МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
ДОНЕЦЬКІЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра АТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання курсової роботи за курсом

«ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ КОМП'ЮТЕРНОГО АНАЛІЗУ»

для студентів денної та заочної форми навчання за напрямами підготовки:
6.050201 «Системна інженерія», спеціалізація:
«Системи управління та автоматика»
6.050903 «Телекомунікації», спеціалізація:
«Телекомунікаційні системи та мережі»

№ ____

Розглянуті на засіданні кафедри
«Автоматика та телекомунікації»
протокол № 9 від 25 серпня 2011р.

Затверджені на засіданні
навчально-видавничої ради ДонНТУ
протокол № __ від _____________

Донецьк – 2011

Методичні вказівки до виконання курсової роботи за курсом «Чисельні методи комп’ютерного аналізу» для студентів денної та заочної форми навчання напрямів підготовки 6.050201 «Системна інженерія», спеціалізація «Системи управління та автоматика» та 6.050903 «Телекомунікації», спеціалізація «Телекомунікаційні системи та мережі» / Долгіх І.П., Яремко І.Н., Зайцева Е.Є. – Донецьк, ДонНТУ, 2011. – 46 с.

Укладачі: ст. викл. Долгіх І.П.
ст. викл. Яремко І.Н.
ас. Зайцева Е.Є.

Рецензент:

Затверджені на засіданні кафедри
«Автоматика та телекомунікації»
протокол № 9 від 25 серпня 2011р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасна обчислювальна техніка вимагає від інженерів знання основ обчислювальної математики (чисельних методів) та застосування цих знань до вирішення різних практичних задач. Обчислювальна математика – одна з основних дисциплін, що необхідна для підготовки спеціалістів, які працюють в різних галузях науки та господарчо-промислового комплексу.

Дані методичні вказівки є керівництвом до виконання курсової роботи, присвяченої важливому розділу обчислювальної математики, а саме чисельним методам розв'язку систем рівнянь. Вказівки складено на основі лекційного курсу у відповідності до робочої навчальної програми для студентів денної форми навчання напрямів підготовки 6.050201 «Системна інженерія», спеціалізація «Системи управління та автоматика» та 6.050903 «Телекомунікації», спеціалізація «Телекомунікаційні системи та мережі».

Розділ обчислювальної математики, що розглядається, обумовив таку структуру роботи. Частина 1 присвячена методам розв'язку систем лінійних рівнянь. Розглянуто методи перевірки існування розв'язку; прямі методи розв'язку, такі як метод зворотної матриці, метод Крамера, методи Гауса; числові методи розв'язку – уточнення коренів, простої ітерації, Зейделя.

Частина 2 вказівок містить числові методи розв'язку систем нелінійних рівнянь, а саме метод Ньютона, метод ітерацій та Зейделя.

В частині 3 розглянуто числові методи розв'язку задачі Коші для систем диференціальних рівнянь (ДР), а також рівнянь вищих порядків, розв'язок яких зводиться до розв'язку систем ДР. Наведено методи Ейлера, Рунге-Кута, багатокрокові методи Адамса. Крім того, наведено метод розв'язку крайової задачі для рівняння II порядку.

Додаток містить вимоги до оформлення пояснювальної записки до курсової роботи відповідно до стандартів ДСТУ 3008-95. Також під час виконання курсової роботи студентам необхідно наводити алгоритми згідно з ГОСТ 19.701-90.

1 РОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1.1 Постановка задачі

Система з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має вид:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}. \tag{1.1}$$

Сукупність коефіцієнтів цієї системи запишемо у виді таблиці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Дана таблиця з n^2 елементів, що складається з n рядків і n стовпців називається квадратною матрицею порядку n.

Використовуючи поняття матриці $\mathbf{A}$, систему рівнянь (1.1) можна записати в матричному виді:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}. \tag{1.3}$$

де $\mathbf{X}$ и $\mathbf{b}$ – вектор-стовпець невідомих і вектор-стовпець правих частин відповідно:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Сукупність чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (або, коротше, вектор $\mathbf{X}$), що перетворюють систему (1.1) на тотожність, називається *розв'язком* цієї системи, а самі числа x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ – її *коренями*.

Для <u>існування єдиного розв'язку</u> системи лінійних рівнянь (1.1) необхідно і достатньо, щоб визначник матриці $\mathbf{A}$ не дорівнював числу 0:

$$\det \mathbf{A} = \Delta \neq 0 .$$

<u>Методи розв'язку</u> систем лінійних рівнянь поділяються на дві групи – прямі та ітераційні. *Прямі (точні) методи* використовують кінцеві співвідношення (формули) для обчислення невідомих. Вони дають розв'язок після виконання наперед відомого числа операцій. Приклади цих методів: метод зворотної матриці, метод Крамера, метод Гауса.

Ітераційні методи – це методи послідовних наближень, що вимагають деякого початкового наближення. За допомогою певного алгоритму проводиться один цикл обчислень, який називається ітерацією. Після виконання ітерації буде знайдено нове наближення. Ітерації проводяться до одержання розв'язку з необхідною точністю. До цієї групи методів належать, наприклад, метод простих ітерацій і метод Зейделя.

1.2 Перевірка існування розв'язку

Нехай A – квадратна матриця порядку n, тоді визначник порядку n

$$\det(A) = \sum (-1)^{\operatorname{inv}\sigma} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$$

– це алгебраїчна сума $n!$ добутків елементів матриці A, взятих із кожного рядка і стовпця рівно по одному разу, тобто підсумовування поширюється на всі переставлення

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

де $\operatorname{inv}\sigma$ – кількість інверсій переставлення σ.

Зазначимо, що зі зростанням n різко збільшується число доданків у формулі для детермінанта, тому ця формула не є зручною вже при $n = 4$ ($4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ доданки). На практиці для обчислення визначників вищих порядків застосовують методи, які використовують такі властивості визначників:

Властивість 1. Значення визначника матриці не змінюється при транспонуванні цієї матриці.

Властивість 2. Детермінант добутку двох матриць дорівнює добутку детермінантів цих матриць.

Властивість 3. Якщо в детермінанті поміняти місцями два рядки (або два стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

Властивість 4. Визначник з двома пропорційними рядками (стовпцями) дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

Властивість 6. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) мають загальний множник, то його можна винести за знак детермінанта.

Властивість 7. Якщо кожен елемент будь-якого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, в одному з них відповідний рядок (стовпчик) складається з перших доданків, а в іншому – з других доданків; інші рядки (стовпці) – такі ж як у вихідному детермінанті.

Властивість 8. Визначник не змінює свого значення, якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те ж число.

1.2.1 Метод зниження порядку

Полягає в обчисленні n визначників $(n-1)$-го порядку.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається детермінант $(n-1)$-го порядку, який утворюється з заданого визначника шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається відповідний мінор M_{ij}, взятий з певним знаком

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Властивість 9. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}. \tag{1.4}$$

Ця властивість називається розкладанням визначника по елементах рядка (стовпця).

Використовуючи наведені властивості, можна зручно обчислювати визначники вищих порядків. Метод зниження порядку – добитися, щоб в деякому рядку (стовпці) стало якомога більше нулів, і розкласти визначник по елементах цього рідка (стовпця).

Зрозуміло, що формула (1.4) значно спрощується, якщо всі крім одного елементи рядку або стовпця дорівнюють 0 (метод ефективного зниження порядку).

1.2.2 Метод Гауса за схемою Жордана

Властивість 10. Визначник верхньої трикутної, нижньої трикутної або діагональної матриці дорівнює добутку елементів, які стоять на головній діагоналі

для верхньої трикутної: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$, для нижньої трикутної: $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$,

для діагональної: $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

В методі Гауса за схемою Жордана необхідно привести визначник до діагонального виду (використовуючи властивості 3,6-8) і скористатися властивістю 10.

1.3 Прямі методи

1.3.1 Метод Крамера

Згідно даного методу кожне невідоме системи (1.1) представляється у виді відношення визначників. Запишемо його для системи рівнянь порядку $n = 2$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Тоді

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де $\Delta = \det \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{bmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{bmatrix} b_1\, a_{12} \\ b_2\, a_{22} \end{bmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{11}\, b_1 \\ a_{21}\, b_2 \end{bmatrix}$.

В методі Крамера необхідно обчислити $(n+1)$ визначник n-го порядку, що при великому значенні n потребує значної кількості арифметичних операцій. Тому метод застосовується лише для розв'язку систем, що містять декілька рівнянь.

