

а) Замінюючи всі частини кривої $y = f(x)$ відрізками прямих ліній

$$y = y_0,\quad y = y_1,\ldots,\ y = y_{n-1},$$

ми замінюємо криволінійну трапецію множиною прямокутників з сумарною площею

$$S_1 = y_0 \cdot h + y_1 \cdot h + \ldots + y_{n-1} \cdot h = \frac{b-a}{n} \cdot (y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

Отже,

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 = h \cdot (y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot (y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) \qquad (1)$$

б) Аналогічно, замінюючи всі частини кривої $y = f(x)$ відрізками прямих ліній

$$y = y_1,\ y = y_2,\ldots,\ y = y_n,$$

отримуємо

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_2 = h \cdot (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \frac{b-a}{n} \cdot (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \qquad (2)$$

Абсолютна похибка формул (1), (2), а саме абсолютна величина різниці інтеґрала і суми $S_i,\ i = \overline{1,2}$, має порядок 1/*n*, тобто

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_i \right| \le \frac{M}{n},\quad i = 1, 2;\quad M = \frac{(b-a)^2}{2} \max_{[a,b]} |f'(x)|.$$

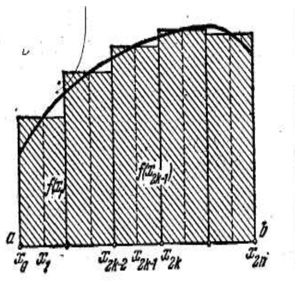


Рис. 2

в) Поділивши відрізок $[a, b]$ на $2n$ рівних частин довжини

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

точками

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{2n} = b \text{ (рис. 2)},$$

ми замінимо криволінійну трапецію множиною прямокутників з основами $2h$, висотами $y_1, y_3,\ y_5, y_7,\ldots,\ y_{2n-1}$ і сумарною площею

$$S_3 = y_1 \cdot 2h + y_3 \cdot 2h + ... + y_{2n-1} \cdot 2h = 2 \cdot \frac{b-a}{2n} \cdot (y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) =$$
$$= 2h \cdot (y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot (y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}).$$

Звідси

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_3 = 2h \cdot (y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot (y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) \qquad (3)$$

Абсолютна похибка формули (3) має порядок $1/n^2$, тобто

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_3 \right| \le \frac{N}{n^2}, \quad N = \frac{(b-a)^3}{24} \max_{[a,\,b]} |f''(x)|.$$

Це означає, що формула (3) є більш точною в порівнянні з формулами (1) і (2).

7.2. ФОРМУЛА ТРАПЕЦІЙ

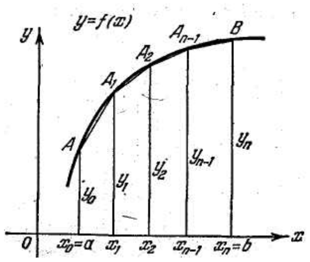


Рис. 3

Після ділення відрізка $[a, b]$ на n рівних частин довжини

$$h = \frac{b-a}{n}$$

точками

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, ..., x_n = x_{n-1} + h = b$$

ми ділимо на n дуг графік функції $y = f(x)$ точками

$$A = A(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), ..., A_n(x_n, y_n) = B \text{ (рис. 3).}$$

Замінивши тепер всі дуги відрізками $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}B$, мы замінимо криволінійну трапецію множиною трапецій з сумарною площею

$$S_4 = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + ... + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right).$$

Звідси ми приходимо до наступної наближеної формули (так званої формули трапецій):

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_4,$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right) \quad (4)$$

Абсолютна похибка формули (4) має порядок $1/n^2$, тобто

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_4 \right| \le \frac{P}{n^2}, \quad P = \frac{(b-a)^3}{12} \max_{[a,\,b]} |f''(x)|.$$

Це значить, що формули (3) і (4) мають один і той же порядок точності.

7.3. ФОРМУЛА СИМПСОНА[1] (ФОРМУЛА ПАРАБОЛ)

Розділимо (точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{2n} = b$) відрізок $[a, b]$ на парну кількість $2n$ рівних частин довжини $h = (b-a)/(2n)$, і нехай

$$M = M(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), ..., M_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1}), M_{2n}(x_{2n}, y_{2n})$$

- точки кривої $y = f(x)$, які відповідають точкам поділу (див. рис. 4 для випадку $2n = 6$).

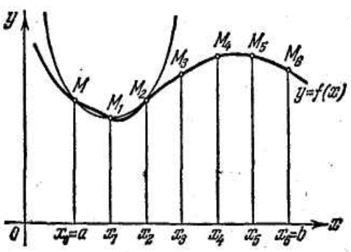


Рис. 4

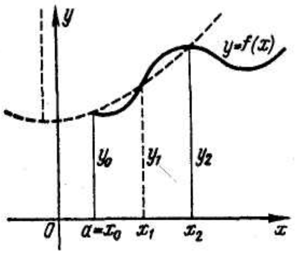


Рис. 5

Проведімо спочатку через точки M, M_1, M_2 параболу $y = Ax^2 + Bx + C$ (див. рис. 4, 5). Площа фігури між параболою і відрізком $[x_0, x_2]$ осі Ox дорівнює

$$\int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

■Припустімо для простоти доведення, що $x_0 = 0$. Тоді $x_1 = h, \ x_2 = 2h$,

$$y_0 = y(0) = C, y_1 = y(h) = Ah^2 + Bh + C, y_2 = A(2h)^2 + B(2h) + C = 4Ah^2 + 2Bh + C,$$

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 8Ah^2 + 6Bh + 6C,$$

---

[1] Симпсон Томас (1710 - 1761) – англійський математик

$$\int_{x_0}^{x_2}\left(Ax^2+Bx+C\right)dx=\int_0^{2h}\left(Ax^2+Bx+C\right)dx=\frac{8}{3}Ah^3+2Bh^2+2Ch=$$

$$=\frac{h}{3}\left(8Ah^2+6Bh+6C\right)=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right).\ ■$$

Отже, ми можемо наближено записати

$$\int_{x_0}^{x_2}f(x)dx\approx\int_{x_0}^{x_2}\left(Ax^2+Bx+C\right)dx=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right).$$

Вчиняючи таким же чином з трійками точок

$$M_2M_3M_4,\quad M_4M_5M_6,\ \ldots,\ M_{2n-2}M_{2n-1}M_{2n},$$

дістаємо

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_2}f(x)dx+\int_{x_2}^{x_4}f(x)dx+\int_{x_4}^{x_6}f(x)dx+\ldots+\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}}f(x)dx\approx S_5=$$

$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\frac{h}{3}(y_4+4y_5+y_6)+\ldots+\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})=$$

$$=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2+y_2+4y_3+y_4+y_4+4y_5+y_6+\ldots+y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}\right)=$$

$$=\frac{h}{3}\left((y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+y_5+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+y_6+\ldots+y_{2n-2})\right),\ h=\frac{b-a}{2n}.$$

Таким чином, ми приходимо до формули Симпсона для наближеного обчислення визначеного інтеґрала

$$\int_a^b f(x)dx\approx S_5=\frac{b-a}{6n}\left((y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\right)\qquad(5)$$

Наприклад, у випадку $n = 3$, $2n = 6$ (рис. 4) формула має такий вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{18}\left((y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)\right).$$

Формула Симпсона (5) в порівнянні з формулами (1) – (4) , є найбільш точною. Дійсно, її абсолютна похибка має порядок $1/n^4$, тобто

$$\left|\int_a^b f(x)dx-S_5\right|\le\frac{Q}{n^4},\quad Q=\frac{(b-a)^5}{2880}\max_{[a,\,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Приклад 1. Знайти наближене значення визначеного інтеґрала

$$I = \int_0^{1.6} \sin x^2 dx.$$

Утворимо наступну таблицю значень арґументу і функції:

i	x_i	x_i^2	$y_i = \sin x_i^2$
0	$x_0 = 0.0$	0.00	$y_0 = 0.0000$
1	$x_1 = 0.2$	0.04	$y_1 = 0.0400$
2	$x_2 = 0.4$	0.16	$y_2 = 0.1593$
3	$x_3 = 0.6$	0.36	$y_3 = 0.3523$
4	$x_4 = 0.8$	0.64	$y_4 = 0.5972$
5	$x_5 = 1.0$	1.00	$y_5 = 0.8415$
6	$x_6 = 1.2$	1.44	$y_6 = 0.9915$
7	$x_7 = 1.4$	1.96	$y_7 = 0.9249$
8	$x_8 = 1.6$	2.56	$y_8 = 0.5487$

Вона відповідає поділу відрізка $[0, 1.6]$ на $n = 8$ частин довжини

$$h = (b-a)/8 = (1.8-0.0)/8 = 0.2.$$

За формулою (1)

$$I \approx 0.2 \cdot (y_0 + y_1 + ... + y_7) = 0.2 \cdot 3.9067 = 0.7813 \approx 0.78 \approx 0.8.$$

За формулою (2)

$$I \approx 0.2 \cdot (y_1 + ... + y_7 + y_8) = 0.2 \cdot 4.2488 = 0.8911 \approx 0.89 \approx 0.9.$$

Використовуючи формулу (3), ми беремо $2n = 8$, $n = 4$,

$$h = (b-a)/4 = (1.6-0)/4 = 0.4,$$

і тому

$$I \approx 0.4 \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + y_7) = 0.4 \cdot 2.1587 = 0.8635 \approx 0.86.$$

За формулою (4)

$$I \approx 0.2 \cdot \left(\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \right) = 0.2 \cdot 4.1811 = 0.8362 \approx 0.84.$$

Формулою (5) ми скористаємось двічі.

Спочатку ми поділимо відрізок $[0, 1.6]$ на $2n = 4$ частин,

$$x_0 = 0.0,\ x_1 = 0.4,\ x_2 = 0.8,\ x_3 = 1.2,\ x_4 = 1.6,$$

Відповідно

$$y_0 = 0.0000,\ y_1 = 0.1593,\ y_2 = 0.5972,\ y_3 = 0.9915,\ y_4 = 0.5487,$$

$$h = (b-a)/(2n) = (1.6-0.0)/4 = 0.4,$$

і тому

$$I \approx \frac{h}{3}((y_0 + y_4) + 4\cdot(y_1 + y_3) + 2\cdot y_2) = \frac{0.4}{3}\cdot((0.0000 + 0.5487) + 4\cdot(0.1593 + 0.9915) +$$
$$+ 2\cdot 0.5972) = \frac{0.4}{3}\cdot 6.3463 = 0.8462 \approx 0.846.$$

Поділивши тепер відрізок $[0, 1.6]$ на $2n = 8$ частин,

$$h = (b-a)/(2n) = (1.6-0.0)/8 = 0.2,$$

маємо

$$I \approx \frac{h}{3}((y_0 + y_8) + 4\cdot(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2\cdot(y_2 + y_4 + y_6)) =$$
$$= \frac{0.2}{3}\cdot 12.6795 = 0.8453 \approx 0.845.$$

Корисно порівняти всі отримані результаті з відомим наближеним значенням того ж інтеґрала з точністю до 10^{-10}, а саме:

$$I = \int_0^{1.6} \sin x^2 dx \approx 0.8452689707.$$

8. НЕВЛАСНІ ІНТЕҐРАЛИ

8.1. НЕВЛАСНІ ІНТЕҐРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ

Означення 1. Нехай функція $f(x)$ неперервна на нескінченному інтервалі $[a;+\infty]$. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx<\infty, \qquad (6)$$

ми кажемо, що наступний інтеґрал (**невласний інтеґрал першого роду**, **інтеграл з нескінченною верхньою межею**)

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (7)$$

збігається.

Таким чином, за означенням 1

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (8)$$

Означення 2. Якщо границя (6) нескінченна або не існує, ми кажемо, що невласний інтеґрал (7) **розбігається**.

В такий же спосіб ми можемо означити ще два невласних інтеґрала першого роду.

Означення 3.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx, \qquad (9)$$

якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(-\infty, a]$.

Означення 4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ c\to-\infty}}\int_c^b f(x)dx, \qquad (10)$$

якщо функція $f(x)$ неперервна на множині всіх дійсних чисел.

Невласний інтеґрал (9) називається збіжним, якщо скінченна границя в (9) існує, в противному разі - розбіжним. Те ж саме стосується к невласного інтеграла (10).

Означення 5. Головним значенням (в розумінні Коші) невласного інтеґрала (10) называється наступна границя:

$$p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx\,^{1}. \qquad (11)$$

Якщо невласний інтеґрал (10) збігається, то збігається й його головне значення. Але трапляються випадки, коли інтеґрал (10) розбігається, а в той же час його головне значення збігається.

Приклад 2. Невласні інтеґрали

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\ (a>0),\ \int_{-\infty}^{a}\frac{dx}{x^p}\ (a<0),\ p\in\Re \qquad (12)$$

збігаються при $p>1$ і розбігаються при $p\le 1$.

■Розглянемо перший інтеґрал.

а) Якщо $p>1$, ми можемо покласти $p=1+\alpha$, де $\alpha>0$, і тому

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^{1+\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}x^{-1-\alpha}dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right|_{a}^{b}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{-\alpha}-a^{-\alpha}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^\alpha}-\frac{1}{a^\alpha}\right)=-\frac{1}{\alpha}\left(0-\frac{1}{a^\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha a^\alpha}=\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}<\infty,$$

тобто при $p>1$ інтеґрал збігається.

б) Нехай $p=1$. В цьому випадку інтеґрал розбігається. Дійсно,

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_{a}^{b}=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a)=+\infty.$$

в) Якщо $p<1$, ми покладаємо $p=1-\alpha$, де $\alpha>0$, і тоді

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{1-\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^{1-\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}x^{-1+\alpha}dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\right|_{a}^{b}=\frac{1}{\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(b^{\alpha}-a^{\alpha}\right)=+\infty.$$

Інтеґрал розбігається.■

Приклад 3. Довести, що невласний інтеґрал

---

[1] p.v. – скорочення з англійської principal value , v.p. – з французької valeur principale (головне значення)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$$

розбігається, але його головне значення збігається (до нуля).

■На підставі формули (10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ c \to -\infty}} \int_{c}^{b} \sin x dx = -\lim_{\substack{b \to +\infty \\ c \to -\infty}} \cos x \Big|_{c}^{b} = -\lim_{\substack{b \to +\infty \\ c \to -\infty}} (\cos b - \cos c) = -\lim_{b \to +\infty} \cos b + \lim_{c \to -\infty} \cos c.$$

Обидві границі не існують, і тому інтеґрал розбігається. З іншого боку, його головне значення на підставі формули (11) дорівнює

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} \sin x dx = -\lim_{b \to +\infty} \cos x \Big|_{-b}^{b} = -\lim_{b \to +\infty} (\cos b - \cos(-b)) =$$

$$= -\lim_{b \to +\infty} (\cos b - \cos b) = 0,$$

тобто збігається до нуля.■

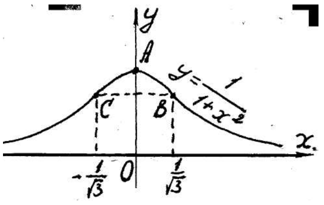


Рис. 6

Приклад 4. Знайти площу нескінченної фігури, обмеженої кучерем Аньєзі[1]

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

і його асимптотою (рис. 6).

Пряма $y = 0$ (вісь Ox) є горизонтальною асимптотою кучеря Аньєзі, бо

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Фігура симетрична відносно осі Oy, і тому її площа дорівнює

$$S = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b \to +\infty} \arctan x \Big|_{0}^{b} = 2\lim_{b \to +\infty} \arctan b = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Зауваження 1. Нехай функція $F(x)$ - якась з первісних функції $f(x)$. Вводячи позначення

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x),$$

---

[1] Аньєзі Марія Гаетана (1718 - 1799) – італійський математик

ми можемо подати обчислення невласного інтеґрала (8) у вигляді формули Ньютона - Лейбніца, а саме:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a)) = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Таким чином,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}. \qquad (13)$$

Таку ж саму формулу Ньютона-Лейбніца можна записати і для інших невласних інтеґралів.

Приклад 5.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - 1\right) = -(0-1) = 1.$$

Приклад 6.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{x}{2} - \lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 7. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bxdx = \frac{e^{-ax}(b\sin bx - a\cos bx)}{a^2+b^2}\Big|_0^{+\infty} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{-ax}(b\sin bx - a\cos bx)}{a^2+b^2} - \frac{-a}{a^2+b^2}\right) = 0 + \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ при } a > 0;$$

аналогічно (при $a > 0$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bxdx = \frac{e^{-ax}(-a\sin ax - b\cos bx)}{a^2+b^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Зауваження 2 (**заміна змінної і інтеґрування частинами** в невласному інтеґралі першого роду)**.** При обчисленні невласних інтеґралів першого роду ми можемо використовувати заміну змінної та інтеґрування частинами.

Приклад 8. Обчислити невласний інтеґрал

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$$

або встановити його розбіжність.

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}=\left|\begin{array}{l} e^{x}=y,\\ e^{x}dx=dy\end{array}\quad\begin{array}{c|c|c} x & -\infty & +\infty\\ \hline y & 0 & +\infty\end{array}\right|=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^{2}}=\arctan y\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

Інтеґрал збігається до $\pi/2$.

Приклад 9.

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}=\left|\begin{array}{l} x^{2}-1=y^{2},\ y>0,\\ xdx=ydy,\ x^{2}=1+y^{2}\end{array}\quad\begin{array}{c|c|c} x & \sqrt{2} & +\infty\\ \hline y & 1 & +\infty\end{array}\right|=\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{xdx}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{ydy}{\left(1+y^{2}\right)y}=$$

$$=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^{2}}=\arctan y\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Обчислимо той же інтеґрал іншим способом, застосовуючи тригонометричну підстановку.

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}=\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\cos t},\ dx=-\dfrac{-\sin t dt}{\cos^{2}t}=\dfrac{\sin t dt}{\cos^{2}t},\\ x^{2}-1=\dfrac{1}{\cos^{2}t}-1=\dfrac{1-\cos^{2}t}{\cos^{2}t}=\dfrac{\sin^{2}t}{\cos^{2}t}\end{array}\quad\begin{array}{c|c|c} x & \sqrt{2} & +\infty\\ \hline t & \pi/4 & \pi/2\end{array}\right|=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{\sin t dt}{\cos^{2}t}}{\dfrac{1}{\cos t}\cdot\dfrac{\sin t}{\cos t}}=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}dt=t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Відзначимо, що заміна змінної привела тут невласний інтеґрал до звичайного (можна назвати його власним).

Приклад 10.

$$\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln^{3}x}}=\left|\begin{array}{l} \ln x=y,\\ \dfrac{dx}{x}=dy,\end{array}\quad\begin{array}{c|c|c} x & e & +\infty\\ \hline y & 1 & +\infty\end{array}\right|=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dy}{y^{3/2}}=-\frac{2}{\sqrt{y}}\Big|_{1}^{+\infty}=2.$$

Поряд з невласними інтеґралами від неперервних функцій по нескінченним інтервалам інтеґрування (тобто невласними інтеґралами першого роду) розглядають інтеґрали по скінченним інтервалам інтеґрування, але від розривних функцій, так звані невласні інтеґрали другого роду.

8.2. НЕВЛАСНІ ІНТЕҐРАЛИ ДРУГОГО РОДУ

Означення 6. Нехай функція $f(x)$ неперервна на одній з таких множин: а) півінтервал $[a,b)$ з вилученим правим кінцем b; б) півінтервал $(a,b]$ з вилученим лівим кінцем a; в) об"єднання півінтервалів $[a,c)\cup(c,b]$ з вилученою внутрішньою точкою *c*. Названі точки *b*, *a*, *c* є точками розриву функції (здебільшого другого роду). Означають такі три **невласні інтеграли другого роду** (**інтеґрали від розривних функцій по скінченному інтервалі інтеґрування**):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx; \qquad (14)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx; \qquad (15)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx\right). \qquad (16)$$

Поняття збіжності або розбіжності вводяться таким же чином, як і для невласних інтеґралів першого роду.

Означення 7. Головним значенням невласного інтеґрала (16) называється така границя:

$$p.v.\int_a^b f(x)dx = v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right). \qquad (16)$$

Приклад 11. Невласні інтеґрали другого роду

$$I_0 = \int_0^a \frac{dx}{x^p},\ I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p},\ I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p},\ I_3 = \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^p}\ (a<c<b) \qquad (17)$$

збігаються при $p<1$ і розбігаються при $p\ge 1$.

■Розглянемо для означеності перший інтеґрал I_0.

а) Якщо $p=1$, маємо

$$I_0 = \int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln|a| - \ln\varepsilon\right) = \infty$$

(розбіжність);

b) У випадку $p \neq 1$

$$I_0=\int_0^a x^{-p}dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^a x^{-p}dx=\frac{1}{-p+1}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(a^{-p+1}-\varepsilon^{-p+1}\right)=\begin{cases}\dfrac{a^{1-p}}{1-p}\neq\infty, & \text{если } p<1,\\ \infty, & \text{если } p>1\end{cases}$$

(збіжність при $p<1$ і розбіжність при $p>1$).■

Приклад 12. Дослідити на збіжність невласний інтеґрал

$$\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$$

(з точкою розриву другого роду $x=1$).

Подамо інтеґрал у вигляді

$$\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int_0^2\frac{dx}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2\frac{dx}{x-3}-\int_0^2\frac{dx}{x-1}\right).$$

Перший інтеґрал – звичайний (власний), бо його підінтеґральна функція неперервна на відрізку $[0,2]$, а другий – невласний і розбіжний $(p=1)$. Отже, даний інтеґрал розбігається.

Приклад 13. Знайти головне значення розбіжного інтеґрала другого роду

$$\int_{-2}^1\frac{dx}{x}.$$

На підставі означення 7

$$v.p.\int_{-2}^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int_{-2}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln|x|\Big|_{-2}^{-\varepsilon}+\ln|x|\Big|_\varepsilon^1\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln|-\varepsilon|-\ln|-2|+\ln 1-\ln\varepsilon\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln\varepsilon-\ln\varepsilon-\ln 2\right)=-\ln 2$$

Приклад 14. Знайти площу нескінченної фігури, обмеженої лініями $y=1/\sqrt{x}$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ (рис. 7).

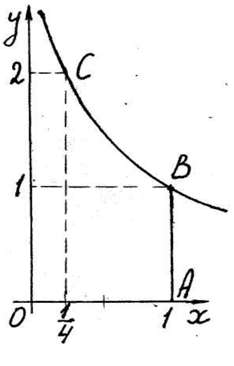


Рис.7

$$S=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\lim_{\varepsilon\to 0+0}\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1=2\left(1-\lim_{\varepsilon\to 0+0}\sqrt{\varepsilon}\right)=2.$$

Зауваження 3 (**формула Ньютона-Лейбніца**). Обчислення невласного інтеґрала другого роду, як і першого, можна подати у вигляді формули Ньютона-Лейбніца. Нехай, зокрема, функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a,b)$, а для довільної її первісної $F(x)$ покладено

$$F(b)=\lim_{x\to b-0}F(x).$$

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0+0}F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0+0}F(b-\varepsilon)-F(a)=$$

$$=\lim_{x\to b-0}F(x)-F(a)==F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b.$$

Приклад 15. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2\left(1-\lim_{x\to0+0}\sqrt{x}\right)=2(1-0)=2.$

Приклад 16. Для довільного додатного числа a

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a}=\lim_{x\to a-0}\arcsin\frac{x}{a}-\lim_{x\to-a+0}\arcsin\frac{x}{a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\arcsin\frac{x}{a}-\lim_{x\to-a}\arcsin\frac{x}{a}=\arcsin1-\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

Зауваження 4 (заміна змінної і інтеґрування частинами). Як і при обчисленні невласних інтеґралів першого роду, ми можемо використовувати як заміну змінної, так і інтеґрування частинами.

Приклад 17. Інтеґрали I_1, I_2 (див. формулу (17)) можна заміною змінної привести до інтеґрала I_0. Зокрема,

$$I_1=\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}=\left|\begin{array}{l|c|c}b-x=y, \ x & a & b\\ \hline dx=-dy, \ y & b-a & 0\end{array}\right|=-\int_{b-a}^{0}\frac{dy}{y^p}=\int_0^{b-a}\frac{dy}{y^p}=I_0.$$

Приклад 18. За допомоги інтеґрування частинами дістаємо

$$\int_0^1 x\ln x\,dx=\left|\begin{array}{l}\ln x=u,\ xdx=dv,\\ du=\dfrac{dx}{x},\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=-\lim_{x\to0+0}\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)-\frac{x^2}{4}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{4}.$$

8.3. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ НЕВЛАСНИХ ІНТЕҐРАЛІВ

В багатьох питаннях, де мають справу з невласними інтеґралами, головною проблемою є не знайти значення інтеґрала, а тільки встановити факт його збіжності або розбіжності. Цій меті послуговують так звані ознаки збіжності (або розбіжності), до вивчення яких ми приступаємо.

Ми встановимо низку відповідних ознак для невласного інтеґрала вигляду

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

але вони залишаються справедливими і для інтеґралів всіх інших розглянутих вище типів.

Теорема 1 (ознака порівняння для невід"ємних функцій**).** Нехай для неперервних на інтервалі $[a,+\infty)$ невід"ємних функцій $f(x)$, $g(x)$ і достатньо великих значень x виконується нерівність

$$0 \le f(x) \le g(x).$$

Якщо невласний інтеґрал функції $g(x)$ по інтервалу $[a,+\infty)$ збігається, то збігається і інтеґрал функції $f(x)$ по цьому ж інтервалу. З іншого боку, якщо інтеґрал функції $f(x)$ розбігається, то розбігається й інтеґрал функції $g(x)$.

■Припустимо, наприклад, що збігається інтеґрал функції $g(x)$, тобто

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = I < \infty,$$

і, задля простоти, що вказана нерівність виконується для всіх $x \ge a$. Звідси випливає, що для будь-яких $b > a$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le I$$

і тому існує границя

$$\lim_{b+\to\infty} \int_a^b f(x)dx \le I.$$

Це означає, що інтеґрал функції $f(x)$ збігається.■

Приклад 19. Невласний інтеґрал

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

на підставі теореми 1 збігається , оскільки при всіх x таких, що $x \geq 1$, виконується нерівність

$$\frac{1}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^3},$$

а інтеґрал

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$$

збігається (як інтеґрал типу (12) при $p = 3 > 1$).

Приклад 20. Інтеґрал

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^5} dx$$

за тією ж теоремою розбігається, бо для будь-якого $x \geq 1$

$$\frac{x^4+1}{x^5} > \frac{x^4}{x^5} = \frac{1}{x},$$

а інтеґрал

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

розбігається (як інтеґрал того ж типу (12) при $p = 1$).

Приклад 21. Довести збіжність інтеґрала

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

■Перепишемо інтеґрал у вигляді суми звичайного і двох невласних інтеґралів

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2} dx + \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Невласті інтеґрали (перший і третій) збігаються за теоремою 1, бо

$$e^{x^2} > 1 + x^2 \Rightarrow e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} < \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2},$$

а інтеґрали

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (p = 2 > 1)$$

збігаються. Отже, і даний інтеґрал збігається.■

Приклад 22. Доведіть самостійно розбіжність інтеґрала

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}} dx.$$

Вказівка. Взяти до уваги, що для всіх $x \geq 1$ виконується нерівність

$$\ln(x^2+1) \geq \ln 2.$$

Приклад 23. Дослідити на збіжність невласний інтеґрал

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x+1)}.$$

Для довільного додатного x

$$\ln(x+1) < x \Rightarrow \frac{1}{\ln(x+1)} > \frac{1}{x},$$

і за теоремою 1 даний інтеґрал розбігається через розбіжність інтеґрала

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

Теорема 2. Нехай для неперервних на інтервалі $[a, +\infty)$ функцій $\varphi(x)$, $f(x)$, $\phi(x)$ і достатньо великих x маємо

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \phi(x).$$

Якщо збігаються інтеґрали функцій $\varphi(x)$ і $\phi(x)$, то також збігається і інтеґрал функції $f(x)$.

■Справедливість теореми випливає з нерівності

$$0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq \phi(x) - \varphi(x)$$

і теореми 1.■

Теорема 3 (абсолютна збіжність невласного інтеґрала). Якщо для функції, неперервної на інтервалі $[a,+\infty)$, збігається інтеґрал

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

від її абсолютної величини, то інтеґрал від самої функції

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

також збігається і називається **абсолютно збіжним**.

■Доведення випливає з очевидної нерівності

$$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$$

і теореми 2.■

Приклад 24. Довести абсолютну збіжність невласного інтеґрала

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x^2}.$$

Інтеґрал від абсолютної величини підінтеґральної функції збігається за теоремою 1, оскільки

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|=\frac{|\sin x|}{x^2}\le\frac{1}{x^2},$$

а інтеґрал

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\quad(p=2>1)$$

збігається. Отже, даний інтеґрал абсолютно збігається.

Приклад 25. Дослідити самостійно на абсолютну збіжність наступні невласні інтеґрали:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos axdx}{x\sqrt{x}},\ \int_0^1\frac{\sin bxdx}{\sqrt[3]{x}}.$$

8.4. ГАМА-ФУНКЦІЯ ЕЙЛЕРА

Означення 8. Гама-функцією (або Γ- функцією) Ейлера називається таких невласний інтеґрал

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \qquad (18)$$

В повних курсах математичного аналізу доводиться, що Γ-функція неперервна зі всіма своїми похідними для будь-якого $\alpha>0$.

Відзначимо деякі властивості Γ-функції.

1) $\Gamma(1)=1$.

$$■\,\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=-\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x}-1\right)=1.■$$

2) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$.

$$■\,\Gamma(\alpha+1)=\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx=\left|\begin{matrix} u=x^{\alpha},\, dv=e^{-x}dx, \\ du=\alpha x^{\alpha-1}dx,\, v=-e^{-x}\end{matrix}\right|=-\left(x^{\alpha}e^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_0^{+\infty}\alpha x^{\alpha-1}\left(-e^{-x}\right)dx=$$

$$=\alpha\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)■$$

3) Для натуральних значень α, $\alpha=n\in N$ властивість 2 набуває вигляду

$$\Gamma(n+1)=n!$$

$$■\,\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\ldots=$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\Gamma(1)=n!\cdot1=n!\,■$$

Означення 8. $\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$

Згідно ж цим означенням Γ-функція є поширенням на множину всіх додатних дійсних чисел відомої факториал-функції

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n,$$

визначеної на множині всіх натуральних чисел.

Приклад. $0!=1$.

■На підставі означення 8 маємо $0!=\Gamma(1)=1$.■

9. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕҐРАЛ

9.1. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕҐРАЛ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Означення 1. Нехай функцію двох змінних $z = f(M) = f(x, y)$ задано в деякій області *D* площини xOy (рис. 1).

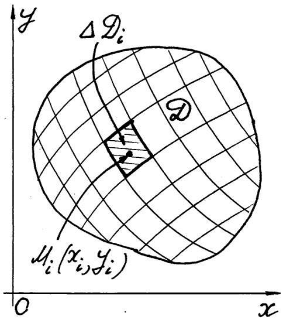


Рис. 1

1. Поділимо область на *n* частин $\Delta D_i,\ i = \overline{1, n},$ з площами ΔS_i і діаметрами $\lambda_i = \max\limits_{M, N \in \Delta D_i} |MN|$.

2. Візьмемо довільну точку $M_i(x_i; y_i)$ в кожній частині ΔD_i, знайдемо значення функцаї в цій точці та помножимо його на площу ΔS_i цієї частини ΔD_i.

3. Додамо всі отримані добутки

$$f(M_i)\Delta S_i = f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

і отримаємо інтеґральну суму (інтеґральну суму Коші-Рімана)

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i .$$

4. Нехай $\lambda = \max\limits_{i=1,\, n}\{\lambda_i\}$ і $\lambda \to 0$. Якщо існує границя інтеґральної суми σ, то він називається подвійним інтеґралом функції $z = f(M) = f(x, y)$ по області *D* і позначається

$$\iint\limits_D f(M)dS = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (1)$$

Ми можемо трактувати подвійний інтеґрал як суму елементів $f(x, y)dS$, де $dS = dxdy$ – елемент площі.

Теорема 1 (існування подвійного інтеґрала). Якщо підінтеґральна функція $z = f(M) = f(x, y)$ неперервна в області *D*, то подвійний інтеґрал по ній існує.

Очевидно, що для випадку $f(M) = f(x, y) \equiv 1$ подвійний інтеґрал дає площу області *D*,

$$S = S_D = \iint\limits_D dxdy. \qquad (2)$$

Механічний сенс подвійного інтеґрала. Якщо $\gamma(M) = \gamma(x, y) \geq 0$ - поверхня густина пластинки $D \subset xOy$, то її маса дорівнює подвійному інтеґралу

$$m = \iint\limits_D \gamma(M) dS = \iint\limits_D \gamma(x, y) dxdy \qquad (3)$$

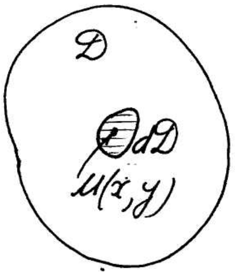


Рис. 2

■Елемент маси

$$dm = \gamma(M) dS = \gamma(x, y) dS$$

є масою елементу $dD \subset D$ з площею dS і сталою поверхневою густиною $\gamma(M) = \gamma(x, y)$, $M(x, y) \in dD$ (рис. 2). Сума всіх цих елементів дає масу пластинки, зображену подвійним інтеґралом (3).■

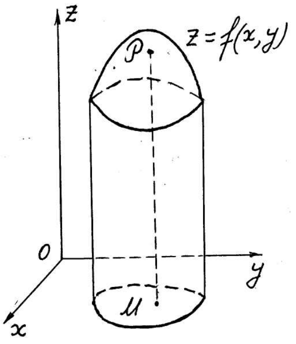


Рис. 3

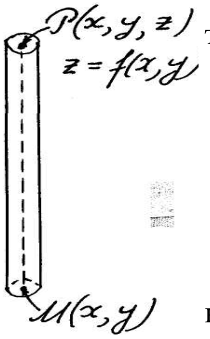


Рис. 4

Означення 2. Циліндричним тілом [криволінійним циліндром] називається тіло, обмежене:

а) зверху – поверхнею

$$z = f(x, y) \geq 0;$$

b) знизу - областю *D* площини *xOy*;

c) збоку – циліндричною поверхнею з твірною, паралельною до осі Oz, і напрямною, яка є границею області *D* (див. рис. 3).

Геометричний сенс подвійного інтеґрала. Об"єм циліндричного тіла дорівнює подвійному інтеґралу

$$V = \iint\limits_D f(x, y) dxdy. \qquad (4)$$

■Елемент об"єму

$$dV = f(M) dS = f(x, y) dS$$

є об"єм прямого циліндра з основою $dD \subset D$ площі dS і висотою

$f(M) = f(x, y)$, $M(x, y) \in dD$ (рис. 4).

Об"єм циліндричного тіла дорівнює сумі всіх таких елементів і дається подвійним інтеґралом (4).■

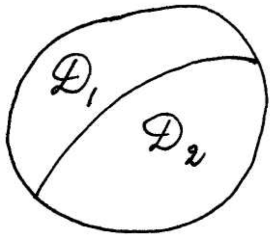


Рис. 5

Властивості подвійного інтеґрала аналогічні властивостям визначеного інтеґрала.

Зокрема:

1 (лінійність). Для будь-яких інтеґровних функцій $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ і довільних сталих k_1, k_2

$$\iint\limits_D (k_1 f_1(x,y) + k_2 f_2(x,y))dxdy = k_1 \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + k_2 \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy.$$

2 (аддитивність відносно області інтеґрування). Якщо область D поділено на дві непересічні частини

$$D = D_1 \bigcup D_2, \quad D_1 \bigcap D_2 = \varnothing,$$

(рис. 5), то подвійний інтеґрал по всій області дорівнює сумі інтеґралів по її частинах.

9.2. ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕҐРАЛА В ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

Означення 3. Область D називається **областю першого типу**, якщо вона обмежена (див. рис. 6):

a) зліва - прямою $x = a$;

b) справа – прямою $x = b$;

c) снизу - лінією $y = y_1(x)$;

d) зверху - лінією $y = y_2(x)$,

$$D = \{(x,y): a \le x \le b, \forall x \in (a,b)(y_1(x) \le y \le y_2(x))\}.$$

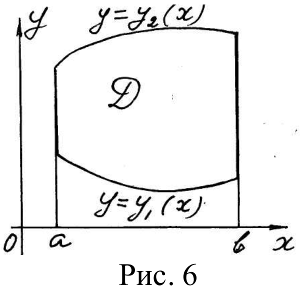


Рис. 6

Подвійний інтеґрал по області першого типу обчислюється за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (5)$$

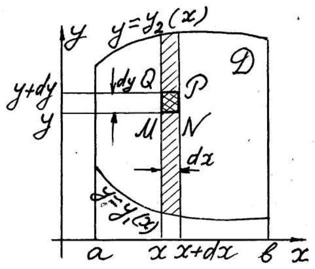


Рис. 7

У відповідності до неї ми спочатку інтеґруємо по y від $y_1(x)$ до $y_2(x)$, тобто обчислюємо так званий **внутрішній інтеґрал**

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy,$$

а потім інтеґруємо результат по x від a до b.

