

УДК 622.785

С. В. КРИВЕНКО (канд. техн. наук, доц.)

Приазовський державний технічний університет

АНАЛИЗ ПОЛИДИСПЕРСНОСТИ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ*

Разработаны аналитические способы расчета эквивалентного диаметра и показателей однородности сыпучего материала, гранулометрический состав которого описан распределением Вейбулла. Объективность способов оценивали по отклонению эквивалентного диаметра от моды и значению коэффициента вариации крупности кусков. Наиболее приемлемым способом расчета статистических показателей грансостава для доменного кокса является средневзвешенный, для окомкованной аглошихты – среднелогарифмический.

порозность, эквивалентный диаметр частиц, шихта, газопроницаемость

При переработке сыпучих материалов с применением принудительного движения газов необходимо обеспечить высокую газопроницаемость сформированного слоя. Решающее влияние на потери давления в слое оказывает гранулометрический состав загруженной шихты. При широком диапазоне изменения крупности гранул возможно существенное ухудшение газодинамических условий переработки. Поэтому анализ однородности гранулометрического состава сыпучего материала позволит оптимизировать работу агрегатов.

Для повышения газопроницаемости и высоты агломерируемого слоя разработан способ управления частотой вращения окомкователя, в котором с помощью видеокамеры (датчика) бесконтактным способом в потоке контролируют внешний вид слоя аглошихти, загруженной на паллеты агломерационной машины [1]. Путем размещения кругов в засвеченные участки (гранулы) полученного изображения слоя на ЭВМ рассчитывают гранулометрический состав окомкованной шихты. Частоту вращения окомкователя регулируют с целью обеспечения максимального эквивалентного диаметра гранул и минимальной вариации их крупности.

Для реализации способа управления частотой вращения окомкователя расчет эквивалентного диаметра гранул d_s и показателя однородности сыпучего материала может выполняться по дискретной или аналитической формулам. Существуют различные дискретные способы расчета d_s : среднелогарифмический, средневзвешенный, среднелогарифмический и т.д. [4, 5].

Они по-разному учитывают долю частиц каждого диаметра в смеси, в результате рассчитанные значения d , также различны. Однако более объективно и точно определять эквивалентный диаметр можно с помощью аналитических зависимостей, основанных на описании гранулометрического состава статистическим распределением.

При всем многообразии дискретных уравнений по расчету эквивалентных диаметров в литературе не приводят соответствующие им аналитические формулы для расчета d , и σ_d^2 .

Розин и Раммлер, статистически анализируя гранулометрический состав измельченных продуктов, определили, что распределение масс частиц различных классов крупности описывается распределением Вейбулла. Выражения для плотности распределения $f(d)$ и функции распределения $F(d)$ имеют вид [2]

$$f(d) = \beta \lambda d^{\beta-1} e^{-\lambda d^\beta}; F(d) = 1 - e^{-\lambda d^\beta}; \lambda > 0, \beta > 0, d > 0. \quad (1)$$

При $\beta = 1$ распределение Вейбулла обращается в экспоненциальное, при $\beta = 2$ это распределение называют распределением Релея, при $\beta \rightarrow \infty$ распределение стремится к нормальному.

Целью настоящей статьи является разработка аналитических способов расчета эквивалентного диаметра гранул и показателей однородности полидисперсного сыпучего материала, гранулометрический состав которого описан распределением Вейбулла, а также выбор наиболее объективного из них для применения в системе управления частотой вращения окомкователя.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. Усредненной характеристикой распределения вероятностей непрерывной случайной величины x является математическое ожидание [2]

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx. \quad (2)$$

Применительно к сыпучим материалам, x является диаметром d частиц и изменяется от 0 до ∞ мкм. При этом $M(d)$ равно эквивалентному диаметру d_e .

Для распределения Вейбулла (1) математическое ожидание, характеризующее средневзвешенный эквивалентный диаметр, определяют уравнением [2]

$$d_s = M(d) = \lambda^{-1/\beta} \Gamma(1+1/\beta); \lambda > 0, \beta > 0, \quad (3)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} V^{x-1} \cdot e^{-V} dV \text{ (интеграл Эйлера); } x > 0. \quad (4)$$

Аналитической зависимости (3) соответствует дискретная формула

$$d_s = \sum_{i=1}^N g_i \cdot d_i, \text{мм}; \sum g_i = 1, \quad (5)$$

где d_i – диаметр i -той фракции, мм; g_i – содержание частиц i -той фракции, д.ед.; N – количество фракций.