1.3.2 Метод зворотної матриці

Якщо система рівнянь – невироджена, тобто визначник матриці системи $\det \mathbf{A} \neq 0$, то система (1.1) або еквівалентне їй матричне рівняння (1.3), має єдиний розв'язок.

За умови $\det \mathbf{A} \neq 0$ існує обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$. Помноживши обидві частини рівняння (1.3) зліва на матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, одержимо

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

або

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \tag{1.5}$$

Формула (1.5) дає розв'язок рівняння (1.3).

1.3.3 Метод Гауса

– За схемою одиничного ділення

Метод заснований на приведенні матриці системи $\mathbf{A}$ (1.2) до трикутного виду. Це досягається послідовним виключенням невідомих з рівнянь системи (1.1). Спочатку за допомогою першого рівняння виключається x_1 із усіх наступних рівнянь системи. Потім за допомогою другого рівняння перетвореної системи виключається x_2 із третього і всіх наступних рівнянь. Цей процес, називаний прямим ходом методу Гауса, продовжується доти, поки в лівій частині останнього (n-го) рівняння не залишиться лише один доданок з невідомим x_n, тобто матриця системи буде приведена до трикутного виду.

Зворотний хід методу Гауса полягає в послідовному обчисленні невідомих: розв'язуючи останнє рівняння, знаходимо єдине невідоме x_n. Далі, використовуючи це значення, з попереднього рівняння обчислюємо x_{n-1} і т.д. Останнім знаходимо x_1 з першого рівняння.

Розглянемо схему застосування методу Гауса для системи з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Для виключення x_1 з другого і третього рівнянь додамо до кожного з них перше, помножене на $-a_{21}/a_{11}$ і $-a_{31}/a_{11}$ відповідно. Одержимо рівносильну систему виду:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 , \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= b'_3 \end{aligned} \qquad (1.7)$$

де $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$, $i, j = 2,3$

$b'_i = b_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} b_1$, $i = 2,3$

Помноживши друге рівняння системи (1.7) на $-a'_{32}/a_{22}$ і додавши результат до третього рівняння, виключимо тим самим x_2 з третього рівняння. В результаті система (1.7) прийме вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 , \\ a''_{33}x_3 &= b''_3 \end{aligned} \qquad (1.8)$$

де $a''_{33} = a'_{33} - \dfrac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23}$,

$b''_3 = b''_3 - \dfrac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2$.

Система (1.8) має трикутний вид. На цьому закінчується прямий хід методу Гауса.

Зазначимо, що в процесі виключення невідомих, доводиться виконувати операції ділення на коефіцієнти a_{11}, a_{22} і т.д. Тому вони мають бути відмінні від нуля. В іншому випадку необхідно відповідним чином переставити рівняння системи.

Зворотний хід починається з рішення третього рівняння системи (1.8):

$$x_3 = b_3'' / a_{33}''.$$

Використовуючи це значення, можна знайти x_2 з другого рівняння, а потім x_1 з першого:

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}'}(b_2' - a_{23}' x_3),$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3).$$

Аналогічно будується обчислювальний алгоритм для лінійної системи з довільним числом рівнянь.

– З вибором головного елементу

Ця модифікація методу Гауса полягає в тому, що вимога нерівності 0 коефіцієнтів a_{ii} замінюється на більш жорстку: зі всіх елементів, що залишилися в k-му стовпці, необхідно обрати найбільший за модулем, і переставити рівняння системи так, що цей елемент став діагональним.

– За схемою Жордана

Також є модифікацією метода Гауса. В цьому випадку матриця системи A приводиться до діагонального виду, тобто всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють 0. Особливих переваг немає: полегшується зворотний хід, проте через збільшення кількості операцій, ускладнюється прямий хід.

Алгоритм розв’язку системи (1.1) методом Гауса-Жордана.

1. Нехай $k = 1$.

2. Перевірити, чи відмінний діагональний елемент a_{kk} від 0.

3. Якщо відмінний, то k-й рядок стає *робочим рядком*. Якщо $a_{kk} = 0$, то необхідно замінити k-й рядок на l-й ($l > k$), в якій $a_{lk} \neq 0$.

4. Для $i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ обчислюємо нові матричні елементи, які позначимо, подібно попереднім, за правилом:

$$a'_{ij} = 0, \qquad \text{якщо } j = k,$$

$$a'_{ij} = a_{ij} + q_i a_{kj}, \qquad \text{якщо } j \neq k,$$

де

$$q_i = -a_{ik} / a_{kk};$$

аналогічно представимо нові праві частини рівнянь:

$$b'_i = b_i + q_i b_k.$$

5. Збільшуємо k на одиницю, якщо $k \leq n-2$, и переходимо до пункту 2. Це приведе до того, що всі елементи k-го стовпця, за виключенням діагонального елементу, дорівнюватимуть 0. В результаті отримаємо діагональну матрицю:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

6. Обчислення вектора-розв'язку $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$:

$$x = (b'_1 / a'_{11}, ..., b'_n / a'_{nn})^T.$$

– Метод прогонки

Модифікація методу Гауса. Цей метод використовується для розв'язку частинного випадку розріджених систем лінійних рівнянь – рівнянь з тридіагональною матрицею. Такі системи виникають при числовому розв'язку крайових задач для диференціальних рівнянь.

Запишемо систему рівнянь в виді:

$$
\begin{array}{ll}
b_1x_1 + c_1x_2 + \ldots & = d_1 \\
a_1x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots & = d_2 \\
0 \ + a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 + \ldots & = d_3 \\
\ldots & \\
0 \ + \ldots + a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n & = d_{n-1} \\
0 \ + \ldots \qquad\qquad \ldots + a_nx_{n-1} + b_nx_n & = d_n
\end{array}
$$

де $b_i \neq 0,\ i = 1,2,\ldots,n$.

Метод прогонки складається з двох етапів – прямої прогонки (аналог прямого ходу методу Гауса) та зворотної прогонки (аналогу зворотного ходу методу Гауса). Пряма прогонка полягає в вираженні кожного невідомого x_i через x_{i+1} за допомогою прогоночних коефіцієнтів:

$$x_i = A_ix_{i+1} + B_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n-1.$$

З першого рівняння

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1}.$$

Оскільки $x_1 = A_1x_2 + B_1$, отже: $A_1 = -\dfrac{c_1}{b_1},\ \ B_1 = \dfrac{d_1}{b_1}$.

З другого рівняння:

$$a_2\left(A_1x_2 + B_1\right) + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2,$$

$$a_2A_1x_2 + a_2B_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2,$$

$$x_2\left(a_2A_1 + b_2\right) + a_2B_1 + c_2x_3 = d_2,$$

$$x_2 = -\frac{c_2}{a_2A_1 + b_2}x_3 + \frac{d_2 - a_2B_1}{a_2A_1 + b_2} = -\frac{c_2}{l_2}x_3 + \frac{d_2 - a_2B_1}{l_2}.$$

Так само $x_2 = A_2x_3 + B_2$: $A_1 = -\dfrac{c_1}{l_2},\ \ B_1 = \dfrac{d_2 - a_2B_1}{l_2}$, де $l_2 = a_2A_1 + b_2$.

Аналогічно можна обчислити прогоночні коефіцієнти для будь-якого i.

$$A_i = -\frac{c_i}{l_i}, \qquad B_i = \frac{d_i - a_iB_{i-1}}{l_i},$$

де $l_i = a_iA_{i-1} + b_i, \qquad i = 2,\ldots,n-1$.

Отже,

$$x_{n-1} = A_{n-1}x_n + B_{n-1}.$$

Далі виконується зворотна прогонка, для чого спочатку обчислюється x_n з останнього рівняння:

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n,$$

$$a_n\left(A_{n-1}x_n + B_{n-1}\right) + b_n x_n = d_n,$$

$$a_n A_{n-1}x_n + a_n B_{n-1} + b_n x_n = d_n,$$

$$x_n\left(a_n A_{n-1} + b_n\right) + a_n B_{n-1} = d_n,$$

$$x_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n}.$$

Потім x_{n-1} за формулою

$$x_{n-1} = A_{n-1}x_n + B_{n-1}.$$

та формулами прогоночних коефіцієнтів.

Під час обчислення A_i та B_i необхідно враховувати можливість ділення на 0. Щоб запобігти цьому бажано, щоб в таких системах виконувалась умова переважання діагональних елементів, тобто $|B_i| \ge |a_i| + |c_i|$ і хоча б для одного i нерівність була строгою.

1.4 Числові методи

1.4.1 Метод уточнення коренів

Цей метод дозволяє уточнити розв’язок, отриманий за допомогою прямого методу. Метод уточнення коренів дає можливість зменшити помилки обчислень, а саме помилки округлення.