■Ми доводитемо формулу (5), виходячи з механічного сенсу подвійного інтеґрала. Нехай підінтеґральна функція $f(M)=f(x,y)\geq 0$ є поверхневою густиною пластинки, визначеної фігурою

$$D=\{(x,y): a\leq x\leq b, \forall x\in(a,b)(y_1(x)\leq y\leq y_2(x))\}$$

(рис. 6). Отже, маса пластинки виражається подвійним інтеґралом

$$m=\iint\limits_D f(M)dS=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Знайдемо тепер масу з інших міркувань і порівняємо результати. Маса елементу $MNPQ$ пластинки між $x, x+dx$ і $y, y+dy$ (рис. 7) дорівнює

$$f(M)\Delta x\Delta y=f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

Підсумовючи всі такі маси від $y_1(x)$ до $y_2(x)$, знаходимо масу заштрихованої смужки (рис. 7), тобто

$$dm=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dxdy=dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

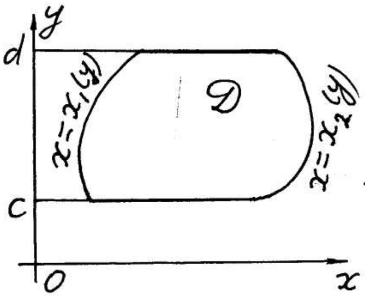
Підсумовючи тепер маси всіх таких смужок від $x=a$ до $x=b$, отримуємо масу всієї пластинки

$$m=\int_a^b\left(dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Порівняння результатів знаходження маси доводить справедливість формули (5).■

Зауваження 1. Інтеґрал по x від a до b називається **зовнішнім**. Права частина формули (5) називається **повторним інтеґралом**.

Означення 4. Область D називається **областю другого типу**, якщо вона обмежена (див. рис. 8):



a) знизу - прямою $y = c$;

b) зверху - прямою $y = d$;

c) зліва - лінією $x = x_1(y)$;

d) справа - лінією $x = x_2(y)$,

$$D = \{(x, y): c \le y \le d, \forall y \in (c, d)(x_1(y) \le x \le x_2(y))\}.$$

Рис. 8

Подвійний інтеґрал по області D другого типу обчислюється за формулою

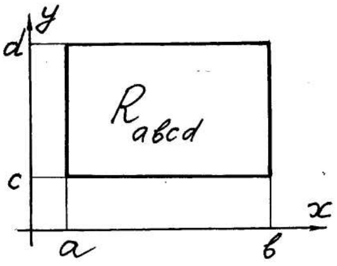
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx. \qquad (6)$$

Спочатку ми обчислюємо **внутрішній інтеґрал**

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx,$$

інтеґрал по x від $x_1(y)$ до $x_2(y)$, а потім інтеґруємо результат по y від c до d.

■Доведіть цю формулу самостійно.■



Приклад 1. Нехай областю інтеґрування є прямокутник

$$R_{abcd} = \{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

з сторонами, паралельними до осей Ox, Oy (рис. 9).

Рис. 9

Такий прямокутник є областю обох типів, тому ми можемо застосувати обидві формули (5) і (6),

$$\iint_{R_{abcd}} f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx. \qquad (7)$$

Формула (7) означає, що у випадку прямокутника R_{abcd} ми можемо інтеґрувати в будь-якому порядку. Але на практиці один з порядків інтеґрування може виявитись кращим іншого.

Приклад 2. Знайти масу пластинки

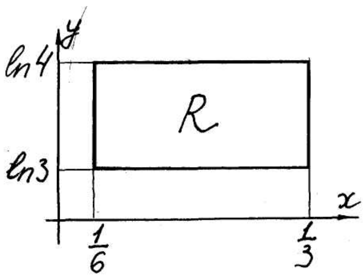


Рис. 10

$$R=\left\{(x,y):\frac{1}{6}\le x\le\frac{1}{3},\ \ln 3\le y\le\ln 4\right\}$$ (рис. 10)

з поверхневою густиною $\gamma(x,y)=12ye^{6xy}$.

Будемо шукати масу за формулою (3). Область інтеґрування R – прямокутник з сторонами, паралельними координатним осям. Застосовуючи формулу (7) для подвійного інтеґрала, отримуємо

$$m=\iint_R \gamma(x,y)dxdu=\iint_R 12ye^{6xy}dxdy=12\int_{ln3}^{ln4}dy\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}}ye^{6xy}dx=12\int_{ln3}^{ln4}ydy\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}}e^{6xy}dx=$$

$$=\left|\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}}e^{6xy}dx=\frac{1}{6y}e^{6xy}\right|_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{6y}\left(e^{2y}-e^{y}\right)\Bigg|=12\int_{ln3}^{ln4}y\frac{1}{6y}\left(e^{2y}-e^{y}\right)dy=2\int_{ln3}^{ln4}\left(e^{2y}-e^{y}\right)dy=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}e^{2y}-e^{y}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{\ln 4}=2\left(\frac{1}{2}\left(e^{2\ln 4}-e^{2\ln 3}\right)-\left(e^{\ln 4}-e^{\ln 3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}(16-9)-(4-3)\right)=5.$$

Інший порядок інтеґрування набагато гірший (перевірте!).

Приклад 3. Обчислити двомя способами подвійной інтеґрал

$$\iint_D \sin(3x+2y)dxdy,$$

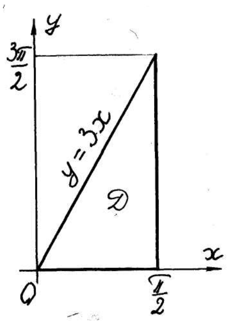


Рис. 11

якщо область інтеґрування D визначена нерівностями

$$0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le 3x$$

(рис. 11). Вона є областю як першого, так і другого типів.

Перший спосіб. Трактуємо D як область першого типу, тобто таку, яка обмежена: а) зліва – прямою $x=0$, б) справа – прямою $x=\pi/2$, в) знизу – лінією $y=0$, зверху – лінією $y=3x$,

$$D=\left\{(x,y):0\le x\le\frac{\pi}{2},\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)(0\le y\le 3x)\right\}.$$

Застосовючи формулу (5), маємо

$$\iint\limits_D \sin(3x+2y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{3x} \sin(3x+2y)dy =$$

$$= \left| \int\limits_0^{3x} \sin(3x+2y)dy = \left| \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{3x+2y=t,\ 2dy=dt,} \\ y & 0 & 3x \\ \hline t & 3x & 9x \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\limits_{3x}^{9x} \sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t \Big|_{3x}^{9x} = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 9x) \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x - \cos 9x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{9}\sin 9x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{9}\sin\frac{9\pi}{2}\right) = -\frac{2}{9}.$$

Другий спосіб. Будемо тепер трактувати D як область другого типу, тобто обмежену: а) знизу – прямою $y = 0$, б) зверху – прямою $y = 3\pi/2$, в) зліва – лінією $x = y/3$, г) справа – лінією $x = \pi/2$,

$$D = \left\{(x,y): 0 \le y \le \frac{3\pi}{2},\ \forall y \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)\left(\frac{y}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Отже, за формулою (6) ми можемо записати

$$\iint\limits_D \sin(3x+2y)dxdy = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x+2y)dx.$$

Проведіть обчислення самостійно.

Приклад 4. Розставити границі інтеґрування в подвійному інтеґралі по трикутній області D з вершинами $0(0;0)$, $A(5;4)$, $B(0;8)$ (рис. 12).

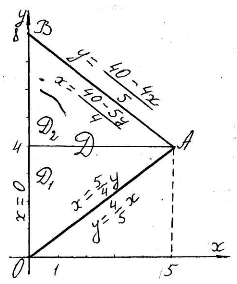


Рис.12

Складемо спочатку рівняння ліній OA і AB.

OA: $y = kx; A(5;4) \in OA \Rightarrow 4 = 5k, k = \frac{4}{5}, y = \frac{4}{5}x, x = \frac{5}{4}y.$

AB: $\frac{x-0}{5-0} = \frac{y-8}{4-8}, 4x + 5y - 40 = 0,\ y = \frac{40-4x}{5}, x = \frac{40-5y}{4}.$

Перший спосіб. Область D є областю першого типу, бо обмежена зліва – прямою $x = 0$, справа - прямою $x = 5$, знизу - лінією $y = 4/5x$ і зверху – лінією $y = (40-4x)/5$,

$$D=\{(x,y):0\le x\le 5,\ \forall x\in(0,5)(4/5x\le y\le(40-4x)/5)\}.$$

Тому за формулою (5)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^5 dx\int\limits_{\frac{4}{5}x}^{\frac{40-4x}{5}} f(x,y)dy\,.$$

Другий спосіб. Щоб застосувати формулу (6), поділимо лінією $y=4$ область D на дві частини D_1, D_2 другого типу (рис. 12). Якщо ми визначимо їх двома подвійними нерівностями, а саме

$$D_1=\left\{(x,y):0\le y\le 4;\ \forall y\in(0,4)\left(0\le x\le\frac{5}{4}y\right)\right\},$$
$$D_2=\left\{(x,y):4\le y\le 8;\ \forall y\in(4,8)\left(0\le x\le\frac{40-5y}{4}\right)\right\},$$

то будемо мати

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=$$
$$=\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{\frac{5}{4}y} f(x,y)dx+\int\limits_4^8 dy\int\limits_0^{\frac{40-5y}{4}} f(x,y)dx.$$

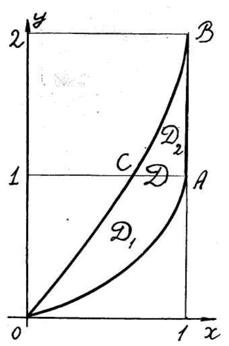


Рис. 13

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеґрал

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$$

по області

$$D=\{(x,y):0\le x\le 1,\ \forall x\in(0,1)(\sqrt{x}\le y\le 2\sqrt{x})\}$$

(рис. 13).

Очевидно, область D є областю першого типу. Прямою $y=1$ її можна поділити на дві області $D_1=OAC, D_2=ABC$ другого типу, причому

$$D_1=\left\{(x,y):0\le y\le 1,\ \forall y\in(0,1)\left(\frac{y^2}{4}\le x\le y^2\right)\right\},$$
$$D_2=\left\{(x,y):1\le y\le 2,\ \forall y\in(1,2)\left(\frac{y^2}{4}\le x\le 1\right)\right\}.$$

Шуканий інтеґрал дорівнює сумі двох інтеґралів. Зручно перший з них обчислювати по області D як області першого типу, а другий знайти як суму інтеґралів по областях D_1 и D_2 другого типу.

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy+\iint\limits_D y^2dxdy=\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy+\iint\limits_{D_1} y^2dxdy+\iint\limits_{D_2} y^2dxdy=$$

$$=\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy+\int\limits_0^1 y^2dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{y^2}dx+\int\limits_1^2 y^2dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{1}dx=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{x}dx+\frac{3}{4}\int\limits_0^1 y^4dy+\int\limits_1^2 y^2\left(1-\frac{y^2}{4}\right)dy=$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Bigg|_0^1+\frac{3}{20}y^5\Bigg|_0^1+\frac{1}{3}y^3\Bigg|_1^2-\frac{1}{20}y^5\Bigg|_1^2=\frac{2}{7}+\frac{3}{20}+\frac{7}{3}-\frac{31}{20}=\frac{128}{105}\approx 1.22.$$

9.3. НЕВЛАСНІ ПОДВІЙНІ ІНТЕҐРАЛИ. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Ми обмежимось невласними подвійними інтеґралами першого роду, тобто інтеґралами від неперервних функцій по нескінченних областяї. Як такі області ми розглянемо: перший квадрант

$$R=\{(x,\,y):0\le x<\infty,\,0\le y<\infty\},$$

нескінченний прямокутник

$$R_{ab}=\{(x,y):-\infty<x\le a,\,-\infty<y\le b\}$$

і площину xOy.

$$\Re^2=\{(x,y):-\infty<x<\infty,\,-\infty<y<\infty\}.$$

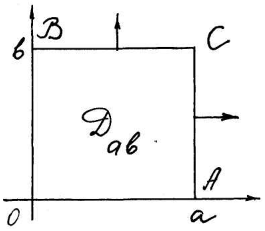


Рис. 14

Нехай R - перший квадрант, а $D_{ab}=OACB=\{(x,y):0\le x\le a,\,0\le y\le b\}$ - скінченний прямокутник з сторонами a і b (рис. 14). Ми означимо невласний інтеґрал по R наступною границею:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(x,y)dxdy=\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}}\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b f(x,y)dy=$$

$$=\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}}\int\limits_0^b dy\int\limits_0^a f(x,y)dx=\int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^\infty f(x,y)dy=\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty f(x,y)dx.$$

Як наслідок дістаємо формулу переходу від подвійного інтеґрала до повторного (формулу **зміни порядку інтеґрування**)

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)dxdy = \int_0^\infty dx\int_0^\infty f(x,y)dy = \int_0^\infty dy\int_0^\infty f(x,y)dx. \qquad (8)$$

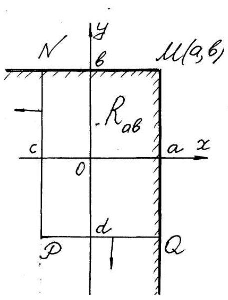


Рис. 15

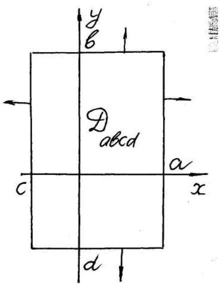


Рис. 16

Невласний інтеґрал по нескінченному прямокутнику

$$R_{ab} = \{(x,y): -\infty < x \le a, -\infty < y \le b\}$$

(рис. 15) означається як границя інтеґрала по скінченному прямокутнику

$$\{(x,y): c \le x \le a, d \le y \le b\},$$

якщо $c \to -\infty, d \to -\infty$, а невласний інтеґрал по площині xOy - як границя інтеґрала по тому ж скінченному прямокутнику (рис. 16) при $a \to \infty$, $b \to \infty$ і одночасно $c \to -\infty, d \to -\infty$. В результаті отримуємо наступні дві формули:

$$\iint_{R_{ab}} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{a}dx\int_{-\infty}^{b} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{b}dy\int_{-\infty}^{a} f(x,y)dx, \qquad (9)$$

$$\iint_{\Re^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \qquad (10)$$

Приклад 6. **Інтеґрал Пуассона**

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi},\; J = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (11)$$

$$\blacksquare\; J = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{x = yt,\, y \ge 0,\, t \ge 0} \\ dx = ydt & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \infty \\ \hline t & 0 & \infty \end{array} \end{array} \right| = \int_0^\infty e^{-y^2t^2}ydt,$$

$$J \cdot e^{-y^2}dy = e^{-y^2}dy\int_0^\infty e^{-y^2t^2}ydt.$$

Проінтеґруємо останню рівність по y по інтервалу $[0, \infty)$,

$$J \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = J^2 = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \int_0^{\infty} e^{-y^2 t^2} ydt = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-y^2} \cdot e^{-y^2 t^2} ydt = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-y^2\left(1+t^2\right)} ydt =$$

$$= \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-y^2\left(1+t^2\right)} ydy = \left| \begin{matrix} -y^2\left(1+t^2\right) = z, -2y\left(1+t^2\right)dy = dz \\ ydy = -\dfrac{dz}{2\left(1+t^2\right)} \quad \begin{array}{c|c|c} y & 0 & \infty \\ \hline z & 0 & -\infty \end{array} \end{matrix} \right| = \int_0^{\infty} dt \int_0^{-\infty} e^z \left(-\frac{1}{2\left(1+t^2\right)} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} dt \int_{-\infty}^{0} e^z dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} dt \cdot \int_{-\infty}^{0} e^z dz = \frac{1}{2} \arctan t \Big|_0^{\infty} \cdot e^z \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)\left(1-0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Таким чином, ми довели, що

$$J^2 = \frac{\pi}{4},$$

а отже

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, I = \sqrt{\pi}. \blacksquare$$

9.4. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕҐРАЛ В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

Розглянемо подвійний інтеґрал

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dxdy$$

по області D площинии xOy і перейдемо до полярних координат

$$x = \rho \cos\varphi, y = \rho \sin\varphi, x^2 + y^2 = \rho^2, \tag{12}$$

суміщаючи полюс O з початком координат $O(0; 0)$, а полярну вісь $O\rho$ - з додатною піввіссю осі Ox декартової системи координат. Область D перетворюється в деяку область Δ площини $\varphi O'\rho$, а даний інтеґрал – в подвійний інтеґрал по області Δ.

Щоб побачити, як при цьому перетворюється елемент площі dS, утворимо елемент dD області D двома колами радіусів $\rho, d\rho$ з центром в полюсі и двома променями, які виходять з полюса під кутами $\varphi, \varphi + d\varphi$ до полярної осі (див. рис. 17 а). Ми можемо розглядати dD як криволінійний прямокутник $PQRT$ площі

$$dS = S_{PQRT} = PT \cdot PQ = d\rho \cdot \rho d\varphi .$$

Таким чином,

$$dS = \rho d\rho d\varphi ,$$

і формула переходу до полярних координат в подвійному інтеґралі може бути записана наступним чином:

$$\iint\limits_{D} f(x,\, y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(\rho\, cos\,\varphi,\, \rho\, sin\,\varphi)\rho d\rho d\varphi . \qquad (13)$$

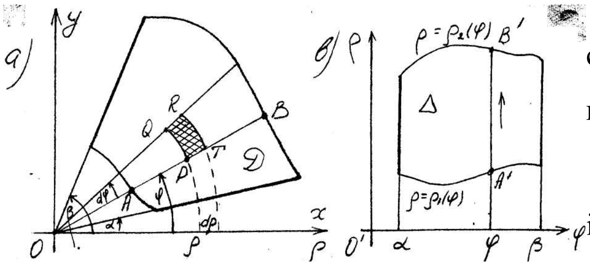


Рис. 17

В застосуваннях ми часто зустрічаємось з областю *D*, обмеженою двома променями

$$\varphi = \alpha ,\, \varphi = \beta \;\; (\alpha < \beta) \qquad (14)$$

і двома лініями, які мають в полярних координатах рівняння

$$\rho = \rho_1(\varphi),\, \rho = \rho_2(\varphi),\;\; (\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)) \qquad (15)$$

(рис. 17 а). Можна описати таку область двома подвійними нерівностями

$$\alpha \le \varphi \le \beta ,\quad \forall \varphi \in (\alpha ,\, \beta):\, \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi), \qquad (16)$$

звідки випливає, що область $\Delta \subseteq \varphi O'\rho$ (рис. 17 b), в яку перетворюється область *D* після переходу до полярних координат, є областю першого типу. Тому на підставі формули (5)

$$\iint\limits_{D} f(x,\, y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos\varphi,\, \rho \sin\varphi)\rho d\rho . \qquad (17)$$

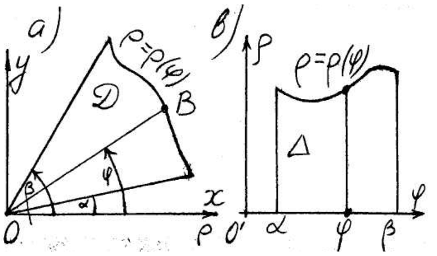


Рис. 18

Якщо лінія $\rho = \rho_1(\varphi)$ вироджується в полюс *O*, отримуємо криволінійний сектор *D*, обмежений двома променями

$$\varphi = \alpha ,\, \varphi = \beta \;\; (\alpha < \beta) \qquad (18)$$

і лінією

$$\rho = \rho(\varphi) \qquad (19)$$

(рис. 18 а). Ми визначаємо його нерівностями

$$\alpha \le \varphi \le \beta, \quad \forall \varphi \in (\alpha, \beta): O \le \rho \le \rho(\varphi), \quad (20)$$

звідки випливає, що область $\Delta \subseteq \varphi O'\rho$ (див. рис. 18 b) також є областю першого типу. Тому згідно з формулою (5)

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho . \qquad (21)$$

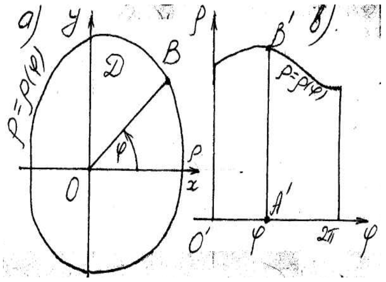


Рис. 19

Нехай область D містить полюс O, і кожний промінь $\varphi = const$ перетинає границю області в єдиній точці (рис. 19 a). Якщо (19) – її полярне рівняння, то

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \forall \varphi \in (0, 2\pi): 0 \le \rho \le \rho(\varphi) \quad (22)$$

(рис. 19 b), и отже

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \, cos\,\varphi, \rho \, sin\,\varphi)\rho d\rho . \qquad (23)$$

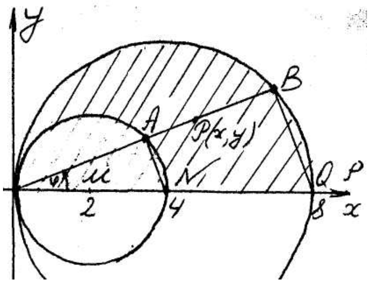


Рис. 20

Приклад 7. Знайти масу пластинки D, яка місти-ться між двома кривими

$$l_1 : x^2 - 4x + y^2 = 0, \quad l_2 : x^2 - 8x + y^2 = 0$$

для $y \ge 0$ (рис. 20), якщо в кожній точці $P(x; y) \in D$ її поверхнева густина $\gamma(P) = \gamma(x, y)$ пропорційна полярному радіусу OP цієї точки і дорівнює 8 в точці $N(4; 0)$.

Поверхнева густина пластинки D дорівнює

$$\gamma(P) = \gamma(x, y) = k \cdot OP = k\sqrt{x^2 + y^2}; \gamma(N) = \gamma(4; 0) = k\sqrt{4^2 + 0^2} = 4k = 8 \Rightarrow k = 2,$$
$$\gamma(P) = \gamma(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

і на підставі механічного сенсу подвійного інтеґрала (див. (3)) ми повинні обчислити подвійний інтеґрал

$$m = \iint\limits_D \gamma(P)dS = \iint\limits_D \gamma(x, y)dxdy = 2\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy .$$

Доповнюючи до повних квадратів, ми бачимо, що криві l_1, l_2 - кола радіусів 2 и 4 з центрами $M(2;\,0),\ N(4;\,0)$ відповідно:

$$x^2-4x+4+y^2=4,\ (x-2)^2+y^2=2^2,\ x^2-8x+16+y^2=16,\ (x-4)^2+y^2=4^2.$$

Здійснюючи перехід (12) до полярних координат, отримуємо полярні рівняння ліній l_1, l_2,

$$l_1: x^2+y^2=4x,\ \rho^2=4\rho\,cos\,\varphi,\ \rho=4\,cos\,\varphi;\ l_2: x^2+y^2=8x,\ \rho=8\,cos\,\varphi,$$

і визначаємо область D двома подвійними нерівностями

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ \forall\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right):(4\cos\varphi\le\rho\le8\cos\varphi).$$

Отже, за формулою (17)

$$m=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{4cos\,\varphi}^{8cos\,\varphi}\sqrt{\rho^2}\,\rho d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{4cos\,\varphi}^{8cos\,\varphi}\rho^2 d\rho=\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(\rho^3\right)\Bigg|_{4cos\,\varphi}^{8cos\,\varphi}=\frac{2}{3}\left(8^3-4^3\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}cos^3\,\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{896}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-sin^2\,\varphi\right)cos\,\varphi d\varphi=\left|\begin{array}{c}sin\,\varphi=t,\\ cos\,\varphi d\varphi=dt,\end{array}\begin{array}{c|c|c}\varphi & 0 & \frac{\pi}{2}\\ \hline t & 0 & 1\end{array}\right|=\frac{896}{3}\int\limits_0^1\left(1-t^2\right)dt=\frac{1792}{9}\approx199.$$

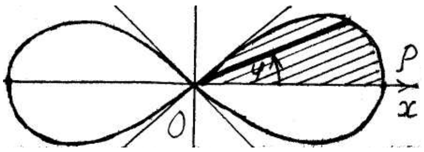


Рис. 21

Приклад 8. Знайти площу фігури, обмеженої лінією (лемніскатою Бернуллі, рис. 21)

$$\left(x^2+y^2\right)^2=4a^2\left(x^2-y^2\right).$$

Ми раніше вивчали цю лінію. Її полярне рівняння

$$\rho=2a\sqrt{cos\,2\varphi}.$$

Згідно з формулою (2) можемо написати

$$S=4\iint\limits_D dxdy,$$

де область D – заштрихований криволінійний сектор на рис. 21. Очевидно,

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ \forall\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right):\left(0\le\rho\le2a\sqrt{\cos2\varphi}\right).$$

Отже, відповідно до формули (21) переходу до полярних координат (у випадку області D - криволінійного сектора) шукана площа дорівнює

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\sqrt{cos\,2\varphi}}\rho d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2a\sqrt{cos\,2\varphi}}\right)=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos\,2\varphi d\varphi=4a^2\,sin\,2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=4a^2$$

В загальному випадку заміна змінних

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),$$

в результаті якої область D площини xOy перетворюється в область $\varDelta$ площини $uO'v$, справедливою є наступна формула

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv,.$$

де

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}$$

функціональний визначник, який звичайно називається якобіаном[1].

---

[1] На ім"я Якобі Карла Густава Якоба (1804 - 1851), відомого німецького математика.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО І ДРУГОГО ПОРЯДКІВ

5.1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Означення 1. Рівняння відносно шуканої функції $y(x)$ називається **диференціальним**, якщо воно містить похідну або похідні цієї функції.

Означення 2. Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідних шуканої функції, які входять в рівняння.

Загальна форма диференціального рівняння першого порядку відносно шуканої функції $y(x)$ має вигляд

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

а другого порядку - вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (2)$$

Означення 3. Розв"язком диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє його, тобто перетворює його на тотожність.

Так, функція $y = \varphi(x)$ є розв"язком диференціального рівняння першого порядку (1), якщо $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$.

Означення 4. Інтеґральною кривою диференціального рівняння називається графік його розв"язку.

Кожне диференціальне рівняння має нескінченну множину розв"язків, а отже – і інтеґральних кривих.

Приклад 1. Множина всіх розв"язків диференціального рівняння

$$y' = x$$

дається виразом

$$y = x^2/2 + C,$$

де C – довільна стала.

Щоб вибрати якийсь певний розв"язок диференціального рівняння, задають додаткові умови.

Розрізнюють **граничні,** або **крайові,** і **початкові** умови.

Приклад 2. В деяких розділах так званої математичної фізики розглядається така задача: знайти розв"язки диференціального рівняння

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (0 < x < l),$$

які задовольняють граничні (крайові) умови

$$y(0) = 0, \; y(l) = 0.$$

Відомо, що так поставлена задача має нескінченну множину розв"язків (власних функцій)

$$y = y_n = \sin\frac{n\pi x}{l},$$

кожне з яких відповідає цілком визначеному значенню k (власному значенню)

$$k = k_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Ми будемо, як правило, розглядати тільки початкові умови.

Для диференціального рівняння першого порядку (1) ми задаємо одну початкову умову, а саме:

$$y(x_0) = y_0. \qquad (3)$$

Для диференціального рівняння другого порядку (2) задаються дві початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0. \qquad (4)$$

Означення 5. Задача відшукання розв"язку диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову або початкові умови, називається **задачею Коші**.

Для диференціального рівняння першого порядку (1) ми маємо задачу Коші (1), (3), а для рівняння другого порядку (2) - задачу Коші (2), (4).

Геометричний сенс задачі Коші (1), (3): знайти інтеґральну криву, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Геометричний сенс задачі Коші (2), (4): знайти інтеґральну криву, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має в ній заданий кутовий коефіцієнт дотичної.

Приклад 3. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(-1; 2)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній її точці $M(x; y)$ дорівнює $2x$.

Ми повинні розв"язати задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку

$$y' = 2x$$

з початковою умовою

$$y(-1) = 2.$$

Рівняння дає

$$y = x^2 + C,$$

а з початкової умови ми знаходимо значення сталої C,

$$y(-1) = (-1)^2 + C = 2, C = 2 - 1 = 1,$$

і, отже, рівнянням шуканої лінії є

$$y = x^2 + 1.$$

Теорія диференціальних рівнянь встановлює умови однозначної розв"язності задачі Коші.

Розглянемо спочатку диференціальне рівняння першого порядку, розв"язане відносно похідної y' шуканої функції, тобто

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

Теорема 1. Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f'_y(x, y)$ по y неперервні в деякій області D площини xOy, то для будь-якої точки

$$M_0(x_0, y_0) \in D$$

задача Коші (5), (3) має розв"язок, причому єдиний. Він визначений на певному інтервалі (a, b) осі Ox, який містить точку x_0.

Означення 6. Загальним розв"язком диференціального рівняння першого порядку (5) в області *D*, про яку йдеться в теоремі 1, називається функція $y=\varphi(x,C)$, яка містить довільну сталу *C* і задовольняє дві умови: а) вона є розв"язком рівняння для будь-якого значення *C*; б) для довільної початкової умови (3), такої, що точка $M_0(x_0,y_0)$ лежить в області *D*, можна знайти таке значення C_0 сталої С, щоб функція $\varphi(x,C_0)$ задовольняла цю початкову умову.

Приклад. Нехай функція $y=y_1(x)$ є розв"язком диференціального рівняння першого порядку

$$y'+P(x)y=0\,.$$

Тоді загальним розв"язком рівняння буде функція

$$y=\varphi(x)=Cy_1(x),$$

де C - довільна стала.

Дійсно, вона, очевидно, є розв"язком даного диференціального рівняння при довільному значенні C. Якщо, далі, задати довільну початкову умову (3) таку, що $y_1(x_0)\neq 0$, то

$$\varphi(x_0)=Cy_1(x_0)=y_0,\,C=y_0/y_1(x_0),$$

і функція

$$\varphi(x)=\frac{y_0}{y_1(x_0)}y_1(x)$$

задовольняє початкову умову.

Означення 7. Якщо стала *C* в загальному розв"язку $y=\varphi(x,C)$ диференціального рівняння (5) набуває якогось частинного значення C_0, то відповідна функція $\varphi(x,C_0)$ називається **частинним розв"язком** цього рівняння.

Частинним розв"язком є, наприклад, розв"язок задачі Коші.

Розглянемо тепер диференціальне рівняння другого порядку, розв"язане відносно другої похідної y'' шуканої функції,

$$y''=f(x,y,y'). \tag{6}$$

Теорема 2. Якщо функція $f(x,y,y')$ та її частинні похідні по y,y', тобто $f'_y(x,y,y')$, $f'_{y'}(x,y,y')$, неперервні в деякій області *D* тривимірного простору

$Oxyz$, то для будь-якої точки $M_0(x_0, y_0, y'_0) \in D$ задача Коші (6), (4) має розв"язок, причому єдиний. Він визначений на деякому інтервалі (a, b) осі Ox, який містить точку x_0.

Означення 8. Загальним розв"язком диференціального рівняння другого порядку (6) в області D теореми 2, називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка містить дві довільні сталі C_1, C_2 і задовольняє дві умови: a) вона є розв"язком рівняння для будь-яких значень C_1, C_2; b) для довільних початкових умов (4) (за умови, що $M_0(x_0, y_0, y'_0) \in D$) можна знайти значення C_{01}, C_{02} сталих C_1, C_2 так, щоб задовольнити ці умови.

Для будь-яких частинних значень C_{01}, C_{02} констант C_1, C_2 ми маємо частинний розв"язок $y = \varphi(x, C_{01}, C_{02})$ рівняння (6), зокрема розв"язок задачі Коші (6), (4).

Зауваження 1. Загальний або частинний розв"язки диференціального рівняння можуть бути заданими неявно. В такому випадку їх часто називають, відповідно, загальним або частинним інтеґралами рівняння.

Зауваження 2. Аналогічні означення і теореми розглядаються і для диференціальних рівнянь n-го порядку (якщо $n > 2$).

Якщо ми шукаємо загальний розв"язок або розв"язок задачі Коші для даного диференціального рівняння, ми говоримо про його розв"язання або, частіше, його інтеґрування.

5.2. ІНТЕҐРОВНІ ТИПИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Існують диференціальні рівняння першого порядку, інтеґрування (розв"язання) яких зводиться до обчислення невизначених інтеґралів, або, як часто кажуть, до квадратур. До таких рівнянь відносяться зокрема рівняння з відокремленими або відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні, рівняння Бернуллі, до розгляду яких ми приступаємо.

5.2.1. Рівняння з відокремленими змінними

Означення 9. Диференціальне першого порядку вигляду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \qquad (7)$$

де змінні x, y відокремлені (знаходяться в різних місцях), називається рівнянням **з відокремленими змінними**.

Теорема 3. Загальний розв"язок (згідно з зауваженням 1 - загальний інтеґрал) диференціального рівняння (7) має вигляд

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \qquad (8)$$

де під виразами

$$\int M(x)dx, \int N(y)dy$$

розуміють деякі **первісні** (а не невизначені інтеґрали!) функцій $M(x), N(y)$ відповідно.

■Частина 1.

a) Нехай функція $y = \varphi(x)$ є розв"язком рівняння (7), тобто тотожно маємо

$$M(x)dx + N(\varphi(x))d\varphi(x) \equiv 0, \quad M(x)dx + N(\varphi(x))\varphi'(x)dx \equiv 0.$$

Інтеґруючи тотожність по x, ми отримаємо рівність (8), а саме:

$$\int M(x)dx + \int N(\varphi(x))\varphi'(x)dx \equiv C, \left| \begin{matrix} \text{Нехай } \varphi(x) = y, \\ \varphi'(x)dx = dy \end{matrix} \right|, \int M(x)dx + \int N(y)dy \equiv C.$$

b) Навпаки, нехай функція $y = \varphi(x)$ задовольняє рівність (8), тобто тотожно

$$\int M(x)dx + \int N(\varphi(x))\varphi'(x)dx \equiv C.$$

Диференціюючи тотожність, маємо

$$d\left(\int M(x)dx\right) + d\left(\int N(\varphi(x))\varphi'(x)dx\right) = 0, M(x)dx + N(\varphi(x))\varphi'(x)dx = 0,$$

звідки бачимо, що функція $y = \varphi(x)$ є розв"язком рівняння (7).

Таким чином, кожний розв"язок рівняння (7) задовольняє рівність (8) і навпаки, кожна функція, яка задовольняє рівність (8), є розв"язком рівняння (7).

Частина 2. Щоб довести можливість вибору значення C так, щоб задовольнити початкову умову

$$y(x_0)=y_0, \tag{9}$$

запишемо первісні в формулі (8) у вигляді визначених інтеґралів з змінними межами інтеґрування,

$$\int_a^x M(x)dx+\int_b^y N(y)dy=C.$$

На підставі початкової умови (9) дістаємо

$$C=\int_a^{x_0} M(x)dx+\int_b^{y_0} N(y)dy.\blacksquare$$

Зауваження 3. Взявши $a=x_0, b=y_0$, отримаємо $C=0$. Таким чином, розв"язок задачі Коші для рівняння (7) з початковою умовою (9) можна записати в найпростішому вигляді

$$\int_{x_0}^x M(x)dx+\int_{y_0}^y N(y)dy=0. \tag{10}$$

Зауваження 4. Інтеґрування диференціального рівняння (7) зводиться до більш простої задачі, а саме – до відшукання первісних (до квадратур). І не важливо, якщо принаймні одна з первісних не може бути вираженою через елементарні функції.

Приклад 4. Диференціальне рівняння

$$e^{x^2}dx=\frac{dy}{\ln y}$$

є рівнянням з відокремленими змінними. Його загальний розв"язок дається формулою

$$\int e^{x^2}dx=\int\frac{dy}{\ln y}+C.$$

Обидві первісні

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \frac{dy}{\ln y},$$

як відомо, не виражаються через елементарні функції, але задача інтеґрування диференціального рівняння вважається розв"язаною.

5.2.2. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення 10. Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням **з відокремлюваними змінними** (або рівнянням з змінними, які відокремлюються), якщо його можна звести до рівняння з відокремленими змінними.

Таким є, наприклад, диференціальне рівняння

$$y' = f_1(x) f_2(y) \qquad (11)$$

за умови $f_2(y) \neq 0$.

Достатньо записати похідну y' у вигляді $\frac{dy}{dx}$, помножити обидві частини рівняння на dx і поділити на $f_2(y)$,

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \left| \frac{dx}{f_2(y)}, \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx \right. .$$

Таким чином, загальний розв"зок рівняння (11) дається формулою

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C. \qquad (12)$$

До того ж типу рівнянь з відокремлюваними змінними належить таке рівняння

$$P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0 \qquad (13)$$

у випадку $R(x) \neq 0, Q(y) \neq 0$. Ми дістаємо рівняння з відокремленими змінними, поділивши обидві частини рівняння на $R(x)Q(y)$,

$$P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0, \quad \left| \frac{1}{R(x)Q(y)}, \quad \frac{P(x)dx}{R(x)} + \frac{S(y)dy}{Q(y)} = 0 \right. ,$$

і загальним розв"язком вихідного рівняння є

$$\int \frac{P(x)}{R(x)}dx + \int \frac{S(y)}{Q(y)}dy = C. \qquad (14)$$

Приклад 5. Диференціальне рівняння

$$e^y\left(1+x^2\right)dy - 2x\left(1+e^y\right)dx = 0$$

має вигляд (13), де

$$P(x) = 1+x^2, Q(y) = e^y, R(x) = 2x, S(y) = 1+e^y,$$

і є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на добуток $\left(1+x^2\right)\left(1+e^y\right)$, маємо

$$e^y\left(1+x^2\right)dy - 2x\left(1+e^y\right)dx = 0 \left| \frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+e^y\right)}, \right. \frac{e^y}{1+e^y}dy - \frac{2x}{1+x^2}dx = 0,$$

звідки

$$\int \frac{e^y dy}{1+e^y} - \int \frac{2xdx}{1+x^2} = C, \ln\left(1+e^y\right) - \ln\left(1+x^2\right) = C, \ln\frac{1+e^y}{1+x^2} = C.$$

Зауваження 5. Задля більшої простоти ми можемо записувати довільну сталу *C* в різних формах.