Для характеристики однородности и газопроницаемости сыпучего материала используют порозность слоя ε , доля межкусковых пустот в общем объеме. Максимальное значение ε указывает на минимальное отклонение от доминирующей фракции с диаметром d_{dom} частиц других классов крупности, т.е. минимальной дисперсии относительно моды [3]. Для полифракционных шихт, особенно агломерационных, крупность доминирующей фракции не всегда соответствует d_s . Кроме того, возможно, что сыпучие материалы с ярко противоположными распределениями будут иметь одинаковое значение d_s . Поэтому должен быть показатель, характеризующий равномерность распределения фракций относительно d_s . В математической статистике одним из показателей оценки однородности количественных данных является дисперсия σ^2 , которую вычисляют по дискретной и аналитической формулам, соответственно [2]

$$\sigma_d^2 = \sum_{i=1}^N g_i \cdot (d_i - d_s)^2 \text{ и } \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x) dx, \text{мм}^2. \quad (6)$$

В результате решения (6) с учетом (1) и $x = d$ получена формула для расчета средневзвешенной дисперсии [2]

$$\sigma_d^2 = \lambda^{-2/\beta} [\Gamma(1+2/\beta) - \Gamma^2(1+1/\beta)], \text{мм}^2; \lambda > 0, \beta > 0. \quad (7)$$

Из формулы (7) следует, что значение σ_d^2 будет минимальным при

распределении гранулометрического состава близком к нормальному ($\beta \rightarrow \infty$).

Более применимым показателем для оценки распределения фракций различных диаметров относительно d_s , является коэффициент вариации

$$V = \sqrt{\sigma_d^2} / d_s, \text{мм/мм.} \quad (8)$$

Чем больше значение V , тем относительно больший разброс и меньшая выравненность исследуемых значений диаметров частиц.

При расчете средневзвешенного d_s с помощью формул (3) и (7) не учтены свойства каждой фракции (удельные поверхность и объем).

РАЗРАБОТКА АНАЛИТИЧЕСКИХ СПОСОБОВ РАСЧЕТА ЭКВИВАЛЕНТНОГО ДИАМЕТРА И ДИСПЕРСИИ ЧАСТИЦ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА. Наилучшее обобщение при расчете гидравлического сопротивления в слое дает эквивалентный диаметр по удельной поверхности частиц (среднегармонический), который рассчитывают по следующей дискретной формуле [4]

$$d_s = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N g_i}} \cdot \frac{1}{d_i}, \text{мм; } \sum g_i = 1. \quad (9)$$

Для вывода аналитического выражения для расчета среднегармонического диаметра, определяли математическое ожидание величины $1/d_s$. В результате преобразований получили

$$d_s = \frac{1}{M \left(\frac{1}{d_s} \right)} = \frac{\lambda^{-\frac{1}{\beta}}}{\Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta} \right)}, \text{мм; } \lambda > 0, \beta > 1. \quad (10)$$

Среднегармоническая дисперсия также получена относительно $1/d_s$,

$$\sigma_{1/d_s}^2 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{d} - M \left(\frac{1}{d_s} \right) \right)^2 f(x) dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{d} - \lambda^{\frac{1}{\beta}} \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right)^2 \beta \lambda d^{\beta-1} e^{-\lambda d^\beta} d(d), \frac{1}{\text{мм}^2}. \quad (11)$$

и после преобразований рассчитывали по формуле

$$\sigma_d^2 = \frac{\lambda^{-\frac{2}{\beta}}}{\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}, \text{мм}^2; \lambda > 0, \beta > 2. \quad (12)$$

При расчете среднегармонического диаметра значение β должно быть более 1, при расчете σ_d^2 – быть более 2.

Аналогично получают формулы для d_s и σ_d^2 при остальных способах анализа гранулометрического состава сыпучего материала, приведенных в табл. 1.

Согласно [4] наиболее объективным способом анализа является среднелогарифмический диаметр (табл. 1, способ №3), который рассчитывают по дискретной формуле

$$\lg d_s = \sum_{i=1}^N g_i \cdot \lg d_i \quad (13)$$

Для вывода аналитического выражения для расчета среднелогарифмического d_s , определяли математическое ожидание величины $\lg(d_s)$. В результате преобразований получили (см. табл. 1)

$$d_s = \lambda^{-\frac{1}{\beta}} \cdot 10^{-\frac{\gamma}{\beta \cdot \ln(10)}} \approx (1,78 \cdot \lambda)^{-1/\beta}, \text{мм}; \lambda > 0, \beta > 0, \quad (14)$$

где γ – постоянная Эйлера, $\gamma \approx 0,5772$.