Розглянемо систему лінійних рівнянь (1.1):

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}.$$

Нехай за допомогою будь-якого прямого методу (наприклад, методу Гауса), були обчислені наближені значення невідомих $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Підставивши ці розв'язки в ліві частини системи, отримаємо значення $b_i^{(0)}$, що відрізняються від b_i $(i = 1,2,\ldots,n)$:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(0)} = b_1^{(0)} \\
&a_{21}x_1^{(0)} + a_{22}x_2^{(0)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(0)} = b_2^{(0)} \\
&\ldots \\
&a_{n1}x_1^{(0)} + a_{n2}x_2^{(0)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(0)} = b_n^{(0)}
\end{aligned}.$$

Введемо позначення $\varepsilon_i^{(0)} = x_i - x_i^{(0)}$ – похибка значень невідомих, $r_i^{(0)} = b_i - b_i^{(0)}$, $i = \overline{1,n}$.

Віднімаючи з вихідної системи систему рівнянь з наближеними значеннями коренів, отримаємо таку систему:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\varepsilon_1^{(0)} + a_{12}\varepsilon_2^{(0)} + \ldots + a_{1n}\varepsilon_n^{(0)} = r_1^{(0)} \\
&a_{21}\varepsilon_1^{(0)} + a_{22}\varepsilon_2^{(0)} + \ldots + a_{2n}\varepsilon_n^{(0)} = r_2^{(0)} \\
&\ldots \\
&a_{n1}\varepsilon_1^{(0)} + a_{n2}\varepsilon_2^{(0)} + \ldots + a_{nn}\varepsilon_n^{(0)} = r_n^{(0)}
\end{aligned}.$$

Розв'язуючи цю систему знаходимо значення похибок $\varepsilon_i^{(0)}$ $(i = \overline{1,n})$, які далі використовуються як поправки до розв'язку, тобто:

$$\begin{aligned}
&x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \varepsilon_1^{(0)} \\
&x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)} \\
&\ldots \\
&x_n^{(1)} = x_n^{(0)} + \varepsilon_n^{(0)}
\end{aligned}.$$

В той самий спосіб можна знайти поправки до розв'язку $\varepsilon_i^{(1)}$ $(i = \overline{1,n})$ та наступні наближення змінних $x_i^{(2)}$ і т.д. Процес продовжується доти, поки всі чергові значення похибок (поправок) ε_i не стануть достатньо малими (такими, що задовольняють нас).

Зазначимо, що для знаходження певного значення похибок (поправок) розв’язуються системи лінійних рівнянь з тією самою матрицею A вихідної системи при різних правих частинах, отже, при використанні методу Гауса, скорочується обсяг обчислень на етапі прямого ходу.

1.4.2 Метод простої ітерації

Проілюструємо цей метод на прикладі розв’язку системи:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Збіжність даного методу гарантується, якщо діагональні елементи a_{ii} не дорівнюють 0 і для них виконується умова:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \; i = \overline{1,n},$$

причому хоча б для одного рівняння нерівність має виконуватися строго.

Зазначимо, що будь-які системи лінійних рівнянь можна звести до потрібного для збіжності виду за допомогою лінійних перетворень (додавання, вирахування, множення на константу) над рівняннями системи.

Припустимо, що для даної системи умова збіжності виконується. Виразимо невідомі x_1, x_2, x_3 з першого, другого і третього рівнянь системи (1.9) відповідно:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3). \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Задамо деякі початкові (нульові) наближення значень невідомих. В якості нульових значень можуть бути обрані: стовпець вільних членів b_1, b_2, b_3, відношення $b_1 / a_{11}, b_2 / a_{22}, b_3 / a_{33}$, а також будь-які інші значення (наприклад, нульові), тому що виконання умови збіжності забезпечує досягнення результату при будь-яких початкових умовах.

Підставляючи ці значення в праву частину рівнянь системи (1.10), одержуємо нове (перше) наближення для невідомих x_1, x_2, x_3.

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}). \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Використовуючи обчислені значення $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, можна тим саме способом провести другу ітерацію, у результаті якої будуть знайдені другі наближення до розв'язку $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$. Наближення з номером k можна представити у виді:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-)}). \\ x_3^{(k)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k-1)} - a_{32}x_2^{(k-)}) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ітераційний процес продовжується доти, поки значення $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$, не стануть близькими з заданою похибкою до значень $x_1^{(k-1)}$, $x_2^{(k-1)}$, $x_3^{(k-1)}$, що можна перевірити критерієм по абсолютних відхиленнях

$$\max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < E, \tag{1.13}$$

або критерієм по відносних відхиленнях (при $|x| >> 1$)

$$\max_{1 \le i \le 3} \left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < E, \qquad (1.14)$$

де E – задана похибка невідомих. При виконанні умови (1.13) або (1.14) процес ітерацій припиняється і за шукані розв'язки приймаються їх останні обчислені значення.

Описаний алгоритм може бути розширений на систему з n лінійних рівнянь.

1.4.3 Метод Зейделя

Ітераційний метод Зейделя відрізняється від методу простої ітерації тим, що на k-й ітерації при обчисленні $x_i^{(k)}$ використовуються значення $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$,..., $x_{i-1}^{(k)}$, обчислені на тій самій ітерації. Наближення на k-м кроці стосовно до системи (1.9) за методом Зейделя має вид:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)}) \\
x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}) \ , \\
x_3^{(k)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)})
\end{aligned} \qquad (1.15)$$

Зазначені вище умова збіжності та умова припинення обчислень для методу простої ітерації залишаються вірними для методу Зейделя.

1.5 Завдання

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

1) прямими методами (зворотної матриці, Крамера, Гауса) з двома знаками після коми;

2) уточнити отриманий в п. 1) розв'язок числовими методами (уточнення коренів, ітерацій або Зейделя) з точністю 10^{-4};

3) Навести блок-схеми алгоритмів використаних методів.

№	Система рівнянь	Методи
1.	$\begin{cases} 0.77x_1 + 0.04x_2 - 0.21x_3 + 0.18x_4 = 1.24, \\ 0.45x_1 - 1.23x_2 + 0.06x_3 = 0.88, \\ 0.26x_1 + 0.34x_2 - 1.11x_3 = -0.62, \\ 0.05x_1 - 0.26x_2 + 0.34x_3 - 1.12x_4 = 1.17\ . \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод уточнення коренів;
2.	$\begin{cases} 0.79x_1 - 0.12x_2 + 0.34x_3 + 0.16x_4 = -0.64, \\ 0.34x_1 - 1.08x_2 + 0.17x_3 - 0.18x_4 = -1.42, \\ 0.16x_1 + 0.34x_2 - 0.85x_3 - 0.31x_4 = 0.42, \\ 0.12x_1 - 0.26x_2 - 0.08x_3 - 0.75x_4 = -0.83\ . \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод простої ітерації;
3.	$\begin{cases} 0.68x_1 + 0.18x_2 - 0.02x_3 - 0.21x_4 = 1.83, \\ 0.16x_1 - 0.88x_2 - 0.14x_3 + 0.27x_4 = 0.65, \\ 0.37x_1 + 0.27x_2 - 1.02x_3 - 0.24x_4 = -2.23, \\ 0.12x_1 + 0.21x_2 - 0.18x_3 - 0.75x_4 = 1.13\ . \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод Зейделя;
4.	$\begin{cases} 0.58x_1 + 0.32x_2 - 0.03x_3 = 0.44, \\ 0.11x_1 - 1.26x_2 - 0.36x_3 = -1.42, \\ 0.12x_1 + 0.08x_2 - 1.14x_3 - 0.24x_4 = 0.83, \\ 0.15x_1 - 0.35x_2 - 0.18x_3 - x_4 = 1.42\ . \end{cases}$	1) метод зворотної матриці; 2) метод уточнення коренів;
5.	$\begin{cases} 0.82x_1 + 0.34x_2 + 0.12x_3 - 0.15x_4 = -1.33, \\ 0.11x_1 - 0.77x_2 - 0.15x_3 + 0.32x_4 = -0.84, \\ 0.05x_1 - 0.12x_2 - 0.86x_3 - 0.18x_4 = 1.16, \\ 0.12x_1 + 0.08x_2 + 0.06x_3 - x_4 = -0.57\ . \end{cases}$	1) метод зворотної матриці; 2) метод простої ітерації;
6.	$\begin{cases} 0.87x_1 - 0.23x_2 + 0.44x_3 + 0.05x_4 = 2.13, \\ 0.24x_1 - x_2 - 0.31x_3 + 0.15x_4 = 0.18, \\ 0.06x_1 + 0.15x_2 - x_3 - 0.23x_4 = -1.44, \\ 0.72x_1 - 0.08x_2 - 0.05x_3 - x_4 = -2.42\ . \end{cases}$	1) метод зворотної матриці; 2) метод Зейделя;
7.	$\begin{cases} 0.83x_1 - 0.31x_2 + 0.18x_3 - 0.22x_4 = -1.71, \\ 0.21x_1 + x_2 - 0.33x_3 - 0.22x_4 = 0.62, \\ 0.32x_1 - 0.18x_2 - 0.95x_3 - 0.19x_4 = 0.89, \\ 0.12x_1 + 0.28x_2 - 0.14x_3 - x_4 = -0.94\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою одиничного ділення; 2) метод уточнення коренів;