Например, візьмемо в попередньому прикладі довільну сталу у вигляді $\ln|C_1|$ (замість *C*). Тоді матимемо

$$\ln\frac{1+e^y}{1+x^2} = \ln|C_1|, \quad \frac{1+e^y}{1+x^2} = |C_1|.$$

Покладаючи остаточно $C = |C_1|$, дістаємо загальний розв"язок рівняння в більш простому вигляді

$$1+e^y = C\left(1+x^2\right),$$

або

$$y = \ln\left(C\left(1+x^2\right) - 1\right).$$

Приклад 6. Компанія на теперішній час має 1680 одиниць деякої продукції, і ця кількість поповнюється з швидкістю 900 одиниць в місяць (од/міс). Зараз попит має швидкість 800 од/міс, але поступово зменшується з швидкістю 10 (од/міс). Компанія хоче скорочувати випуск продукції з швидкістю *n* од/міс з тим, щоб реалізувати її всю протягом року. Знайти значення *n*.

Нехай $I(t)$ - кількість одиниць продукції, які є в наявності в компанії в момент часу *t*. Очевидно, $I(0)=1680$. Швидкість зміни кількості продукції в момент *t* дорівнює

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t}=I'(t).$$

Відомо, що

$$V(t)=S(t)-D(t),$$

де $S(t)$ - швидкість виробництва, а $D(t)$ - швидкість продажу. За умови задачі

$$S(t)=900-nt,\, D(t)=800-10t,\, V(t)=100+10t-nt=100+(10-n)t,$$

або

$$I'(t)=100+(10-n)t.$$

Ми дістаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними відносно $I(t)$ з початковою умовою

$$I(0)=1680,$$

так що треба розв"язати для рівняння задачу Коші. З рівняння маємо

$$I(t)=100t+(10-n)\cdot\frac{t^2}{2}+C,$$

з початкової умови знаходимо $C=1680$, і

$$I(t)=100t+(10-n)\cdot\frac{t^2}{2}+1680.$$

Щоб продати всю продукцію протягом року ми повинні мати

$$I(12)=100\cdot 12+(10-n)\cdot\frac{12^2}{2}+1680=0,$$

звідки випливає, що $n=50$.

Відповідь: компанії необхідно скоротити випуск продукції з швидкістю *n* = 50 од/міс.

Приклад 7 (задача з демографічним змістом). Швидкість зростання кількості населення в довільний момент часу пропорційна кількості населення в

Отформатировано: русский (Россия)

цей момент (з кофіцієнтом пропорційності *k*). Знайти кількість населення в довільний момент *t*, якщо вона дорівнює L_0 в початковий момент $t = 0$.

Нехай $L(t)$ - кількість населення в момент часу *t* (очевидно, що $L(t) > 0$). Швидкість зростання кількості населення в цей момент

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{L(t + \Delta t) - L(t)}{\Delta t} = L'(t).$$

Згідно з умовою

$$v(t) = kL(t).$$

Отже,

$$L'(t) = kL(t), \quad L(0) = L_0,$$

і ми повинні розв"язати задачу Коші.

Диференціальне рівняння задачі – з відокремлюваними змінними,

$$\frac{dL}{dt} = kL \;\Big|\, \frac{dt}{L}, \frac{dL}{L} = kdt, \ln|L| = kt + \ln|C|, \ \ln|L| - \ln|C| = kt, \ln\left|\frac{L}{C}\right| = kt, \left|\frac{L}{C}\right| = e^{kt},$$

$$|L(t)| = |C|e^{kt}, L(t) = |C|e^{kt},$$

$$L(0) = L_0 = |C|e^0, |C| = L_0, L(t) = L_0 e^{kt}.$$

Таким чином, ми отримали експоненційне зростання кількості населення за умови відсутності якихось стримуючих факторів (зниження життєвого рівня, заходів по зниженню народжуваності і т.ін.).

Приклад 8 (геометрична задача). Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1;\,2)$, якщо відрізок її довільної дотичної між точкою дотику і віссю Oy ділиться точкою перетину відрізка з віссю Ox в даному відношенні 5 : 8, рахуючи від осі Oy (див. рис. 1).

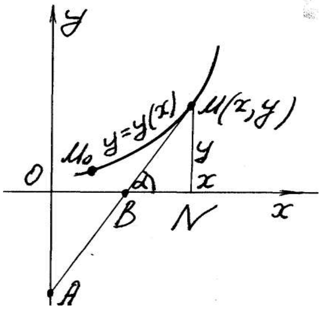


Рис. 1

З умови випливає , що шукана крива не може перетинати координатні осі і тому повинна знаходитись в першому квадранті.

Нехай $y = y(x)$ - шукане рівняння кривої, $M(x; y)$ - довільна точка кривої, яка є точкою дотику, $\alpha = \angle MBN$. Тоді $ON = x\ (x > 0)$,

$$NM = y\,(y > 0),\ \tan\alpha = y' = \frac{NM}{BN} = \frac{y}{BN},\ y' = \frac{y}{BN}\ \text{(рис. 1)}.$$

Згідно з умовою

$$AB : BM = 5:8 = OB : BN,\ OB = x - BN,\ (x - BN) : BN = 5:8 \Rightarrow BN = 8/13x,$$

$$y' = \frac{y}{(8/13)\cdot x},\quad \begin{cases} y' = \dfrac{13y}{8x}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Отримали задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, отримуємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{13y}{8x}\ \left|\frac{dx}{y},\ \frac{dy}{y} = \frac{13}{8}\frac{dx}{x},\ \int\frac{dy}{y} = \frac{13}{8}\int\frac{dx}{x} + \frac{13}{8}\ln|C|,\ \ln|y| = \frac{13}{8}\left(\ln|x| + \ln|C|\right),,\right.$$

$$\ln|y| = \frac{13}{8}\ln|C||x|, \ln y = \frac{13}{8}\ln|C|x,\ \ln y = \ln(|C|x)^{\frac{13}{8}},\ y = |C|^{\frac{13}{8}}x^{\frac{13}{8}}.$$

За допомоги початкової умови знаходимо значення сталої і розв"зок задачі Коші,

$$y(1) = 2, y(1) = |C|^{\frac{13}{8}},\ |C|^{\frac{13}{8}} = 2,\ y = 2x^{\frac{13}{8}}.$$

Існує інший спосіб виведення диференціального рівняння задачі, заснований на використанні рівняння дотичної до кривої в її довільній точці $M(x;y)$.

Дісно, нехай ξ, η - координати довільної (поточної) точки дотичної. Тоді рівняння дотичної можна записату у вигляді

$$\eta = y(x) + y'(x)(\xi - x).$$

Покладаючи в цьому рівнянні $\eta = 0$, отримаємо

$$0 = y(x) + y'(x)(\xi - x),\ y'(x)(\xi - x) = -y(x),\ \xi - x = -y(x)/y'(x),$$

$$\xi = OB = x - \frac{y(x)}{y'(x)} \Rightarrow BN = ON - OB = x - \left(x - \frac{y(x)}{y'(x)}\right) = \frac{y(x)}{y'(x)}.$$

Тепер на підставі умови задачі маємо

$$\frac{AB}{BM} = \frac{OB}{BN} = \frac{5}{8} \Rightarrow \left(x - \frac{y(x)}{y'(x)}\right)\Big/\left(\frac{y(x)}{y'(x)}\right) = \frac{5}{8},\ x - \frac{y(x)}{y'(x)} = \frac{5}{8}\cdot\frac{y(x)}{y'(x)},\ x = \frac{13}{8}\cdot\frac{y(x)}{y'(x)},$$

звідки

$$y'(x)=\frac{13}{8}\cdot\frac{y(x)}{x}.$$

5.2.3. Однорідні диференціальні рівняння (відносно змінних)

Означення 11. Диференціальне рівняння першого порядку називається **однорідним** (відносно змінних x, y), якщо його можна подати у вигляді

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (15)$$

де функція в правій частині залежить тільки від відношення змінних.

Теорема 4. Однорідне диференціальне рівняння (15) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними введенням нової шуканої функції

$$\frac{y}{x}=u(x). \qquad (16)$$

■Знаходячи y' та підставляючи його значення в рівняння, маємо

$$y=xu(x),\ y'=u+xu',\ u+xu'=\varphi(u),$$

$$xu'=\varphi(u)-u.$$

Отримане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними за умови

$$\varphi(u)-u\neq 0.$$

Дійсно, в цьому випадку

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u\left|\frac{dx}{x(\varphi(u)-u)}\right.,\ \frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C.■$$

Зауваження 6. Можна довести, що диференціальне рівняння вигляду

$$y'=f(x,y) \qquad (17)$$

є однорідним, якщо для будь-якого λ виконується умова

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y).$$

■Дійсно, покладаючи $\lambda=1/x$, можемо подати праву частину рівняння (17) у вигляді функції від відношення y/x:

$$f(x,y)=f(\lambda x,\lambda y)=f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right).\blacksquare$$

Більш загальне диференціальне рівняння

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (18)$$

є однорідним, якщо для будь-якого λ існує число k таке, що одночасно

$$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k M(x,y) \text{ і } N(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k N(x,y).$$

Доведіть це твердження самостійно.

Приклад 9. Розв"язати задачу Коші

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: русский (Россия)

$$xy'=y\ln\frac{y}{x},\ y(1)=1.$$

Поділимо обидві частини рівняння на x. Отримаємо диференціальне рівняння вигляду (15),

$$y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},$$

в якому права частина

$$\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

є функцією від відношення y/x. Отже, задане рівняння є однорідним. Діючи згідно з теорією, маємо

$$\frac{y}{x}=u,\ y=xu,\ y'=xu'+u,\ xu'+u=u\ln u,\ xu'=u\ln u-u,\ x\frac{du}{dx}=u(\ln u-1)\left|\frac{dx}{xu(\ln u-1)}\right.$$

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x},\ \int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|,\ \ln|\ln u-1|=\ln|Cx|,\ |\ln u-1|=|Cx|.$$

Дякуючи довільності сталої C, ми можемо відкинути тут знаки абсолютної величини, звідки

$$\ln u-1=Cx,\ \ln\frac{y}{x}-1=Cx.$$

Початкова умова дає

$$\ln\frac{1}{1}-1=C\cdot 1,\ C=-1.$$

Шуканий розв"язок задачі Коші

$$\ln\frac{y}{x}=1-x,$$

або

$$\frac{y}{x}=e^{1-x}, \quad y=xe^{1-x}.$$

Приклад 10. Знайти загальний розв"язок диференціального рівняння

$$\left(3y^2+3xy+x^2\right)dx=\left(x^2+2xy\right)dy.$$

Рівняння є однорідним, оскільки для довільного λ маємо

$$3(\lambda y)^2+3(\lambda x)(\lambda y)+(\lambda x)^2=\lambda^2\left(3y^2+3xy+x^2\right), (\lambda x)^2+2(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^2\left(x^2+2xy\right).$$

Однорідність рівняння можна встановити без залучення λ. Перепишемо для цього його у вигляді

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2+3xy+x^2}{x^2+2xy}$$

та поділимо чисельник і знаменник дробу праворуч на x^2,

$$y'=\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2+3\cdot\frac{y}{x}+1}{1+2\cdot\frac{y}{x}}.$$

В отриманому рівнянні права частина є функцією від відношення y/x, що доводить однорідність даного рівняння. На підставі теорії, застосованої до перетвореного рівняння, дістаємо

$$\frac{y}{x}=u,\ y=xu,\ y'=xu'+u,\ xu'+u=\frac{3u^2+3u+1}{1+2u},\ x\frac{du}{dx}=\frac{u^2+2u+1}{1+2u},\ \frac{(1+2u)du}{u^2+2u+1}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{(1+2u)du}{u^2+2u+1}=\int\frac{dx}{x}+C,\ \int\frac{(1+2u)du}{(u+1)^2}=\ln|x|+C,\ \int\frac{2(1+u)-1}{(u+1)^2}du=2\int\frac{du}{u+1}-\int\frac{du}{(u+1)^2}=$$

$$=2\ln|u+1|+\frac{1}{u+1},\ 2\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=\ln|x|+C,\ 2\ln\left|\frac{x+y}{x}\right|+\frac{x}{x+y}=\ln|x|+C.$$

Приклад 11. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(0;1)$, якщо піддотична в довільній її точці $M(x;y)$ дорівнює сумі координат цієї точки.

З умови випливає, що шукана крива не може перетинати вісь Ox і тому знаходиться вище неї.

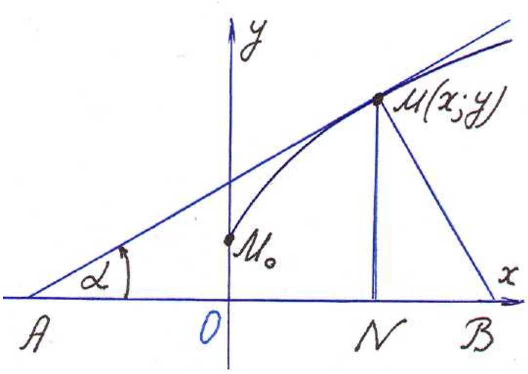


Рис. 2

Нехай $y = y(x)$, $y(x) > 0$, - рівняння шуканої кривої, MA і MB - відповідно відрізки дотичної і нормалі до кривої в довільній її точці $M(x;y)$, і $MN \perp Ox$ (див. рис. 2 для випадку $y'(x) > 0$). Напрямлені відрізки AN і NB називаються відповідно піддотичною та піднормаллю до кривої в точці $M(x;y)$.

З прямокутного трикутника AMN (у випадку $y'(x) > 0$ точка A лежить ліворуч від точки N, рис. 2, у випадку $y'(x) < 0$ - праворуч) маємо

$$NA = -NM \cdot \cot\alpha = -\frac{NM}{\tan\alpha} = -\frac{y(x)}{y'(x)};$$

те ж саме значення для NA можна отримати, виходячи з рівняння дотичної до шуканої кривої в точці $M(x;y)$. Дійсно, рівняння дотичної має вигляд

$$\eta = y(x) + y'(x)(\xi - x).$$

Покладаючи тут $\eta = 0$, матимемо

$$\xi = OA = x - \frac{y(x)}{y'(x)},\ AN = ON - OA = \frac{y(x)}{y'(x)},\ NA = -\frac{y(x)}{y'(x)}.$$

Довжина піддотичної дорівнює

$$|NA| = \left|\frac{y(x)}{y'(x)}\right|,$$

і на підставі умови ми дістаємо диференціальне рівняння

$$\left|\frac{y(x)}{y'(x)}\right| = x + y, \quad \pm\frac{y}{y'} = x + y$$

з початковою умовою

$$y(0) = 1.$$

Таким чином, ми повинні розв"язати задачу Коші.

1. Перший випадок

$$\frac{y}{y'} = x + y, \quad y(0) = 1.$$

Для визначення типу рівняння запишемо його у вигляді

$$y' = \frac{y}{x + y}$$

і поділимо чисельник і знаменник дробу на x,

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}.$$

Ми бачимо, що отримане рівняння має вигляд (15), а отже дане рівняння є однорідним. Використовуючи теорію, матимемо

$$\frac{y}{x} = u,\ y = xu,\ y' = xu' + u,\ xu' + u = \frac{u}{1+u},\ xu' = \frac{u}{1+u} - u,\ x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2}{1+u}\left|\frac{(1+u)dx}{u^2}\right.,$$

$$\frac{(1+u)du}{u^2} = -\frac{dx}{x},\ \int\frac{(1+u)du}{u^2} = -\int\frac{dx}{x} + C,\ -\frac{1}{u} + \ln|u| = -\ln|x| + C,\ -\frac{1}{u} + \ln|xu| = C,$$

$$-\frac{x}{y} + \ln|y| = C,\ -\frac{x}{y} + \ln y = C \quad (\text{бо } y > 0).$$

Початкова умова дає

$$-\frac{0}{1} + \ln 1 = C,\ C = 0.$$

Шукана крива має наступне рівняння:

$$-\frac{x}{y} + \ln y = 0, \quad y\ln y = x.$$

2. Другий випадок

$$-\frac{y}{y'}=x+y, \quad y(0)=1.$$

Інтеґрування рівняння (яке також є однорідним) дає

$$-\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+y},\ y'=-\frac{y}{x+y},\ y'=-\frac{y/x}{1+y/x},\ \frac{y}{x}=u,\ y=xu,\ y'=xu'+u,\ xu'+u=-\frac{u}{1+u},$$

$$x\frac{du}{dx}=-\frac{u}{1+u}-u,\ x\frac{du}{dx}=-\frac{2u+u^2}{1+u},\ \frac{(1+u)du}{2u+u^2}=-\frac{dx}{x},\ \frac{(1+u)du}{u(2+u)}=-\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u+2}\right)du=-\frac{dx}{x},\ \frac{1}{2}(\ln|u|+\ln|u+2|)=-\ln|x|+\ln|C|,\ \frac{1}{2}\ln|u(u+2)|+\ln|x|=\ln|C|,$$

$$\ln\left(|x|\sqrt{\left|\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}+2\right)\right|}\right)=\ln|C|,\ \ln\left(|x|\frac{1}{|x|}\sqrt{|y(y+2x)|}\right)=\ln|C|,\ln\sqrt{y|y+2x|}=\ln|C|,$$

$$\sqrt{y|y+2x|}=|C|,\ y|y+2x|=C^2,\ \begin{cases} y(y+2x)=C^2 \text{ для } y+2x\geq 0,\\ -y(y+2x)=C^2 \text{ для } y+2x<0.\end{cases}$$

Початкова умова може виконуватись тільки у випадку $y+2x\geq 0$:

$$1\cdot(1+2\cdot 0)=C^2,\ C^2=1,$$

і отже шукана крива дається рівнянням

$$y(y+2x)=1.$$

Відповідь. Поставлена задача має два розв"язки:

$$y\ln y=x,\ \ y(y+2x)=1.$$

5.2.4. Лінійні рівняння

Означення 12. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{19}$$

де коефіцієнт $P(x)$ і вільний член $Q(x)$ - відомі функції.

Теорема 5. Інтеґрування лінійного диференціального рівняння (19) зводиться до послідовного інтеґрування двох диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними.

■Шукатимемо ненульовий розв"язок рівняння (19) у вигляді добутку двох інших невідомих функцій $u(x), v(x)$,

$$y = u(x)v(x). \qquad (20)$$

Диференціюючи і підставляючи значення y, y' в рівняння, маємо

$$y' = u'v + uv', u'v + uv' + P(x)uv = Q(x), u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Наявність двох невідомих функцій дає можливість накласти на одну з них певну додаткову умову. Саме, знайдімо яку-небудь функцію $v = v_0(x)$, котра анулює вираз $v' + P(x)v$ в дужках. Для її відшукання і завершення інтеґрування рівняння ми повинні розглянути два допоміжні диференціальні рівняння, а саме

$$v' + P(x)v = 0, \qquad (*)$$

$$u'v = Q(x). \qquad (**)$$

Очевидно, обидва вони є рівняннями з відокремлюваними змінними, причому нам достатньо знайти тільки якийсь частинний розв"язок першого.

Інтеґрування рівняння (*) дає

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0 \left| \frac{dx}{v}, \frac{dv}{v} + P(x)dx = 0, \ln|v| = -\int P(x)dx + \ln|C_1|, \ln\left|\frac{v}{C_1}\right| = -\int P(x)dx, \right.$$

$$v = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Оскільки нам потрібен якийсь один частинний розв"язок рівняння (*), ми можемо надати довільній сталій C_1 будь-якого ненульового значення, наприклад $C_1 = 1$, і отримати потрібну нам функцію

$$v = v_0(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставляючи знайдене значення $v = v_0(x)$ в рівняння (**), знаходимо його загальний розв"язок,

$$u'v_0(x) = Q(x), \frac{du}{dx}v_0(x) = Q(x) \left| \frac{dx}{v_0(x)}, du = \frac{Q(x)}{v_0(x)}dx, u = \int \frac{Q(x)}{v_0(x)}dx + C. \right.$$

Остаточно ми дістаємо загальний розв"язок рівняння (19), а саме

$$y = uv = uv_0(x) = \left(\int \frac{Q(x)}{v_0(x)}dx + C \right) v_0(x). \blacksquare$$

Приклад 12. Проінтеґрувати диференціальне рівняння

$$y' + y \cdot \tan x = \frac{1}{\cos x}.$$

Дане рівняня є лінійним, в якому

$$P(x) = \tan x,\, Q(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Згідно з теорією покладаємо

$$y = uv = u(x)v(x),$$

а тому

$$y' = u'v + uv',\, u'v + uv' + uv\tan x = \frac{1}{\cos x},\, u'v + u(v' + v\tan x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Ми повинні послідовно проінтеґрувати два рівняння

$$v' + v\tan x = 0, \quad (*)$$

$$u'v = \frac{1}{\cos x}. \qquad (**)$$

Що стосується рівняння (*), маємо

$$\frac{dv}{dx} + v\tan x = 0 \;\left|\frac{dx}{v},\right. \frac{dv}{v} = -\frac{\sin x dx}{\cos x},\, \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{\sin x dx}{\cos x} + \ln|C_1|,$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{-\sin x dx}{\cos x} + \ln|C_1|,\, \ln|v| = \ln|\cos x| + \ln|C_1|,\, \ln|v| = \ln|C_1\cos x|,\, |v| = |C_1\cos x|;$$

з огляду на довільність C_1 ми можемо відкинути знаки абсолютної величини і написати

$$v = C_1\cos x,$$

а потім взяти якусь одну з знайденої множини функцій, наприклад

$$v = v_0(x) = \cos x.$$

Переходячи до рівняння (**), отримуємо

$$u'v_0 = \frac{1}{\cos x},\, u'\cos x = \frac{1}{\cos x},\, \frac{du}{dx}\cdot\cos x = \frac{1}{\cos x}\;\left|\frac{dx}{\cos x},\right. du = \frac{dx}{\cos^2 x},\, u = \tan x + C.$$

Тепер знаходимо загальний розв"язок даного диференціального рівняння

$$y = uv_0 = (\tan x + C)\cos x = \sin x + C\cos x,\, y = \sin x + C\cos x.$$

Приклад 13. Проінтеґрувати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y}{3x - y^2}.$$

Перепишемо рівняння наступним чином:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x - y^2}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{3x - y^2}{y}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{3x}{y} - y, \quad \frac{dx}{dy} + (-\frac{3}{y})x = -y.$$

Ми бачимо, що отримане диференціальне рівняння є лінійним відносно шуканої функції $x = x(y)$. Це дозволяє нам діяти таким чином:

$$x = uv = u(y)v(y), \; x' = u'v + v'u, \; u'v + uv' - \frac{3}{y}uv = -y, \; u'v + u\left(v' - \frac{3}{y}v\right) = -y,$$

$$v' - \frac{3v}{y} = 0, \quad (*)$$

$$u'v = -y. \quad (**)$$

Розв"язуючи перше рівняння (*), маємо

$$\frac{dv}{dy} = 3\frac{v}{y} \left|\frac{dy}{v}\right., \frac{dv}{v} = 3\frac{dy}{y}, \; \ln|v| = 3\ln|y| + \ln|C|, \; \ln|v| = \ln\left|Cy^3\right|, \; |v| = \left|Cy^3\right|, \; v = Cy^3.$$

Взявши $v = v_0 = y^3$, інтеґруємо рівняння (**), тобто

$$u'v_0 = -y, u'y^3 = -y, \frac{du}{dy} = -\frac{1}{y^2}, du = -\frac{dy}{y^2}, u = -\int\frac{dy}{y^2} + C, u = \frac{1}{y} + C.$$

Загальним розв"язком заданого рівняння є

$$x = uv_0 = \left(\frac{1}{y} + C\right)y^3, \; x = y^2 + Cy^3.$$

Приклад 14 (потік фондів). Нехай $K(t)$ - кількість фондів в момент часу t. Знецінення фондів протягом інтервалу часу $[t, t + \Delta t]$ дорівнює $\mu K(t)\Delta t$, де μ - деякий коефіцієнт знецінення. Зростання кількості фондів за той же інтервал часу дорівнює $\rho I\Delta t$, де I – відома річна кількість інвестицій, а ρ - деякий коефіцієнт (0< ρ <1 внаслідок того, що не всі інвестиції вкладаються в фонди). Величина фондів в момент часу $t + \Delta t$ дорівнює

$$K(t + \Delta t) = K(t) - \mu K(t)\Delta t + \rho I\Delta t.$$

Швидкість руху фондів в момент часу t дорівнює

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{K(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t}=K'(t)=-\mu K(t)+\rho I .$$

Ми дістали задачу Коші для рівняння

$$K'(t)=-\mu K(t)+\rho I$$

з початковою умовою

$$K(0)=K_0 .$$

Коефіцієнти μ,ρ рівняння і величина *I* можуть бути як сталими, так і відомими функціями від *t*. В цьому випадку отримане диференціальне рівняння є лінійним. Більш того, величина *I* може бути рівною добутку функції від *t* і *n*-го степеня шукакої функції *K*(*t*). В такому разі ми зустрічаємось з рівнянням ще одного типу, а саме з так званим рівнянням Бернуллі[1].

5.2.5. Рівняння Бернуллі

Означення 13. Диференціальним рівнянням Бернуллі називається диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (21)$$

де *n* – довільне дійсне число, відмінне від 0 і 1. При $n=1$ рівняння перетворюється в рівняння з відокремлюваними змінними, а при $n=0$ - в лінійне.

Ми можемо інтеґрувати рівняння Бернуллі таким же чином, як і лінійне, покладаючи

$$y=u(x)v(x).$$

Іншим способом інтеґрування рівняння Бернуллі є його зведення до лінійного рівняння. Для цього поділимо обидві його частини на y^n,

$$\frac{y'}{y^n}+\frac{P(x)}{y^{n-1}}=Q(x),\ y'y^{-n}+P(x)y^{1-n}=Q(x),$$

а потім покладімо

$$\frac{1}{y^{n-1}}=y^{1-n}=z .$$

---

[1] На ім"я Якоба Бернуллі (1654 - 1705), відомого швейцарського математика.

Матимемо

$$z' = (1-n)y^{-n}y',\ y'y^{-n} = \frac{z'}{1-n},\ \frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x),$$

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Останнє рівняння є лінійним відносно нової шуканої функції z (x).

Приклад 15. Проінтеґрувати диференціальне рівняння

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}.$$

Маємо справу з рівнянням Бернуллі, в якому

$$P(x) = -\frac{4}{x},\ Q(x) = x$$

і $n = 1/2$.

Перший спосіб. Знаходячи розв"язок рівняння у вигляді добутку

$$y = uv = u(x)v(x),$$

маємо

$$y' = u'v + uv',\ u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv},\ u'v + u\left(v' - \frac{4}{x}v\right) = x\sqrt{uv},$$

$$v' - \frac{4}{x}v = 0, \qquad (*)$$

$$u'v = x\sqrt{uv}. \qquad (**)$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = 0 \quad \left|\frac{dx}{v},\right. \frac{dv}{v} - 4\frac{dx}{x} = 0,\ \ln|v| = 4\ln|x| + \ln|C_1|,\ \ln\left|\frac{v}{C_1}\right| = \ln x^4,\ v = C_1x^4,\ v = v_0 = x^4.$$

$$\frac{du}{dx}v_0 = x\sqrt{uv_0},\ \frac{du}{dx}x^4 = x\sqrt{ux^4} \quad \left|\frac{dx}{x^4\sqrt{u}},\right. \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x},\ 2\sqrt{u} = \ln|x| + \ln|C|,\ 2\sqrt{u} = \ln|Cx|,$$

$$\sqrt{u} = \frac{1}{2}\ln|Cx| = \ln\sqrt{|Cx|},\ u = \ln^2\sqrt{|Cx|},\ y = uv_0 = x^4\ln^2\sqrt{|Cx|}.$$

Другий спосіб. Зведімо рівняння до лінійного, поділивши обидві його частини на $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\cdot\frac{y}{\sqrt{y}} = x,\quad \frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x,\quad \sqrt{y} = z,\quad \frac{y'}{2\sqrt{y}} = z',\quad \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z',\quad 2z' - \frac{4}{x}z = x$$

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2}.$$

Далі використовуємо звичайну процедуру інтеґрування лінійного диференціального рівняння першого порядку.

$$z = u(x)v(x), \quad z' = u'v + uv', \quad u'v + uv' - \frac{2}{x} uv = x, \quad u'v + u\left(v' - \frac{2}{x} v \right) = x;$$

$$v' - \frac{2}{x} v = 0, \qquad (*)$$

$$u'v = x. \qquad (**)$$

$$(*) \Rightarrow \frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v = 0, \quad \frac{dv}{dv} - 2\frac{dx}{x} = 0, \quad \ln|v| - 2\ln|x| = \ln|C_1|, \quad \ln|v| = \ln x^2 + \ln|C_1|,$$

$$\ln|v| = \ln x^2 |C_1|, \quad |v| = x^2 |C_1|, \quad v = C_1 x^2, \quad v = v_0(c) = x^2;$$

$$(**) \Rightarrow u'x^2 = x, \quad u' = \frac{1}{x}, \quad u = \ln|x| + \ln|C|, \quad u = \ln|Cx|;$$

$$z = \sqrt{y} = uv_0 = x^2 \ln|Cx| \Rightarrow y = z^2 = x^4 \ln^2|Cx|.$$

5.3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКІ ПРИПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

5.3.1. Рівняння вигляду $y'' = f(x)$.

Нехай нам треба проінтеґрувати диференціальне рівняння другого порядку, розв"язане відносно старшої похідної, якщо його права частина є функцією тільки незалежної змінної,

$$y'' = f(x). \qquad (22)$$

Загальний розв"язок такого рівняння знаходиться шляхом двократного інтеґрування по незалежній змінній, а саме:

$$y = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2 x. \qquad (23)$$

$$\blacksquare\ y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx} = f(x), dy' = f(x)dx, y' = \int f(x)dx + C_1,$$

$$\frac{dy}{dx}=\int f(x)dx+C_1,\ dy=\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx,\ y=\int\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx+C_2=$$

$$=\int dx\int f(x)dx+\int C_1dx+C_2=\int dx\int f(x)dx+C_1x+C_2\,.\blacksquare$$

***Зауваження** 7.* Якщо для рівняння (22) треба розв"язати задачу Коші з початковими умовами

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',$$

то краще провести інтеґрування по змінному відрізку $[x_0, x]$, тобто:

$$y'=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+C_1,\ y=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f(x)dx+C_1(x-x_0)+C_2\,.$$

В такому разі ми зразу отримуємо

$$C_1=y'(x_0)=y_0',\ C_2=y(x_0)=y_0,$$

і розв"язок задачі Коші набуває вигляду

$$y=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f(x)dx+y_0'(x-x_0)+y_0\,.$$

Приклад 16. Розв"язати задачу Коші

Отформатировано: русский (Россия)

$$\begin{cases} y''=\cos x, \\ y(0)=1, y'(0)=-2. \end{cases}$$

Двічі інтеґруючи, ми отримуємо спочатку загальний розв"язок рівняння,

$$y'=\sin x+C_1,\ y=-\cos x+C_1x+C_2\,.$$

Беручи далі до уваги початкові умови, знаходимо відповідні значення сталих C_1, C_2,

$$y(0)=1=-\cos 0+C_1\cdot 0+C_2,\ C_2=2;\ y'(0)=-2=\sin 0+C_1,\ C_1=-2\,.$$

Шуканий розв"язок задачі Коші має вигляд

$$y=-\cos x-2x+2\,.$$

Враховуючи зауваження 7, ми б могли знайти розв"язок задачі Коші наступним чином:

$$y=\int_0^x dx\int_0^x \cos x dx+(-2)x+1=\int_0^x\left(\sin x\Big|_0^x\right)dx-2x+1=\int_0^x(\sin x-\sin 0)dx-2x+1=$$

$$= \int_0^x \sin x dx - 2x + 1 = -\cos x \Big|_0^x - 2x + 1 = -(\cos x - 1) - 2x + 1 = -\cos x - 2x + 2.$$

5.3.2. Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять явно шуканої функції.

Нехай диференціальне рівняння другого порядку **не містить явно шуканої функції**, тобто має вигляд

$$F(x, y', y'') = 0. \qquad (24)$$

В такому випадку воно легко зводиться до рівняння першого порядку відносно нової шуканої функції

$$y' = p(x). \qquad (25)$$

Оскільки

$$y'' = p'(x),$$

рівняння (24) переходить в наступне:

$$F(x, p(x), p'(x)) = 0. \qquad (26)$$

Уявімо, що нам вдалось знайти загальний розв"язок рівняння (26)

$$p(x) = \varphi(x, C_1).$$

В такому разі ми можемо завершити інтеґрування вихідного рівняння таким чином:

$$y' = \varphi(x, C_1), \frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1), dy = \varphi(x, C_1)dx, y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

Приклад 17. Знайти загальний розв"язок диференціального рівняння

$$x^2 y'' + xy' = 1.$$

В рівняння не входить явно шукана функція.

Перший крок. Покладаючи

$$y' = p(x),$$

ми отримуємо диференціальне рівняння першого порядку відносно нової шуканої функції $p(x)$,

$$y''=p',\, x^2p'+xp=1,\, p'+\frac{1}{x}p=\frac{1}{x^2}.$$

Отримане рівняння першого порядку є лінійним. Згідно відповідній теорії ми покладаємо $p(x)=uv$, і отже

$$p'=u'v+uv',\, u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{1}{x^2},\, u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{1}{x^2},$$

$$a)\, v'+\frac{v}{x}=0,\, \frac{dv}{dx}+\frac{v}{x}=0,\, \frac{dv}{v}+\frac{dx}{x}=0,\, \ln|v|+\ln|x|=\ln|C_0|,\, vx=C_0,\, v=v_0(x)=\frac{1}{x};$$

$$b)\, u'v=\frac{1}{x^2},\, u'v_0=\frac{1}{x^2},\, \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2},\, du=\frac{dx}{x},\, u=\ln|x|+C_1,\, p(x)=uv_0=\frac{\ln|x|+C_1}{x}.$$

Другий крок. Повертаючись до y', ми знаходимо загальний розв"язок даного рівняння,

$$y'=\frac{\ln|x|+C_1}{x},\, \frac{dy}{dx}=\frac{\ln|x|+C_1}{x},\, dy=\frac{\ln|x|}{x}dx+C_1\frac{dx}{x},\, y=\frac{\ln^2|x|}{2}+C_1\ln|x|+C_2.$$

5.3.3. Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять явно незалежної змінної.

Диференціальне рівняння другого порядку, яке **не містить явно незалежної змінної**, тобто

$$F(y,y',y'')=0, \qquad (27)$$

зводиться до рівняння першого порядку введенням нової шуканої функції

$$y'=p(y). \qquad (28)$$

Диференціюючи складену функцію,

$$y''=p(y)p'(y), \qquad (29)$$

дістаємо рівняння першого порядку відносно $p(y)$,

$$F(y,p(y),p(y)p'(y))=0 \qquad (30)$$

з незалежною змінною y.