Дисперсию рассчитывали по формуле (см. табл. 1)

$$\sigma_{\lg d_s}^2 = \frac{\pi^2}{6 \cdot \beta^2 \cdot \ln^2(10)} \approx \frac{0,31}{\beta^2}; \beta > 0, \text{ и } \sigma_d^2 = 100^{\sqrt{\sigma_{\lg d}^2}} = 100^{\frac{0,557}{\beta}} \approx 13^{\frac{1}{\beta}}, \text{мм}^2. \quad (15)$$

Из (15) следует, что λ не влияет на значение среднелогарифмического σ_d^2 .

Для поиска крупности доминирующей фракции наиболее приемлемым способом анализа является мода (табл. 1, способ №8), которая указывает на максимум плотности распределения. Расчет моды осуществляли по следующим дискретным формулам [3]

Таблица 1 – Способы анализа полидисперсности сыпучих материалов

№	Способ	Экв. диаметр $d_3, \text{мм}$		Дисперсия $\sigma^2, \text{мм}^2$
		Дискретная	Аналитическая	
1	2	3	4	$\lambda^{-2/\beta} [\Gamma(1+2/\beta) - \Gamma^2(1+1/\beta)];$ $\lambda > 0, \beta > 0$
1	Средневзвешенный	$\sum_{i=1}^N g_i \cdot d_i$	$\lambda^{-1/\beta} \Gamma(1+1/\beta);$ $\lambda > 0, \beta > 0$	$\lambda^{-2/\beta} [\Gamma(1+2/\beta) - \Gamma^2(1+1/\beta)];$ $\lambda > 0, \beta > 0$
2	Средних масс	$\sqrt[3]{\sum_{i=1}^N g_i d_i^3}$	$\lambda^{-1/\beta} \sqrt[3]{\Gamma(1+3/\beta)};$ $\lambda > 0, \beta > 0$	$\lambda^{-2/\beta} \sqrt[3]{\Gamma(1+\frac{6}{\beta}) - \Gamma^2(1+\frac{3}{\beta})};$ $\lambda > 0, \beta > 0$
3	Среднелогарифмический	$\lg d_3 = \sum_{i=1}^N g_i \cdot \lg d_i$ $d_3 = 10^{\lg d_3}$	$\lambda^{-1/\beta} \cdot 10^{-\beta \ln(10)} \approx$ $\approx (1,78 \cdot \lambda)^{-1/\beta};$ $\lambda > 0, \beta > 0$	$\sigma_{\lg d}^2 = \sum_{i=1}^N (\lg d_i - \lg d_3)^2 \cdot g_i$ $\sigma_d^2 = 100^{\sqrt{\sigma_{\lg d}^2}}$
4	По удельной поверхности частиц (среднегармонический)	$\frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{d_i}}$	$\lambda^{-1/\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)^2};$ $\lambda > 0, \beta > 1$	$\lambda^{-2/\beta} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)};$ $\lambda > 0, \beta > 2$
5	По удельному диаметру	$\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{d_i^2}}}$	$\lambda^{-1/\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\beta}\right)}};$ $\lambda > 0, \beta > 2$	$\lambda^{-2/\beta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Gamma\left(1-\frac{4}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\beta}\right)}};$ $\lambda > 0, \beta > 4$

Продолжение табл. 1.

1	2	3	4	5	6
По средне-арифметическому объему	$\sqrt[3]{\frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{d_i^3}}}$	$\lambda^{-\frac{1}{\beta}} \sqrt[3]{\frac{1}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{d_i^3} - \frac{1}{d_3^3}\right)^2}} \cdot g_i$	$\lambda^{-\frac{1}{\beta}} \sqrt[3]{\Gamma\left(1-\frac{6}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{3}{\beta}\right)}; \lambda > 0, \beta > 6$		
По средне-арифметической поверхности	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{d_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{d_i^3}}}$	$\lambda^{-\frac{1}{\beta}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{d_i} - \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{d_3}\right)^2}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{d_i^3} - \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{d_3^3}\right)^2}} \cdot g_i$	$\lambda^{-\frac{2}{\beta}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{6}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{3}{\beta}\right)}}$ $\frac{\ln^2 \lambda}{\beta^2} + \frac{2\gamma \ln \lambda}{\beta^2} + \frac{\pi^2}{6 \cdot \beta^2} + \frac{\gamma^2}{\beta^2}; \lambda > 0, \beta > 6$		
Мода		$f(d) = \frac{g_i}{d_{\max} - d_{\min}}$	$\lambda^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right)^{-2} \left(\frac{\beta - 1}{\beta \lambda}\right)^{\frac{1}{\beta}} \lambda^{-\frac{1}{\beta}} \times$ $\times \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)_+ \left(\frac{\beta - 1}{\beta \lambda}\right)^{\frac{2}{\beta}}; \lambda > 0, \beta > 0$		
Медиана	$\sum_{i=1}^m g_i = \sum_{i=m+1}^N g_i$	$\lambda^{-\frac{1}{\beta}} \cdot \ln^{\frac{1}{\beta}}(2); \lambda > 0, \beta > 0$	$\lambda^{-\frac{2}{\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - 2 \cdot \ln^{\frac{1}{\beta}}(2) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) + \ln^{\frac{2}{\beta}}(2) \right]; \lambda > 0, \beta > 0$		