№	Система рівнянь	Методи
8.	$\begin{cases} 0.87x_1 - 0.27x_2 + 0.22x_3 + 0.18x_4 = 1.21, \\ 0.21x_1 + 1.45x_2 + 0.45x_3 - 0.18x_4 = -0.33, \\ 0.12x_1 + 0.13x_2 - 1.33x_3 + 0.18x_4 = 0.48, \\ 0.33x_1 - 0.05x_2 + 0.06x_3 - 1.28x_4 = 0.17\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою одиничного ділення; 2) метод простої ітерації;
9.	$\begin{cases} 0.81x_1 + 0.07x_2 - 0.38x_3 + 0.21x_4 = -0.81, \\ 0.22x_1 + 0.92x_2 - 0.11x_3 - 0.33x_4 = -0.64, \\ 0.51x_1 - 0.07x_2 - 0.91x_3 - 0.11x_4 = -1.71, \\ 0.33x_1 - 0.41x_2 - x_4 = 1.21\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою одиничного ділення; 2) метод Зейделя;
10.	$\begin{cases} x_1 - 0.22x_2 + 0.11x_3 - 0.31x_4 = 2.7, \\ 0.38x_1 - x_2 - 0.12x_3 + 0.22x_4 = 1.5, \\ 0.11x_1 + 0.23x_2 - x_3 - 0.51x_4 = -1.2, \\ 0.17x_1 - 0.21x_2 + 0.31x_3 - x_4 = 0.17\ . \end{cases}$	1) метод Гауса з вибором головного елементу; 2) метод уточнення коренів;
11.	$\begin{cases} 0.93x_1 + 0.08x_2 - 0.11x_3 + 0.18x_4 = -0.51, \\ 0.18x_1 - 0.48x_2 + 0.21x_4 = -1.17, \\ 0.13x_1 + 0.31x_2 - x_3 - 0.21x_4 = 1.02, \\ 0.08x_1 - 0.33x_3 - 0.72x_4 = 0.28\ . \end{cases}$	1) метод Гауса з вибором головного елементу; 2) метод простої ітерації;
12.	$\begin{cases} 0.95x_1 + 0.06x_2 + 0.12x_3 - 0.14x_4 = -2.17, \\ 0.04x_1 - 1.12x_2 + 0.08x_3 + 0.11x_4 = -1.4, \\ 0.34x_1 + 0.08x_2 - 1.06x_3 + 0.14x_4 = 2.1, \\ 0.11x_1 + 0.12x_2 - 1.03x_4 = 0.8\ . \end{cases}$	1) метод Гауса з вибором головного елементу; 2) метод Зейделя;
13.	$\begin{cases} 0.92x_1 + 0.03x_2 + 0.04x_4 = -1.2, \\ 0.69x_2 - 0.27x_3 + 0.08x_4 = 0.81, \\ 0.33x_1 - 1.07x_3 + 0.21x_4 = 0.92, \\ 0.11x_1 + 0.03x_3 - 0.42x_4 = -0.17\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою Жордана; 2) метод уточнення коренів;
14.	$\begin{cases} 0.88x_1 + 0.23x_2 - 0.25x_3 + 0.16x_4 = 1.24, \\ 0.14x_1 - 0.66x_2 - 0.18x_3 + 0.24x_4 = 0.89, \\ 0.33x_1 + 0.04x_2 - 0.84x_3 - 0.32x_4 = -1.15, \\ 0.12x_1 - 0.05x_2 - 0.85x_4 = 0.57\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою Жордана; 2) метод простої ітерації;
15.	$\begin{cases} 0.77x_1 + 0.14x_2 - 0.06x_3 + 0.12x_4 = 1.21, \\ 0.12x_1 - x_2 + 0.32x_3 - 0.18x_4 = -0.33, \\ 0.08x_1 - 0.12x_2 - 0.77x_3 + 0.32x_4 = 0.48, \\ 0.25x_1 + 0.22x_2 + 0.14x_3 - x_4 = -1.56\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою Жордана; 2) метод Зейделя;

№	Система рівнянь	Методи
16.	$\begin{cases} 0.86x_1 - 0.23x_2 - 0.18x_3 - 0.17x_4 = -1.42, \\ 0.12x_1 - 1.14x_2 + 0.08x_3 + 0.09x_4 = 0.83, \\ 0.16x_1 + 0.24x_2 - x_3 - 0.35x_4 = -1.21, \\ 0.23x_1 - 0.08x_2 + 0.05x_3 - 0.75x_4 = -0.65\ . \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод уточнення коренів;
17.	$\begin{cases} 0.76x_1 - 0.21x_2 - 0.06x_3 + 0.34x_4 = 1.42, \\ 0.05x_1 - x_2 + 0.32x_3 + 0.12x_4 = 0.57, \\ 0.35x_1 - 0.27x_2 - x_3 - 0.05x_4 = -0.68, \\ 0.12x_1 - 0.43x_2 + 0.04x_3 - 1.21x_4 = -2.14\ . \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод простої ітерації;
18.	$\begin{cases} 0.83x_1 - 0.25x_2 + 0.13x_3 + 0.11x_4 = -1.42, \\ 0.13x_1 - 1.12x_2 + 0.09x_3 - 0.06x_4 = -0.48, \\ 0.11x_1 + 0.05x_2 - 1.02x_3 + 0.12x_4 = 2.34, \\ 0.13x_1 + 0.18x_2 + 0.24x_3 - 0.57x_4 = -0.72\ . \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод Зейделя;
19.	$\begin{cases} 0.85x_1 - 0.05x_2 + 0.08x_3 - 0.14x_4 = -0.48, \\ 0.32x_1 - 1.13x_2 - 0.12x_3 + 0.11x_4 = -1.24, \\ 0.17x_1 + 0.06x_2 - 1.08x_3 + 0.12x_4 = -1.15, \\ 0.21x_1 - 0.16x_2 + 0.36x_3 - x_4 = 0.88\ . \end{cases}$	1) метод зворотної матриці; 2) метод уточнення коренів;
20.	$\begin{cases} x_1 - 0.28x_2 + 0.17x_3 - 0.06x_4 = 0.21, \\ 0.52x_1 - x_2 + 0.12x_3 + 0.17x_4 = 1.17, \\ 0.17x_1 - 0.18x_2 - 0.79x_3 = 0.81, \\ 0.11x_1 + 0.22x_2 + 0.03x_3 - 0.95x_4 = -0.72\ . \end{cases}$	1) метод зворотної матриці; 2) метод простої ітерації;
21.	$\begin{cases} x_1 - 0.52x_2 - 0.08x_3 - 0.13x_4 = -0.22, \\ 0.07x_1 - 1.38x_2 - 0.05x_3 + 0.41x_4 = -1.8, \\ 0.04x_1 + 0.42x_2 - 0.89x_3 - 0.07x_4 = 1.3, \\ 0.17x_1 + 0.18x_2 - 0.13x_3 - 0.81x_4 = -0.33\ . \end{cases}$	1) метод зворотної матриці; 2) метод Зейделя;
22.	$\begin{cases} 0.99x_1 - 0.02x_2 + 0.62x_3 - 0.08x_4 = -1.3, \\ 0.03x_1 - 0.72x_2 + 0.33x_3 - 0.07x_4 = -1.1, \\ 0.09x_1 + 0.13x_2 - 0.58x_3 + 0.28x_4 = 1.7, \\ 0.19x_1 - 0.23x_2 + 0.08x_3 - 0.63x_4 = -1.5\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою одиничного ділення; 2) метод уточнення коренів;
23.	$\begin{cases} x_1 - 0.17x_2 + 0.33x_3 - 0.18x_4 = -1.2, \\ 0.82x_2 - 0.43x_3 + 0.08x_4 = 0.33, \\ 0.22x_1 + 0.18x_2 - 0.79x_3 + 0.07x_4 = -0.48, \\ 0.08x_1 + 0.07x_2 + 0.21x_3 - 0.96x_4 = 1.2\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою одиничного ділення; 2) метод простої ітерації;