Якщо ми зможемо знайти загальний розв"язок рівняння (30),

$$p(y) = \phi(y, C_1),$$

то інтеґрування вихідного рівняння завершується наступним чином

$$y' = \phi(y, C_1), \frac{dy}{dx} = \phi(y, C_1) \;\Bigg|\; \frac{dx}{\phi(y, C_1)}, \frac{dy}{\phi(y, C_1)} = dx, \int \frac{dy}{\phi(y, C_1)} = x + C_2 .$$

Приклад 18. Розв"язати задачу Коші для рівняння

$$y'' = 2\sin^3 y \cos y$$

з початковими умовами

$$y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 1 .$$

Рівняння не містить явно незалежної змінної, і тому ми покладаємо

$$y' = p(y) .$$

Перший крок.

$$y' = p(y), y'' = pp', pp' = 2\sin^3 y \cos y, p\frac{dp}{dy} = 2\sin^3 y \cos y, pdp = 2\sin^3 y \cos y dy,$$

$$\int pdp = 2\int \sin^3 y \cos y dy + \frac{C_1}{2}, \frac{p^2}{2} = \frac{\sin^4 y}{2} + \frac{C_1}{2}, p^2 = \sin^4 y + C_1, p = \sqrt{\sin^4 y + C_1} ;$$

на підставі початкових умов

$$p\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'(1) = 1 = \sqrt{\sin^4 \frac{\pi}{2} + C_1}, 1 = \sqrt{1 + C_1}, C_1 = 0 \text{ і } p = \sqrt{\sin^4 y} = \sin^2 y .$$

Другий крок.

$$y' = \sin^2 y, \frac{dy}{dx} = \sin^2 y, \frac{dy}{\sin^2 y} = dx, -\cot y = x + C_2 .$$

Враховуючи першу початкову умову, маємо

$$-\cot\frac{\pi}{2} = 1 + C_2, 0 = 1 + C_2, C_2 = -1 ,$$

і розв"зок даної задачі Коші дається формулою

$$\cot y = 1 - x .$$

Приклад 19. Розв"язати задачу Коші

Отформатировано: русский (Россия)

$$yy'' - (y')^2 = y^4, y(0) = 1, y'(0) = 0 .$$

Перший крок.

$$y' = p(y),\ y'' = pp',\ ypp' - p^2 = y^4 .$$

З початкових умов випливає, що $y \neq 0,\ p \neq 0$ (перевірте!), і пісня ділення на py маємо

$$p' - \frac{1}{y} \cdot p = y^3 \cdot \frac{1}{p}.$$

Отримали рівняння Бернуллі, розв"зок якого шукатимемо у вигляді

$$p = u(y)v(y),$$

звідки

$$p' = u'v + uv',\ \ u'v + uv' - \frac{uv}{y} = \frac{y^3}{uv},\ u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = \frac{y^3}{uv}.$$

$$v' - \frac{v}{y} = 0,\ \frac{dv}{dy} = \frac{v}{y},\ \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y},\ \ln|v| = \ln|x| + \ln|C_0|,\ \ln|v| = \ln|C_0 x|,\ v = C_0 x,\ v = v_0(y) = y;$$

$$u'v_0 = \frac{y^3}{uv_0},\ u'y = \frac{y^3}{uy},\ udu = ydy,\ \frac{u^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{2},\ u = \pm\sqrt{y^2 + C_1},\ p = \pm y\sqrt{y^2 + C_1};$$

після врахування початкових умов маємо

$$p(y(0)) = y'(0) = 0 = \pm y(0)\sqrt{y^2(0) + C_1} = \pm\sqrt{1 + C_1},\ \sqrt{1 + C_1} = 0,\ C_1 = -1,$$

$$p = \pm y\sqrt{y^2 - 1}.$$

Другий крок.

$$y' = \pm y\sqrt{y^2 - 1},\ \frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{y^2 - 1},\ \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx,\ \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}} = \pm x + C_2;$$

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}} = \left| \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{\cos z}, \\ dy = \dfrac{\sin z dz}{\cos^2 z} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{\sin z dz}{\cos^2 z}}{\dfrac{1}{\cos z}\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 z} - 1}} = \pm \int \frac{\dfrac{\sin z dz}{\cos^2 z}}{\dfrac{\sin z}{\cos^2 z}} = \pm \int dz = \pm z =$$

$$= \pm \arccos\frac{1}{y}; \quad \pm \arccos\frac{1}{y} = \pm x + C_2.$$

$$\pm \arccos\frac{1}{y(0)} = \pm 0 + C_2,\ \pm \arccos 1 = C_2,\ C_2 = 0.$$

Шуканий розв"язок задачі Коші

$$\pm \arccos \frac{1}{y} = \pm x,$$

або просто

$$y = \frac{1}{\cos x},$$

оскільки

$$\cos\left(\pm \arccos \frac{1}{y} \right) = \cos(\pm x), \quad \frac{1}{y} = \cos x, \quad y = \frac{1}{\cos x}.$$

6. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

6.1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Означення 1. Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається наступне диференціальне рівняння:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x). \qquad (1)$$

Коефіцієнти $a(x), b(x)$ та вільний член $f(x)$ рівняння – відомі функції, а шуканою функцією є $y = y(x)$.

Початкові умови для рівняння (1) мають звичайну форму

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0 \qquad (2)$$

Рівняння (1) називається **неоднорідним**, якщо його вільний член $f(x)$ не дорівнює нулю тотожно.

Якщо ж $f(x) \equiv 0$, рівняння

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (3)$$

називається **однорідним**, яке відповідає неоднорідному рівнянню (1). Іноді його називають однорідним рівнянням, **приєднаним** до (неоднорідного) рівняння (1).

Теорема 1 (однозначна розв"язність задачі Коші)**.** Якщо коефіцієнти і вільний член рівняння (1) неперервні на деякому відрізку $[a, b]$, то задача Коші (1), (2) (зокрема (3), (2)) має єдиний розв"язок, і цей розв"язок визначено на всьому відрізку (а не в деякій його частині).

Приклад 1. Задача Коші для однорідного рівняння (3) з нульовими початковими умовами

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0 \qquad (4)$$

має єдиний, а саме тривіальний розв"язок $y = 0$.

Означення 2. Ліва частина диференціальних рівнянь (1), (3) називається **лінійним диференціальним оператором** і позначається $L[y]$,

$$L[y] = y'' + a(x)y' + b(x)y\,. \qquad (5)$$

Лінійний диференціальний оператор посідає наступні **властивості:**

1. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ (**адитивність**).

$$■\, L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)'' + a(x)(y_1 + y_2)' + b(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1 + y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2 = L[y_1] + L[y_2].■$$

2. $L[ky] = kL[y]$ для будь-якої константи k (**однорідність**).

$$■\, L[ky] = (ky)'' + a(x)(ky)' + b(x)(ky) = k(y'' + a(x)y' + b(x)y) = kL[y]■$$

Як наслідок для будь-яких констант k_1, k_2 маємо

$$L[k_1y_1 + k_2y_2] = k_1L[y_1] + k_2L[y_2]$$

(**лінійність**).

За допомоги лінійного диференціального оператора $L[y]$ рівняння (1), (3) можна подати наступним чином:

$$L[y] = f(x),$$
$$L[y] = 0\,.$$

Властивості розв"язків лінійного однорідного диференціального рівняння (3).

1. Сума скінченної кількості розв"язків рівняння (3) також є розв"язком.

■Нехай, наприклад $y_1(x), y_2(x)$ - два розв"язки рівняння (3), тобто

$$L[y_1(x)] \equiv 0,\, L[y_2(x)] \equiv 0\,.$$

За властивістю 1 лінійного диференціального оператора

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)] \equiv 0\,.■$$

2. Добуток будь-якого розв"язку рівняння (3) на константу також є розв"язком.

■Нехай $y(x)$ – розв"язок рівняння (3), тобто

$$L[y(x)] \equiv 0,$$

а k - стала. За властивістю 2 лінійного диференціального оператора

$$L[ky(x)] = kL[y(x)] \equiv 0\,.■$$

Наслідок. Сума добутків скінченної кількості розв"язків рівняння (3) на довільні сталі також є розв"язком.

Якщо, наприклад, $y_1(x), y_2(x)$ - два розв"язки рівняння (3), а C_1, C_2 довільні сталі, то функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

також є розв"язом, що випливає з властивостей 1 і 2 розв"язків рівняння (3).

3. Якщо функція $y = y_1(x) + i y_2(x)$ є комплексним розв"язком рівняння (3) з дійсними коефіцієнтами $a(x), b(x)$, то його дійсна та уявна частини $y_1(x)$, $y_2(x)$ також є розв"язками цього рівняння.

6.2. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ І НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ФУНКЦІЙ І РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

значення3. Дві функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ називаються **лінійно залежними** на відрізку $[a, b]$, якщо існують числа λ_1, λ_2, не рівні нулю одночасно ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 >$ > 0), такі, що для будь-якого $x \in [a, b]$ справджується тотожність

Удалено: О

Удалено:

Отформатировано: русский (Россия)

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) \equiv 0. \qquad (6)$$

Якщо ж тотожність є справедливою тільки при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ці функції називаються **лінійно незалежними**.

Теорема 2. Дві функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ лінійно залежні на відрізку $[a, b]$ тоді і тільки тоді, якщо їх відношення тотожно дорівнює сталій на цьому відрізку, тобто якщо для будь-якого $x \in [a, b]$

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \equiv C = const. \qquad (7)$$

■1. Нехай функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ лінійно залежні на відрізку $[a, b]$, так що тотожність (6) є вірною для $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$. Якщо, наприклад, $\lambda_1 \neq 0$, то з (6) маємо

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\varphi_2 \Rightarrow \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = const,$$

відношення функцій тотожно дорівнює сталій.

3. Нехай тепер

$$\varphi_1(x)/\varphi_2(x) \equiv C = const$$

на $[a, b]$. Тоді

$$\varphi_1(x) \equiv C\varphi_2(x), 1 \cdot \varphi_1(x) + (-C) \cdot \varphi_2(x) \equiv 0 \ (\lambda_1 = 1 \neq 0, \lambda_2 = -C, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0),$$

і функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ лінійно залежні за означенням лінійної залежності.■

Приклад 2. Функції $\cos ax, \sin ax$ для $a \neq 0$ лінійно незалежні на всій числовій осі $(-\infty, \infty)$, оскільки їх відношення не є тотожно сталим.

Означення 4. *n* функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ називаються лінійно залежними на відрізку $[a, b]$, якщо існують *n* чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не рівних нулю одночасно ($\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 > 0$) і таких, що для довільного $x \in [a, b]$ справедлива тотожність

$$\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + ... + \lambda_n\varphi_n(x) \equiv 0. \qquad (8)$$

Якщо ж тотожність є справедливою тільки у випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, то функції називаються **лінійно незалежними** на $[a, b]$.

Приклад 3. Функції $1, x, x^2, x^3, ..., x^n$ лінійно незалежні на $\Re = (-\infty, \infty)$, бо многочлен відносно x

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 + ... + \lambda_{n+1} \cdot x^n$$

тотожно дорівнює нулю тільки тоді, якщо всі його коефіцєнти дорівнюють нулю, тобто якщо если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_{n+1} = 0$.

В теорії і практиці лінійних диференціальних рівнянь важливе значення має наступний визначник.

Означення 5. Визначником Вронського[1], або вронскіаном *n* функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ називається наступний визначник *n*-го порядку:

---

[1] Вронський (Гене-Вронський), Юзеф Марія (1778 - 1853) – польський математик і філософ

$$W(x)=W[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)]=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \ldots & \varphi_n(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \ldots & \varphi_n'(x)\\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \varphi_3''(x) & \ldots & \varphi_n''(x)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \varphi_3^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix} \qquad (9)$$

Приклад 4. Вронскіан функцій $\cos ax, \sin ax$ (див. приклад 2) дорівнює

$$W(x)=\begin{vmatrix}\cos ax & \sin ax\\ (\cos ax)' & (\sin ax)'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos ax & \sin ax\\ -a\sin ax & a\cos ax\end{vmatrix}=a\cos^2 ax+a\sin^2 ax=a\,.$$

Вронскіан є зручним інструментом для встановлення лінійної залежності будь-якої системи функцій і, що є для нас особливо важливим, - лінійної незалежності розв"язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

Теорема 3. Якщо функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ лінійно залежні на відрізку $[a,b]$, то їх вронскіан тотожно дорівнює нулю на $[a,b]$, $W(x)\equiv 0$.

■Нехай, задля простоти, дві функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ лінейно залежні на відрізку $[a,b]$. За означенням лінійної залежності існують такі два числа λ_1, λ_2, що $\lambda_1^2+\lambda_2^2>0$ і тотожно

$$\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)\equiv 0$$

на $[a,b]$. Продиференціюємо цю тотожність і утворимо таку систему лінійних алгебричних рівнянь відносно λ_1, λ_2:

$$\begin{cases}\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)\equiv 0,\\ \lambda_1\varphi_1'(x)+\lambda_2\varphi_2'(x)\equiv 0.\end{cases}$$

Для будь-якого $x\in[a,b]$ система має нетривіальний (ненульовий) розв"язок, а тому її головний визначник тотожно дорівнює нулю на відрізку $[a,b]$,

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{vmatrix}=W[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]\equiv 0\,.■$$

Для випадку тільки двох (але не більше) функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ теорему можна довести ще простіше. Дійсно, відношення цих лінійно залежних функцій тотожно дорівнює сталій на $[a,b]$. Нехай, наприклад,

$$\varphi_2(x)/\varphi_1(x) \equiv C = const.$$

Тоді $\varphi_2(x) \equiv C\varphi_1(x)$, і вронскіан функцій дорівнює

$$W[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & C\varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) & C\varphi_1'(x) \end{vmatrix} \equiv C\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_1'(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Теорема 4. Якщо функції

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$$

є лінійно незалежними розв"язками лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку з коефіцієнтами, неперервними на деякому відрізку, то вронскіан цих розв"язків не перетворюється в нуль в жодній точці відрізка.

■Доведення теореми проведемо від супротивного. Для простоти розглянемо випадок двох лінійно незалежних розв"язків $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ лінійного однорідного рівняння (3) другого порядку з неперервними на відрізку $[a, b]$ коефіцієнтами $a(x), b(x)$. Припустимо, що вронскіан цих розв"язків дорівнює нулю в деякій точці x_0 відрізка, тобто $W(x_0) = 0$, $x_0 \in [a, b]$. Виберемо два не рівних одночасно нулю числа λ_1, λ_2 так, щоб пара (λ_1, λ_2) була розв"язком наступної системи лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_1\varphi_1(x_0) + \lambda_2\varphi_2(x_0) \equiv 0, \\ \lambda_1\varphi_1'(x_0) + \lambda_2\varphi_2'(x_0) \equiv 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Такий вибір можливий, оскільки головним визначником системи (10) є рівне нулю число $W(x_0)$. Утворимо тепер функцію

$$y = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x).$$

Вона є розв"язком рівняння (3), що задовольняє нульові початкові умови, а саме умови (10). Отже, на підставі прикладу 1 такий розв"язок тотожно дорівнює нулю, тобто

$$\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) \equiv 0,$$

причому числа λ_1, λ_2 не дорівнюють нулю одночасно. Але це значить, що, всупереч умові, функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ є лінійно залежними.

Ми дістали протиріччя, яке доводить теорему.■

Приклад 5. Функції $\varphi_1(x)=\cos ax, \varphi_2(x)=\sin ax\ (a\neq 0)$ (див. приклад 2) є для всіх $x\in(-\infty,\infty)$ розв"язками лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y''+a^2y=0,$$

оскільки для будь-якого x

$$\varphi_1'(x)=-a\sin ax, \varphi_1''(x)=-a^2\cos ax, \varphi_1''(x)+a^2\varphi_1(x)=-a^2\cos ax+a^2\cos ax\equiv 0$$

і аналогічно

$$\varphi_2'(x)=a\cos ax, \varphi_2''(x)=-a^2\sin ax, \varphi_2''(x)+a^2\varphi_2(x)=-a^2\sin ax+a^2\sin ax\equiv 0.$$

Ці розв"язки лінійно незалежні, а їх вронскіан $W(x)=a$ (див. приклад 4) не дорівнює нулю в жодній точці.

6.3. СТРУКТУРА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Теорема 5. Якщо $y=y_1(x), y=y_2(x)$ - два лінійно незалежних розв"язки лінійного однорідного диференціального рівяння (3) другого порядку, то загальний розв"язок рівняння має вигляд

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \qquad (11)$$

де C_1, C_2 - довільні сталі.

■Функція

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

є розв"язком рівняння (3) для будь-яких значень C_1, C_2 на підставі наслідку з властивостей 1, 2 розв"язків лінійного однорідного диференціального рівняння (див. п. 6.1). Тому згідно з означенням 8 з п. 5.1 треба довести, що для довільних початкових умов (2) можна знайти значення сталих C_1, C_2 так, щоб задовольнити ці умови. Але

$$y(x_0)=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0), y'(x_0)=C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0),$$

і, отже, йдеться про сумісність системи лінійних алгебричних рівнянь відносно C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Система ж є сумісною і має єдиний розв"язок, бо її головний визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W[y_1(x_0), y_2(x_0)] \neq 0$$

відмінний від нуля внаслідок лінійної незалежності розв"язків $y_1(x), y_2(x)$ і теореми 4.■

Приклад 6. Функція

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$$

з двома довільними сталими C_1, C_2 є загальним розв"язком рівняння

$$y'' + a^2 y = 0, \quad a \neq 0,$$

про яке йшлося в прикладі 5.

Аналогічна теорема є справедливою для лінійного однорідного диференціального рівняння довільного порядку $n \geq 2$.

6.4. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З СТАЛИМИ ДІЙСНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

6.4.1. Характеристичне рівняння

Нехай дано лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (12)$$

з сталими дійсними коефіцієнтами p, q.

Шукатимемо розв"язки рівняння (12) у вигляді

$$y = e^{kx}, \qquad (13)$$

де k – невідоме число (дійсне або, може, комплексне). Знаходячи похідні функції (13)

$$y' = ke^{kx}, \; y'' = k^2 e^{kx}$$

та підставляючи значення функцій y, y', y'' в рівняння, отримуємо

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx},\ e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0,$$

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (14)$$

Задача інтеґрування рівняння (12) зводиться до розв"язання квадратного рівняння (14), яке називається **характеристичним рівнянням**. Залежно від знака дискримінанта

$$D = b^2 - 4ac$$

характеристичного рівняння ми повинні розглянути три випадки.

6.4.2. Корені характеристичного рівняння – дійсні і різні

Нехай дискримінант рівняння (14) додатний, і, отже, характеристичне рівняння має два **дійсних різних** корені k_1, k_2,

$$k_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{D}\right)/(2a).$$

Ми дістаємо два частинні $y_1 = e^{k_1x},\ y_2 = e^{k_2x}$, розв"язки даного диференціального рівняння

причому лінійно незалежні, оскільки на підставі $k_1 \neq k_2$ їх відношення не є тотожно сталим,

$$y_1/y_2 = e^{k_1x}/e^{k_2x} = e^{(k_1-k_2)x} \neq const.$$

Отже, з огляду на теорему 5 загальний розв"язок рівняння (12) дається функцією

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}. \qquad (15)$$

Приклад 7. $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Характеристичне рівняння диференціального рівняння

$$k^2 + 5k + 6 = 0$$

має два дійсних різних корені $k_1 = -2,\ k_2 = -3$, так що диференціальне рівняння має два лінійно незалежні частинні розв"язки

$$y_1 = e^{-2x},\ y_2 = e^{-3x}$$

і загальний розв"язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

6.4.3. Корені характеристичного рівняння – дійсні рівні

Нехай дискримінант характеристичного рівняння дорівнює нулю. В такому випадку характеристичне рівняння має тільки один корінь $k_0 = -b/(2a)$. Математично точніше сказати, що воно має **кратний** (ще точніше – **двократний**) корінь, або що воно має два **дійсних рівних** корені $k_1 = k_2 = k_0$.

У випадку дійсних рівних коренів характеристичного рівняння ми маємо тільки один частинний розв"язок диференціального рівняння, а саме

$$y = y_1 = e^{k_0 x}.$$

Отже, нам треба знайти ще один частинний розв"язок y_2, лінійно незалежний з першим. Але за теоремою Вієта[1]

$$k_1 + k_2 = 2k_0 = -p,\ k_1 k_2 = k_0^2 = q,\ p = -2k_0,\ q = k_0^2,$$

так що рівняння (12) має в нашому випадку вигляд

$$y'' - 2k_0 y' + k_0^2 y = 0 \qquad (16)$$

і має очевидний розв"язок

$$y_2 = x y_1 = x e^{k_0 x}.$$

Дісно,

$$y_2' = e^{k_0 x} + x k_0 e^{k_0 x} = (1 + x k_0) e^{k_0 x},\ y_2'' = k_0 e^{k_0 x} + (1 + x k_0) k_0 e^{k_0 x} = \left(2k_0 + x k_0^2\right) e^{k_0 x},$$

і після підстановки значень функцій $y_2,\ y_2',\ y_2''$ в рівняння (16) отримуємо

$$y_2'' - 2k_0 y_2' + k_0^2 y_2 = \left(2k_0 + x k_0^2\right) e^{k_0 x} - 2k_0 (1 + x k_0) e^{k_0 x} + k_0^2 x e^{k_0 x} \equiv 0.$$

Розв"язки $y_1,\ y_2$ лінійно незалежні, бо

$$y_1 / y_2 = e^{k_0 x} / x e^{k_0 x} = 1/x \neq const.$$

Отже, загальний розв"язок рівняння (12) (рівняння (16) в даному випадку) є

---

[1] Вієт, Франсуа (1540 - 1603) – французький математик

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_0 x} + C_2 x e^{k_0 x} = e^{k_0 x}\left(C_1 + x C_2\right). \qquad (17)$$

Приклад 8. $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Характеристичне рівняння

$$k^2 - 10k + 25 = 0$$

має дійсні рівні корені $k_1 = k_2 = 5\ (k_0 = 5)$. Тому диференціальне рівняння має два лінійно незалежні частинні розв"язки

$$y_1 = e^{5x},\ y_2 = xe^{5x}$$

і загальний розв"язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} = e^{5x}\left(C_1 + x C_2\right).$$

6.4.4. Корені характеристичного рівняння – комплексні

Нехай, нарешті, дискримінант характеристичного рівняння (14) від"ємний, так що характеристичне рівняння має два **комплексні корені**

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad \left(\alpha = -b/(2a),\ \beta = \sqrt{-D}/(2a)\right).$$

Ми могли б зразу написати два комплексні частинні розв"язки рівняння (12),

$$y_{1,2} = e^{(\alpha \pm i\beta)x},$$

але краще знайти дійсні розв"язки, і ми спроможні зробити це. Дійсно, послуговуючись формулою Ейлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

отримуємо

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i \sin\beta x\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i \cdot e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Тепер на підставі властивості 3 розв"язків лінійного однорідного диференціального рівняння з дійсними коефіцієнтами (див. п. 6.1) дві дійсні функції

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

є частинними розв"язками рівняння (12), причому лінійно незалежними, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \cot\beta x \neq const.$$

Таким чином, загальний розв"язок рівняння (12) в даному випадку є

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + +C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + +C_2\sin\beta x\right).$$

Приклад 9. $y'' - 4y' + 18y = 0$.

Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 18 = 0$$

має комплексні корені

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{56}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{14}}{2} = 1 \pm i\sqrt{14},\ \alpha = 1,\ \beta = \sqrt{14}.$$

Тому диференціальне рівняння має два дійсні лінійно незалежні розв"язки

$$y_1 = e^{1\cdot x}\cos\sqrt{14}x = e^x\cos\sqrt{14}x,\ y_2 = e^{1\cdot x}\sin\sqrt{14}x = e^x\sin\sqrt{14}x,$$

які дають можливість отримати загальний розв"язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x\cos\sqrt{14}x + +C_2 e^x\sin\sqrt{14}x = e^x\left(C_1\cos\sqrt{14}x + C_2\sin\sqrt{14}x\right).$$

Приклад 10. Для вже відомого рівняння

$$y'' + a^2 y = 0$$

(приклади 5, 6) характеристичне рівняння

$$k^2 + a^2 = 0$$

має комплексні корені

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-a^2} = \pm ai,\ \alpha = 0,\ \beta = a.$$

Отже, лінійно незалежні дійсні розв"язки диференціального рівняння є

$$y_1 = e^{0\cdot x}\cos ax = \cos ax,\ y_2 = e^{0\cdot x}\sin ax = \sin ax,$$

а загальний розв"язок дається формулою

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1\cos ax + C_2\sin ax.$$

Цей результат збігається з отриманим в прикладі 6.

Зауваження. Позначмо

$$P(k) = k^2 + pk + q$$

ліву частину характеристичного рівняння (14). Тоді наявність у нього двох різних коренів k_1, k_2 (дійсних або комплексних) можна висловити символічно таким чином:

$$P(k_i) = 0, \quad P'(k_i) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Якщо ж характеристичне рівняння має два дійсних рівних корені $k_1 = k_2 = k_0$, то цей факт можна символічно подати так:

$$P(k_0) = P'(k_0) = 0, \quad P''(k_0) \neq 0.$$

6.5. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ

6.5.1. Структура загального розв"язку

Теорема 6 (структура загального розв"язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння**).** Загальний розв"язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі загального розв"язку $y_{ЗО}$ відповідного однорідного рівняння та якого-небудь частинного розв"язку $y_{ЧН}$ даного рівняння,

$$y = y_{ЗН} = y_{ЗО} + y_{ЧН}\,. \tag{18}$$

■ Нехай, наприклад,

$$y_{ЗО} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

- загальний розв"язок лінійного однорідного рівняння (3), яке відповідає неоднорідному рівнянню (1) другого порядку. Тут y_1, y_2 - два лінійно незалежних розв"язки однорідного рівняння (3) на якомусь відрізку $[a, b]$. Функція

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_{ЧН}$$

є на $[a, b]$ розв"язком рівняння (1) для будь-яких значень сталих C_1, C_2, оскільки

$$L[y] = L[C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_{ЧН}] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] + L[y_{ЧН}] \equiv 0 + 0 + f(x) = f(x).$$

Нам треба тільки показати, що для довільних початкових умов (2) можна знайти значення сталих C_1, C_2 так, щоб задовольнити ці умови.

Оскільки

$$y(x_0)=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+y_{ЧН}(x_0),\ y'(x_0)=C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+y_{ЧН}'(x_0),$$

ми дістаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно C_1, C_2, а саме:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+y_{ЧН}(x_0)=y_0, \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+y_{ЧН}'(x_0)=y_0'. \end{cases}$$

Система має єдиний розв"язок, бо її головний визначник є значенням вронскіана $W[y_1(x_0), y_2(x_0)]$ розв"язків y_1, y_2 рівняння (3), а тому відмінний від нуля внаслідок лінійної незалежності останніх і теореми 4.■

Приклад 11. Функція

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + 1/a^2$$

є загальним розв"язком диференціального рівняння

$$y'' + a^2y = 1.$$

Дійсно, функція

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

є загальним розв"язком відповідного однорідного рівняння

$$y'' + a^2y = 0$$

(див. приклади 5, 6), а функція

$$y = 1/a^2$$

- частинним розв"язком даного рівняння.

6.5.2. Метод варіації довільних сталих Лаґранжа[1]

Нехай ми шукаємо загальний розв"язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку (1). Ми можемо разом з Лаґранжем здійснити це в наступні два етапи.

1. Спочатку ми шукаємо загальний розв"язок

$$y_{ЗО} = C_1y_1 + C_2y_2$$

---

[1] Лаґранж, Жозеф Луї (1736 - 1813), - видатний французький математик, механік і астроном.

відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння (3), де y_1, y_2 - два його лінійно незалежні частинні розв"язки (на деякому відрізку).

2. Шукатимемо тепер загальний розв"язок $y_{ЗН}$ вихідного рівняння (1) в тому ж самому вигляді, що й загальний розв"язок $y_{ЗО}$ рівняння (3), але трактуючи C_1, C_2 не як довільні сталі, а як невідомі функції, саме:

$$y = y_{ЗН} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2. \qquad (19)$$

Знайдімо спочатку першу похідну шуканої функції,

$$y' = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2',$$

а потім припустімо, що

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0.$$

Тоді

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2',\ y'' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2''.$$

Підставляючи значення функцій $y,\ y',\ y''$ в рівняння (1), матимемо

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + a(x)(C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') +$$
$$b(x)(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) = f(x),$$
$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)(y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1) + C_2(x)(y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2) = f(x),$$
$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)\cdot 0 + C_2(x)\cdot 0 = f(x), C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Дістаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно похідних C_1', C_2' функцій C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (20)$$

Розв"язуючи систему (20), отримуємо

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), C_2'(x) = \varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ деякі відомі функції. Інтеґруючи, остаточно маємо

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \widetilde{C}_1, C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \widetilde{C}_2 \qquad (21)$$

де $\widetilde{C}_1,\ \widetilde{C}_2$ - довільні сталі. Загальний розв"язок рівняння (1) дається формулою

$$y = y_{ЗН} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \left(\int \varphi_1(x)dx + \widetilde{C}_1\right)y_1 + \left(\int \varphi_2(x)dx + \widetilde{C}_2\right)y_2. \qquad (22)$$

Якщо подати загальний розв"язок (22) у вигляді

$$y = y_{ЗН} = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 + y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx,$$

побачимо, що функція

$$y_{ЗО} = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2$$

є загальним розв"язком відповідного однорідного рівняння (3), а функція

$$y_{ЧН} = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx$$

- частинним розв"язком вихідного неоднорідного рівняння (1). Отже, формула (22) має саме ту структуру, яка визначена Теоремою 6 (і формулою (18)).

Приклад 12. Знайти загальний розв"язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

1. Записуємо спочатку відповідно однорідне рівняння

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Його характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

має рівні дійсні корені $k_1 = k_2 = 1$ $(k_0 = 1)$, а тому однорідне рівняння має (на множині всіх дійсних чисел) два лінійно незалежні частинні розв"язки

$$y_1 = e^x, \ y_2 = xe^x$$

і загальний розв"язок

$$y_{ЗО} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

2. Тепер шукаємо загальний розв"язок даного рівняння у вигляді

$$y = y_{ЗН} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x.$$

За формулою (20) дістаємо систему лінійних алгебричних рівняння відносно относительно C_1', C_2' і розв"язуємо її. Маємо

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = \dfrac{e^x}{x^2+1}; \end{cases} \begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0, \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x)(1+x) e^x = \dfrac{e^x}{x^2+1}; \end{cases}$$

$$C_1'(x)+C_2'(x)x=0,$$
$$C_1'(x)+C_2'(x)(1+x)=\frac{1}{x^2+1}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & x\\ 1 & 1+x\end{vmatrix}=1,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & x\\ \frac{1}{x^2+1} & 1+x\end{vmatrix}=-\frac{x}{x^2+1},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{x^2+1}\end{vmatrix}=\frac{1}{x^2+1},$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{x}{x^2+1}, C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{x^2+1}.$$

Інтеґрування дає

$$C_1(x)=-\int\frac{xdx}{x^2+1}+\widetilde{C}_1=-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\widetilde{C}_1=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\widetilde{C}_1,$$

$$C_2(x)=\int\frac{dx}{x^2+1}+\widetilde{C}_2=\arctan x+\widetilde{C}_2,$$

звідки знаходимо загальний розв"язок даного диференціального рівняння

$$y=y_{ЗН}=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x=\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\widetilde{C}_1\right)e^x+(\arctan x+\widetilde{C}_2)xe^x.$$

Приклад 13. Розв"язати задачу Коші

$$y''-3y'+2y=\frac{e^x}{1+e^{-x}},\quad y(0)=y'(0)=0.$$

1. Для відповідного однорідного рівняння

$$y''-3y'+2y=0$$

знаходимо лінійно незалежні частинні розв"язки

$$y_1=e^x, y_2=e^{2x}$$

і загальний розв"язок

$$y=y_{ЗО}=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

2. Тепер шукаємо загальний розв"язок даного рівняння у вигляді

$$y=y_{ЗН}=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{2x}.$$

За формулою (20) отримуємо, а далі розв"язуємо систему лінійних алгебричних рівняння відносно C_1', C_2'.

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{x}+C_2'(x)e^{2x}=0, \\ C_1'(x)e^{x}+2C_2'(x)e^{2x}=\dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}, \end{cases} \begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)e^{x}=0, \\ C_1'(x)+2C_2'(x)e^{x}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & e^{x}\\ 1 & e^{2x}\end{vmatrix}=e^{x},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & e^{x}\\ \dfrac{1}{1+e^{-x}} & 2e^{2x}\end{vmatrix}=-\frac{e^{x}}{1+e^{-x}},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & \dfrac{1}{1+e^{-x}}\end{vmatrix}=\frac{1}{1+e^{-x}},$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{1}{1+e^{-x}},\ C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)e^{x}}.$$

Інтеґруючи, знаходимо функції $C_1(x), C_2(x)$,

$$C_1(x)=-\int\frac{1}{1+e^{-x}}dx+\widetilde{C}_1=-\int\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx+\widetilde{C}_1=$$

$$=-\int\frac{\left(e^{x}+1\right)'}{e^{x}+1}dx+\widetilde{C}_1=-\ln\left(e^{x}+1\right)+\widetilde{C}_1,$$

$$C_2(x)=\int\frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)e^{x}}dx+\widetilde{C}_2=\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx+\widetilde{C}_2=$$

$$=-\int\frac{\left(1+e^{-x}\right)'}{1+e^{-x}}dx+\widetilde{C}_2=-\ln\left(1+e^{-x}\right)+\widetilde{C}_2.$$

Загальний розв"язок даного рівняння є

$$y=y_{ЗН}=\left(-\ln\left(e^{x}+1\right)+\widetilde{C}_1\right)e^{x}+\left(-\ln\left(1+e^{-x}\right)+\widetilde{C}_2\right)e^{2x}.$$

3. Нарешті знаходимо значення сталих $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ з початкових умов. Для зручності знайдімо спочатку похідну шуканої функції

$$y'=y_{ЗН}'=-\frac{e^{x}\cdot e^{x}}{e^{x}+1}+\left(-\ln\left(e^{x}+1\right)+\widetilde{C}_1\right)e^{x}-\frac{-e^{-x}\cdot e^{2x}}{1+e^{-x}}+\left(-\ln\left(1+e^{-x}\right)+\widetilde{C}_2\right)2e^{2x},$$

а потім - значення функцій y, y' в точці $x=0$,

$$y(0)=\widetilde{C}_1-\ln 2+\widetilde{C}_2-\ln 2=\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2-2\ln 2,\ y'(0)=\widetilde{C}_1+2\widetilde{C}_2-3\ln 2.$$

На підставі початкових умов повинні мати

$$y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

Звідси отримуємо систему рівнянь відносно сталих $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$,

$$\begin{cases}\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2-2\ln 2=0, \\ \widetilde{C}_1+2\widetilde{C}_2-3\ln 2=0,\end{cases} \begin{cases}\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2=2\ln 2, \\ \widetilde{C}_1+2\widetilde{C}_2=3\ln 2,\end{cases} \begin{matrix}\widetilde{C}_1=\ln 2, \\ \widetilde{C}_2=\ln 2.\end{matrix}$$

Шуканий розв"язок задачі Коші

$$y=\left(-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2\right)e^x+\left(-\ln\left(1+e^{-x}\right)+\ln 2\right)e^{2x}=e^x\ln\frac{2}{e^x+1}+e^{2x}\ln\frac{2}{1+e^{-x}}.$$

6.5.3. Метод невизначених коефіцієнтів

Нехай дано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з сталими коефіцієнтами. Якщо вільний член рівняння має спеціальний вигляд (див. нижче), ми можемо знайти частинний розв"язок неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів, не вдаючись до інтеґрування.

Зупинимось на лінійному диференціальному рівняння другого порядку

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (23)$$

з сталими коефіцієнтами p, q.

1. Нехай вільним членом рівняння (23) є так званий **квазіполіном**, тобто добуток показникової функції на деякий многочлен n-го степеня,

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right). \qquad (24)$$

В такому разі ми шукаємо частинний розв"язок рівняння у вигляді

$$y=y_{ЧН}=x^re^{\alpha x}\left(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0\right), \qquad (25)$$

де

$$A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0 \qquad (26)$$

- многочлен того ж степеня, що й у формулі (24), але з невизначеними коефіцієнтами A_n, A_{n-1},..., A_1, A_0, а число r визначається наступними умовами:

а) $r=0$, якщо α не є коренем характеристичного рівняння;

б) $r=1$, якщо α є простим коренем характеристичного рівняння;

в) $r=2$, якщо α є двократним коренем характеристичного рівняння.

Нехай, зокрема, вільний член рівняння (23) є **многочленом** n-го степеня (випадок $\alpha=0$)

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0. \qquad (27)$$

Тоді ми шукаємо частинний розв"язок у вигляді

$$y = y_{ЧН} = x^r \left(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0\right), \qquad (28)$$

де

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 \qquad (29)$$

- многочлен того ж степеня, що і в формулі (27), але з невизначеними коефіцієнтами, а число r визначається умовами:

а) $r = 0$, якщо 0 не є коренем характеристичного рівняння;

б) $r = 1$, якщо 0 є простим коренем характеристичного рівняння;

в) $r = 2$, якщо 0 є двократним коренем характеристичного рівняння.

2. Розглянемо тепер випадок, коли вільний член рівняння (23) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right) \qquad (30)$$

(α, β, A, B - відомі сталі). В такому разі ми шукаємо частинний розв"язок рівняння у вигляді

$$y = y_{ЧН} = x^r e^{\alpha x}\left(M\cos\beta x + N\sin\beta x\right), \qquad (31)$$

де M, N – невизначені коефіцієнти, а число r визначене умовами:

а) $r = 0$, якщо $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння;

б) $r = 1$, якщо $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння.

Якщо, зокрема,

$$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x \qquad (32)$$

(випадок $\alpha = 0$), ми шукаємо частинний розв"язок у вигляді

$$y = y_{ЧН} = x^r\left(M\cos\beta x + N\sin\beta x\right), \qquad (33)$$

де M, N – невизначені коефіцієнти, а число r r визначене умовами:

а) $r = 0$, якщо $i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння;

б) $r = 1$, якщо $i\beta$ є коренем характеристичного рівняння.

Приклад 14. $y'' + 5y' + 6y = 2xe^{-3x}$.

1. Відповідне однорідне рівняння

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

(див. приклад 7). Корені характеристичного рівняння $k^2 + 5k + 6 = 0$ дорівнюють -2, - 3, загальний розв"язок рівняння

$$y_{ЗО}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}.$$

2. Далі ми шукаємо частинний розв"язок даного (неоднорідного) рівняння. Відповідно до формул (24), (25), (26) (тут $a_1=2, a_0=0$; число $\alpha=-3$ є простим коренем характеристичного рівняння, так що $r=1$) шукаємо частинний розв"язок у вигляді

$$y=y_{ЧН}=x^1e^{-3x}\left(A_1x+A_0\right)=e^{-3x}\left(A_1x^2+A_0x\right).$$

Знаходячи похідні функції $y=y_{ЧН}$,

$$y'=e^{-3x}\left(-3A_1x^2-3A_0x+2A_1x+A_0\right),$$

$$y''=e^{-3x}\left(9A_1x^2-12A_1x+9A_0x+2A_1-6A_0\right),$$

ми підставляємо значення функцій y, y', y'' в дане рівняння і після зведення подібних членів отримуємо

$$\left(-2A_1x+2A_1-A_0\right)e^{-3x}=2xe^{-3x},\quad -2A_1x+2A_1-A_0=2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів A_1, A_0, а саме:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \left\{\begin{array}{ll} -2A_1=2, & A_1=-1, \\ 2A_1-A_0=0; & A_0=-2. \end{array}\right. \\ x^0 & \end{array}$$

Таким чином,

$$y=y_{ЧН}=e^{-3x}\left(-x^2-2x\right),$$

і загальний розв"язок даного рівняння дається наступним виразом:

$$y=y_{ЗН}=y_{ЗО}+y_{ЧН}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-e^{-3x}\left(x^2+2x\right).$$

Приклад 15. $y''-10y'+25y=3e^{5x}$.