$$f(d) = \frac{g_i}{d_{\max} - d_{\min}} \rightarrow \max, d_{mod} = d_{\max} - (d_{\max} - d_{\min}) \left/ \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{f_i - f_{i+1}} + 1 \right) \right., \quad (16)$$

где d_{\max} , d_{\min} – максимальная и минимальная крупность частиц фракции, соответственно, мм; f_i , f_{i-1} , f_{i+1} – относительное содержание доминирующей, предыдущей и последующей фракций, соответственно, %/мм.

Аналитическое выражение для моды определяли, исходя из условия $f'(d) = 0$.

Медианный диаметр (табл. 1, способ №9) делит весь объем частиц сыпучего материала на две равные части, т.е. необходимо найти решение уравнения $F(d) = 0,5$. Дисперсии для моды и медианы гранулометрического состава рассчитывали по формуле (6).

РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ. В табл. 2 приведен гранулометрический состав исследуемых шихт. В табл. 3 приведены результаты расчета d_s , σ_d^2 и V_d для различных известных методик определения d_s , применительно к шихтам, представленным в табл. 2.

Таблица 2 – Массовый гранулометрический состав исследуемых шихт

Шихта		Содержание g_i фракции диаметром d_i						λ	β				
кокс	мм	0-25		25-40		40-60		60-80		80-100		$1,3 \cdot 10^{-7}$	3,96
	%	3,8		28,2		49,9		15,7		2,4			
окомкованная аглошахта	мм	0 – 1	1 – 2	2 – 3	3 – 5	5 – 7	7 – 10	10 – 14				0,095	1,47
	%	14,14	5,52	14,04	20,99	13,42	15,28	16,61					

Значения параметров, рассчитанных аналитически, с незначительной погрешностью совпадают с рассчитанными по дискретным формулам. Для d_s и σ_d^2 , приведенных в таблице, при недопустимых значениях β результат был менее 0 или являлся комплексным числом без действительной части. Поэтому соответствующему значению присваивали 0, что подтверждено результатами расчетов с помощью дискретных формул.

Согласно табл.3 получено, что при расчете d_s и σ_d^2 полностью охватывают весь диапазон изменения β средневзвешенный (№1), средних масс (№2) и среднелогарифмический (№3) способы анализа, а также мода (№8) и медиана (№9). Для способов №1, 2, 8 и 9 значения d_s слишком завышены.

Таблица 3 – Анализ грансостава шихт различными способами

№	Способ расчета	Кокс			Аглошихта		
		d_s , мм	σ^2 , мм ²	V , $\frac{\text{мм}}{\text{мм}}$	d_s , мм	σ^2 , мм ²	V , $\frac{\text{мм}}{\text{мм}}$
1	Средневзвешенный	49,7	197,6	0,3	4,5	9,6	0,7
2	Средних масс	53,3	2378	0,9	6,3	69,8	1,3
3	Среднелогарифмический	47,4	1,9	0,0	3,4	5,7	0,7
4	По удельной поверхности частиц	44,6	10720	2,3	1,8	-	-
5	По удельному диаметру	0	0	-	0	0	-
6	По среднеарифметической поверхности	31,4	0	0,0	1,7	3,5	1,1
7	По среднеарифметическому объему	35,3	0	0,0	1,7	0	0
8	Мода	50,9	199,3	0,3	2,3	14,5	1,7
9	Медианный	50,0	197,7	0,3	3,9	10,0	0,8

Для способов №№ 1 – 3 при увеличении β и d_s происходит уменьшение σ_d^2 .

Максимальное влияние мелких частиц соответствует способу анализа по удельной поверхности частиц (№4), которое рассчитывают при $\beta > 1$. При $\beta = 1$ значение $\sigma_d^2 = 0$ и увеличивается при росте β . Аналогичные тенденции наблюдаются при $\beta > 4$ для способа № 5, при $\beta > 6$ для способов №№ 6 и 7, что однако, практически не встречается для реальных шихт.