№	Система рівнянь	Методи
24.	$\begin{cases} 0.97x_1+0.05x_2-0.22x_3+0.33x_4=0.43, \\ 0.22x_1-0.45x_2-0.08x_3+0.07x_4=1.8, \\ 0.33x_1+0.13x_2-1.08x_3-0.05x_4=0.8, \\ 0.08x_1+0.17x_2+0.29x_3-0.67x_4=-1.7\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою одиничного ділення; 2) метод Зейделя;
25.	$\begin{cases} 0.87x_1-0.22x_2+0.33x_3-0.07x_4=0.11, \\ 0.55x_2+0.23x_3-0.07x_4=-0.33, \\ 0.11x_1-1.08x_3+0.18x_4=-0.85, \\ 0.08x_1+0.09x_2-0.33x_3-0.79x_4=1.7\ . \end{cases}$	1) метод Гауса з вибором головного елементу; 2) метод уточнення коренів;
26.	$\begin{cases} 0.68x_1+0.16x_2+0.08x_3-0.15x_4=2.42, \\ 0.16x_1-1.23x_2+0.11x_3-0.21x_4=-1.43, \\ 0.05x_1-0.08x_2-x_3+0.34x_4=0.16, \\ 0.12x_1+0.14x_2-0.18x_3-0.94x_4=-1.62\ . \end{cases}$	1) метод Гауса з вибором головного елементу; 2) метод простої ітерації;
27.	$\begin{cases} x_1-0.08x_2+0.23x_3-0.32x_4=1.34, \\ 0.16x_1-1.23x_2+0.18x_3+0.16x_4=2.33, \\ 0.15x_1+0.12x_2-0.68x_3-0.18x_4=-0.34, \\ 0.25x_1+0.21x_2-0.16x_3-0.97x_4=-0.63\ . \end{cases}$	1) метод Гауса з вибором головного елементу; 2) метод Зейделя;
28.	$\begin{cases} 0.94x_1-0.18x_2-0.33x_3-0.16x_4=2.43, \\ 0.32x_1-x_2+0.23x_3-0.05x_4=1.12, \\ 0.16x_1-0.08x_2-x_3-0.12x_4=-0.43, \\ 0.09x_1+0.22x_2-0.13x_3-x_4=-0.83\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою Жордана; 2) метод уточнення коренів;
29.	$\begin{cases} x_1-0.34x_2-0.23x_3+0.06x_4=1.42, \\ 0.11x_1-1.23x_2-0.18x_3+0.36x_4=0.66, \\ 0.23x_1-0.12x_2-0.84x_3-0.35x_4=-1.08, \\ 0.12x_1+0.12x_2-0.47x_3-0.82x_4=-1.72\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою Жордана; 2) метод простої ітерації;
30.	$\begin{cases} 0.68x_1+0.23x_2-0.11x_3+0.06x_4=0.67, \\ 0.18x_1-0.88x_2-0.33x_3=0.88, \\ 0.12x_1+0.32x_2-1.05x_3+0.07x_4=0.18, \\ 0.05x_1-0.11x_2+0.09x_3-1.12x_4=-1.44\ . \end{cases}$	1) метод Гауса за схемою Жордана; 2) метод Зейделя;

2 РОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Постановка задачі

Багато практичних задач зводиться до розв'язку систем нелінійних рівнянь. На відміну від систем лінійних рівнянь, не існує прямих методів розв'язку нелінійних систем. Загальний метод розв'язку системи рівнянь має складатися з двох етапів: відділення коренів і подальшого уточнення розв'язку. Для одержання розв'язку звичайно використовуються ітераційні методи. Вибір первинних наближень впливає на збіг ітераційного процесу; вони мають бути досить близькими до точного розв'язку. У протилежному випадку ітераційний процес може не збігтися. Первинне наближення знаходять графічно (для випадку двох рівнянь із двома невідомими) або іншими методами (аналітичними, методом проб) для систем з великою кількістю рівнянь.

Розглянемо систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

У матричному виді:

$$\bar{f}(\bar{x}) = 0 \tag{2.2}$$

де

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix}, \ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Метод Ньютона і методи простої ітерації та Зейделя є ітераційними методами. Метод Ньютона має велику швидкість збігу. У той же час метод простої ітерації має більш прості умови збіжності і є менш критичним до вибору первинного наближення. Тому для високоточних обчислень рекомендується застосовувати спочатку метод простої ітерації. Після того, як знайдені наближення, досить близькі до точних, використовувати метод Ньютона.

2.2 Числові методи розв'язку

2.2.1 Метод Ньютона

Якщо знайдені k-і наближення до розв'язку $\bar{x}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$, можна записати точний розв'язок $\bar{x}^*$ системи (2.1) у виді:

$$\bar{x}^* = \bar{x}^{(k)} + \Delta\bar{x}^{(k)},$$

де $\Delta\bar{x}^{(k)} = \left(\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, ..., \Delta x_n^{(k)}\right)$ – виправлення до розв'язку, що шукається.

Розкладаючи ліву частину

$$\bar{f}(\bar{x}^{(k)} + \Delta\bar{x}^{(k)}) = 0 \tag{2.4}$$

у ряд Тейлора, обмежуючись лінійними членами розкладання, одержуємо систему лінійних рівнянь відносно виправлень:

$$W(\bar{x}^{(k)}) \cdot \Delta\,\bar{x}^{(k)} = -\bar{f}(\bar{x}^{(k)}).$$

Розв'язувати отриману систему лінійних рівнянь можна будь-яким методом з розглянутих в розділі 1. При розв'язанні системи методом зворотної матриці отримаємо рекурентну формулу для обчислення виправлень, а звідси і формулу ітераційного процесу визначення розв'язку системи (2.1) або (2.2), яка отримала назву методу Ньютона:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - W^{-1}(\bar{x}^{(k)})\bar{f}(\bar{x}^{(k)}) = 0,\ k = 0,1,... \tag{2.5}$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

де $W(x)$ – матриця Якобі,

$W^{-1}(x)$ – матриця, зворотна до матриці Якобі.

Якщо в формулі (2.5) матрицю, зворотну до матриці Якобі, обчислювати на кожній ітерації в фіксованій початковій точці $\overline{x}^{(0)}$ замість $\overline{x}^{(k)}$ (тобто використовуємо зафіксовану зворотну матрицю), отримаємо *модифікований метод Ньютона*. Очевидно, цей метод вимагає менше обчислень, але й дає меншу точність.

Процес ітерації (2.5) триває доти, поки не буде справедлива нерівність:

$$\left|\Delta\overline{x}_i^{(k)}\right| \geq E,\ i = 1,...n,\ k = 0,1,.... \tag{2.7}$$

де E – необхідна точність,

Зауваження Метод Ньютона ефективний тільки при достатній близькості первинного наближення до розв'язку системи. Вимоги до збіжності методу досить жорсткі, теореми про швидкість збіжності, стійкість наведені у [7]. Практично метод Ньютона застосовується для уточнення розв'язку, отриманого яким-небудь іншим методом.

Матриця Якобі містить частинні похідні першого порядку. Оскільки аналітичне диференціювання в загальних випадках небажано, окремі похідні заміняють їх наближеними кінцево-різницевими значеннями:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{f_j(x_1, x_2, ...x_{i-1}, x_i + H, x_{i+1}, ...x_n) - f_j(x_1, x_2, ...x_n)}{H}, \tag{2.8}$$

$i = 1,...n,\ H_i = E \cdot |x_i|,\ H = \max H_i = const$.

2.2.2 Метод простої ітерації

Для розв'язку системи нелінійних рівнянь методом простої ітерації необхідно навести її у виді:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Ітераційний процес реалізується наступними формулами:

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(k)} = \varphi_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\
&x_2^{(k)} = \varphi_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x_n^{(k)} = \varphi_n(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Ітераційний процес продовжується доки не буде досягнуте виконання умов (2.11) або (2.12):

- критерій з абсолютних відхилень:

$$
\max_{1<i<n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < E \tag{2.11}
$$

- критерій з відносних відхилень (якщо $|x| >> 1$):

$$
\max_{1<i<n} \left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < E \tag{2.12}
$$

де E – задана похибка невідомих.