1. Відповідне однорідне рівняння

$$y''-10y'+25y=0$$

(див. приклад 8). Його характеристичне рівняння $k^2-10k+25=0$ дійсні рівні корені $k_1=k_2=5$ (або ж один, але двократний корінь $k_0=5$), і

$$y_{ЗО} = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}.$$

2. Використовуючи ті ж самі формули (24), (25), (26) (тут $a_0 = 3$, а число $\alpha = 5$ є двократним коренем характеристичного рівняння, так що $r = 2$), ми шукаємо частинний розв"язок даного рівняння у вигляді

$$y = y_{ЧН} = x^2e^{5x}A_0,$$

(з невизначеним коефіцієнтом A_0), так що

$$y' = \left(2x + 5x^2\right)e^{5x}A_0,\ y'' = \left(2 + 20x + 25x^2\right)e^{5x}A_0.$$

Підстановка функцій y, y', y'' в задане рівняння дає

$$2e^{5x}A_0 = 3e^{5x},\ 2A_0 = 3,\ A_0 = \frac{3}{2},$$

і отже

$$y = y_{ЧН} = \frac{3}{2}x^2e^{5x},$$

$$y = y_{ЗН} = y_{ЗО} + y_{ЧН} = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x} + \frac{3}{2}x^2e^{5x}.$$

Приклад 16. $y'' - 4y' + 18y = 3\cos 2x + 5\sin 2x$.

1. Відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 4y' + 18y = 0$$

розглядалося в прикладі 9. Його характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 18 = 0$ має комплексні корені $1 \pm i\sqrt{14}$, а його загальний розв"язок є

$$y_{ЗО} = e^x\left(C_1\cos\sqrt{14}x + +C_2\sin\sqrt{14}x\right).$$

2. Для знаходження частинного розв"язку даного рівняння ми використоваємо формули (32), (33) ($A = 3,\ B = 5,\ \alpha = 0,\ \beta = 2;$ число $r = 0$, бо $i\beta = 2i$ не є коренем характеристичного рівняння). Ми шукаємо частинний розв"язок у вигляді

$$y = y_{ЧН} = x^0\left(M\cos 2x + N\sin 2x\right) = M\cos 2x + N\sin 2x.$$

Оскільки

$$y' = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x,\ y'' = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x,$$

підстановка значень функцій y, y', y'' в дане рівняння дає

$$(14M-8N)\cos 2x+(8M+14N)\sin 2x=3\cos 2x+5\sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos 2x, \sin 2x$, дістаємо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів M, N

$$\begin{cases}14M-8N=3,\\ 8M+14N=5,\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}M=41/130,\\ N=23/130,\end{matrix}\Rightarrow y_{ЧН}=\frac{41}{130}\cos 2x+\frac{23}{130}\sin 2x\Rightarrow$$

$$y=y_{ЗН}=y_{ЗО}+y_{ЧН}=e^{x}\left(C_1\cos\sqrt{14}x++C_2\sin\sqrt{14}x\right)+\frac{41}{130}\cos 2x+\frac{23}{130}\sin 2x.$$

Приклад 17. Розв"язати задачу Коші

$$y''-4y'+13y=4e^{2x}\sin 3x,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

1. Для відповідного однорідного рівняння

$$y''-4y'+13y=0$$

ми маємо характеристичне рівняння $k^2-4k+13=0$ з комплексними коренями $2\pm 3i$, отже,

$$y_1=e^{2x}\cos 3x,\ y_2=e^{2x}\sin 3x,\quad y_{OO}=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x.$$

2. Для знаходження частинного розв"язку вихідного рівняння візьмемо до уваги формули (30), (31) ($A=0, B=4, \alpha=2, \beta=3;$ число $\alpha+i\beta=2+3i$ є коренем характеристичного рівняння, а тому $r=1$). Покладаємо

$$y=y_{ЧН}=xe^{2x}(M\cos 3x+N\sin 3x)$$

з невизначеними коефіцієнтами M, N. Знаходячи похідні

$$y'_{ЧН}=e^{2x}\left((M+2xM+3xN)\cos 3x+(N+2xN-3xM)\sin 3x\right),$$

$$y''_{ЧН}=e^{2x}\left((4M+6N+4xM+12xN-9xM)\cos 3x+\right.$$

$$\left.+(4N-6M+4xN-12xM-9xN)\sin 3x\right)$$

та підставляючи значення функцій $y_{ЧН}$, $y'_{ЧН}$, $y''_{ЧН}$ в дане рівняння, отримаємо тотожність

$$e^{2x}(6N\cos 3x-6M\sin 3x)=4e^{2x}\sin 3x,\ 6N\cos 3x-6M\sin 3x=4\sin 3x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos 3x, \sin 3x$, дістаючи систему рівнянь відносно M, N

$$\begin{array}{l|l} \cos 3x & 6N = 0, \quad N = 0, \\ \sin 3x & -6M = 4, M = -2/3, \end{array} \quad y_{PN} = -\frac{2}{3}xe^{2x}\cos 3x,$$

і тому

$$y_{ЗН} = y_{ЗО} + y_{ЧН} = C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}xe^{2x}\cos 3x.$$

3. Для знаходження відповідних значень сталих C_1, C_2 врахуємо початкові умови.

$$y'_{ЗН} = 2e^{2x}\left(\left(C_1 - \frac{2}{3}x\right)\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + e^{2x}\left(\left(-\frac{2}{3} + 3C_2\right)\cos 3x + (2x - 3C_1)\sin 3x\right),$$

$$y_{ЗН}(0) = C_1 = 1, y'_{ЗН}(0) = 2C_1 - 2/3 + 3C_2 = 0, C_2 = -4/9.$$

Шуканий розв"язок задачі Коші дається формулою

$$y = e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}xe^{2x}\cos 3x.$$

6.5.4. Принцип суперпозиції

Ми часто-густо зустрічаємось з ситуацією, коли вільний член неоднорідного рівняння є сумою декількох різних доданків спеціального вигляду. Нехай, наприклад,

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x). \qquad (34)$$

Частинний розв"язок $y_{ЧН}$ рівняння (34) дорівнює сумі (суперпозиції) частинних розв"язків $y_{ЧН1}, y_{ЧН2}$ наступних рівнянь:

$$y'' + py' + qy = f_1(x), \quad y'' + py' + qy = f_2(x).$$

■Нехай

$$L[y] = y'' + py' + qy.$$

Тоді

$$L[y_{ЧН1}] \equiv f_1(x), L[y_{ЧН2}] \equiv f_2(x),$$

і тому

$$L[y_{ЧН1} + y_{ЧН2}] = L[y_{ЧН1}] + L[y_{ЧН2}] \equiv f_1(x) + f_2(x).$$

Це значить, що сума $y_{ЧН1} + y_{ЧН2}$ є частинним розв"язком даного рівняння (36), тобто $y_{ЧН1} + y_{ЧН2} = y_{ЧН}$.■

На практиці можна шукати $y_{ЧН1} + y_{ЧН2} = y_{ЧН}$ за допомоги однієї процедури.

Приклад 18. Знайти загальний розв"язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x).$$

1. Загальнии розв"язком відповідного однорідного рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

є функція

$$y_{ЗО} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x},$$

оскільки характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$ має два рівних дійсних корені $k_1 = k_2 = 2$ (або ж один двократний корінь $k_0 = 2$).

2. Вільний член заданого рівняння є сумою трьох доданків

$$f_1(x) = 8x^2 = e^{0x} \cdot 8x^2,\ f_2(x) = 8e^{2x} = e^{2x} \cdot 8, f_3(x) = 8\sin 2x = 0 \cdot \cos 2x + 8 \cdot \sin 2x.$$

На підставі принципу суперпозиції і формул (27) - (28), (24) - (26), (32) - (33) ми можемо послідовно знайти частинні розв"язки трьох неоднорідних рівнянь

$$y'' - 4y' + 4y = 8x^2 \quad \left(y_{ЧН1} = x^0 \cdot e^{0x}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\right);$$

$$y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x} \quad \left(y_{ЧН2} = x^2 \cdot e^{2x} B_0\right);$$

$$y'' - 4y' + 4y = 8\sin 2x \quad \left(y_{ЧН3} = x^0 \cdot (M\cos 2x + N\sin 2x)\right),$$

а потім утворити їх суму. Але краще зразу знайти частинний розв"язок даного рівняння у вигляді суми таких розв"язків, саме:

$$y_{ЧН} = y_{ЧН1} + y_{ЧН2} + y_{ЧН3} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + B_0 x^2 e^{2x} + M\cos 2x + N\sin 2x.$$

Оскільки

$$y'_{ЧН} = A_1 + 2A_2 x + 2B_0 x e^{2x} + 2B_0 x^2 e^{2x} - 2M\sin 2x + 2N\cos 2x,$$

$$y''_{ЧН} = 2A_2 + 2B_0 e^{2x} + 8B_0 x e^{2x} + 4B_0 x^2 e^{2x} - 4M\cos 2x - 4N\sin 2x,$$

підстановка значень функцій $y_{ЧН}$, $y'_{ЧН}$, $y''_{ЧН}$ в дане рівняння дає

$$y''_{ЧН} - 4y'_{ЧН} + 4y_{ЧН} =$$

$$2A_2 + 2B_0e^{2x} + 8B_0xe^{2x} + 4B_0x^2e^{2x} - 4M\cos 2x - 4N\sin 2x -$$

$$-4\left(A_1 + 2A_2x + 2B_0xe^{2x} + 2B_0x^2e^{2x} - 2M\sin 2x + 2N\cos 2x\right) +$$

$$+4\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + B_0x^2e^{2x} + M\cos 2x + N\sin 2x\right) = 8x^2 + 8e^{2x} + 8\sin 2x.$$

Після відповідного перегруповування доданків,

$$\left(4A_0 - 4A_1 + 2A_2\right) + \left(4A_1 - 8A_2\right)x + 4A_2x^2 + 2B_0e^{2x} - 8N\cos 2x + 8M\sin 2x =$$

$$= 8x^2 + 8e^{2x} + 8\sin 2x,$$

ми дістаємо:

а) $\left(4A_0 - 4A_1 + 2A_2\right) + \left(4A_1 - 8A_2\right)x + 4A_2x^2 = 8x^2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \left\{\begin{array}{rl} 4A_2 = 8, & A_2 = 2, \\ 4A_1 - 8A_2 = 0, & A_1 = 4, \\ 4A_0 - 4A_1 + 2A_2 = 0, & A_0 = 3; \end{array}\right. \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

б) $2B_0e^{2x} = 8e^{2x} \Rightarrow 2B_0 = 8,\ B_0 = 4,$

в) $-8N\cos 2x + 8M\sin 2x = 8\sin 2x \Rightarrow -8N = 0,\ 8M = 8 \Rightarrow M = 1,\ N = 0.$

Таким чином,

$$y_{ЧН} = 3 + 4x + 2x^2 + 4x^2e^{2x} + \cos 2x,$$

так що загальний розв"язок заданого рівняння має вигляд

$$y_{ЗН} = y_{ЗО} + y_{ЧН} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 3 + 4x + 2x^2 + 4x^2e^{2x} + \cos 2x.$$

7. НОРМАЛЬНІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

7.1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Означення 1. Нормальною системою диференціальних рівнянь першого порядку з *n* невідомими функціями $y_1(x),\ y_1(x),\ ...,\ y_1(x)$ називається система

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \qquad (1)$$

Означення 2. Розв"яком нормальної системи (1) називається впорядкована множина *n* функцій $y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),\ ...,\ y = \varphi_n(x)$ яка задовольняє кожне її рівняння.

Означення 3. Задачею Коші для нормальної системи (1) називається задача знаходження розв"язку системи, що задовольняє початкові умови

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ ...,\ y_n(x_0) = y_{n0} \qquad (2)$$

Теорема 1. Якщо функції $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n),\ i = \overline{1, n},$ та їх перші частинні похідні по $y_1, y_2, ..., y_n$ неперервні в деякій області D $(n+1)$-вимірного простору $x, y_1, y_2, ..., y_n$, то для будь-якої точки

$$M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}) \in D$$

задача Коші (1), (2) має розв"язок, причому єдиний.

Означення 4. Загальним розв"язком нормальної системи (1) (в області *D*, що фігурує в теоремі 1) називається впорядкована множина *n* функцій

$$y = \varphi_i(x,\ C_1,\ C_2,\ ..., C_n),\ i = \overline{1, n},$$

що містять *n* довільних сталих, яка задовольняє дві умови: a) ця множина є розв"язком системи для будь-яких значень сталих $C_1, C_2, ..., C_n$; b) для будь-яких початкових умов (2) (якщо $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}) \in D$) можна знайти значення сталих $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, ..., C_n = C_{n0}$, щоб задовольнити ці умови.

Теорема 2. Будь-яка система диференціальних рівнянь довільного порядку, зокрема диференціальне рівняння n-го порядку можна звести до нормальної системи рівнянь першого порядку.

■Нехай, наприклад, дано диференціальне рівняння третього порядку

$$y''' = f(x, y, y', y'').$$

Покладаючи $y = y_1, y' = y_1' = y_2, y'' = y_2' = y_3$, ми отримаємо

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = f(x, y_1, y_2, y_3), \end{cases}$$

тобто нормальну систему рівнянь першого порядку відносно шуканих функцій y_1, y_2, y_3.■

7.2. МЕТОД ВИКЛЮЧЕННЯ ДЛЯ ІНТЕҐРУВАННЯ НОРМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Теорема 3. Нормальну систему диференціальних рівнянь (1) можна, як правило, звести до одного диференціального рівняння n-го порядку за допомогою так званого **метода виключення**.

■Обмежмося нормальною системою двох **лінійних** рівнянь з сталими коефіцієнтами відносно шуканих функцій $y(x), z(x)$

$$\begin{cases} y'(x) = a_1 y(x) + b_1 z(x) + f_1(x), \\ z'(x) = a_2 y(x) + b_2 z(x) + f_2(x). \end{cases} \tag{3}$$

Продиференціюємо перше рівняння та замінимо похідні шуканих функцій $y(x), z(x)$ правими частинами рівнянь системи. Матимемо

$$y''(x) = a_1 y'(x) + b_1 z'(x) + f_1'(x),$$

$$y''(x) = a_1(a_1 y(x) + b_1 z(x) + f_1(x)) + b_1(a_2 y(x) + b_2 z(x) + f_2(x)) + f_1'(x),$$

$$y''(x) = a_3 y(x) + b_3 z(x) + f_3(x), \tag{4}$$

де

$$a_3 = a_1^2 + a_2 b_1, b_3 = a_1 b_1 + b_1 b_2, f_3(x) = a_1 f_1(x) + b_1 f_2(x) + f_1'(x).$$

З першого рівняння системи знайдемо $z(x)$ (якщо це можливо) і підставимо його значення в рівняння (4),

$$z(x)=\frac{y'(x)-a_1y(x)-f_1(x)}{b_1}, \tag{5}$$

$$y''(x)=a_3y(x)+b_3\frac{y'(x)-a_1y(x)-f_1(x)}{b_1}+f_3(x),$$

$$y''(x)=ay'(x)+by(x)+f_4(x), \tag{6}$$

де

$$a=\frac{b_3}{b_1},\ b=a_3-\frac{a_1b_3}{b_1},\ f_4(x)=f_3(x)-\frac{b_3}{b_1}f_1(x).$$

Таким чином, систему (3) зведено до диференціального рівняння (6) другого порядку.■

Нехай тепер

$$y(x)=\varphi_1(x,C_1,C_2)$$

- загальний розв"язок диференціального рівняння (6). Знаходячи $z(x)$ з (5),

$$z(x)=\frac{\frac{\partial\varphi_1(x,C_1,C_2)}{\partial x}-a_1\varphi_1(x,C_1,C_2)-f_1(x)}{b_1}=\varphi_2(x,C_1,C_2),$$

отримуємо загальний розв"язок системи рівнянь (3)

$$y(x)=\varphi_1(x,C_1,C_2),\ z(x)=\varphi_2(x,C_1,C_2).$$

Приклад 1. Розв"язати задачу Коші для системи рівнянь

$$\begin{cases}y'=2y+z,\\ z'=3y+4z\end{cases}$$

з початковими умовами $y(0)=1,\ z(0)=-2$.

Застосовуючи викладену теорію, маємо

$$y''=2y'+z'=2(2y+z)+(3y+4z)=7y+6z=7y+6(y'-2y)=6y'-5y,$$

$$y''=6y'-5y,\ z=y'-2y.$$

$$y''=6y'-5y,\ y''-6y'+5y=0,\ y=C_1e^x+C_2e^{5x},\ z=y'-2y=-C_1e^x+3C_2e^{5x}.$$

Загальний розв"язок системи

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{5x},\ z = -C_1 e^x + 3C_2 e^{5x}.$$

Враховуючи далі початкові умови, отримуємо

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1, \\ z(0) = -C_1 + 3C_2 = -2; \end{cases} \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 + 3C_2 = -2; \end{cases} C_1 = \frac{5}{4},\ C_2 = -\frac{1}{4}.$$

Шуканий розв"язок задачі Коші

$$y = \frac{5}{4} e^x - \frac{1}{4} e^{5x},\ z = -\frac{5}{4} e^x - \frac{3}{4} C_2 e^{5x}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв"язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y' = 2y + z - 15e^{-2x}, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$$

На підставі теорії

$$z = y' - 2y + 15e^{-2x},\ y'' = 2y' + z' + 30e^{-2x} = 2\left(2y + z - 15e^{-2x}\right) + (y + 2z) + 30e^{-2x} =$$
$$= 5y + 4z = 5y + 4\left(y' - 2y + 15e^{-2x}\right) = 4y' - 3y + 60e^{-2x},\ y'' = 4y' - 3y + 60e^{-2x},$$

$$y'' - 4y' + 3y = 60e^{-2x},$$

а) $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y_{OO} = C_1 e^x + C_2 e^{3x};$

б) $y = y_{ЧН} = Ae^{-2x},\ y' = -2Ae^{-2x},\ y'' = 4Ae^{-2x},$

$$4Ae^{-2x} + 8Ae^{-2x} + 3Ae^{-2x} = 60e^{-2x}, 15Ae^{-2x} = 60e^{-2x},\ A = 4,\ y_{ЧН} = 4e^{-2x},$$

$$y = y_{ОН} = y_{OO} + y_{ЧН} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 4e^{-2x},$$

$$z = y' - 2y + 15e^{-2x} = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 15e^{-2x}.$$

Шуканий загальний розв"язок має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 4e^{-2x},\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 15e^{-2x}.$$

8. ПОНЯТТЯ ПРО НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ІНТЕҐРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

8.1. МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Теорема 1. Задача Коші (1), (2) є еквівалентною наступному інтеґральному рівнянню

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \tag{3}$$

■а) Якщо функція $y = y(x)$ є розв"язком задачі Коші, то

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0.$$

Інтеґриручи тотожність, отримуємо

$$y(x) \equiv \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx + C,\ y(x_0) = y_0 = \int_{x_0}^{x_0} f(x, y(x))dx + C,\ C = y_0,$$

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx.$$

Отже, функція $y = y(x)$, тобто розв"язок задачі Коші (1), (2), є також розв"язом інтеґрального рівняння (3).

б) Нехай тепер функція $y = y(x)$ є розв"язком інтеґрального рівняння, тобто

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx.$$

Звідси випливає, що $y(x_0) = y_0$, а після диференціювання рівняння маємо

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Таким чином, названа функція є також розв"язком задачі Коші (1), (2).■

На підставі доведеної теореми замість задачі Коші (1), (2) розглядатимемо інтеґральне рівняння (3).

Будемо послідовно покладати

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx,$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2(x))dx,$$

……………………………..

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx, \qquad (4)$$

Теорема 2. Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна по y, $f'_y(x, y)$, неперервні в деякій області D площини xOy, то існує така функція $y(x)$, що для довільного x з деякого інтервала $[a, b]$ маємо

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x).$$

Доведення теореми (навіть за менш обтяжливих умов, що накладаються на частинну похідну $f'_y(x, y)$), міститься в більш ґрунтовних курсах диференціальних рівнянь.

Переходячи тепер до границі при $n \to \infty$ в рівності (4), дістаємо рівність

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx.$$

Вона означає, що функція $y(x)$ є розв"язком інтеґрального рівняння (3), а отже й розв"язком задачі Коші (1), (2).

На підставі сказаного формула (4) дає наближене значення шуканого розв"язку задачі Коші (1), (2).

Зауваження. Функція y_n, яку подано формулою (4), називається n-им наближенням до шуканого розв"язку задачі Коші.

Приклад 1. Знайти перші три наближення до розв"язку задачі Коші

$$y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 0.$$

Тут $x_0 = y_0 = 0$, і задача Коші є еквівалентною інтеґральному рівнянню

$$y(x) = \int_0^x \left(x^2 + y^2(x)\right) dx.$$

Отже,

$$y_1(x) = \int_0^x \left(x^2 + 0^2(x)\right) dx = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(x^2 + \left(\frac{x^3}{3}\right)^2\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}\right)^2\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Продовжуючи цей процес, ми можемо знайти значення розв"язку задачі Коші з довільною точністю (на певному інтервалі значень x, який для деяких рівнянь може навіть збігатися з множиною всіх дійсних чисел).

8.2. МЕТОД ЕЙЛЕРА[1]

Нехай ми шукаємо розв"зок задачі Коші (1), (2) на відрізку $[x_0, b]$.

Поділимо відрізок на n рівних частин довжини

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Очевидно, точками ділення будуть точки

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \quad x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h, \ldots, x_n = x_{n-1} + h.$$

---

[1] Ейлер, Леонард (1707 - 1783), - великий вчений (швейцарець за походженням). Більша частина його життя пройшла в Росії, помер в Санкт-Петербурзі. Ейлеру належить дуже багато видатних результатів з математичного аналізу, геометрії, небесної механіки, кораблебудування та інших галузей науки.

Замінимо далі похідну шуканої функції

$$y'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$$

різницевим відношенням

$$y'(x)\approx\frac{y(x+h)-y(x)}{h},$$

а диференціальне рівняння (1) – так званим різницевим рівнянням

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=f(x,y(x)).$$

Звідси маємо

$$y(x+h)=y(x)+hf(x,y(x)). \qquad (5)$$

На підставі (5) ми послідовно отримуємо

$$y(x_1)=y(x_0+h)=y(x_0)+hf(x_0,y(x_0)),\ y(x_1)=y_0+hf(x_0,y_0), \qquad (6.1)$$

$$y(x_2)=y(x_1)+hf(x_1,y(x_1)) \qquad (6.2)$$

$$y(x_3)=y(x_2)+hf(x_2,y(x_2)) \qquad (6.3)$$

………………………………..

$$y(x_n)=y(b)=y(x_{n-1})+hf(x_{n-1},y(x_{n-1})). \qquad (6.n)$$

З"єднуючи точки $M_0(x_0,y_0),\ M_1(x_1,y(x_1)),\ M_2(x_2,y(x_2)),\ldots,\ M_n(x_n,y(x_n))$ відрізками ламаної лінії або ж якоюсь плавною лінією, ми дістаємо наближений графік шуканого розв"язку задачі Коші.

Приклад 2. Знайти наближений розв"язок задачі Коші

$$y'=xy, \quad y(0)=1$$

на відрізку $[0,1]$.

Тут

$$x_0=0,\ y_0=0,$$

$$f(x,y(x))=xy(x),$$

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+hx_iy(x_i)=y(x_i)(1+hx_i),\ i=1,2,\ldots,n.$$

Поділивши відрізок $[0,1]$ на 10 рівних частин довжини $h=0.1$, дістанемо обчислювальну формулу

$$y(x_{i+1}) = y(x_i)(1 + 0.1x_i), \ i = 0, 1, 2, ..., 10 .$$

Подальші обчислення зведено в таблицю 1, де показано також точки наближеного графіка розв"язку задачі Коші. Зауважмо тільки, що в таблиці відсутня перша точка наближеного графіка, а саме точка $M_0(0.0; 1.00)$.

Таблиця 1

i	x_i	$y(x_i)$	$1+0.1\cdot x_i$	$y(x_{i+1})$	$M_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$
0	0.0	1.00	1.00	1.00	$M_1(0.1; 1.00)$
1	0.1	1.00	1.01	1.01	$M_2(0.2; 1.01)$
2	0.2	1.01	1.02	1.03	$M_3(0.3; 1.03)$
3	0.3	1.03	1.03	1.06	$M_4(0.4; 1.06)$
4	0.4	1.06	1.04	1.10	$M_5(0.5; 1.10)$
5	0.5	1.10	1.05	1.16	$M_6(0.6; 1.16)$
6	0.6	1.16	1.06	1.23	$M_7(0.7; 1.23)$
7	0.7	1.23	1.07	1.31	$M_8(0.8; 1.31)$
8	0.8	1.31	1.08	1.42	$M_9(0.9; 1.42)$
9	0.9	1.42	1.09	1.55	$M_{10}(1.0; 1.55)$

РЯДИ

9. ЧИСЛОВІ РЯДИ

9.1. ЗБІЖНІСТЬ І РОЗБІЖНІСТЬ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Означення 1. Числовим рядом з членами $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ називається вираз (символ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+k} + ... = \qquad (1)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} u_m + \sum_{m=n+1}^{\infty} u_m = S_n + \sum_{m=n+1}^{\infty} u_m$$

Означення 2. Вираз u_n називається **загальним членом** ряду (1).

Приклад 1. Знайти загальний член ряду

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{8 \cdot 13} + \frac{1}{11 \cdot 17} + ... \ .$$

Перші і другі співмножники в знаменниках утворюють арифметичні прогресії з першими членами $a_1 = 2, b_1 = 5$, різницями $d_1 = 3,\ d_2 = 4$ та n-ми членами

$$a_n = a_1 + d_1(n-1) = 2 + 3(n-1) = 3n - 1, b_n = b_1 + d_2(n-1) = 5 + 4(n-1) = 4n + 1 .$$

Отже, шуканий загальний член дорівнює

$$u_n = \frac{1}{a_n b_n} = \frac{1}{(3n-1)(4n+1)} .$$

Означення 3. Сума перших n членів ряду (1), а саме

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} u_m = u_1 + u_2 + ... + u_n , \qquad (2)$$

називається його ***n*-ою часткововою сумою**

Наприклад, перша, друга і третя частинні суми дорівнюють

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, ...$$

Означення 4. Ряд

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} u_m = u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+k} + ... \qquad (3)$$

називається залишком ряду (1) після n-го члена (або n-им залишком ряду).

Означення 5. Якщо існує скінченна границя n-ої часткової суми ряду (1) при $n \to \infty$,

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \neq \infty, \tag{4}$$

то ряд називається **збіжним**. Число S називається в такому разі **сумою** ряду, і можна написати рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S \tag{5}$$

кажучи, що ряд збігається до (своєї суми) S.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)} = \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)} + \ldots.$$

Спочатку зауважимо, що

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1/3}{3n-1} - \frac{1/3}{3n+2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right),$$

оскільки

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{A}{3n-1} + \frac{B}{3n+2}, 1 = A(3n+2) + B(3n-1), 1 = (3A+3B)n + (2A-B),$$

$$\begin{cases} 3A+3B=0, \\ 2A-B=1; \end{cases} \begin{cases} A+B=0, \\ 2A-B=1; \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}.$$

Даючи послідовно значення 1, 2, 3,… змінній n, ми подамо n-у часткову суму ряду наступним чином:

$$S_n = \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n-1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right).$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{6}\neq\infty$$

За означенням збіжності даний ряд збігається до суми (має суму) $S = 1/6$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-70n-24}.$$

По аналогії з попереднім прикладом ми подамо загальний член ряду як різницю двох дробів,

$$\frac{14}{49n^2-70n-24}=\frac{14}{(7n+2)(7n-12)}=\frac{A}{7n-12}+\frac{B}{7n+2}=\frac{1}{7n-12}-\frac{1}{7n+2},$$

а потім (послідовно покладаючи $n = 1, 2, 3,\ldots$) дістаємо n-у часткову суму і суму ряду

$$S_n=-\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{9}-\frac{1}{23}+\frac{1}{16}-\frac{1}{30}+\ldots+\frac{1}{7n-33}-\frac{1}{7n-19}+\frac{1}{7n-26}-\frac{1}{7n-12}+$$

$$+\frac{1}{7n-19}-\frac{1}{7n-5}+\frac{1}{7n-12}-\frac{1}{7n+2}=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2};$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}.$$

Даний ряд збігається і має суму $S = 0.3$ (збігається до 0.3).

Приклад 4. Доведіть самостійно, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$$

збігається і має суму $S = 0.7$.

Приклад 5. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}.$$

Відповідь.

$$\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}=\frac{4}{n}-\frac{5}{n+1}+\frac{1}{n+2};\; S_n=4-\frac{5}{2}+2+\frac{1}{n+1}-\frac{5}{n+1}+\frac{1}{n+2};\; S=3.5.$$

Приклад 6. **Геометрична проґресія**

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (6)$$

з знаменником q збігається у випадку $|q| < 1$ і має суму

$$S = \frac{a}{1-q},$$

тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1-q},\ |q| < 1. \qquad (7)$$

Дійсно, n-а часткова сума проґресії дорівнює

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n$$

і має при $n \to \infty$ границю

$$S = a/(1-q),$$

бо при $|q| < 1$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0.$$

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n + 5^n}{30^n},$$

користуючись означенням збіжності ряду.

Поділивши почленно, ми запишемо n-у часткову суму ряду у вигляді

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 3^k + 5^k}{30^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{15}\right)^k - \left(\frac{1}{10}\right)^k + \left(\frac{1}{6}\right)^k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{15}\right)^k - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{6}\right)^k.$$

Ми отримали три геометричні проґресії з першими членами

$$a_1 = \frac{1}{15},\ a_2 = \frac{1}{10},\ a_3 = \frac{1}{6}$$

і знаменниками

$$q_1 = \frac{1}{15},\ q_2 = \frac{1}{10},\ q_3 = \frac{1}{6}.$$

Отже, n-а часткова сума ряду дорівнює

$$S_n = \frac{1/15-(1/15)^n}{1-1/15} - \frac{1/10-(1/10)^n}{1-1/10} + \frac{1/6-(1/6)^n}{1-1/6},$$

а сума ряду

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1/15}{1-1/15} - \frac{1/10}{1-1/10} + \frac{1/6}{1-1/6} = \frac{1}{14} - \frac{1}{9} + \frac{1}{5} = \frac{101}{630} \approx 0.16.$$

Означення 6. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

або ж границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

взагалі не існує, ряд (1) називається **розбіжним**. Можна також сказати, що ряд розбігається.

Приклад 8. Арифметична проґресія

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots$$

розбігається, бо її n-а часткова сума дорівнює

$$S_n = 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

і має нескінченну границю при $n \to \infty$.

Приклад 9. Геометрична проґресія (6) розбігається при $|q| \geq 1$ і $a \neq 0$.

■ а) Якщо

$$|q| > 1,$$

то

$$|q^n| \to \infty$$

при $n \to \infty$, і границя n-ої часткової суми при $q > 0$ є нескінченною, а при $q < 0$ не існує.

б) Якщо

$$q = 1,$$

проґресія набуває вигляду

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots,$$

має n-у часткову суму

$$S_n = an$$

з границею, рівною $+\infty$ при $a > 0$ і $-\infty$ при $a < 0$.

в) Якщо, нарешті,

$$q = -1,$$

проґресія має вигляд

$$a + (-a) + a + (-a) + a + (-a) + a + (-a) + \ldots = a - a + a - a + a - a + a - a + \ldots,$$

її n-а часткова сума дорівнює 0 для n парних і a для n непарних. Тому границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

не існує.

Таким чином, у всіх трьох випадках а), б), в) проґресія розбігається.■

Приклад 10. **Гармонічний ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \qquad (8)$$

збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$.

Ми доведемо цей факт пізніше.

Наприклад, гармонічні ряди

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots, \quad 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \ldots$$

збігаються ($p = 2 > 1$, $p = 3/2 > 1$ відповідно), а ряди (також гармонічні)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \quad 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$$

розбігаються (відповідно $p = 1$, $p = 1/3 < 1$).

Теорема 1. Необхідна (але **не достатня!**) умова збіжності ряду (1) така:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (9)$$

Теорема 1 означає, що якщо ряд (1) збігається, то границя його загального члена u_n при $n \to \infty$ повинна бути рівною нулю.

■Нехай ряд (1) збігається до $S \ne \infty$. Це означає, що

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Але

$$u_n = S_n - S_{n-1},$$

і тому

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.\blacksquare$$

Приклад 8. Ряди

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{4n+7}, \text{ b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3n+2}$$

розбігаються, оскільки для першого з них

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{4n+7} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(3-2/n)}{n(4+7/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-2/n}{4+7/n} = \frac{3-0}{4+0} = \frac{3}{4} \neq 0,$$

а для другого

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{3n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left| \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(3x+2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3} = +\infty \right| = +\infty,$$

і необхідна умова збіжності для обох рядів не виконується.

Приклад 11. Необхідна умова збіжності виконується для двох наступних рядів

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1},$$

але тільки на підставі цього ми не можемо нічого сказати про їх збіжність чи розбіжність. Нижче ми доведемо, що перший ряд збігається, а другий - розбігається.

Теорема 2. Якщо ряд (1) збігається, то для будь-якого n збігається його залишок після n-го члена (n-й залишок) (3). Якщо, далі, залишок (3) ряду (1) збігається при деякому n, то збігається і сам ряд (1).

■Доведімо першу частину теореми. Нехай ряд (1) збігається до S, і позначмо σ_k k-у частинну суму залишку (3),

$$\sigma_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k}.$$

Очевидно, що

$$\sigma_k = S_{n+k} - S_n,$$

а отже існує границя

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k = \lim_{k\to\infty}\left(S_{n+k} - S_n\right) = \lim_{k\to\infty}S_{n+k} - S_n = S - S_n \neq \infty.$$

Це значить, що залишок (3) збіжного ряду (1) збігається для будь-якого n.■

Сенс теореми 2 полягає в наступному: факт збіжності чи розбіжності ряду не змінюється, якщо додати до нього чи відкинути в ньому скінченну кількість членів.

Наслідок 1. Позначмо R_n суму n-го залишку збіжного ряду. На підставі доведення теореми 2 отримуємо

$$R_n = \lim_{k\to\infty}\sigma_k = S - S_n,$$

і тому

$$S = S_n + R_n. \qquad (10)$$

Формула (10) подає суму S збіжного ряду сумою його n-ої часткової суми S_n і суми R_n відповідного n-го залишку.

Наслідок 2. Сума R_n n-го залишку збіжного ряду прямує до нуля при $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \qquad (11)$$

■З формули (10) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}R_n = \lim_{n\to\infty}\left(S - S_n\right) = S - \lim_{n\to\infty}S_n = S - S = 0.■$$

Наслідок 3. Для великих n сума S збіжного ряду наближено дорівнює

$$S \approx S_n \qquad (12)$$

з абсолютной похибкою

$$\alpha = \left|S - S_n\right| = \left|R_n\right|. \qquad (13)$$

Останню можна зробити як завгодно малою для достатньо великих значень n.

На практиці часто-густо нема необхідності досліджувати ряди на збіжність тільки за допомоги означень 5, 6, тобто відшуканням границі n-ої часткової суми . Достатньо встановити факт його збіжності чи розбіжності з інших міркувань і в разі збіжності знайти наближене значення його суми.

Існує багато ознак збіжності або розбіжності рядів. Розпочнімо з формулювання наступної теореми.

Теорема 3 (необхідна і достатня ознака Коші[1] збіжності числового ряду). Числовий ряд (1) збігається тоді і тільки тоді, якщо для довільного додатного як завгодно малого числа ε існує (натуральне) число N таке, що для будь-якого більшого натурального числа n и для довільного натурального m виконується нерівність

$$\left|S_{n+m} - S_n\right| < \varepsilon .$$

Символічно

$$\left(\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \aleph, \forall n \in \aleph, \forall m \in \aleph : \left\{n > N \Rightarrow \left|S_{n+m} - S_n\right| < \varepsilon\right\}\right). \quad (14)$$

Буквою $\aleph$ позначена множина всіх натуральних чисел.

Теорема 4 (почленні лінійні операції над числовими рядами). Нехай дано два числових ряди з сумами S і T відповідно,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = T .$$

В такому випадку для будь-якого числа k

$$ku_1 + ku_2 + \ldots + ku_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(ku_n) = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n = k(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots) = kS \qquad (15)$$

(винесення сталого множника k з збіжного ряду),

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n =$$

$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots) \pm (v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots) = S \pm T \qquad (16)$$

(почленне додавання чи віднімання двох збіжних рядів), і для будь-яких чисел k і l

$$(ku_1 + lv_1) + (ku_2 + lv_2) + \ldots + (ku_n + lv_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(ku_n + lv_n) = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n + l\sum_{n=1}^{\infty} v_n =$$

---

[1] Коші, Огюстен Луї (1789 - 1857), - знаменитий французький математик

$$=(ku_1+ku_2+\ldots+ku_n+\ldots)+(lv_1+lv_2+\ldots+lv_n+\ldots)=k\sum_{n=1}^{\infty}u_n+l\sum_{n=1}^{\infty}v_n=kS+lT \quad (17)$$

(почленна лінійна комбінація двох збіжних рядів, наслідок формул (15), (16)).