Получено, что для всех способов анализа при увеличении β значения d_s сближаются.

Максимальное значение V для повышенного количества мелких фракций соответствует способу №2, что поясняется более значительным влиянием крупных фракций на σ_d^2 , чем на d_s .

При повышенном количестве крупных фракций ($\beta > 4$) максимальная σ_d^2 для способа № 4. Это объясняется тем, что в способе №4 влияние крупных фракций на σ_d^2 меньше, чем на d_s .

ВЫВОДЫ

- Получены аналитические формулы для различных способов определения эквивалентных диаметров и показателей однородности полифракционного сыпучего материала, описываемого распределением Вейбулла. Выбор способа оценки полидисперсности сыпучего материала зависит от

того, влияние каких фракций нужно учесть в большей степени. Минимальные значения эквивалентных диаметров получены для способа расчета по среднеарифметической поверхности, максимальные – для способа средних масс.

2. Применительно к коксу эквивалентные диаметры, рассчитанные способами средневзвешенным $d_s = 49,7 \text{ мм}$ и средних масс $d_m = 53,3 \text{ мм}$, наиболее близки к mode $d_m = 50,9 \text{ мм}$. Для окомкованной аглошихты наиболее близки к mode $d_m = 2,3 \text{ мм}$ эквивалентные диаметры, рассчитанные способами среднелогарифмическим $d_s = 3,4 \text{ мм}$ и по удельной поверхности частиц $d_s = 1,8 \text{ мм}$. В способе анализа по удельной поверхности частиц при $\beta < 1$, характеризующее низкое качество окомкования, дисперсия аналитически не рассчитывается, а при расчете по дискретной формуле – близка к нулю.

3. Значение вариации крупности кусков кокса для способа расчета по удельной поверхности частиц завышено и равно $2,3 \text{ мм}/\text{мм}$. Наиболее объективными являются способы расчета вариации средневзвешенный $V = 0,3 \text{ мм}/\text{мм}$ и средних масс $V = 0,6 \text{ мм}/\text{мм}$. Для окомкованной аглошихты способ средних масс приводит к завышенному значению $V = 1,3 \text{ мм}/\text{мм}$. Наиболее объективными являются способы расчета вариации средневзвешенный $V = 0,7 \text{ мм}/\text{мм}$ и среднелогарифмический $V = 0,7 \text{ мм}/\text{мм}$. На значение вариации, рассчитанной среднелогарифмическим способом, не влияет диапазон крупности частиц сыпучего материала.

4. Наиболее объективными способами оценки полидисперсности доменного кокса является средневзвешенный, для окомкованной аглошихты – среднелогарифмический. Способ расчета по удельному диаметру для металлургических шихт не применим.

5. Способ расчета среднелогарифмического диаметра и вариации крупности гранул окомкованной аглошихты наиболее применим при автоматизированном контроле газопроницаемости аглошихты и управлении процессом окомкования.

Список литературы

- Кривенко С.В. Способ управления частотой вращения окомкователя. – Пат. 86487 Укр, МПК (2009) F27B 21/00, C22B 1/00 №а 2007 07646 Заявл. 06.07.2007.; Опубл. Б.№8 27.04.2009. – 10 с.
- Рубинштейн Ю.Б., Волков Л.А. Математические методы в обогащении полезных ископаемых. – М.: Недра, 1987. – 296 с.
- Тарасов В.П. Томаш А.А. Механика жидкости и газа в доменной плавке. // Пізнання процесів доменної плавки: Колективна праця / Под редакцией Большакова В.И., Товаровского Й. Г. – Днепропетровск: Пороги, 2006. – С. 110-132.
- Братчиков С.Г. Теплотехника окускования железорудного сырья. – М.: Метал-

- лургия, 1970. – 344 с.
5. Доменное производство: Справочник в 2 т. – Т.1. Подготовка руд и доменный процесс. – М.: Металлургия, 1989. – 496 с.

* - Работа выполнена под руководством проф., д-р. техн. наук, Томаша А. А.

Надійшла до редколегії 23.09.2008.

C. V. КРИВЕНКО

Приазовський державний технічний
університет

Аналіз полідисперсності сипучих матеріалів. Розроблені методики оцінки ступеню полідисперсності сипучого матеріалу за допомогою коефіцієнту вариації.

порожність, еквівалентний діаметр часток, шихта, газопроникність

S. V. KRIVENKO

Priazovsky State Technical University

Analysis of Polydispersion of Friable Materials. The methods of estimating the degree of polydispersion of friable material are developed by variation coefficient.

fractional void volume, equivalent diameter of particles, gas permeability

© C. V. Кривенко, 2009