Умова збіжності методу визначається формулою

$$
\| B \|_I < 1, \tag{2.13}
$$

де $\|B\|_I = \max\limits_{1<i<n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right|$, $I = 1,2$ – перша або друга норма матриці B,

$$
B = \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots. & \dots\dots \\
\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix} \tag{2.14}
$$

матриця частинних похідних правих частин φ_i, $i = \overline{1, n}$, системи (2.9), обчислених у точці первинного наближення $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, …, $x_n = x_n^{(0)}$.

2.2.3 Метод Зейделя

Метод Зейделя є модифікованим методом простої ітерації, на відміну від якого, уточнені значення коренів відразу підставляються в наступні рівняння.

Послідовні наближення визначаються із співвідношень:

$$\begin{array}{l} x_1^{(k)} = \varphi_1\left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k-1)}, x_n^{(k-1)}\right) \\ x_2^{(k)} = \varphi_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k-1)}, x_n^{(k-1)}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} = \varphi_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k-1)}\right) \end{array} \tag{2.15}$$

Все сказане відносно збіжності методу простої ітерації в п. 2.2.2, вірно і для методу Зейделя, тобто умова збіжності залишається такою самою.

2.3 Завдання

Розв’язати систему нелінійних рівнянь з точністю до $0{,}001$.

1) За методом Ньютона отримати систему лінійних рівнянь та розв’язати її прямим методом з завдання 1.5 п. 1);

2) Розв’язати систему ітераційним методом (ітерацій або Зейделя). Метод вказано в таблиці варіантів;

3) Порівняти результати, отримані за пп. 1) і 2);

4) Навести блок-схеми алгоритмів використаних методів.

№	Система рівнянь	Метод
1.	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$	Простої ітерації
2.	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$	Зейделя

№	Система рівнянь	Метод
3.	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2; \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7. \end{cases}$	Простої ітерації
4.	$\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5; \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1. \end{cases}$	Зейделя
5.	$\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1; \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$	Простої ітерації
6.	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8; \\ \sin y - 2x = 1{,}6. \end{cases}$	Зейделя
7.	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y; \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8. \end{cases}$	Простої ітерації
8.	$\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0; \\ x + \sin y = -0{,}4. \end{cases}$	Зейделя
9.	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2; \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$	Простої ітерації
10.	$\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5; \\ x + \cos(y-2) = 0{,}5. \end{cases}$	Зейделя
11.	$\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1{,}2; \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$	Простої ітерації
12.	$\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0{,}5; \\ y - \cos x = 3. \end{cases}$	Зейделя
13.	$\begin{cases} \sin y + 2x = 2; \\ \cos(x-1) + y = 0{,}7. \end{cases}$	Простої ітерації
14.	$\begin{cases} \cos y + x = 1{,}5; \\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1. \end{cases}$	Зейделя
15.	$\begin{cases} \sin(y+0{,}5) - x = 1; \\ \cos(x-2) + y = 0. \end{cases}$	Простої ітерації
16.	$\begin{cases} \cos(y+0{,}5) + x = 0{,}8; \\ \sin x - 2y = 1{,}6. \end{cases}$	Зейделя
17.	$\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3; \\ y - \sin(x+1) = 0{,}8. \end{cases}$	Простої ітерації
18.	$\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0; \\ y + \sin x = -0{,}4. \end{cases}$	Зейделя

№	Система рівнянь	Метод
19.	$\begin{cases} \cos(y+0{,}5)-x=2; \\ \sin x-2y=1. \end{cases}$	Простої ітерації
20.	$\begin{cases} \sin(y+2)-x=1{,}5; \\ y+\cos(x-2)=0{,}5. \end{cases}$	Зейделя
21.	$\begin{cases} \sin(x+1)-y=1; \\ 2x+\cos y=2. \end{cases}$	Простої ітерації
22.	$\begin{cases} \cos(x-1)+y=0{,}8; \\ x-\cos y=2. \end{cases}$	Зейделя
23.	$\begin{cases} \sin x+2y=1{,}6; \\ \cos(y-1)+x=1. \end{cases}$	Простої ітерації
24.	$\begin{cases} \cos x+y=1{,}2; \\ 2x-\sin(y-0{,}5)=2. \end{cases}$	Зейделя
25.	$\begin{cases} \sin(x+0{,}5)-y=1{,}2; \\ \cos(y-2)+x=0. \end{cases}$	Простої ітерації
26.	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5)+y=1; \\ \sin y-2x=2. \end{cases}$	Зейделя
27.	$\begin{cases} \sin(x-1)+y=1{,}5; \\ x-\sin(y+1)=1. \end{cases}$	Простої ітерації
28.	$\begin{cases} \sin(y+1)-x=1; \\ 2y+\cos x=2. \end{cases}$	Зейделя
29.	$\begin{cases} \cos(y-1)+x=0{,}8; \\ y-\cos x=2. \end{cases}$	Простої ітерації
30.	$\begin{cases} \cos(x-1)+y=1; \\ \sin y+2x=1{,}6. \end{cases}$	Зейделя

3 РОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1 Постановка задачі

Розглянемо систему n диференціальних рівнянь I-го порядку, розв'язаних відносно похідних:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{3.1}$$

де x – незалежна змінна.

Розв'язком (3.1) називається будь-яка сукупність функцій $y_i = \varphi_i(x),\ i = \overline{1,n}$, яка після підстановки в систему рівнянь (3.1), перетворює цю систему на тотожність.

Загальний розв'язок системи n диференціальних рівнянь I-го порядку має вид:

$$y_i = \Phi_i(x, C_i),\ i = \overline{1,n},$$

де C_i, $i = \overline{1,n}$ – довільні постійні.

Частинний розв'язок системи можна отримати із загального при певних значеннях довільних постійних, які можна знайти за наявності додаткових умов. Якщо ці умови задано в одній точці, отримаємо задачу Коші. Якщо для рівняння другого порядку додаткові умови задано в двох точках, отримаємо крайову задачу.

Зауважимо, що диференціальне рівняння n-го порядку виду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{3.2}$$

зводиться до системи диференціальних рівнянь (3.1) заміною:

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ \ldots,\ y_n = y^{(n-1)}.$$

Тоді рівняння (3.2) зводиться до системи, що є частинним випадком системи (3.1):

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{3.3}$$

а отже, розглянуті методи розв'язку систем рівнянь використовуються і для розв'язання диференціальних рівнянь вищих порядків.

3.2 Методи розв'язку задачі Коші

3.2.1 Метод Ейлера-Коші

Запишемо систему диференціальних рівнянь з початковими умовами (задача Коші) в загальному виді:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z). \end{cases} \tag{3.4}$$

Початкові умови задамо в виді:

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \tag{3.5}$$

Формула Ейлера-Коші для задачі (3.4)-(3.5) має вид:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i, z_i), \\ z_{i+1} = z_i + h \cdot g(x_i, y_i, z_i), \end{cases} \tag{3.6}$$

де h – крок приросту змінної x, $h = \text{const}$.

3.2.2 Модифікований метод Ейлера

Модифікований метод Ейлера розв'язку задачі (3.4)-(3.5) є однокроковим методом другого порядку, який реалізовано формулами:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i + h/2, y^*_{i+1/2}, z^*_{i+1/2}), \\ z_{i+1} &= z_i + h \cdot g(x_i + h/2, y^*_{i+1/2}, z^*_{i+1/2}), \end{aligned} \tag{3.7}$$

де

$$y^*_{i+1/2} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i, z_i)/2,$$
$$z^*_{i+1/2} = z_i + h \cdot g(x_i, y_i, z_i)/2.$$

3.2.3 Метод Ейлера-Коші з ітераціями

Метод Ейлера-Коші з ітераціями належить до неявних однокрокових методів і полягає в обчисленні на кожному кроці початкових значень:

$$\begin{aligned} y^{(0)}_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i, z_i) \\ z^{(0)}_{i+1} &= z_i + h \cdot g(x_i, y_i, z_i) \end{aligned}.$$

Метод реалізовано за допомогою ітераційної формули:

$$\begin{aligned} y^{(k)}_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i, z_i) + f(x_{i+1}, y^{(k-1)}_{i+1}, z^{(k-1)}_{i+1})), \\ z^{(k)}_{i+1} &= z_i + \frac{h}{2}(g(x_i, y_i, z_i) + g(x_{i+1}, y^{(k-1)}_{i+1}, z^{(k-1)}_{i+1})), \end{aligned} \tag{3.8}$$

де $x_{i+1} = x_i + h$, $h = \text{const}$, розв'язок уточнюється. Ітерації проводять доти, поки не буде виконана умова

$$\begin{aligned} \left| y^{(k)}_{i+1} - y^{(k-1)}_{i+1} \right| &< E, \\ \left| z^{(k)}_{i+1} - z^{(k-1)}_{i+1} \right| &< E, \end{aligned},$$

де E – задана точність.