■Справедливість формули (15) випливає з рівності, що пов"язує n-і часкові суми σ_n, S_n рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ku_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

а саме,

$$\sigma_n=ku_1+ku_2+ku_3+\ldots+ku_n=k(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n)=kS_n.$$

Отже, для сум σ, S рядів дістаємо

$$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}(ku_n)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}kS_n=k\lim_{n\to\infty}S_n=k\sum_{n=1}^{\infty}u_n=kS.■$$

Формули (16), (17) доведіть самостійно.

Приклад 12. Суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n+5^n}{30^n}$$

(див. Приклад 7) можна дуже просто обчислити за теоремою 4 і формулою (7). Дійсно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n+5^n}{30^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{15}\right)^n-\left(\frac{1}{10}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{15}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=$$

$$=\frac{1/15}{1-1/15}-\frac{1/10}{1-1/10}+\frac{1/6}{1-1/6}=\frac{1}{14}-\frac{1}{9}+\frac{1}{5}=\frac{101}{630}\approx 0.16.$$

9.2. ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Теорема 3 (необхідна і достатня ознака Коші збіжності числового ряду) має велике теоретичне значення, але практичне її застосування часто-густо є занадто складним. Звичайно ми матимемо справу з деякими більш простими достатніми (але не необхідними) ознаками збіжності. Зупинимось спочатку на числових рядах з додатними членами.

Нехай дано числовий ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \forall n : u_n > 0. \qquad (18)$$

Його часткові суми утворюють зростаючу послідовність

$$S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_n < \ldots, \qquad (19)$$

і на підставі відповідної теореми про збіжність числової послідовності (див. властивість 6 з п. 1.1.3 А) ми дістаємо наступну теорему.

Теорема 5. Для збіжності ряду з додатними членами достатньо, щоб послідовність його часткових сум була обмеженою зверху.

Іншими словами, якщо існує таке число *C*, що для всіх натуральних *n* виконується нерівність

$$S_n \le C, \qquad (20)$$

то ряд (18) збігається.

Нехай є два ряди з додатними членами, а саме ряд (18) і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \forall n : v_n > 0. \qquad (21)$$

Теорема 6 (**перша ознака порівняння** для рядів з додатними членами). Нехай (принаймні для достатньо великих значень *n*)

$$u_n \le v_n \text{ (зокрема } u_n < v_n\text{)}. \qquad (22)$$

1) Якщо ряд (21) збігається, то ряд (18) також збігається.

2) Якщо ряд (18) розбігається, то ряд (21) також розбігається.

■Нехай, наприклад, ряд (21) збігається до якогось числа *T*, тобто існує границя його *n*-ої часткової суми σ_n,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = T.$$

Очевидно,

$$\sigma_n \le T.$$

На підставі нерівності (22) (яку можна припустити справедливою для будь-якого *n*) ми для *n*-ої часткової суми S_n ряду (18) маємо

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \le u_1 + u_2 + ... + u_n = \sigma_n \le T\,,\ S_n \le T\,.$$

Отже, послідовність часткових сум ряду (18) є обмеженою зверху числом *T*, і за теоремою 5 ряд збігається.■

За допомогою теорії границь ми можемо довести наступну теорему.

Теорема 7 (**друга ознака порівняння** для рядів з додатними членами). Нехай існує границя відношення загальних членів рядів (18) і (21),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = k\,. \qquad (23)$$

Якщо *k* – додатне число ($k \ne 0, k \ne \infty$), то обидва ряди (18), (21) разом збігаються або ж розбігаються.

Зауваження 1. Для граничних випадків $k = 0$ і $k = \infty$ ми можемо стверджувати наступне.

Якщо $k = 0$, то ряд (18) збігається у випадку збіжності ряду (21), а ряд (21) розбігається у випадку розбіжності ряду (18).

Якщо $k = \infty$, то ряд (18) розбігається у випадку розбіжності ряду (21), а ряд (21) збігається у випадку збіжності ряду (18).

Для застосування ознак порівняння ми повинні мати деякі стандартні ряди, збіжність або розбіжність яких нам відома. Часто-густо ми використовуємо різні випадки геометричної прогресії (6) і гармонічного ряду (8).

Приклад 13. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \dots\,.$$

Знайшовши загальний член ряду, ми можемо записати його у вигляді

$$\frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + ... + \frac{1}{n\cdot 2^n} + \dots\,.$$

Тепер ми порівняємо ряд з збіжним рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

(геометричною проґресією (6) з знаменником $q = 1/2, 0 < q < 1$). Порівняння дає

$$\frac{1}{n\cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$$

для будь-якого $n > 1$. На підставі теореми 6 (випадок 1) даний ряд збігається.

Зауваження. Даний ряд можна також порівняти з розбіжним гармонічним рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

Саме, для будь-якого натурального n маємо

$$\frac{1}{n\cdot 2^n} < \frac{1}{n}.$$

Але цей результат ні про що не свідчить: в теоремі 6 йдеться тільки про ряди, члени яких не перевищують відповідних членів певного **збіжного** ряду, або про ряди з членами, не меншими відповідних членів якогось **розбіжного** ряду. Якщо ж члени одного ряду не перевищують (або просто є меншими) відповідних членів розбіжного ряду, то про перший ряд нічого певного сказати не можна.

Приклад 14. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \ldots + \frac{\ln n}{n} + \ldots .$$

Помічаючи, що $\ln 2 > 1, \ln 3 > 1, \ln 3 > 1, \ldots, \ln n > 1, \ldots$ ми порівняємо даний ряд з розбіжним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

(гармонічним рядом (7) з $p = 1$). Порівняння дає

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$$

для $n \geq 2$. На підставі теореми 6 (випадок 2) даний ряд розбігається.

Приклад 15. Щоб дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^3 - 4n^2 + 3n + 7}},$$

ми візьмемо для порівняння збіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

(гармонічний ряд (7) з $p=3/2>1$) і скористуємось другою ознакою порівняння (теорема 7). Границя відношення загальних членів цих двох рядів дорівнює

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n^3-4n^2+3n+7}}:\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{2-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

тобто є додатним числом, а тому даний ряд збігається одночасно з збіжним гармонічним рядом.

Теорема 8 (ознака **Даламбера**[1]**).** Якщо для ряду (18) (з додатними членами) існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, \tag{24}$$

то ряд збігається при $l<1$ і розбігається при $l>1$. У випадку $l=1$ про поведінку ряду нічого певного сказати не можна (він може як збігатись, так і розбігатись).

■1. Нехай спочатку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l<1.$$

Згідно з теорією границь для будь-якого $\varepsilon>0$ існує натуральне число N таке, що для довільного натурального $n\geq N$ виконуються такі нерівності:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon,\ -\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}-l<\varepsilon,\ l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon,\ (l-\varepsilon)u_n<u_{n+1}<(l+\varepsilon)u_n.$$

Припустимо, що число ε настільки мале, що $l+\varepsilon<1$. Покладаючи послідовно

$$n=N,\ N+1,\ N+2,\ldots$$

в нерівності

$$u_{n+1}<(l+\varepsilon)u_n,$$

---

[1] Даламбер, Жан Лерон (1717 - 1783), - відомий французький математик і філософ

отримаємо

$$u_{N+1} < (l+\varepsilon)u_N,$$

$$u_{N+2} < (l+\varepsilon)u_{N+1} < (l+\varepsilon)^2 u_N,$$

$$u_{N+3} < (l+\varepsilon)u_{N+2} < (l+\varepsilon)^3 u_N,$$

………………………………

Ми бачимо, що для довільного $n \geq N+1$ члени даного ряду менше відповідних членів збіжної геометричної прогресії з знаменником $q = l+\varepsilon < 1$. За теоремою 6 (випадо 1) даний ряд збігається.

2. Нехай тепер

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1.$$

В такому випадку для достатньо великих n матимемо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_n < u_{n+1} < u_{n+2} < u_{n+3} < \ldots,$$

звідки видно, що для даного ряду не виконується необхідна умова збіжності (див. теорему 1). Отже, ряд розбігається.■

Приклад 16. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

Тут

$$u_n = \frac{n^2}{2^n}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}},$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2}{2^n\cdot 2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{2n^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається.

Приклад 17. Така ж сама задача для ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots\ .$$

Загальний член u_n і наступний член u_{n+1} ряду дорівнюють

$$u_n=\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4+3\cdot(n-1))}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(2+4\cdot(n-1))}=\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)},$$

$$u_{n+1}=\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot(3(n+1)+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)\cdot(4(n+1)-2)}=\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)\cdot(4n+2)}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)\cdot(4n+2)}:\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot 2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)\cdot(4n+2)\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{4n}=\frac{3}{4}<1.$$

Ряд збігається за ознакою Даламбера.

Приклад 18. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!\sqrt[3]{3n-1}}{(3n)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+3)!\sqrt[3]{3n+2}}{(3n+3)!}:\frac{(2n+1)!\sqrt[3]{3n-1}}{(3n)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!\,(3n)!\sqrt[3]{3n+2}}{(3n+3)!\,(2n+1)!\sqrt[3]{3n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!\,(2n+2)(2n+3)(3n)!}{(3n)!\,(3n+1)(3n+2)(3n+3)(2n+1)!}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{3n+2}{3n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n^3\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\left(3+\frac{3}{n}\right)}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{3+\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)}\cdot 1 = 0\cdot\frac{4}{27} = 0 < 1.$$

Ряд збігається.

Приклад 19. Ознака Даламбера незастосовна до ряді Прикладу 11, тобто до рядів

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}.$$

■Для другого ряду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{(n+1)^2+1} : \frac{n}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+1)}{n(n^2+2n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = 1.$$

Для першого ряду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} : \frac{1}{n\ln^2 n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln^2 n}{(n+1)\ln^2(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln n\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big/\ln n\right)}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Big/\ln n}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+0}\right)^2 = 1.\blacksquare$$

Приклад 20. Довести, що для довільного додатного числа a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

■Введімо числовий ряд з загальним членом $a^n/n!$, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=a+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+...+\frac{a^n}{n!}+....$$

Він збігається за ознакою Даламбера (перевірте!). Отже, на підставі необхідної умови збіжності границя загального члена ряду при $n\to\infty$ дорівнює нулю.■

Теорема 9 (радикальна ознака Коші). Якщо для ряду (18) (з додатними членами) існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \qquad (24)$$

то при $l<1$ ряд збігається, а при $l>1$ розбігається. Випадок $l=1$, аналогічно ознаці Даламбера, є сумнівним.

Приклад 21. Довести збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}.$$

Загальний член ряду

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2},$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}=\frac{1}{e}<1.$$

Ряд збігається за радикальною ознакою Коші.

Корисно зауважити, що

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1. \qquad (25)$$

■За допомогою правила Лопіталя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=\left|\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\right|=e^0=1.■$$

Доведіть самостійно, що для довільного натурального m

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+m}=1. \qquad (26)$$

Приклад 22. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$$

розбігається, оскільки на підставі формули (25)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 2 \cdot 1 = 2 > 1 .$$

Теорема 10 (інтеґральна ознака Коші). Замінивши n на x в загальному члені u_n ряду (18) (з додатними членами), отримаємо функцію $f(x) = u_x$. Якщо ця функція є додатною, неперервною і незростаючою на інтервалі $[1, \infty)$, то ряд (18) і невласний інтеґрал

$$\int_{1}^{\infty} f(x) dx \qquad (27)$$

разом або збігаються, або розбігаються.

■Нехай $k-1 \le x \le k$; на підставі незростання функції $f(x) = u_x$ послідовно мають

$$f(k) \le f(x) \le f(k-1), \quad u_k \le f(x) \le u_{k-1}, \quad \int_{k-1}^{k} u_k dx \le \int_{k-1}^{k} f(x) dx \le \int_{k-1}^{k} u_{k-1} dx,$$

$$u_k \le \int_{k-1}^{k} f(x) dx \le u_{k-1} . \qquad (28)$$

Покладаючи тепер $k = 2, 3, ..., n$ в нерівності (28) і почленно додаючи всі отримані нерівності, мають

$$u_2 + u_3 + ... + u_n \le \int_{1}^{n} f(x) dx \le u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} ,$$

або ж

$$S_n - u_1 \le \int_{1}^{n} f(x) dx \le S_{n-1} . \qquad (29)$$

1. Якщо інтеґрал (27) збігається, то

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^{n} f(x)dx = I < \infty .$$

Внаслідок додатності функції $f(x)$ інтеґрал

$$\int_1^{n} f(x)dx$$

зростає розом з n, а тому

$$\int_1^{n} f(x)dx \le I,$$

і на підставі (29) отримаємо

$$S_n \le \int_1^{n} f(x)dx + u_1 \le I + u_1 .$$

Таким чином, послідовність часткових сум ряду (18) обмежена зверху, і ряд збігається на підставі теореми 5.

2. Якщо тепер збігається ряд (18), то на підставі тієї ж нерівності (29) неважко довести збіжність інтеґрала (27) (завершіть доведення самостійно).■

Приклад 23. Дослідити на збіжність гармонічний ряд (8).

Загальний член ряду

$$u_n = \frac{1}{n^p},$$

і відповідна функція $f(x)$ суть

$$f(x) = u_x = \frac{1}{x^p}.$$

Відомо, що невласний інтеґрал

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$. Отже, гармонічний ряд (8) збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$.

Приклад 24. За допомоги інтеґральної ознаки Коші дослідити на збіжність ряди прикладу 11, тобто

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}, \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}.$$

a) Для першого ряду

$$u_n=\frac{1}{n\ln^2 n},$$

і відповідна функція

$$f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$$

є додатною, неперервною і незростаючою на інтервалі $[2,\infty)$. Невласний інтеґрал

$$\int_2^{\infty} f(x)dx=\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\left|\begin{array}{l}\ln x=y.\\ \dfrac{dx}{x}=dy,\end{array}\quad\begin{array}{c|c|c} x & 2 & \infty\\ \hline y & \ln 2 & \infty\end{array}\right|=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}\Bigg|_{\ln 2}^{\infty}=\frac{1}{\ln 2}$$

збігається, а тому збігається і ряд a).

b) Другий ряд розбігається, оскільки

$$u_n=\frac{n}{n^2+1}, \quad f(x)=\frac{x}{x^2+1},$$

і невласний інтеґрал

$$\int_1^{\infty} f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Bigg|_1^{\infty}=\infty$$

розбігається.

Приклад 25. Застосувати інтеґральну ознаку Коші до ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+18}.$$

Відповідний невласний інтеґрал

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+18}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\left(x^2+6x+18\right)'=t,\ x+3=t,\\ x=t-3,\ dx=dt,\ x^2+6x+18=t^2+9\end{array}\quad\begin{array}{c|c|c} x & 1 & \infty\\ \hline t & 4 & \infty\end{array}\right|=\int_4^{\infty}\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3}\Bigg|_4^{\infty}=\frac{1}{3}\left(\lim_{t\to\infty}\arctan\frac{t}{3}-\arctan\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{4}{3}\right)<\infty$$

збігається, і тому за інтегральною ознакою Коші даний ряд також збігається.

9.3. ЧИСЛОВІ РЯДИ З ДОВІЛЬНИМИ ДІЙСНИМИ ЧЛЕНАМИ АБСОЛЮТНА І УМОВНА ЗБІЖНОСТІ

В п. 9.2 ми розглядали числові ряди з додатними членами. Перейдемо тепер до рядів, члени яких – довільні дісні числа, як додатні, так і від"ємні. На підставі теореми 2 ми можемо вважати, що множини і тих, і інших нескінченні. Дійсно, якби ряд містив, наприклад, скінченну кількість від"ємних членів, ми могли б просто викинути їх, оскільки цу не змінило б факту збіжності або розбіжності ряду.

Як перший приклад рядів з довільними дійсними членами ми розглянемо так звані знакозмінні (інші назви - альтернуючі, знакопереміжні, знакопочережні) ряди.

9.3.1. Знакозмінний ряд

Означення 7. Знакозмінним рядом називається ряд такої форми:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \ , \qquad (30)$$

де всі числа u_n один і той же знак $(\forall n : (u_n > 0 \text{или} \, u_n < 0))$. Іншими словами, знакозмінний ряд – це ряд, знаки членів якого по черзі змінюються.

Теорема 11 (ознака **Лейбніца**[1]). Нехай в знакозмінному ряді (30):

а) виконується необхідна умова збіжності, яка тут має форму

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 ; \qquad (31)$$

b) члени ряду не зростають за абсолютною величиною;

в такому випадку ряд збігається, а для його суми S виконується нерівність

$$|S| \le |u_1| . \qquad (32)$$

■Нехай, для визначеності, всі числа u_n додатні.

1. Спочатку ми розглянемо часткові суми ряду (30) з парною кількістю членів. Запишемо $2m$-у часткову суму S_{2m} в двох формах, а саме:

---

[1] Лейбніц, Готфрід Вільгельм (1646 – 1717), - великий німецький філософ і математик

а) $S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + ... + (u_{2m-1} - u_{2m})$;

б) $S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - ... - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$.

Перша форма свідчить, що часткова сума S_{2m} невід"ємна і зростає з зростанням m, а друга форма – що вона обмежена зверху числом u_1 ($S_{2m} \le u_1$). Отже, існує скінченна границя S суми S_{2m} при $m \to \infty$,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

2. Для завершення доведення ми повинні показати, що часткові суми ряду (30) з непарною кількістю членів прямують до тієї ж самої границі S. Але на підставі умови (31)

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + u_{2m}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m} = S + 0 = S.$$

Таким чином, ми довели, що

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

для будь-якого n, як парного, так і непарного, а тому ряд (30) збігається.

У випадку додатності всіх u_n ми отримуємо нерівність $0 \le S \le u_1$. В загальному випадку ми дістаємо потрібну нерівність (32).■

Приклад 26. Знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$$

задовольняє обидві умови ознаки Лейбница:

$$\text{a) } 1 > \left|-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{3} > \left|-\frac{1}{4}\right| > ..., 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > ... \text{ ; b) } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Отже, ряд збігається, і для його суми S виконується нерівність

$$|S| \le 1.$$

Зауважимо, що в нашому прикладі $u_n = 1/n > 0$ для всіх $n = 1,2,3,...,n,...$, а тому останню нерівність можна замінити простішою, саме $0 \le S \le 1$.

Приклад 27. Знайти наближене значення суми S ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}=1-\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4^2\cdot 5}-\frac{1}{4^3\cdot 7}+\frac{1}{4^4\cdot 9}-\ldots.$$

Ряд є знакозмінним, він задовольняє обидва умови ознаки Лейбніца і тому збігається. На підставі формул (12), (13) ми маємо

$$S\approx S_n$$

з абсолютной похибкою

$$\alpha=|S-S_n|=|R_n|.$$

1. Нехай спочатку $n=3$. Тоді

$$R_3=-\frac{1}{4^3\cdot 7}+\frac{1}{4^4\cdot 9}-\ldots$$

є сумою знакозмінного ряду, і за нерівністю (32)

$$|R_3|\le\left|-\frac{1}{4^3\cdot 7}\right|=0.002232142857\ldots<0.0023.$$

Далі

$$S_3=1-\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4^2\cdot 5}\approx 1.0000-0.0833+0.0125=0.9292;$$

$$0.9292-0.0023<S<0.9292+0.0023,\quad 0.9268<S<0.9315,$$

і

$$S\approx 0.9,$$

де всі цифри точні, або

$$S\approx 0.93$$

з точністю до 0.01.

2. Нехай тепер $n=4$. В цьому випадку

$$R_4=\frac{1}{4^4\cdot 9}-\frac{1}{4^5\cdot 11}+\ldots;\ |R_4|\le\frac{1}{4^4\cdot 9}=0.000434,$$

$$S_4=1-\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{4^2\cdot 5}-\frac{1}{4^3\cdot 7}=$$

$$=1-0.083333+0.012500-0.002232=0.926935,$$

$$0.926935-0.000434<S<0.926935+0.000434,$$

$$0.926501<S<0.927369,$$

$$S \approx 0.92$$

зо всіма точними цифрами або ж

$$S \approx 0.927$$

с точністю до 0.001.

3. Нехай, нарешті, $n = 5$. Таким же чином ми знаходимо

$$R_5 = -\frac{1}{4^5 \cdot 11} + \frac{1}{4^6 \cdot 13} - ...; \left|R_5\right| \le \frac{1}{4^5 \cdot 11} \approx 0.000089 < 0.0001;$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{4^2 \cdot 5} - \frac{1}{4^3 \cdot 7} + \frac{1}{4^4 \cdot 9} \approx 1.0000 - 0.0833 + 0.0125 - 0.0022 +$$

$$+0.0004 \approx 0.9274,$$

$$0.9274 - 0.0001 < S < 0.9274 + 0.0001,$$

$$0.9273 < S < 0.9275,$$

$$S \approx 0.927,$$

і всі цифри точні.

Приклад 28. Знакозмінний ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + ...$$

сводиться до гармонічного з $p = 1$ і тому розбігається. Дійсно,

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\left(\sqrt{n}+1\right) - \left(\sqrt{n}-1\right)}{\left(\sqrt{n}-1\right)\left(\sqrt{n}+1\right)} = \frac{2}{n-1},$$

і

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...\right).$$

Для даного ряду необхідна умова збіжності (32) виконується, але друга умова ознаки Лейбніца порушується. Дійсно, для будь-якого n

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} \text{ (перевірте!).}$$

9.3.2. Абсолютно і умовно збіжні ряди

Нехай дано ряд з довільними дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots . \qquad (33)$$

Введімо **ряд з абсолютних величин** його членів, тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (34)$$

Теорема 12. Якщо ряд (34) **з абсолютних величин** членів ряду (33) збігається, то ряд (33) також збігається.

■Нехай

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n|$$

- n-а частова сума ряду (34). На підставі його збіжності існує границя

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n ,$$

і

$$\sigma_n \le \sigma$$

для будь-якого n. Подамо тепер n-у часткову суму S_n ряду (33) в такому вигляді:

$$S_n = S_n^+ - S_n^- ,$$

де S_n^+ - сума всіх додатних доданків ряду (33) в S_n, а S_n^- - сума абсолютних величин від"ємних доданків. Очевидно,

$$S_n^- \le \sigma_n \le \sigma, \quad S_n^+ \le \sigma_n \le \sigma \Rightarrow S_n^- \le \sigma, S_n^+ \le \sigma .$$

Це означає, що суми S_n^-, S_n^+ обмежені зверху числом σ і тому мають границі S^-, S^+ при $n \to \infty$,

$$S^- = \lim_{n\to\infty} S_n^- ,\ S^+ = \lim_{n\to\infty} S_n^+ .$$

Отже, існує границя S n-ої часткової суми S_n ряду (33),

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n^+ - S_n^-\right) = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^+ - S^- < \infty ,$$

тобто ряд збігається.■

Означення 8. Якщо ряд (34) з абсолютних величин членів ряду (33) збігається, то ряд (33) називається **абсолютно збіжним** (кажуть, що він **абсолют-**

но збігається).

На підставі означення 8 ми можемо назвати теорему 12 **теоремою про абсолютну збіжність** ряду з довільними дійсними членами.

Наслідок. З доведення теореми 12 випливає, що в абсолютно збіжному ряді збігаються ряди з додатних і від"ємних членів (відповідно до S^+ і $-S^-$).

Приклад 29. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$$

абсолютно збігається, оскільки ряд з абсолютних величин його членів, тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

є збіжним гармонічним рядом (8) з $p=2>1$.

Означення 9. Якщо ряд (33) з довільними дійсними членами збігається, але ряд з абсолютних величин його членів розбігається, ряд (33) називається **умовно збіжним** (кажуть, що він **умовно збігається**).

Зауваження 2. На підставі доведення теореми 12 ми можемо зробити висновок, що в умовно збіжному ряді обидва ряди - з додатних і від"ємних членів - розбігаються.

Приклад 30. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

(див. приклад 26) збігається умовно, оскільки ряд з абсолютних величин його членів, тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\right|\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

розбігається, як гармонічний з $p=1$.

Для встановлення абсолютної збіжності ряду (33) з довільними дійсними членами ми можемо застосовувати всі ознаки з п. 9.2. Розглянемо кілька випадків.

9.3.3. Деякі ознаки абсолютної збіжності

1. Якщо існує **збіжний** ряд з додатними членами

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..., \quad \forall n : a_n > 0, \qquad (35)$$

такий, що

$$|u_n| \le a_n \qquad (36)$$

(принаймні для достатньо великих n), то ряд (33) абсолютно збігається.

Приклад 31. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 4x}{4^2} + ... + \frac{\sin nx}{n^2} + ...$$

абсолютно збігається для будь-яких значень x, бо ряд з абсолютних величин його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^2} = |\sin x| + \frac{|\sin 2x|}{2^2} + \frac{|\sin 3x|}{3^2} + \frac{|\sin 4x|}{4^2} + ... + \frac{|\sin nx|}{n^2} + ...$$

збігається для всіх x на підставі першої ознаки порівняння:

$$\frac{|\sin nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

для всіх x і $n \ge 1$, а ряд з додатних членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$$

збігається, як гармонічний з $p = 2 > 1$.

Зауваження 3. Якщо для деякого **розбіжного** ряду з додатними членами

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ..., \quad \forall n : b_n > 0,$$

виконується нерівність

$$|u_n| \ge b_n$$

(принаймні для достатньо великих n), то ряд (33) не може збігатися абсолютно. Але це не означає розбіжності самого ряду: він може збігатися умовно.

2. Якщо для ряду (33) з **дійсними** членами існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=l, \qquad (37)$$

то ряд **абсолютно** збігається при $l<1$ і розбігається при $l>1$.

■Границя (37) виражає достатню ознаку збіжності Даламбера для ряду (34) з абсолютных величин членів ряду (33). У випадку $l>1$ розбігається не тілько ряд (34), але й ряд (33), оскільки для нього не виконується необхідна умова збіжності числового ряду. Див. теорему 8.■

Приклад 32. Нехай дано функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx^n},$$

тобто ряд, членами якого є функції. Треба дослідити, для яких значнь *x* він збігається.

Означення 9. Множина всіх значень *x*, для яких функціональний ряд збігається, називається **областю його збіжності.**

На підставі означення 8 ми повинні знайти область збіжності ряду прикладу 32.

Загальний член ряду є функцією від *x*, яку ми позначимо $u_n(x)$,

$$u_n(x)=\frac{1}{nx^n}.$$

Для фіксованого значення *x* ознака Даламбера для ряду з абсолютних величин членів даного ряду дає

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)|x|^{n+1}}:\frac{1}{n|x|^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n|x|^n}{(n+1)|x|^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n|x|^n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)|x|^n|x|}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)|x|}=\frac{1}{|x|}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{|x|}.$$

Ряд абсолютно збігається, якщо отримана границя менше 1, тобто якщо

$$\frac{1}{|x|}<1\Rightarrow|x|>1\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty);$$

ряд розбігається, якщо

$$\frac{1}{|x|}>1\Rightarrow|x|<1\Rightarrow x\in(-1,1).$$

Залишається дослідити поведінку ряду в двох точках $x=1, x=-1$.

В точці $x=1$ ряд набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

і розбігається, як гармонічний з $p=1$. В точці $x=-1$ ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(-1)^n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots=-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)$$

і збігається за ознакою Лейбніца (див. Приклад 26).

Таким чином, ряд збігається для $x\in(-\infty,-1]\bigcup(1,\infty)$. Інакше кажучи, його **областю збіжності** є множина точок $(-\infty,-1]\bigcup(1,\infty)$, тобто об"єднання двох інтервалів $(-\infty,-1]$ і $(1,\infty)$.

Приклад 33. Доведіть самостійно, що областю збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+2)^n}$$

є множина $(-\infty,-3)\bigcup(-1,\infty)$.

Приклад 34. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}=1+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{4^2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n^2}+\ldots.$$

Ров"язання. n-ий, $(n+1)$-ий члени ряду та їх абсолютні величины відповідно дорівнюють

$$u_n(x)=\frac{x^{n-1}}{n^2},\ u_{n+1}(x)=\frac{x^n}{(n+1)^2},\ |u_n(x)|=\left|\frac{x^{n-1}}{n^2}\right|=\frac{|x|^{n-1}}{n^2},\ |u_{n+1}(x)|=\left|\frac{x^n}{(n+1)^2}\right|=\frac{|x|^n}{(n+1)^2}.$$

На підставі ознаки Даламбера для ряду з абсолютних величин (для фіксованого x)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^n}{(n+1)^2}:\frac{|x|^{n-1}}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n n^2}{|x|^{n-1}(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n-1}|x|n^2}{|x|^{n-1}n^2(1+1/n)^2}=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^2}=|x|\cdot 1=|x|.$$

Ряд абсолютно збігається, якщо $|x|<1$, тобто якщо $-1<x<1,\ x\in(-1,1)$.

Ряд розбігається, якщо $|x|>1$, тобто $x<-1$ або $x>1$, $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

Необхідно дослідити випадок $|x|=1, \quad x=\pm 1$.

Для $x=-1$ ми маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots,$$

який збігається за ознакою Лейбніца.

Для $x=1$ відповідний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

збігається, як гармонічний з $p=2>1$.

Відповідь: областю збіжності ряду є відрізок $[-1,1]$.

Приклад 35. Та ж сама задача для функціонального ряду

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

Відповідь: $(-1,1]$.

Приклад 36. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-3)^{n-1}}{n^2\cdot 4^{n-1}}=1-\frac{x-3}{2^2\cdot 4}+\frac{(x-3)^2}{3^2\cdot 4^2}-\frac{(x-3)^3}{4^2\cdot 4^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^{n-1}}{n^2\cdot 4^{n-1}}+\ldots.$$

Тут

$$u_n(x)=(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^{n-1}}{n^2\cdot 4^{n-1}},\ |u_n(x)|=\left|(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^{n-1}}{n^2\cdot 4^{n-1}}\right|=\frac{|x-3|^{n-1}}{n^2\cdot 4^{n-1}},\ |u_{n+1}(x)|=\frac{|x-3|^n}{(n+1)^2\cdot 4^n},$$

і для фіксованого x за ознакою Даламбера для ряду з абсолютних величин

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-3|^n}{(n+1)^2\cdot 4^n}:\frac{|x-3|^{n-1}}{n^2\cdot 4^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|^n n^2\cdot 4^{n-1}}{|x-3|^{n-1}(n+1)^2\cdot 4^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|^{n-1}|x-3|n^2\cdot 4^{n-1}}{|x-3|^{n-1}(n+1)^2\cdot 4^{n-1}\cdot 4}=\frac{|x-3|}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{|x-3|}{4}\cdot 1=\frac{|x-3|}{4}.$$

Ряд абсолютно збігається, якщо

$$\frac{|x-3|}{4}<1, |x-3|<4, -4<x-3<4, -1<x<7, x\in(-1,7),$$

і розбігається, якщо

$$\frac{|x-3|}{4}>1, |x-3|>4, \left[\begin{array}{l} x-3<-4, \\ x-3>4, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>7, \end{array}\right. \quad x\in(-\infty,-1)\cup(7,\infty).$$

Таким чином, ми знаєм поведінку ряду в усіх точках, за винятком точок $x=-1, x=7$.

Для $x=-1$ ряд набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-4)^{n-1}}{n^2\cdot 4^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}4^{n-1}}{n^2\cdot 4^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-2}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

і збігається, як гармонічний з $p=2>1$.

Для $x=7$ ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{n-1}}{n^2\cdot 4^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$$

і абсолютно збігається (його збіжність, але не абсолютна, випливає також з ознаки Лейбніца).

Отже, областю збіжності ряду є відрізок $[-1,7]$. Останній має довжину 8 і центр $x=x_0=3$ і може бути поданим у вигляді $[3-4,3+4]$.

9.3.4. Деякі властивості рядів з довільними дійсними членами

Теорема 4 з п. 9.1 встановлює деякі, так би мовити, "арифметичні" властивості рядів. Вони аналогічні властивостям сум скінченної кількості доданків. Але ряди – це не суми, и їх властивості мають ряд особливостей. Зокрема, це стосується сполучної й переставної властивостей та множення рядів.

Теорема 13. Можна заключати в дужки довільні групи членів збіжного ряду. Сума ряду при цьому не змінюється.

Але, взагалі кажучи, не є припустимим відкидати дужки в збіжних рядах.

Приклад 37. Ряд

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots$$

збігається до нуля (чому?). але відкидання дужок веде до розбіжного ряду

$$1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots.$$

Абсолютно збіжні ряди посідають **переставну властивість**.

Теорема 14. Можна міняти місцями члени абсолютно збіжного ряду, і при цьому його сума не змінюється.

Умовно збіжні ряди такой властивості не мають, про що свідчить наступна теорема.

Теорема 15 (Ріман[1])**.** Міняючи місцями члени умовно збіжного ряду, ми можемо отримати ряд довільною сумою або навіть розбіжний ряд.

Справедливість теорем 14, 15 заснована на тому, що в абсолютно збіжному ряді збігаються ряди як з додатних, так і від"ємних членів, а в умовно збіжному ряді обидва вони розбігаються.

Теорема 16. Добуток двох абсолютно збіжних до S і T рядів абсолютно збігається до добутку $S{\cdot}T$.

Нехай, например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = T$$

- названі абсолютно збіжні ряди. Теорема 16 означає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots) \cdot (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots) = S \cdot T\,.$$

На підставі абсолютної збіжності добутку рядів його члени можна записувати різними способами. Зокрема, ми можемо написати

---

[1] Ріман, Георг Фрідріх Бернгард (1826 - 1866), - видатний німецький математик.

$$S\cdot T=\left(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots\right)\cdot\left(v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots\right)=$$
$$=u_1v_1+\left(u_1v_2+u_2v_2+u_2v_1\right)+\left(u_1v_3+u_2v_3+u_3v_3+u_3v_2+u_3v_1\right)+\ldots$$

(див. таблицю 1) або краще

$$S\cdot T=u_1v_1+\left(u_1v_2+u_2v_1\right)+\left(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1\right)+\left(u_1v_4+u_2v_3+u_3v_2+u_4v_1\right)+\ldots \quad (38)$$

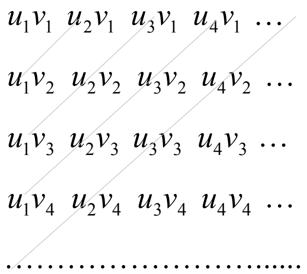
(див. таблицю 2).

Розвинення (38) залишається справедливим, якщо тільки один з рядів збігається абсолютно, а другий - просто збігається.

Table 1

u_1v_1	u_2v_1	u_3v_1	u_4v_1	...
u_1v_2	u_2v_2	u_3v_2	u_4v_2	...
u_1v_3	u_2v_3	u_3v_3	u_4v_3	...
u_1v_4	u_2v_4	u_3v_4	u_4v_4	...
......	......	......	......	...

Table 2



u_1v_1	u_2v_1	u_3v_1	u_4v_1	…
u_1v_2	u_2v_2	u_3v_2	u_4v_2	…
u_1v_3	u_2v_3	u_3v_3	u_4v_3	…
u_1v_4	u_2v_4	u_3v_4	u_4v_4	…

…………………………......

Приклад 38. Знайти добуток рядів прикладів 34, 35 , оба з яких абсолютно збігаються на інтервалі $(-1,1)$.

За теореою 16 шуканий добуток абсолютно збігається на $(-1,1)$. Запишемо перші чотири члени добутку, впорядковуючи їх за формулою (38) (див. таблицю 2), тобто за зростаючими степенями x,

$$\left(1+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{4^2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n^2}+\ldots\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\right)=$$
$$=x+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}\right)x^3+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4^2}\right)x^4+\ldots=$$
$$=x-\frac{1}{4}x^2+\frac{23}{72}x^3-\frac{23}{144}x^4+\ldots.$$

10. СТЕПЕВІ РЯДИ

10.1. СТЕПЕНЕВИЙ РЯД І ВЛАСТИВОСТІ ЙОГО СУМИ

10.1.1. Степеневий ряд, його радіус, інтервал і область збіжності

Ми вже мали справу з функціональними рядами в п. 9.3 (див. Приклади 31 - 35). Зараз ми розглянемо один з найпоширеніших типів функціональних рядів, а саме степеневих.

Означення 1. Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \qquad (\ 1\ )$$

де дійсні числа

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

- коефіцієнти, а

$$1 = x^0, x = x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$$

- степеневі функції з цілими невід"ємними показниками.

Приклад 1. Ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2} = 1 + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{4^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n^2} + \ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

які ми розглядали в Прикладах 34, 35 попереднього різділу, є степеневими.

Часто-густо розглядають степеневі ряди більш загального вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots . (\ 2\ )$$

Приклад 2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-3)^{n-1}}{n^2 \cdot 4^{n-1}} = 1 - \frac{x-3}{2^2 \cdot 4} + \frac{(x-3)^2}{3^2 \cdot 4^2} - \frac{(x-3)^3}{4^2 \cdot 4^3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^{n-1}}{n^2 \cdot 4^{n-1}} + \ldots,$$

розглянутий нами в Прикладі 36 того ж розділу, є степеневим вигляду (2).

Ряд (1) є частинним випадком ряду (2) при $x_0 = 0$. З іншого боку, мы можемо звести ряд (2) до вигляду (1), поклавши

$$x - x_0 = y,$$

звідки

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots + a_n y^n + \ldots.$$

З цієї причини ми розглядатимемо теорію в основному тільки ряду (1).

Означення 2. Якщо степеневий ряд (1) збігається в точці $x = r$, тобто збігається числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \ldots + a_n r^n + \ldots,$$

то ця точка називається **точкою збіжності** ряду. Множина всіх точок збіжності називається **областю збіжності** степеневого ряду.