Зазвичай кількість ітерацій не має перевищувати 3-4, в противному випадку необхідно зменшити крок h, наприклад, $h = h/2$, і повторити обчислення y_{i+1}, z_{i+1} з початку.

3.2.4 Методи Рунге-Кута

Запишемо для задачі (3.4)-(3.5) формули методу Рунге-Кута 4 порядку:

$$y_{i+1} = y_i + 1/6\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$
$$z_{i+1} = z_i + 1/6\,(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

де $i = 0,1,\ldots$ та

$$
\begin{array}{c||c}
K_1 = h \cdot f(x_i, y_i, z_i) & L_1 = h \cdot g(x_i, y_i, z_i) \\
K_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2}) & L_2 = h \cdot g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2}) \\
K_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2}) & L_3 = h \cdot g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2}) \\
K_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3) & K_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3)
\end{array}
$$

3.2.5 Багатокрокові явні методи розв'язку

Широко розповсюдженим сімейством багатокрокових методів є методи Адамса. Відповідні формули розв'язку задачі (3.4)-(3.5) наведено нижче.

Двокроковий метод:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(3f(x_i, y_i, z_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\right),$$
$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}\left(3g(x_i, y_i, z_i) - g(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\right).$$

Трикроковий метод:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(23f(x_i, y_i, z_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2}, z_{i-2})\right),$$
$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{12}\left(23g(x_i, y_i, z_i) - 16g(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) + 5g(x_{i-2}, y_{i-2}, z_{i-2})\right).$$

Чотирикроковий метод:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f(x_i, y_i, z_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}, z_{i-2}) - \right.$$
$$\left. -9f(x_{i-3}, y_{i-3}, z_{i-3})\right),$$
$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{24}\left(55g(x_i, y_i, z_i) - 59g(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) + 37g(x_{i-2}, y_{i-2}, z_{i-2}) - \right.$$
$$\left. -9g(x_{i-3}, y_{i-3}, z_{i-3})\right).$$

П'ятикроковий метод:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}\left(7.88f(x_i, y_i, z_i) - 11.36f(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) + 10.65f(x_{i-2}, y_{i-2}, z_{i-2}) - \right.$$
$$\left. -5.14f(x_{i-3}, y_{i-3}, z_{i-3}) + f(x_{i-4}, y_{i-4}, z_{i-4})\right),$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{3}\bigl(7.88g(x_i, y_i, z_i) - 11.36g(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) + 10.65g(x_{i-2}, y_{i-2}, z_{i-2}) -$$
$$- 5.14g(x_{i-3}, y_{i-3}, z_{i-3}) + g(x_{i-4}, y_{i-4}, z_{i-4})\bigr).$$

Для того, щоб використати ці багатокрокові (r-крокові) методи, необхідно спочатку будь-яким одно кроковим методом обчислити розв’язок на $r-1$ попередніх кроках (в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$).

3.3 Крайова задача

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y'' = f(x, y, y') \tag{3.9}$$

Крайова задача полягає в пошуку розв’язку (значень функції) $y(x)$ рівняння на відрізку $[a, b]$, що задовольняє на кінцях відрізка умовам, які задані в частинному виді:

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \tag{3.10}$$

або в загальному виді:

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{aligned} \tag{3.11}$$

де $A, B, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ – деякі постійні величини.

Числові методи розв’язку крайової задачі можна розділити на дві групи: зведення розв’язку крайової задачі до послідовності розв’язків задач Коші (метод стрільби) та безпосереднє застосування кінцево-різницевого методу.

Розглянемо метод кінцевих різностей, оскільки він дозволяє звести розв’язок крайової задачі для диференціального рівняння к розв’язку системи алгебраїчних рівнянь відносно значень функції, що шукається, на заданій множині точок. Це досягається шляхом заміни похідних, що входять в диференціальне рівняння, їх кінцево-різницевими апроксимаціями.

Розіб’ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин точками $x_i = i \cdot h \; (i = 0,1,\ldots,n)$. Точки x_i називають вузлами сітки, h – кроком сітки, точки x_0 та x_{n+1} називають граничними вузлами, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – внутрішніми вузлами.

Розв’язок крайової задачі замінимо обчисленням значень сіткової функції y_i в вузлових точках x_i. Для цього запишемо рівняння (3.9) для внутрішніх вузлів:

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i)),\ i = 1,2,\ldots,n-1. \tag{3.12}$$

Замінимо похідні, що входять до цих співвідношень їх кінцево-різницевими апроксимаціями:

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Підставляючи ці вирази в (3.12), отримаємо систему різницевих рівнянь:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right),\ i = 1,2,\ldots,n-1 \tag{3.13}$$

що є системою з $n-1$ алгебраїчного рівняння відносно значень сіткової функції $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Значення y_0 та y_n, що входять до цієї системи, беруть з граничних умов.

Якщо крайові умови задані в загальному виді (3.11), то їх також необхідно представити в різницевому виді шляхом апроксимації похідних $y'(a)$ та $y'(b)$ кінцево-різницевими співвідношеннями:

$$y'(a) = \frac{y_i - y_0}{h},$$

$$y'(b) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Тобто граничні умови приймуть вид:

$$\begin{aligned} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{aligned}, \tag{3.14}$$

з яких легко знаходяться значення y_0 та y_n.

Отримана система (3.13), доповнена за необхідності рівняннями (3.14), є лінійною або нелінійною в залежності від того, лінійним чи нелінійним є вихідне диференціальне рівняння.

Розглянемо детально лінійну крайову задачу:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x),$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases},$$

де $p(x)$ та $g(x)$ – задані функції.

Побудуємо таку різницеву схему:

– для внутрішніх вузлів x_i, $i = 1,2,\ldots,n-1$:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_i}{h} + g(x_i) = f(x_i),$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + h \cdot p(x_i) \cdot y_{i+1} - h \cdot p(x_i) \cdot y_i + h^2 \cdot g(x_i) \cdot y_i = h^2 \cdot f(x_i),$$

в результаті:

$$y_{i-1} + (1 + h \cdot p(x_i)) \cdot y_{i+1} + (h^2 \cdot g(x_i) - h \cdot p(x_i) - 2) \cdot y_i = h^2 \cdot f(x_i), \quad (3.15)$$

– для кінців відрізку інтегрування $[a, b]$: $a = x_0$, $b = x_n$

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{cases}.$$

Виконавши нескладні перетворення, отримаємо

$$\begin{cases} y_0(h\alpha_0 - \alpha_1) + y_1\alpha_1 = Ah \\ -\beta_1 y_{n-1} + y_n(h\beta_0 + \beta_1) = Bh \end{cases} \quad (3.16)$$

Об’єднавши (3.15) та (3.16), отримаємо систему $n+1$ лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} y_0(h\alpha_0 - \alpha_1) + y_1\alpha_1 = Ah \\ y_{i-1} + y_i(h^2 g(x_i) - hp(x_i) - 2) + y_{i+1}(1 + hp(x_i)) = h^2 f(x_i), \\ -\beta_1 y_{n-1} + y_n(h\beta_0 + \beta_1) = Bh \end{cases} \quad (3.17)$$

розв’язуючи яку, знайдемо значення сіткової функції y_i, $i = 0,1,\ldots,n$.

Отримана система (3.17) лінійних рівнянь є тридіагональною і може бути розв’язана методом прогонки. Для цього визначають коефіцієнти рівнянь виду:

$$y_{i+1} + m_i \cdot y_i + k_i \cdot y_{i-1} = h^2 \cdot F_i,\ i = 0,1,\ldots,n-1,$$

де

$$m_i = \frac{h^2 g_i - 2}{1 + h/2\,p_i},$$

$$k_i = \frac{1 - h/2\,p_i}{1 + h/2\,p_i},$$

$$F_i = \frac{1}{1 + h/2\,p_i}.$$

Позначення p_i, g_i, f_{i} прийняті для $p(x_i), g(x_i), f(x_i)$ відповідно, що використовуються в системі (3.17). Потім знаходять елементи «прямого ходу»:

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{n\alpha_0 - \alpha_1};\quad \alpha_0 = \frac{Ah}{\alpha_1};$$

$$c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}};\ \alpha_i = h^2 F_i - k_i c_{i-1} \alpha_{i-1};\ i = 1,2,\ldots,n-1.$$

Потім виконується «зворотний хід»:

$$y_n = \frac{Bh + \beta_i c_{n-1}\alpha_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 (c_{n-1} + 1)};$$

$$y_i = c_i(\alpha_i - y_{i+1}),\ i = n-1,\ldots,1,0.$$

3.4 Завдання

Розв’язати диференціальне рівняння II порядку на заданому відрізку для

1) задачі Коші. Номери методів розв’язку вказано в таблиці 3.1, відповідні методи – в таблиці 3.2. Початкові значення для методу Адамса розрахувати за методом Ейлера-Коші;

2) крайової задачі

з початковими або граничними умовами відповідно.