Аналогічне означення є справедливим для будь-якого функціонального ряду. У випадку степеневого ряду область збіжності має дуже просту структуру, до з"ясування якої ми й переходимо.

Перш за все зауважимо, що степеневий ряд (1) завжди збігається в точці $x = 0$, оскільки набуває в ній вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + a_3 0^3 + \ldots + a_n 0^n + \ldots = a_0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = a_0.$$

a) Існують степеневі ряди, які збігаються тільки в точці $x = 0$.

Приклад 3. Степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n = 0! + 1!\, x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \ldots = 1 + x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \ldots$$

має єдину точку збіжності $x = 0$, оскільки границя (при фіксованому x)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!\, x^{n+1}|}{|n!\, x^n|} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, |x|^{n+1}}{n!\, |x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+1)|x|^n |x|}{n!\, |x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty}(n+1),$$

і ця границя може бути меншою 1 (а саме, рівною 0) тільки у випадку $x = 0$.

b) Існують степеневі ряди, областю збіжності яких є множина всіх дійсних чисел.

Приклад 4. Степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

абсолютно збігається в будь-якій точці x, бо для довільного фіксованого x

$$u_n(x)=\frac{x^n}{n!},\ |u_n(x)|=\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\frac{|x|^n}{n!},\ |u_{n+1}(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\underset{n\to\infty}{\frac{|x|^n|x|n!}{|x|^n n!(n+1)}}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{|x|^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}n!}{|x|^n(n+1)!}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0<1.$$

с) Існують, нарешті, степеневі ряди, областю збіжності яких є якась частина множини всіх дійсних чисел.

Наприклад, ряди Прикладу 1 збігаються на інтервалах $[-1,1]$, $(-1,1]$ і розбігаються на множинах точок $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, $(-\infty,-1]\cup(1,\infty)$ відповідно (див. Приклади 34, 35 попереднього розділу).

Теорема 1 (теорема Абеля[1])**.** Якщо степеневий ряд (1) збігається в точці $x=x'$, то він абсолютно збігається на інтервалі $(-|x'|,|x'|)$. Якщо він розбігається в точці $x=x''$, то він розбігається поза інтервалом $(-|x''|,|x''|)$.

■Нехай, наприклад, ряд (1) збігається в точці $x=x'$, тобто збігається числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x')^n=a_0+a_1x'+a_2(x')^2+a_3(x')^3+...+a_n(x')^n+....$$

На підставі необхідної умови збіжності загальний член цього ряду (а саме $a_n(x')^n$) прямує до нуля при $n\to\infty$. Отже, для достатньо великих n (нехай для $n\geq N$, де N – деяке натуральне число) він є обмеженим: існує число A таке, що

$$\left|a_n(x')^n\right|<A$$

---

[1] Абель, Нільс Генрік (1802 - 1829), - відомий норвежський математик

для $n \geq N$.

Нехай тепер x – довільна точка інтервалу $\left(-|x'|, |x'|\right)$, тобто $|x| < |x'|$, і тому

$$\frac{|x|}{|x'|} < 1.$$

В цьому випадку для загального члена $a_n x^n$ ряду (1) маємо (при $n \geq N$)

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n (x')^n \frac{x^n}{(x')^n}\right| = \left|a_n (x')^n\right| \left|\frac{x^n}{(x')^n}\right| = \left|a_n (x')^n\right| \left|\frac{x}{x'}\right|^n < A \cdot \left|\frac{x}{x'}\right|^n.$$

Це означає, що при $n \geq N$ члени ряду, складеного з абсолютних величин членів ряду (1), менше відповідних членів збіжної геометричної проґресії з знаменником

$$q = \left|\frac{x}{x'}\right| < 1.$$

Отже, ряд (1) абсолютно збігається на интервалі $\left(-|x'|, |x'|\right)$.■

З теореми Абеля випливає, що для степеневого ряду (1), який має як точки збіжності, , так і точки розбіжності, існує додатне число R (**радіус збіжності**) таке, що ряд абсолютно збігається на інтервалі (**інтервалі збіжності**)

$$(-R, R)$$

і розбігається поза відрізком $[-R, R]$.

Поведінку ряду (1) на кінцах $\pm R$ інтервалу збіжності завжди треба досліджувати **окремо**.

Радіуси і інтервали збіжності рядів, згаданих в Прикладі 1, є відповідно $R = 1, (-1, 1)$. Перший ряд збігається на кінцах $x = \pm 1$ інтервалу збіжності, другий же збігається в його правому кінці $x = 1$ і розбігається в лівому $x = -1$.

Загальний степеневий ряд (2) завжди збігається в точці x_0. Його інтервал збіжності (у випадку існування точок збіжності і розбіжності) має вигляд

$$(x_0 - R, x_0 - R).$$

Наприклад, радіус і інтервал збіжності ряду, згаданому в Прикладі 2, є відповідно $R = 4, (x_0 - R, x_0 + R) = (3 - 4, 3 + 4) = (-1, 7)$. Ряд збігається на обох кінцях $x=-1, x=7$ інтервалу збіжності (див. Приклад 35 попереднього розділу).

Якщо степеневий ряд ((1) чи (2)) збігається в єдиній точкі ($x=0$ або, відповідно, $x=x_0$), ми можемо сказати, що радіус збіжності такого ряду дорівнює нулю, $R=0$.

Для ряду з Прикладу 3 ми маємо $R=0$.

У випадку збіжності ряду на множині всіх дійсних чисел ми кажемо, що радіус збіжності є нескінченним, $R=\infty$.

Мы маємо $R=\infty$ в Прикладі 4.

Радіус збіжності степеневого рядку ми можемо шукати таким же чином, як в прикладах 34 - 36 попереднього розділу, тобто за допомогою ознаки Даламбера для ряду, складеного з абсолютних величин членів даного ряду. В одном частинному випадку ми можемо отримати відповідну формулу, а саме

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \qquad (3)$$

якщо границя (3) існує. Дійсно, ознака Даламбера (в тільки що вказананому сенсі) дає

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

і ряд абсолютно збігається при

$$|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1, |x|<\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, -\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}<x<\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

$$x\in\left(-\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},\ \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right).$$

Приклад 5. Для першого з рядів Прикладу 1 маємо

$$a_n=|a_n|=\frac{1}{n^2}, |a_{n+1}|=\frac{1}{(n+1)^2}, R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1,$$

для другого ряду

$$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ |a_n|=\frac{1}{n},\ |a_{n+1}|=\frac{1}{n+1},\ R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}:\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Приклад 6. Для ряду Прикладу 2

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\cdot 4^{n-1}},\ a_{n+1}=\frac{(-1)^n}{(n+1)^2\cdot 4^n},\ R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2\cdot 4^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)^2\cdot 4^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 4^n}{n^2\cdot 4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 4^{n-1}\cdot 4}{n^2\cdot 4^{n-1}}=4\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=4\cdot 1=4.$$

Приклад 7. Формула (3) незастосовна для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

(в цьому випадку $a_0=0, a_1=1, a_2=0, a_3=-\frac{1}{3!}, a_4=0, a_5=\frac{1}{5!},\ldots$), і ми застосовуємо ознаку Даламбера. Саме, для фіксованого x

$$u_n(x)=(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ |u_n(x)|=\frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!},\ |u_{n+1}(x)|=\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}:\frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\,|x|^{2n+1}}{(2n+1)!\,|x|^{2n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\,|x|^{2n-1}|x|^2}{(2n-1)!\,2n(2n+1)|x|^{2n-1}}=|x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=0<1.$$

Ряд абсолютно збігається на множині всіх дійсних чисел, і ми маємо радіус збіжності $R=\infty$.

Приклад 8. Довести самостійно, що радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

дорівнює нескінченності, $R=\infty$.

Заключаючи, ми можемо сказати, що областю збіжності степеневого ряду може бути: а) єдина точка ($x=0$ для ряду (1) і $x=x_0$ для ряду (2)); б) множина всіх дійсних чисел; в) деякий інтервал ($(-R,R)$ для ряду (1) і (x_0-R,x_0+R)

для ряду (2)), включаючи або виключаючи один чи обидва його кінці.

10.1.2. Властивості суми степеневого ряду

Означення 3. Нехай X – область збіжності степеневого ряду. Для довільного $x \in X$ позначимо $S(x)$ суму відповідного числового ряду. Функція $S(x)$ з областю визначення $D(S) = X$ називається **сумою степеневого ряду**.

Будемо для визначеності розглядати ряд (1), і тоді для довільного $x \in X$ ми зможемо написати

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots . \qquad (4)$$

Сума степеневого ряду має ряд важливих властивостей, які ми сформулюємо без доведення.

1. Сума $S(x)$ степеневого ряду неперервна в його інтервалі збіжності.

Замечание 1. Якщо степеневий ряд збігається в одному з кінців інтервалу збіжності, його сума $S(x)$ неперервна і в цьому кінці.

Нехай ряд (4) збігається на кінці $x = R$. Зауваження означає, що

$$S(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3 + \ldots + a_n R^n + \ldots .$$

2. Сума $S(x)$ степеневого ряду інтеґровна в інтервалі збіжності і може бути проінтеґрована почленним інтеґруванням ряду.

Для випадку ряду (1) інтеґрування по інтервалу $[0, x] \subset X$ дає

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots \qquad (5)$$

Ряд (5) також є степеневим, причому його радіус збіжності збігається з радіусом збіжності R ряду (4).

Останнє твердження легко довести за умови існування границі (3). Дійсно, радіус збіжності R' ряду (5) на підставі формули (3) дорівнює

$$R' = \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n-1}}{n} \right| : \left| \frac{a_n}{n+1} \right| \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n-1}|(n+1)}{|a_n| n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = R \cdot 1 = R .$$

3. Сума $S(x)$ степеневого ряду диференційовна на інтервалі збіжності і може бути продиференційована почленим диференціюванням ряду.

Для ряду (4) властавість означає

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = 1a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots . \qquad (6.1)$$

Ряд (6) є степеневим, а радіус його збіжності збігається з радіусом збіжності R ряду (4). Незмінність радіуса збіжності може бути доведена таким же чином (якщо існує границя (3)), як і для властивості 2. Зробіть це самостійно.

3. Застосовуючи властивість 3 нескінченну кількість разів, отримаємо

$$S''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+4\cdot 5a_5x^3+\ldots+(n-1)na_nx^{n-2}+\ldots \qquad (6.2)$$

$$S'''(x)=1\cdot 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+3\cdot 4\cdot 5a_5x^2+\ldots+(n-2)(n-1)na_nx^{n-3}+\ldots \qquad (6.3)$$

…………………………………………………………………………

$$S^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot na_n+2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)a_{n+1}+\ldots \qquad (6.n)$$

…………………………………………………………………………

Покладаючи тепер $x=0$ в формулах (4), (6.1), (6.2), (6.3), …, (6.*n*),…, ми зможемо знайти коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ряду (4),

$$a_0=S(0)=\frac{1}{0!}S(0),\ a_1=S'(0)=\frac{1}{1!}S'(0),\ a_2=\frac{1}{2!}S''(0),\ a_3=\frac{1}{3!}S'''(0),\ldots,$$

$$a_n=\frac{1}{n!}S^{(n)}(0),\ldots .$$

В результаті ряд (4) може бути записаний наступним чином:

$$S(x)=S(0)+S'(0)x+\frac{S''(0)}{2!}x^2+\frac{S'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (7)$$

або в короткому запису

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Ряд (7) називається рядом Маклорена[1] для функції $S(x)$.

---

[1] Маклорен, Колін (1698 - 1746), - шотландський математик

Аналогічно, якщо функція $S(x)$ є сумою ряду (2),

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \quad (8)$$

то

$$S(x)=S(x_0)+S'(x_0)(x-x_0)+\frac{S''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (9)$$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Ряд (9) називається рядом Тейлора[1] для функції $S(x)$.

Приклад 9. Знайти суму ряду

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^{11}}{11}+\ldots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots .$$

Почленно диференціюючи ряд, отримаємо геометрну проґресію з знаменником $q=x^4$ і радіусом збіжності $R=1$,

$$f'(x)=x^2+x^6+x^{10}+\ldots+x^{4n-2}+\ldots .$$

Сума проґресії на підставі відповідної формули (див. формулу (7) в розділі 9.1) дорівнює

$$f'(x)=\frac{x^2}{1-x^4}.$$

Інтеґруючи, дістаємо

$$f(x)=\int\frac{x^2dx}{1-x^4}+C=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

На підставі очевидної умови $f(0)=0$ знаходимо $C=0$ і отримуємо шукану суму

$$f(x)=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x.$$

Приклад 10. Знайдіть тим же методом суму ряду

---

[1] Тейлор, Брук (1685 - 1731), - англійський математик

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots .$$

Приклад 11. Знайти суму ряду

$$f(x)=1-3x^2+5x^4-7x^6+\ldots+(-1)^n(2n+1)x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n} .$$

Задача розв"язується за допомоги почленного інтеґрування даного ряду. Дійсно,

$$\int f(x)dx=x-x^3+x^5-x^7+\ldots+(-1)^n x^{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}+C=\frac{x}{1+x^2}+C,$$

причому результат є вірним за умови $|x|<1.$ Тепер після диференціювання отримуємо (для $|x|<1$)

$$f(x)=\left(\int f(x)dx\right)'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1\cdot\left(1+x^2\right)-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Приклад 12. Знайти тим же методом суму ряду

$$f(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} .$$

10.2. РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ В СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Ми будемо вивчати тут розвинення функцій в ряди Маклорена.

Нехай дано нескінченно диференційовну функцію $f(x)$. Їй може бути поставлений у відповідність її ряд Маклорена, а саме:

$$f(x)\sim f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n . \quad (10)$$

Необхідно з"ясувати такі два питання: за якої умови а) ряд (10) збігається і б) має своєю сумою функцію $f(x)$. Інакше кажучи, ми шукаємо умови розвивності функції в ряд Маклорена.

Необхідну і достатню умову розвивності дає нам формула Маклорена для функції $f(x)$ (див. п. 2.3.4 В, формули (23), (25))

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x).\quad (11)$$

Многочлен формули Маклорена збігається з n-ою частковою сумою ряду Маклорена (10), а $r_n(x)$ є залишковим членом формули. Наприклад, залишковий член в формі Лагранжа має вигляд

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\ c\in(0,x).\quad (12)$$

Порівняння формул (10) и (11) очевидним чином веде до наступної теореми.

Теорема 2. Нескінченно диференційовна функція розвивна в ряд Маклорена (10) на деякому інтервалі $(-a,a)$ тоді і тільки тоді, якщо при $n\to\infty$ залишковий член формули Маклорена (11) прямує до нуля на $(-a,a)$,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \quad \text{для} \quad x\in(-a,a)^1.\quad (13)$$

У випадку виконання умови (13) ми можемо записати розвинення функції в ряд Маклорена, замінивши в формулі (10) знак відповідності $\sim$ знаком рівності, а саме:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.\quad (14)$$

Теорема 3. Якщо нескінченно диференційовна функція і всі її похідні обмежені одним і тим же числом на деякому інтервалі $(-a,a)$, то функція є позвивною в ряд Маклорена (10) на цьому інтервалі.

■Нехай існують інтервал $(-a,a)$ і число C такі, що

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le C$$

для будь-якого n ($n=0,1,2,3,\ldots$) і довільного $x\in(-a,a)$ ($|x|<a$). Записавши залишковий член формули Маклорена в формі Лагранжа (12) і використавши результат Прикладу 20 попереднього розділу, ми отримаємо

---

[1] Очевидно, що інтервал $(-a,a)$ повинен лежати на інтервалі збіжності ряду.

$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \frac{C}{(n+1)!}|a|^{n+1} = C\cdot\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Залишається застосувати теорему 2.■

Приклад 13. Функції $\sin x, \cos x$ задовольняють умови теореми 3 на множині всіх дійсних чисел $(-\infty, \infty)$. Функція e^x задавольняє умови на довільному скінченному інтервале $(-a, a)$ ($C = e^a$). Отже, ми зразу отримуємо розвинення цих функцій в ряди Маклорена на підставі результатів п. 2.3.4 В, а саме:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad (15)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad (16)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots. \qquad (17)$$

Всі три ряди абсолютно збігаються на $(-\infty, \infty)$ (див. Примеры 4, 7, 8), так що формули (15), (16), (17) справедливі для будь-якого x.

Замечание 2. Мы можемо отримати розвинення (17) почленним диференціюванням ряду (16).

Приклад 14 (**біномний ряд**). Розвитумо в ряд Маклорена таку функцію

$$f(x) = (1 + x)^m, \quad m \in (-\infty, \infty), \qquad (18)$$

де m – деяке дійсне (але не натуральне) число.

Спочатку знаходимо похідні функції (18),

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},\ f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},\ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))(1+x)^{m-n},\ldots.$$

Тепер знаходимо значення функції та її похідних в точці $x = 0$,

$$f(0) = 1,\ f'(0) = m,\ f''(0) = m(m-1),\ f'''(0) = m(m-1)(m-2),$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1),\ f^{(n+1)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n),\ldots.$$

Нарешті за формулою (10) дістаємо

$$(1+x)^m \sim$$

$$\sim 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Радіус збіжності останнього ряду дорівнює $R=1$, оскільки на підставі формули (3)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)|}{n!}:\frac{|m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)|}{(n+1)!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|m-n|}\frac{|m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)|(n+1)!}{|m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)|n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|m-n|}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+1/n)}{n|m/n-1|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{|m/n-1|}=\frac{1+0}{|0-1|}=1.$$

Можна довести, що на інтервалі збіжності $(-1,1)$ виконуються умови теоремы 2, і, отже, ми отримаємо на цьому інтервалі наступне розвинення (так званий **біномний ряд**)

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots. \quad (19)$$

Біномний ряд (19) є джерелом багатьох інших розвинень.

Приклад 15. Поклавши в біномному ряді $m=-1$, дістанемо

$$(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)((-1)-1)}{2!}x^2+\frac{(-1)((-1)-1)((-1)-2)}{3!}x^3+\ldots=,$$

$$=1-x+\frac{1\cdot2}{2!}x^2-\frac{1\cdot2\cdot3}{3!}x^3+\ldots=1-x+x^2-x^3+\ldots,$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1). \quad (20)$$

Зауваження 3. Розвинення (20) можна було б отримати зразу як суму збіжної геометричної прогресії (з знаменником $q=-x$), якщо виконується умова $|q|=|-x|=|x|<1$. Ряд в формулі (20) розбігається на обох кінцях інтервалу збіжності $(-1,1)$.

Приклад 16. Почленно інтеґруючи ряд (20) по відрізку $[0,x]$, $|x|<1$, ми знаходимо розвинення натурального логарифма

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad(-1<x\le 1).\quad(21)$$

Ряд (21) збігається на кінці $x=1$ (за ознакою Лейбніца для знакозмінного ряду) і розбігається на конці $x=-1$ (чому?).

Приклад 17. Замінимо в розвиненні (20) змінну x на x^2,

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad\left(x^2<1,-1<x<1\right).$$

Після почленного інтеґрування останнього ряду отримуємо розвинення арктангенса з інтервалом збіжності $(-1,1)$,

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.\quad(22)$$

Областю збіжності цього ряду є відрізок $[-1,1]$, бо він збігається на кінцях інтервалу збіжності (впевніться в цьому за допомоги ознаки Лейбница!).

Приклад 18. Покладімо спочатку в біномному ряді (19) $m=-1/2$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{(-1/2)((-1/2)-1)}{2!}x^2+\frac{(-1/2)((-1/2)-1)((-1/2)-2)}{3!}x^3+\ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^4-\ldots,\quad(23)$$

а потім замінимо x на $-x^2$ ($\left|-x^2\right|=\left|x^2\right|<1$, звідки $|x|<1,-1<x<1$),

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^8+\ldots.$$

Наступне почленне інтеґрування дає розвинення арксинуса з інтервалом збіжності $(-1,1)$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 5\cdot 2!}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 7\cdot 3!}x^7+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 9\cdot 4!}x^9+\ldots.\quad(24)$$

Зауваження 4. Мт часто маємо справу з розвиненнями функцій в ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \quad (25)$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

Відповідна теорія аналогічна викладеній стосовно ряду Маклорена.

В Прикладах 16 – 18 ми дістали розвинення декількох функцій, знаючи розвинення інших. Розглянемо кілька додаткових прикладів.

Приклад 19. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$\ln\left(15+x^2\right).$$

Використовуючи стандартне розвинення (21), ми вчиняємо наступним чином:

$$\ln\left(15+x^2\right)=\ln 15\left(1+x^2/15\right)=\ln 15+\ln\left(1+x^2/15\right)=$$

$$=\ln 15+\frac{x^2}{15}-\frac{x^4}{2\cdot 15^2}+\frac{x^6}{3\cdot 15^3}-\frac{x^8}{4\cdot 15^4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 15^n}+\ldots .$$

Інтервал збіжності $\left(-\sqrt{15},\sqrt{15}\right)$ ряду визначається з нерівностей

$$\left|x^2/15\right|=x^2/15<1,\ x^2<15, |x|<\sqrt{15}, -\sqrt{15}<x<\sqrt{15} .$$

Областю збіжності ряду є відрізок $\left[-\sqrt{15},\sqrt{15}\right]$ (чому?).

Приклад 20. Беручи до уваги, що

$$\ln\left(x^2-7x+12\right)=\ln((x-3)(x-4))=\ln((3-x)(4-x))=\ln(3-x)+\ln(4-x),$$

розвинути в ряд Маклорена функцію $\ln\left(x^2-7x+12\right)$ і знайти область збіжності отриманого ряду.

Приклад 21. Розвинети в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{x}.$$

Ми знайдемо шукане розвинення, беручи до уваги стандартні розвинення (16), (17) синуса і косинуса і абсолютну збіжність обох рядів на множині всіх дійсних чисел.

$$f(x)=\frac{\sin x - x\cos x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots-x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots-x+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^5}{4!}+\frac{x^7}{6!}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left(\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3-\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)x^5+\left(\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right)x^7-\left(\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}\right)x^9+\ldots\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^2-\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)x^4+\left(\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right)x^6-\left(\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}\right)x^8+\ldots.$$

10.3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Степеневі ряди успішно застосовуються для інтеґрування диференціальних рівнянь, обчислення інтеґралів, які не виражаються в елементарних функціях, і в наближених обчисленнях.

10.3.1. Наближене інтеґрування диференціальних рівнянь

а) Метод ряду Тейлора (Маклорена)

Нехай треба розв"язати задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0. \qquad (26)$$

Шукатимемо розв"язок задачі у вигляді ряду Тейлора

$$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}y''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}y'''(x_0)(x-x_0)^3+\ldots, \qquad (27)$$

в якому треба знайти шуканої функцаї та її похідних в точці x_0. За допомоги початкової умови і диференціального рівняння ми зразу отримуємо

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=f(x_0,y(x_0))=f(x_0,y_0).$$

Для знаходження наступних значень похідних ми послідовно дифенціюємо дане рівняння та рівняння, отримані після диференціювання,

$$y''=F_1(x,y,y'),\ \text{где}\ F_1(x,y,y')=f'_x+f'_y\cdot y'$$

$$y''' = F_2(x, y, y', y''),\ y^{(4)} = F_3(x, y, y', y'', y'''),\dots,$$

а потім покладаємо цих рівняннях $x = x_0$,

$$y''(x_0) = F_1(x_0, y_0, y'(x_0)),\ y'''(x_0) = F_2(x_0, y_0, y'(x_0), y''(x_0)),$$
$$y^{(4)}(x_0) = F_3(x_0, y_0, y'(x_0), y''(x_0), y'''(x_0)),\dots$$

Діючи таким чином, ми можемо знайти довільну кількість членів шуканого ряду Тейлора.

Приклад 22. Розв"язати задачу Коші

$$y' = y\sin x + 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Відповідний ряд Тейлора

$$y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!}y''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}y'''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \dots.$$

Діючи відповідно викладеній теорії, отримуємо

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} + 1 = 1\cdot 1 + 1 = 2,$$

$$y'' = y'\sin x + y\cos x,\ y''' = y''\sin x + 2y'\cos x - y\sin x,$$
$$y^{(4)} = y'''\sin x + 3y''\cos x - 3y'\sin x - y\cos x,\dots.$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} + y\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} = 2\cdot 1 + 1\cdot 0 = 2,$$

$$y'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = y''\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} + 2y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} - y\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} = 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 1 = 1,$$

$$y^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'''\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} + 3y''\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} - 3y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} - y\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} = -5,$$

……………………………………………………………………………..

Таким чином, ми вже можемо записати п"ять перших членів ряду, який дає розв"язок задачі,

$$y = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!}\cdot 2\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot 1\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}(-5)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots,$$

$$y = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{5}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots.$$

Приклад 23. Розв"язати задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = xy' - x^2y + \sin x,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Тут $x_0 = 0$, тому ми шукаємо розв"язок в вигляді ряду Маклорена

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2!}y''(0)x^2 + \frac{1}{3!}y'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(0)x^4 + \frac{1}{5!}y^{(5)}(0)x^5 + \dots .$$

Початкові умови і диференціальне рівняння дають

$$y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0 \cdot y'(0) - 0^2 \cdot y(0) + \sin 0 = 0 .$$

Після диференціювання даного рівняння та його наслідків

$$y''' = y' + xy'' - 2xy - x^2y' + \cos x,\ y^{(4)} = 2y'' + xy''' - 2y - 4xy' - x^2y'' - \sin x,$$

$$y^{(5)} = 2y''' + xy^{(4)} - 6y' - 6xy'' - x^2y''' - \cos x, \dots$$

ми знаходимо значення похідних

$$y'''(0) = 0,\ y^{(4)}(0) = -2,\ y^{(5)}(0) = 5, \dots$$

і перші чотири ненульових члени ряду Маклорена для шуканої функції

$$y = 1 - x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{120}x^5 + \dots$$

б) Метод невизначених коефіцієнтів для лінійних рівнянь

Проілюструємо цей метод на двох прикладах.

Приклад 24. Розв"язати ту ж задачу Коші, що й в Прикладі 23,

$$y'' - xy' + x^2y = \sin x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Шукатимемо розв"язок задачі у вигляді степеневого ряду з невизначеними коефіцієнтами $c_0, c_1, c_2, \dots$.

$$\begin{array}{r|l} y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots & x^2 \\ y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots & -x \\ y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \dots & 1 \end{array}$$

Початкові умови дають

$$y(0) = c_0 = 1,\ y'(0) = c_1 = -1 \quad c_0 = 1, c_1 = -1 .$$

Тепер ми підставляємо ряд в ліву частну рівняння, а $\sin x$ в його правій частині замінюємо рядом (16). Отримуємо рівність двох рядів

$$2c_2 + (-c_1 + 6c_3)x + (c_0 - 2c_2 + 12c_4)x^2 + (c_1 - 3c_3 + 20c_5)x^3 + ... = x - \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, дістаємо систему рівнянь відносно коефіцієнтів $c_2, c_3, c_4, \dots$.

$$\begin{array}{r|ccc c}
x^0 & 2c_2 & = & 0 & c_2 = 0, \\
x & -c_1 + 6c_3 & = & 1 & c_3 = 1/6(1 + c_1) = 0, \\
x^2 & c_0 - 2c_2 + 12c_4 & = & 0 & c_4 = 1/12(2c_2 - c_0) = -1/12, \\
x^3 & c_1 - 3c_3 + 20c_5 & = & -1/6 & c_5 = 1/20(-1/6 - c_1 + 3c_3) = 5/120,
\end{array}$$

………………………………………………………………………..

Перші чотири ненульових члени ряду, який дає розв"язок задачі,

$$y = 1 - x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{120}x^5 + ...$$

збігаються з отриманими в Прикладі 23.

Приклад 25. Знайти загальний розв"язок диференціального рівняння

$$y'' + k^2 y = 0.$$

За аналогією з Прикладом 24 шукаємо розв"язок в вигляді степеневого ряду з невизначеними коефіцієнтами $c_0, c_1, c_2, ...$ та підставляємо цей ряд в рівняння.

$$\begin{array}{r|l}
y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + ... & k^2 \\
y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + 6c_6x^5 + 7c_7x^6 + 8c_8x^7 + 9c_9x^8 + ... & 0 \\
y'' = 2!c_2 + 2\cdot 3c_3x + 3\cdot 4c_4x^2 + 4\cdot 5c_5x^3 + 6c_6x^5 + 6\cdot 7c_7x^6 + 76c_6x^5 + 7c_7x^6 + 8c_8x^7 + ... & 1
\end{array}$$

$$(2!c_2 + k^2c_0) + (2\cdot 3c_3 + k^2c_1)x + (3\cdot 4c_4 + k^2c_2)x^2 + (4\cdot 5c_5 + k^2c_3)x^3 +$$

$$+ (5\cdot 6c_6 + k^2c_4)x^3 + (6\cdot 7c_7 + k^2c_5)x^4 + (7\cdot 8c_8 + k^2c_6)x^5 + (8\cdot 9c_9 + k^2c_8)x^6 + ... = 0.$$

Тепер ми прирівнюємо до нуля всі коефіцієнти ряду в лівій частині

$$2!c_2 + k^2c_0 = 0, 2\cdot 3c_3 + k^2c_1 = 0, 3\cdot 4c_4 + k^2c_2 = 0, 4\cdot 5c_5 + k^2c_3 = 0, 5\cdot 6c_6 + k^2c_4 = 0,$$

$$6\cdot 7c_7 + k^2c_5 = 0, 7\cdot 8c_8 + k^2c_6 = 0, 8\cdot 9c_9 + k^2c_8 = 0, ...$$

і виражаємо $c_2, c_4, c_6, c_8, ...$ через c_0, а $c_3, c_5, c_7, c_9, ...$ - через c_1.

$$c_2 = -\frac{k^2}{2!}c_0, c_4 = \frac{k^4}{4!}c_0, c_6 = -\frac{k^6}{6!}c_0, c_8 = \frac{k^8}{8!}c_0, ...,$$

$$c_3=-\frac{k^2}{3!}c_1,\, c_5=\frac{k^4}{5!}a_1,\, c_7=-\frac{k^6}{7!}c_1,\, c_9=\frac{k^8}{9!}c_1,\dots.$$

Відсутність початкових умов означає, що ми можемо вважати коефіцієнти c_0, c_1 довільлними числами. Після декількох простих кроків з використанням рядів (16), (17) ми дістаємо остаточний результат,

$$y=c_0+c_1x-\frac{k^2}{2!}c_0x^2-\frac{k^2}{3!}c_1x^3+\frac{k^4}{4!}c_0x^4+\frac{k^4}{5!}c_1x^5-\frac{k^6}{6!}c_0x^6-\frac{k^6}{7!}c_1x^7+\frac{k^8}{8!}c_0x^8+\dots=$$

$$=c_0\left(1-\frac{k^2}{2!}x^2+\frac{k^4}{4!}x^4-\frac{k^6}{6!}x^6+\frac{k^8}{8!}x^8-\dots\right)+c_1\left(x-\frac{k^2}{3!}x^3+\frac{k^4}{5!}x^5-\frac{k^6}{7!}x^7+\frac{k^8}{9!}x^9+\dots\right)=$$

$$=c_0\left(1-\frac{(kx)^2}{2!}+\frac{(kx)^4}{4!}-\frac{(kx)^6}{6!}+\frac{(kx)^8}{8!}-\dots\right)+\frac{c_1}{k}\left(kx-\frac{(kx)^3}{3!}+\frac{(kx)^5}{5!}-\frac{(kx)^7}{7!}+\frac{(kx)^9}{9!}+\dots\right);$$

$$y=c_0\cos kx+\frac{c_1}{k}\sin kx.$$

10.3.2. Наближене обчислення інтеґралів

Обмежимось двома цікавими прикладами.

Приклад 26. В теорії ймовірностей розглядається так звана функція Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (28)$$

Відомо, що первісна підінтеґральнї функціх не виражається за допомоги елементарних функцій. Але ми можемо представити функцію Лапласа у вигляді ряду. Замінивши в розвиненні (15) змінну x на $-t^2/2$ і почленно проінтеґрувавши, дістанемо

$$e^{-\frac{t^2}{2}}=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{t^6}{2^3\cdot 3!}+\frac{t^8}{2^4\cdot 4!}-\frac{t^{10}}{2^5\cdot 5!}+\dots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^n\cdot n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^n\cdot n!},$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3\cdot 1!}+\frac{x^5}{2^2\cdot 5\cdot 2!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^n\cdot(2n+1)\cdot n!}+\dots\right).(29)$$

Приклад 27. За допомоги розвинення (16) ми представляємо рядом так званий інтеґральний синус

$$Six=\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^x \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^5}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx,$$

$$Six=\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots. \qquad (30)$$

Нагадаємо, що первісна підінтеґральної функції в інтеґральному синусі не виражається в елементарних функціях.

10.3.3. Наближені обчислення

Тут ми також обмежимось кількома прикладами. Див. також детально розглянутий Приклад 27 в п. 9.3.1.

Приклад 28. Знайти наближене значення кореня $\sqrt{3}$.

Скористаємось біномним рядом (19) для $m=1/2$, тобто (перевірте!)

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4+\ldots \qquad (31)$$

Якщо ми запишемо $\sqrt{3}$ наступним чином (с 9 десятковими цифрами, останню з яких розглядатимемо як запасну)

$\sqrt{3}=\sqrt{1.73^2+0.0071}=\sqrt{1.73^2\left(1+\dfrac{0.0071}{2.9929}\right)}\approx 1.73\sqrt{1+0.002372281}$, то зможемо застосувати ряд (31) для $x=0.002372281$. Маємо (якщо працювати з однією запасною десятковою цифрою)

$$\sqrt{3}=$$

$$=1.73\left(1+\frac{0.002372281}{2}-\frac{0.002372281^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot 0.002372281^3}{2^3\cdot 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 0.002372281^4}{2^4\cdot 4!}+\ldots\right)=$$

$$=1.730000000+0.002052023-0.000001217+\ldots\approx$$

$$\approx 1.730000000+0.002052023=1.732052023$$

з абсолютной похибкою

$$\alpha = \left| -0.000001217 + \ldots \approx \right| \le 0.000001217,$$

що не перевищує за абсолютною величиною числа 0.000001217. Отже, ми можемо стверджувати, що

$$1.732052023 - 0.000001217 \le \sqrt{3} \le 1.732052023 + 0.000001217,$$
$$1.732050806 \le \sqrt{3} \le 1.73205324$$
$$\sqrt{3} = 1.73205$$

де всі цифри точні. Взявши часткову суму ряду з трьома членами, отримали б більш точне значення кореня $\sqrt{3} = 1.732051$.

Приклад 29. Знайти наближене значення числа π.

Візьмемо до уваги, що

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{arctan} \frac{1}{\sqrt{3}},$$

і використаємо розвинення (22) для $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, де як наближене значення кореня $\sqrt{3}$ візьмемо $\sqrt{3} \approx 1.732051$ (див. попередній приклад).

$$\pi = 6 \operatorname{arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} = 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2 \sqrt{3}} - \frac{1}{7 \cdot 3^3 \sqrt{3}} + \frac{1}{9 \cdot 3^4 \sqrt{3}} - \frac{1}{11 \cdot 3^5 \sqrt{3}} + \ldots \right) =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \frac{1}{13 \cdot 3^6} - \frac{1}{15 \cdot 3^7} + \ldots \right) =$$

$$= 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \frac{1}{13 \cdot 3^6} - \frac{1}{15 \cdot 3^7} + \frac{1}{17 \cdot 3^8} - \frac{1}{19 \cdot 3^9} + \ldots \right) =$$

$$= 3.464102 - 0.384900 + 0.076980 - 0.018329 + 0.004753 - 0.001296 + 0.000367 -$$
$$- 0.000104 + 0.000031 - 0.000010 + 0.000003 - \ldots \approx 3.141594 + 0.000003 - \ldots.$$

Отже, можна вважати, що $\pi = 3.141594$ з абсолютной похибкою

$$\alpha = \left| 0.000003 - \ldots \right| \le 0.000003.$$

Таким чином,

$$3.141594 - 0.000003 < \pi < 3.141594 + 0.000003, 3.141591 < \pi < 3.141597,$$

$$\pi \approx 3.14159,$$

де всі цифри точні. Більш точне значення числа π , яке ми використаємо в наступному прикладі, є $\pi = 3.1415926$

Приклад 30. Знайти наближене значення $\cos 3°$.

Виражаючи кут в радіанах і застосовуючи формулу (17), матимемо

$$\cos 3° = \cos\frac{\pi}{60} = \cos\frac{3.1415926}{60} = \cos 0.0523599 =$$

$$= 1.0000000 - \frac{0.0523599^2}{2!} + \frac{0.0523599^4}{4!} - \frac{0.0523599^6}{6!} + \ldots =$$

$$= 1.0000000 - 0.0013708 + 0.0000003 - \ldots = 0.9986292 + 0.0000003 - \ldots$$

Отримуємо $\cos 3° = 0.9986292$ з абсолютной похибкою

$$\alpha = |0.0000003 - \ldots| \le 0.0000003.$$

Отже,

$$0.9986292 - 0.0000003 \le \cos 3° \le 0.9986292 + 0.0000003,$$

$$0.9986289 \le \cos 3° \le 0.9986295,$$

і і точністю до 0.000001

$$\cos 3° \approx 0.998629$$

Зауваження 5. В розглянутих прикладах ми мали справу з знакозмінними рядами, в яких дуже просто оцінювати похибки обчислень. В інших випадках для наближених обчислень зручнішою може виявитись формула Тейлора. Див. з цього приводу п. 2.3.4.

11. РЯДИ ФУР"Є

а. 11.1. РЯД ФУР"Є[1] ЗА ОРТОГОНАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ ФУНКЦІЙ

Означення 1. Дві ненульових функції $f(x), g(x)$ називаються **ортогональними** на деякому відрізку $[a, b]$, якщо інтеґрал по цьому відрізку від їх добутку дорівнює нулю,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 . \qquad (1)$$

Означення 2. Система ненульових функцій називається **ортогональною** на відрізку $[a, b]$, якщо функції системи парами ортогональні на $[a, b]$.

Нехай

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x),..., \varphi_n(x),... \qquad (2)$$

- ортогональна система функцій на відрізку $[a, b]$, тобто

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0 \text{ для } i \neq j \text{ і } \int_a^b \varphi_i^2(x)dx \neq 0 \text{ для } j = i , \qquad (3)$$

а функцію $f(x)$ розвинено в ряд за цією системою,

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) + ... + c_n\varphi_n(x) + ... \qquad (4)$$

Треба знайти коефіцієнти $c_1, c_2, c_3,..., c_n,...$ розвинення.

Для знаходження c_n ми помножимо обидві частини рівності (4) на $\varphi_n(x)$ і почленно проінтеґруємо результат по $[a, b]$ (в припущенні, що це можливо),

$$f(x)\varphi_n(x) = c_1\varphi_1(x)\varphi_n(x) + c_2\varphi_2(x)\varphi_n(x) + ... + c_n\varphi_n(x)\varphi_n(x) + ...$$

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = c_1\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_n(x)dx + c_2\int_a^b \varphi_2(x)\varphi_n(x)dx + ... + c_n\int_a^b \varphi_n^2(x)dx + ...$$

Внаслідок ортогональності системи (2) всі інтеґрали праворуч дорівнюють нулю, за виключенням одного, і тому

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = c_n\int_a^b \varphi_n^2(x)dx ,$$

---

[1] Фурье, Жан Батист Жозеф (1768 – 1830), - французский математик

$$c_n = \frac{1}{\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx} \int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx. \qquad (5)$$

Ряд (4) з коефіцієнтами (5) називається рядом Фур"є для функції $f(x)$ за ортогональною системою функцій (3). Коефіцієнти (5) називаються коефіцієнтами Фур"є.

Ми можемо записати ряд (4) з коефіцієнтами (5) для доволі широкого класу функцій і ортогональних систем функцій, але ми не можемо, взагалі кажучи, гарантувати справедливість рівності (4).

З цієї причини звичайно пишуть

$$f(x) \sim c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \qquad (6)$$

і кажуть, що ряд (6) відповідає функції $f(x)$.

Основна проблема теорії рядів Фур"є полягає у відшуканні умов, які дозволяють замінити відповідність (6) точною рівністю (4). Така проблема є розв"язаною, наприклад, для тригонометричної системи функцій, до розгляду якої ми зараз переходимо.

11.2. РЯД ФУР"Є ЗА ТРИГОНОМЕТРИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ФУНКЦІЙ

Нехай дано тригонометричну систему функцій

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots. \qquad (7)$$

Всі функції цієї системи – періодичні з спільним періодом $2l$.

■Взявши $x + 2l$ замість x, отримаємо, наприклад, для косинуса

$$\cos\frac{n\pi(x+2l)}{l} = \cos\frac{n\pi x + 2n\pi l}{l} = \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + 2n\pi\right) = \cos\frac{n\pi x}{l}. \ ■$$

Теорема 1. Тригонометрична система функцій (7) ортогональна на відрізку $[-l, l]$ і на довільному відрізку довжини $2l$.

■Достатньо довести теорему для відрізка $[-l, l]$. Доведімо, що

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0,\ \int_{-l}^{l}\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0 \text{ для будь-яких } n, \qquad (8)$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx=0,\ \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=0 \text{ для різних } m \text{ і } n, \quad (9)$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=0 \text{ для будь-яких } m \text{ і } n, \qquad (10)$$

і, крім того,

$$\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{l}{2},\ \int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=l,\ \int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=l. \qquad (11)$$

Але

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{l}=\frac{l}{n\pi}(\sin n\pi-\sin(-n\pi))=0,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{l}=\frac{l}{n\pi}(\cos n\pi-\cos(-n\pi))=\frac{l}{n\pi}(\cos n\pi-\cos n\pi)=0,$$

звідки ми отримуємо рівності (8) і (після перетворення добутків тригонометричних функцій в алгебричні суми) – рівності (9) - (10). Перша з формул (11) є очевидною, для отримання інших достатньо застосувати формули зниження степеня. Наприклад,

$$\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=\int_{-l}^{l}\frac{1+\cos\frac{2n\pi x}{l}}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-l}^{l}dx+\int_{-l}^{l}\cos\frac{2n\pi x}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\Big|_{-l}^{l}+\frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{l}\right)=\frac{1}{2}(2l+0)=l.\blacksquare$$

Встановимо тепер відповідність між довільною функцією $f(x)$ і рядом Фур"є для неї за тригонометричною системою (7). Маємо

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (12)$$

де на підставі формул (5)

$$a_0=\frac{1}{\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^2}\int_{-l}^{l}f(x)\frac{1}{2}dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\int\limits_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

і аналогічно

$$b_n = \frac{1}{\int\limits_{-l}^{l}\left(\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Таким чином,

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (13)$$

Зауваження 1. Сума ряду (12) є періодичною функцією з періодом $2l$ (інакше кажучи, є $2l$-періодичною). Отже, якщо якась функція $f(x)$ розвивається в ряд Фур"є (12), (13) на множині всіх дійсних чисел, вона повинна бути $2l$-періодичною.

Означення 3. Функція $f(x)$ називається **кусково-монотонною** на відрізку $[a, b]$, якщо відрізок можна розбити на скінченну кількість частин (підінтервалів), на кожній з яких функція є монотонною.

Теорема 2 (теорема розвивності Діріхле[1]). Якщо $2l$-періодична функція $f(x)$ обмежена і кусково-монотонна на відрізку $[-l, l]$, то її ряд Фур"є (12), (13) збігається в будь-якій точці x. Сума ряду дорівнює самій функції

$$S(x) = f(x) \qquad (14)$$

в кожній точці x неперервності функції. Якщо ж x_0 є точкою розриву функції, то сума ряду Фур"є в ній дорівнює півсумі лівої і правої границь функції в цій точці,

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \qquad (15)$$

де $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x).$

---

[1] Діріхле, Петер Густав Лежен (1805 - 1859), - німецький математик

Отже,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\begin{cases} f(x) \text{ в точці неперервності,} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \text{ в точці розриву} \end{cases} \qquad (16)$$

(якщо коефіцієнти ряду визначаються формулами (13)).

Зауваження 2. Можна довести, що для парної або непарної функції формула (13) для коефіцієнтів Фур"є і сам ряд Фур"є набувають іншого вигляду. Саме,

для парної функції маємо

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n=0, \qquad (17)$$

і її ряд Фур"є містить тільки косинуси,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l};$$

для непарної функції маємо

$$a_0=0,\ a_n=0,\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (18)$$

і її ряд Фур"є містить тільки синуси,

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

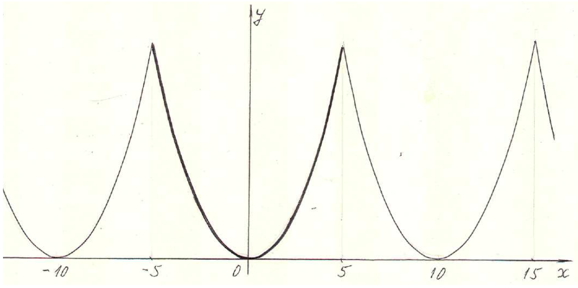


Рис. 1

Приклад 1. Функцію задано формулою

$$f(x)=x^2$$

на відрізку $[-5,5]$. Развинути її в ряд Фур"є.

Розглянемо $2\cdot 5$-періодичну функцію $f^*(x)$[1], яка визначена даною функцією на відрізку $[-5,5]$ (див. рис. 1).

---

[1] Така функція $f^*(x)$ називається **періодичним продовженням** даної функції $f(x)$ з відрізка $[-5,5]$ на множину всіх дійсних чисел.

Їй відповідає ряд Фур"є (12), (13) (для випадку $2l=10$, тобто $l=5$), саме

$$f^*(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{5}+b_n\sin\frac{n\pi x}{5}\right).$$

Функція $f^*(x)$ є парною, тому ми знаходимо коефіцієнти Фур"є у вигляді (17),

$$a_0=\frac{2}{5}\int_0^5 f(x)dx=\frac{2}{5}\int_0^5 x^2dx=\frac{2}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^5=\frac{50}{3},\quad b_n=0,$$

$$a_n=\frac{2}{5}\int_0^5 f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{2}{5}\int_0^5 x^2\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\left|\begin{matrix} u=x^2 & dv=\cos\frac{n\pi x}{5}dx \\ du=2xdx & v=\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\left(x^2\sin\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5-\int_0^5 2x\cdot\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}dx\right)=-\frac{4}{n\pi}\int_0^5 x\sin\frac{n\pi x}{5}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x & dv=\sin\frac{n\pi x}{5}dx \\ du=dx & v=-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\end{matrix}\right|=-\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{5}{n\pi}\left(x\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5+\frac{5}{n\pi}\int_0^5\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right)=$$

$$=\frac{20}{n^2\pi^2}\left(5\cos n\pi-\int_0^5\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right)=\frac{20}{n^2\pi^2}\left(5\cdot(-1)^n-\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\Bigg|_0^5\right)=\frac{(-1)^n\cdot 100}{n^2\pi^2}.$$

Функція $f^*(x)$ задовольняє умови теореми розвивності Діріхле: вона обмежена і кусково-монотонна на $[-5,5]$ ($0\le x^2\le 25$, x^2 спадає на підінтервалі $[-5,0]$ і зростає на підінтервалі $[0,5]$). Крім того, вона неперервна на множині всіх дійсних чисел, і тому її ряд Фур"є збігається до неї в будь-якій точці. Зокрема, він збігається до функції $f(x)=x^2$ на відрізку $[-5,5]$. Таким чином,

$$\forall x\in[-5,5]\quad x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{5}=\frac{25}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 100}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{5}.$$

Приклад 2. Функцію задано формулою

$$f(x)=\frac{1}{3}x$$

на інтервалі $(-\pi,\ \pi)$. Розвинути її в ряд Фур"є.

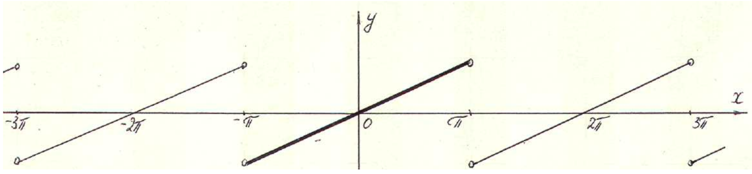


Рис. 2

Розглянемо 2π-періодичну функцію $f^*(x)$, яка визначена даною функцією на інтервалі $(-\pi,\ \pi)$ (див. рис. 2)[1]. Їй відповідає ряд Фур"є (для випадку $2l=2\pi$, тобто для випадку $l=\pi$)

$$f^*(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Функція $f^*(x)$ непарна, і ми знаходимо для неї коефіцієнти Фур"є за формулою (18),

$$a_0=0, a_n=0,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\begin{vmatrix}u=x & dv=\sin nxdx\\ du=dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{1}{n}(x\cos nx)\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{2}{3\pi n}\left(-\pi\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=-\frac{2\cos n\pi}{3n}.$$

Функція $f^*(x)$ задовольняє всі умови теореми Діріхле (вона обмежена числами $-\pi/3, -\pi/3$ і зростає на інтервалі $(-\pi,\ \pi)$) і є неперервною на множині всіх дійсних чисел, за виключенням точок 0, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$. Тому її ряд Фур"є збігається до функції в усіх точках, крім названих. Зокрема, він збігається до функції $f(x)=1/3\,x$ на заданому інтервалі $(-\pi,\pi)$, тобто

$$\forall x\in(-\pi,\pi)\quad \frac{1}{3}x=-\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin nx=-\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Сума ряду Фур"є в точках $\pm\pi$ дорівнює 0. Для точки $x=\pi$ ми міркуємо наступним чином:

$$S(\pi)=\frac{1}{2}\left(f^*(\pi-0)+f^*(\pi+0)\right)=\frac{1}{2}\left(f(\pi-0)+f(-\pi+0)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{3}(-\pi)\right)=0;$$

---

[1] Періодичне продовження функції $f(x)=1/3\,x$ з інтервалу $(-\pi,\ \pi)$ на множину всіх дійсних чисел.

аналогічно для іншої точки $-\pi$

$$S(-\pi)=\frac{1}{2}\left(f^*(-\pi-0)+f^*(-\pi+0)\right)=\frac{1}{2}\left(f(\pi-0)+f(-\pi+0)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{3}(-\pi)\right)=0$$

Приклад 3. Нехай задано функцію

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{на} \quad (-\pi, 0), \\ \dfrac{3}{\pi}x-2 & \text{на} \quad [0, \pi]. \end{cases}$$

Розвинути її в ряд Фур"є.

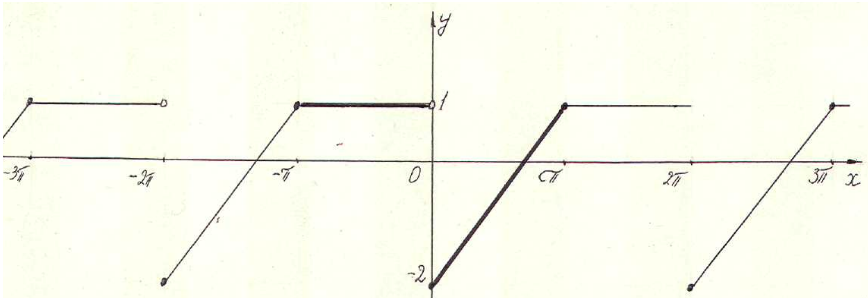


Рис. 3

Розглянемо 2π-періодичну функцію $f^*(x)$, визначену на інтервалі $(-\pi,\ \pi]$ даною формулою (рис. 3). Відповідний їй ряд Фур"є (12), (13) (для випадку $2l=2\pi$, тобто для випадку $l=\pi$)

$$f^*(x)\ \sim\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

де

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

Функцію $f(x)$ задано різнтми виразами на інтервалах $(-\pi, 0)$, $[0, \pi]$, і тому ми повинні обчислювати інтеґрали по $(-\pi,\ \pi]$ як суми інтеґралів по інтервалах $(-\pi, 0)$ и $[0, \pi]$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}1\cdot dx+\int_{0}^{\pi}\left(\frac{3}{\pi}x-2\right)dx\right)=$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0} + \left(\frac{3}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi + \frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} - 2\pi\right) = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\cos nxdx + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{3}{\pi}x - 2\right)\cos nxdx\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \frac{3}{\pi}x - 2 & dv = \cos nxdx \\ du = \frac{3}{\pi}dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\left(\left(\frac{3}{\pi}x - 2\right)\sin nx\right)\Big|_{0}^{\pi} -\right.$$

$$\left. - \frac{3}{\pi n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right) = \frac{3}{\pi^2 n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx = \frac{3}{\pi^2 n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} = \frac{3}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{3}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\sin nxdx + \int_{0}^{\pi}\left(\frac{3}{\pi}x - 2\right)\sin nxdx\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \frac{3}{\pi}x - 2 & dv = \sin nxdx \\ du = \frac{3}{\pi}dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\left(\left(\frac{3}{\pi}x - 2\right)\cos nx\right)\Big|_{0}^{\pi} +\right.$$

$$\left. + \frac{3}{\pi n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left(1 - \cos(-n\pi)\right) - \frac{1}{n}(\cos n\pi + 2) + \frac{3}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$\frac{1}{\pi n}(-1 + \cos n\pi - \cos n\pi - 2) = -\frac{3}{\pi n}.$$

Функція $f^*(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле (вона обмежена знизу і зверху числами -2 и 1, є сталою на відрізку $[-\pi, 0]$ і зростаючою на відрізку $[-\pi, \pi]$). Крім того, вона неперервна на множині всіх дійсних чисел, за винятком точок $x = 2\pi k, k \in Z$. Ряд Фур"є для функції $f^*(x)$ збігається до неї в будь-якій точці, відмінній від названих. Зокрема, він збігається до даної функції $f(x)$ на об"єднанні інтервалів $(-\pi, 0)$ і $(0, \pi]$, тобто

$$\forall x \in (-\pi, 0)\cup(0, \pi] \quad f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx - \frac{3}{\pi n}\sin nx\right).$$

Значення суми ряду Фур"є в точці розриву x=0 дорівнює

$$S(0)=\frac{1}{2}\left(f(-0)+f(+0)\right)=\frac{1}{2}\left(1+(-2)\right)=-\frac{1}{2}\neq f(0).$$

Воно не збігається з значеннямм $f(0)=-2$ функції $f(x)$ в цій точці.

Деякі українсько-російські терміни і словосполучення. Частина 2

Невизначений інтеґрал

1. ввести нову змінну	ввести новую переменную
2. виділити цілу частину	выделить целую часть
3. виражатися за допомогою елементарних функцій	выражаться с помощью элементарных функций
4. виразити (ко)синус через танґенс половинного арґументу	выразить (ко)синус через тангенс половинного аргумента
5. виразити (ко)синус через танґенс того ж арґументу	выразить (ко)синус через тангенс того же аргумента
6. відношення двох многочленів	отношение двух многочленов
7. властивість лінійності	свойство линейности
8. довільна стала	произвольная постоянная
9. заміна змінної	замена переменной
10.замінити змінну	заменить переменную
11.здійснити [виконати, зробити] підстановку, заміну $x=\varphi (t),\ t=\psi (x)$	произвести подстановку, замену $x=\varphi (t),\ t=\psi (x)$
12.змінна інтеґрування	переменная интегрирования
13.знак невизначеного інтеґрала	знак неопределённого интеграла
14.інтеґрування ~ заміною змінної, підстановкою; ~ частинами	интегрирование ~ заменой переменной, подстановкой; ~ по частям
15.інтеґрувати ~ заміною змінної, підстановкою; ~ частинами	интегрировать ~ заменой переменной, подстановкой ~ по частям
16.ірраціональна функція	иррациональная функция
17.ірраціональність ~ лінійна; ~ дробово-лінійна; ~ квадратична	иррациональность ~ линейная; ~ дробно-линейная; ~ квадратичная
18.існування	существование
19.існувати	существовать
20.лінійність	линейность
21.метод інтеґрування	метод интегрирования
22.метод невизначених коефіцієнтів	метод неопределённых коэффициентов
23.многочлен ~ *n*-го степеня	многочлен ~ *n*-ой степени
24.множина всіх первісних	множество всех первообразных
25.невизначений інтеґрал	неопределённый интеграл
26.непарна функція	нечётная функция

27.неперервна функція	непрерывная функция
28.обернена ~ задача; ~ операція; ~ функція	обратная ~ задача; ~ операция; ~ функция
29.обчислення	вычисление
30.обчислити	вычислить
31.основна задача	основная задача
32.парна функція	чётная функция
33.первісна	первообразная
34.перевірити правильність інтеґрування диференціюванням	проверить правильность интегрирования дифференцированием
35.перейти до змінної *t*	перейти к переменной *t*
36.підінтеґральна функція	подынтегральная функция
37.підінтеґральний вираз	подынтегральное выражение
38.підстановка	подстановка
39.повернутися до (старої, початкової, попередньої) змінної *x*	возвратиться к (старой, первоначальной, предыдущей) переменной *x*
40.позаінтеґральний член	внеинтегральный член
41.позначати	обозначать
42.пряме (безпосереднє) інтеґрування	прямое (непосредственное) интегрирование
43.раціональна функція	рациональная функция
44.раціональний дріб ~~ найпростіший (елементарний); ~~ неправильний; ~~ правильний	рациональная дробь ~~ простейшая (элементарная); ~~ неправильная; ~~ правильная
45.розвинення правильного раціонального дробу в суму найпростіших дробів	разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей
46.розвинути в суму найпростіших дробів	разложить в сумму простейших дробей
47.сім"я функцій (яка залежить від однієї сталої)	семейство функций (зависящее от одной постоянной)
48.стала інтеґрування	постоянная интегрирования
49.таблиця найпростіших інтеґралів	таблица простейших интегралов
50.табличний інтеґрал	табличный интеграл
51.універсальна тригонометрична підстановка	универсальная тригонометрическая подстановка
52.ціла частина неправильного раціонального дробу	целая часть неправильной рациональной дроби

Визначений інтеґрал

1. абсолютно збігатися	абсолютно сходиться

2. адитивність	аддитивность
3. визначений інтеґрал ~~ від *a* до *b*; ~~ з змінною верхньою межею [верхньою границею]; ~~ по відрізку [по інтервалу] ~~ як сума елементів;	определённый интеграл ~~ от *a* до *b*; ~~ с переменным верхним пределом; ~~ по отрезку [по интервалу]; ~~ как сумма элементов;
4. виконати [здійснити] подвійну підстановку	выполнить [произвести] двойную подстановку
5. геометричний сенс/зміст	геометрический смысл
6. головне значення розбіжного інтеґрала	главное значение расходящегося интеграла
7. границя інтеґральної суми	предел интегральной суммы
8. диференціал довжини дуги	дифференциал длины дуги
9. довжина дуги	длина дуги
10.елемент інтеґрування	элемент интегрирования
11.елемент шуканої величини	элемент искомой величины
12.збігатися (абсолютно, умовно)	сходиться (абсолютно, условно)
13.змінити межі [границі] інтеґрування	изменить пределы интегрирования
14.змінна інтеґрування	переменная интегрирования
15.знайти нові межі інтеґрування	найти новые пределы интегрирования
16.інтеґральна сума	интегральная сумма
17.інтеґровна функція	интегрируемая функция
18.криволінійна трапеція	криволинейная трапеция
19.криволінійний сектор	криволинейный сектор
20.круговий сектор	круговой сектор
21.ламана (лінія)	ломаная (линия)
22.лінійність	линейность
23.межа [границя] інтеґрування ~[~]~ верхня; ~[~]~ нижня	предел интегрирования ~[~]~ верхний; ~[~]~ нижний
24.механічний сенс/зміст	механический смысл
25.невласний інтеґрал ~~ абсолютно збіжний; ~~ другого роду; ~~ з нескінченною межею [з нескінченними межами] інтеґрування ~~ збіжний; ~~ першого роду; невласний інтеґрал	несобственный интеграл ~~ абсолютно сходящийся; ~~ второго рода; ~~ с бесконечным пределом [с бесконечными пределами] интегрирования; ~~ сходящийся; ~~ первого рода несобственный интеграл

~~ по скінченному інтервалу від розривної функції; ~~ розбіжний; ~~ умовно збіжний	~~ по конечному интервалу от разрывной функции; ~~ расходящийся; ~~ условно сходящийся
26.об"єм тіла ~~ обертання; ~~ по відомих площах паралельних поперечних перерізів (перпендикулярних фіксованій прямій)	объём тела ~~ вращения; ~~ по известным площадям параллельных поперечных сечений (перпендикулярных фиксированной прямой)
27.обертатися навколо осі [прямої]	вращаться вокруг оси [прямой]
28.однорідність	однородность
29.ознака збіжності	признак сходимости
30.оцінка [оцінювання] визначеного інтеґрала	оценка [оценивание] определённого интеграла
31.параметр розбиття	параметр разбиения
32.перейти до полярних координат	перейти к полярным координатам
33.підінтеґральна функція	подынтегральная функция
34.підінтеґральний вираз	подынтегральное выражение
35.підсумовування елементів	суммирование элементов
36.плоска область/фігура	плоская область/фигура
37.площа плоскої фігури	площадь плоской фигуры
38.подвійна підстановка	двойная подстановка
39.полярні координати	полярные координаты
40.поміняти місцями верхню і нижню межі [границі] інтеґрування	поменять местами верхний и нижний пределы интегрирования
41.поперечний переріз	поперечное сечение
42.похідна визначеного інтеґрала за змінною верхньою межою	производная определённого интеграла по переменному верхнему пределу
43.результат підсумовування елементів	результат суммирования элементов
44.розбиття інтервалу на частини	разбиение интервала на части
45.розбігатися	расходиться
46.середнє значення функції на інтервалі	среднее значение функции на интервале
47.скласти інтеґральну суму	составить интегральную сумму
48.теорема про середнє	теорема о среднем
49.точка розбиття (відрізка на частини)	точка разбиения (отрезка на части)
50.фізичний сенс/зміст	физический смысл
51.формула Ньютона-Лейбніца	формула Ньютона-Лейбница
52.шукана величина як сума елементів	искомая величина как сумма элементов

Подвійний інтеґрал

1. визначення меж [границь] інтеґрування	определение пределов интегрирования
2. визначити межі [границі] інтеґрування	определить пределы интегрирования
3. внутрішній інтеґрал	внутренний интеграл
4. елемент площі	элемент площади
5. звести обчислення подвійного інтеґрала ~~~~ до обчислення повторного інтеґрала; ~~~~ до послідовного обчислення двох визначених інтеґралів	свести вычисление двойного интеграла ~~~~ к вычислению повторного интеграла; ~~~~ к последовательному вычислению двух определенных интегралов
6. звести подвійний інтеґрал до повторного	свести двойной интеграл к повторному
7. змінити порядок інтеґрування	изменить порядок интегрирования
8. зовнішній інтеґрал	внешний интеграл
9. інтеґрувати спочатку по *x* (у), а потім по у (*x*)	интегрировать сначала по *x* (у), а потом по у (*x*)
10.криволінійний циліндр	криволинейный цилиндр
11.маса (не)однорідної фігури	масса (не)однородной фигуры
12.межі [границі] повторного інтеґрала	пределы повторного интеграла
13.область першого/другого типу	область первого/второго типа
14.описати область інтегрування	описать область интегрирования
15.платівка	пластинка
16.повторний інтеґрал	повторный интеграл
17.подвійний інтеґрал ~~ по області; ~~, поширений на область	двойной интеграл ~~ по области; ~~, распространенный на область
18.поділити область інтеґрування на дві області першого/другого типу	разделить область интегрирования на две области первого/второго типа
19.порядок інтеґрування	порядок интегрирования
20.послідовно інтегрувати	последовательно интегрировать
21.прямокутна область інтеґрування	прямоугольная область интегрирования
22.прямокутник з сторонами, паралельними до координатних осей	прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям
23.циліндричне тіло	цилиндрическое тело
24.циліндричний брус	цилиндрический брус

Диференціальні рівняння

1. визначити тип диференціального рівняння	определить тип дифференциального уравнения
2. визначник Вронського	определитель Вронского
3. відокремити змінні	разделить переменные
4. вільний член спеціального вигляду (спеціальної форми)	свободный член специального вида (специальной формы)
5. властивість (розв"язків, лінійного диференціального оператора *тощо*)	свойство (решений, линейного дифференциального оператора *и т.д.*)
6. вронскіан (визначник Вронського)	вронскиан (определитель Вронского)
7. графік розв"язку	график решения
8. диференціальне рівняння ~~ Бернуллі; ~~ в частинних похідних; ~~ відносно шуканої функції $y(x)$ ($x(y)$); ~~ відповідне [приєднане] лінійне однорідне; ~~ другого,…, n-го порядку, яке не містить явно шукану функцію [незалежну змінну]; ~~ з відокремленими змінними; ~~ з відокремлюваними змінними; ~~ звичайне; ~~ лінійне другого,… , n-го порядку з сталими коефіцієнтами; ~~ лінійне неоднорідне другого,… , n-го порядку; ~~ лінійне однорідне другого,… , n-го порядку; ~~ лінійне першого, другого,… , n-го порядку; ~~ однорідне першого порядку (відносно змінних) ; ~~ першого [другого, n-го, вищого] порядку; ~~, розв"язане відносно (старшої) похідної	дифференциальное уравнение ~~ Бернулли; ~~ в частных производных; ~~ относительно искомой функции $y(x)$ ($x(y)$); ~~ соответствующее [присоединенное] линейное однородное; ~~ второго,…, n-го порядка, которое не содержит явно искомой функции [независимой переменной]; ~~ с разделенными переменными; ~~ с разделяемыми переменными; ~~ обыкновенное; ~~ линейное второго,… n-го порядка с постоянными коэффициентами; ~~ линейное неоднородное второго,… , n-го порядка; ~~ линейное однородное второго, … , n-го порядка; ~~ линейное первого, второго, … , n-го порядка; ~~ однородное первого порядка (относительно переменных) ~~ первого [второго, n-го, высшего] порядка; ~~ , разрешенное относительно (старшей) производной
9. дорівнювати нулю тотожно	равняться нулю тождественно
10.задача Коші	задача Коши
11.задовольняти *щось* (диференціальне рівняння, початкову умову *тощо*)	удовлетворять *чему-либо* (дифференциальному уравнению, начальному

	условию *и т.п.*)
12.звести ~диференціальне рівняння або систему диференціальних рівнянь довільного порядку до нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку; ~ нормальну систему диференціальних рівнянь першого порядку до одного диференціального рівняння вищого порядку	свести ~ дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений произвольного порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений первого порядка; ~ нормальную систему дифференциальных уравнений первого порядка к одному дифференциальному уравнению высшего порядка
13.знайти розв"язок ~~ загальний; ~~ задачі Коші; ~~ крайової задачі; ~~ рівняння; ~~ системи рівнянь	найти решение ~~ общее; ~~ задачи Коши; ~~ краевой задачи; ~~ уравнения; ~~ системы уравнений
14.зниження порядку диференціального рівняння	понижение порядка дифференциального уравнения
15.знизити порядок диференціального рівняння	понизить порядок дифференциального уравнения
16.інтеґральна крива	интегральная кривая
17.інтегрування диференціального рівняння (в квадратурах)	интегрирование дифференциального уравнения (в квадратурах)
18.інтегрувати диференціальне рівняння (в квадратурах)	интегрировать дифференциальное уравнение (в квадратурах)
19.квадратура	квадратура
20.квазіполіном	квазиполином
21.коефіцієнт ~ лівої частини лінійного диференціального рівняння; ~ многочлена; ~ невизначений	коэффициент ~ левой части линейного дифференциального уравнения; ~ многочлена; ~ неопределенный
22.корені характеристичного рівняння ~~~ дійсні й рівні; ~~~ дійсні й різні; ~~~ комплексні	корни характеристического уравнения ~~~ вещественные и равные; ~~~ вещественные и различные; ~~~ комплексные
23.корінь характеристичного рівняння ~~~ двократний; ~~~ дійсний; ~~~ комплексний;	корень характеристического уравнения ~~~ двукратный; ~~~ вещественный; ~~~ комплексный;

корінь характеристичного рівняння ~~~ кратний; ~~~ простий	корень характеристического уравнения ~~~ кратный; ~~~ простой
24.лінійний диференціальний оператор	линейный дифференциальный оператор
25.лінійно залежні (незалежні) функції, розв"язки	линейно зависимые (независимые) функции, решения
26.метод ~ Бернуллі ~ варіації довільних сталих ~ Ейлера ~ наближений ~ невизначених коефіцієнтів ~ послідовних наближень ~ розв"язання	метод ~ Бернулли; ~ вариации произвольных постоянных; ~ Эйлера; ~ приближенный; ~ неопределенных коэффициентов; ~ последовательных приближений; ~ решения
27.містити похідну чи диференціал шуканої функції	содержать производную или дифференциал искомой функции
28.многочлен (нульового [першого, другого,…, *n*-го] степеня)	многочлен (нулевой [первой, второй, …, *n*-й] степени)
29.найвищий порядок похідних шуканої функції, які містяться в диференціальному рівнянні	наивысший порядок производных искомой функции, которые содержатся в дифференциальном уравнении
30.не містити явно (незалежну змінну, шукану функцію)	не содержать явно (независимую переменную, искомую функцию)
31.незалежна змінна	независимая переменная
32.перетворювати диференціальне рівняння у тотожність	обращать дифференциальное уравнение в тождество
33.перетворюватися в тотожність	обращаться в тождество
34.підставити *щось* в рівняння	подставить *что-либо* в уравнение
35.порядок (диференціального рівняння, похідної *тощо*)	порядок (дифференциального уравнения, производной *и т.п.*)
36.послідовне інтегрування	последовательное интегрирование
37.початкова задача [задача Коші]	начальная задача [задача Коши]
38.прирівнювати, ототожнювати коефіцієнти при однакових степенях x	приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x
39.розв"язати диференціальне рівняння відносно (старшої) похідної	разрешить дифференциальное уравнение относительно (старшей) производной
40.розв"язок ~ в неявному вигляді; ~ загальний;	решение ~ в неявном виде; ~ общее;

розв”язок ~ задачі Коші; ~ рівняння, *зокрема* диференціального; ~ системи рівнянь; ~ частинний	решение ~ задачи Коши; ~ уравнения, *в частности* дифференциального; ~ системы уравнений; ~ частное
41.система ~ диференціальних рівнянь; ~ лінійних алгебричних рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів; ~ нормальна диференціальних рівнянь	система ~ дифференциальных уравнений; ~ линейных алгебраических уравнений относительно неопределённых коэффициентов; ~ нормальная дифференциальных уравнений
42.спеціальний вигляд вільного члену	специальный вид свободного члена
43.старша похідна	старшая производная
44.структура загального розв”язку	структура общего решения
45.теорема існування і єдиності розв”язку задачі Коші	теорема существования и единственности решения задачи Коши
46.тип диференціального рівняння	тип дифференциального уравнения
47.умова ~ гранична (крайова); ~ додаткова; ~ достатня; ~ Коші; ~ необхідна; ~ необхідна і достатня; ~ початкова	условие ~ граничное (краевое); ~ дополнительное; ~ достаточное; ~ Коши; ~ необходимое; ~ необходимое и достаточное; ~ начальное
48.функція ~ від відношення змінних; ~ однорідна k-го виміру ~ однорідна нульового виміру; ~ шукана	функция ~ от отношения переменных; ~ однородная k-го измерения; ~ однородная нулевого измерения; ~ искомая
49.характеристичне рівняння	характеристическое уравнение
50.частинне значення довільної сталої	частное значение произвольной постоянной
51.шукати розв”язок у вигляді	искать решение в форме

Ряди

1. дослідити ряд на (абсолютну, умовну *та ін.*) збіжність	исследовать ряд на (абсолютную, условную *и пр.*) сходимость
2. достатня ознака збіжності ряду	достаточное условие сходимости ряда
3. загальний член ряду	общий член ряда
4. залишок ряду (після *n*-го члена)	остаток ряда (после *n*-го члена)
5. збігатися (абсолютно, умовно *та ін.*)	сходиться (абсолютно, условно *и т.д.*)
6. збіжність ряду	сходимость ряда
7. інтеґральна ознака збіжності	интегральный признак сходимости
8. інтервал збіжності степеневого ряду	интервал сходимости степенного ряда
9. круг збіжності степеневого ряду з комплексними членами	круг сходимости степенного ряда с комплексными членами
10.необхідна і достатня умова збіжності ряду	необходимое и достаточное условие сходимости ряда
11.необхідна ознака збіжності ряду	необходимый признак сходимости ряда
12.необхідна умова збіжності ряду	необходимое условие сходимости ряда
13.область збіжності	область сходимости
14.ознака збіжності (Даламбера, Коші, Лейбніца)	признак сходимости (Даламбера, Коши, Лейбница)
15.ознака порівняння	признак сравнения
16.радикальна ознака збіжності	радикальный признак сходимости
17.радіус збіжності степеневого ряду	радиус сходимости степенного ряда
18.розбігатися (про ряд)	расходиться (о ряде)
19.розвиватися [розкладатися] в ряд	раскладываться в ряд
20.розвинення функції в ряд	разложение функции в ряд
21.розвинути функцію в ряд	разложить функцию в ряд
22.ряд ~ абсолютних величин членів ряду; ~ абсолютно збіжний; ~ біномний; ~ гармонічний; ~ геометрична проґресія; ~ збіжний; ~ з довільними дійсними членами ~ з комплексними членами; ~ знакододатний, з додатними членами; ~ знакозмінний [знакопереміжний, знакопочережний, альтернуючий] ;	ряд ~ абсолютных величин членов ряда; ~ абсолютно сходящийся; ~ биномиальный; ~ гармонический; ~ геометрическая прогрессия; ~ сходящийся; ~ с произвольными вещественными членами; ~ с комплексными членами; ~ знакоположительный, с положительными членами Тейлора; ~ знакочередующийся;

ряд ~ Маклорена; ~ розбіжний; ~ степеневий; ~~ з комплексними членами; ~ Тейлора; ~ умовно збіжний; ~ функціональний; ~ Фур"є; ~ числовий	ряд ~ Маклорена; ~ расходящийся; ~ степенной; ~~ с комплексными членами; ~ Тейлора; ~ условно сходящийся; ~ функциональный; ~ гармонический; ~ числовой
23.сума ряду	сумма ряда
24.точка збіжності	точка сходимости
25.часткова сума ряду (перша, друга, третя, *n*-на)	частичная сумма ряда (первая, вторая, третья, *n*-ая)

ЗМІСТ

Математичний аналіз першого семестру. Частини 1 - 2: Вступ до аналізу. Диференціальне числення та його застовування. Інтеґральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди: Посібник по вивченню курсу ”Математичний аналіз” для студентів ДонНТУ**:** Посібник по вивченню курсу ”Математичний аналіз” для студентів ДонНТУ

СОСТАВИТЕЛЬ: Косолапов Юрий Федорович, кандидат физико-математических наук, профессор

ФОРМАТ 60×84 $^1/_{16}$.

Умовних друкарських аркушів

83000, м. Донецьк, вул. Артема, 58, ДонНТУ