Прийняти , $h = 0.1$, $E = 0.001$.

3) Навести блок-схеми алгоритмів використаних методів.

Таблиця 3.1 – Завдання на 3 частину курсової роботи

№	Рівняння	Відрізок	Задача Коші	Мет.	Крайова задача
1	$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$	[0.7;1.0]	$y(0.7) = 0.5$ $y'(0.7) = 1.2$	м1; м4.	$y(0.7) = 0.5,$ $2y(1) + 3y'(1) = 1.2$
2	$y'' - y'x + 2y = x + 1$	[0.9;1.2]	$y(0.9) = 0.5$ $y'(0.9) = 1.5$	м1; м5.	$y(1.2) = 1,$ $y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 2$
3	$y'' + y'x + y = x + 1$	[0.5;0.8]	$y(0.5) = 0$ $y'(0.5) = 1$	м2; м4.	$y'(0.8) = 1.2,$ $y(0.5) + 2y'(0.5) = 1$
4	$y'' - \frac{y}{x} + 2y' = 3$	[0.2;0.5]	$y(0.2) = 2$ $y'(0.2) = 1$	м2; м5.	$y(0.2) = 2,$ $0.5y(0.5) - y'(0.5) = 1$
5	$y'' - yx + 2y' = x^2$	[0.6;0.9]	$y(0.6) = 0$ $y'(0.6) = 0$	м3; м4.	$y'(0.6) = 0.7,$ $y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 1$
6	$y'' + \frac{2y}{x} - y' = x + 0.4$	[1.1;1.4]	$y(1.1) = 3$ $y'(1.1) = 2$	м3; м5.	$y'(1.4) = 4,$ $y(1.1) - 0.5y'(1.1) = 2$
7	$y'' + \frac{y}{x} - 3y' = 1$	[0.4;0.7]	$y(0.4) = 2$ $y'(0.4) = 0.5$	м1; м4.	$y(0.4) = 2,$ $y(0.7) + 2y'(0.7) = 0.7$
8	$y'' - \frac{y}{x} + 3y' = x + 1$	[1.2;1.5]	$y(1.2) = 0$ $y'(1.2) = 0.5$	м1; м5.	$y'(1.2) = 1,$ $2y(1.5) - y'(1.5) = 0.5$
9	$y'' - \frac{y'}{2} + 3y = 2x^2$	[1.0;1.3]	$y(1) = 0$ $y'(1) = 1$	м2; м4.	$y(1) + 2y'(1) = 0.6,$ $y(1.3) = 1$
10	$y'' - \frac{y}{x} + 0.5y' = 0.5$	[1.3;1.6]	$y(1.3) = 0$ $y'(1.3) = 2$	м2; м5.	$2y(1.3) - y'(1.3) = 1,$ $y'(1.6) = 2$
11	$y'' + 2y'x - y = 0.4$	[0.3;0.6]	$y(0.3) = 0$ $y'(0.3) = 0.5$	м3; м4.	$2y(0.3) + y'(0.3) = 1,$ $y'(0.6) = 2$
12	$y'' - 0.5y'x + y = 2$	[0.4;0.7]	$y(0.4) = 1.2$ $y'(0.4) = 1$	м3; м5.	$y(0.4) = 1.2,$ $y(0.7) + 2y'(0.7) = 1.4$
13	$y'' + \frac{2y'}{x} - 3y = 2$	[0.8;1.1]	$y(0.8) = 0$ $y'(0.8) = 1$	м1; м4.	$y'(0.8) = 1.5,$ $2y(1.1) + y'(1.1) = 3$
14	$y'' + 2y'x^2 + y = x$	[0.5;0.8]	$y(0.5) = 0$ $y'(0.5) = 2$	м1; м5.	$2y(0.5) - y'(0.5) - 1,$ $y(0.8) = 3$
15	$y'' - 3y'x + 2y = 1.5$	[0.7;1.0]	$y(0.7) = 0$ $y'(0.7) = 1$	м2; м4.	$y'(0.7) = 1.3,$ $0.5y(1) + y'(1) = 2$
16	$y'' + 2y'x - 2y = 0.6$	[2.0;2.3]	$y(2) = 0$ $y'(2) = 0$	м2; м5.	$y'(2) = 1,$ $0.4y(2.3) - y'(2.3) = 1$
17	$y'' + \frac{y'}{x} - 0.4y = 2x$	[0.6;0.9]	$y(0.6) = 0$ $y'(0.6) = 0.6$	м3; м4.	$y(0.6) - 0.3y'(0.6) = 0.6,$ $y'(0.9) = 1.7$

№	Рівняння	Відрізок	Задача Коші	Мет.	Крайова задача
18	$y'' - \frac{y'}{2x} + 0.8y = x$	[1.7;2.0]	$y(1.7) = 0$ $y'(1.7) = 1$	м3; м5.	$y(1.7) + 1.2y'(1.7) = 2,$ $y'(2) = 1$
19	$y'' - \frac{y'}{3} + xy = 2$	[0.8;1.1]	$y(0.8) = 1.6$ $y'(0.8) = 0$	м1; м4.	$y(0.8) = 1.6,$ $3y(1.1) - 0.5y'(1.1) = 1$
20	$y'' - yx + 0.8y' = 1.4$	[1.8;2.1]	$y(1.8) = 0.5$ $y'(1.8) = 1.5$	м1; м5.	$y(1.8) = 0.5,$ $2y(2.1) + y'(2.1) = 1.7$
21	$y'' - \frac{y}{x} + 2y' = \frac{1}{x}$	[0.9;1.2]	$y(0.9) = 0$ $y'(0.9) = 2$	м2; м4.	$0.5y(0.9) + y'(0.9) = 1,$ $y(1.2) = 0.8$
22	$y'' + \frac{2y}{x} - \frac{y}{4} = \frac{x}{2}$	[1.3;1.6]	$y(1.3) = 0$ $y'(1.3) = 0.3$	м2; м5.	$1.5y(1.3) - y'(1.3) = 0.6,$ $2y(1.6) = 0.3$
23	$y'' + 0.5yx - 0.5y' = 2x$	[1.0;1.3]	$y(1) = 0$ $y'(1) = 3$	м3; м4.	$y'(1) = 0.5,$ $2y(1.3) - y'(1.3) = 2$
24	$y'' - 1{,}5yx + 2y' = \frac{2}{x}$	[0.8;1.1]	$y(0.8) = 0$ $y'(0.8) = 1$	м3; м5.	$y'(0.8) = 1,$ $y(1.1) + 2y'(1.1) = 1$
25	$y'' + 2y'x - 1.5 = x$	[1.1;1.4]	$y(1.1) = 0$ $y'(1.1) = 2$	м1; м4.	$1.4y(1.1) + 0.5y'(1.1) = 2,$ $y'(1.4) = 2.5$
26	$y'' - \frac{y'x}{2} + 0.5y = 2x$	[0.2;0.5]	$y(0.2) = 0$ $y'(0.2) = 1.5$	м1; м5.	$0.4y(0.2) - y'(0.2) = 1.5,$ $y'(0.5) = 0.4$
27	$y'' + 0.6y'x - 2y = 1$	[1.5;1.8]	$y(1.5) = 0.6$ $y'(1.5) = 0.6$	м2; м4.	$y(1.5) = 0.6,$ $2y(1.8) - 0.8y'(1.8) = 3$
28	$y'' + \frac{y'}{2x} - y = \frac{2}{x}$	[0.6;0.9]	$y(0.6) = 1.3$ $y'(0.6) = 0.3$	м2; м5.	$y(0.6) = 1.3,$ $0.5y(0.9) - 1.2y'(0.9) = 1$
29	$y'' - 0.5y'x^2 + 2y = x^2$	[1.6;1.9]	$y(1.6) = 0$ $y'(1.6) = 1$	м3; м4.	$y(1.6) + 0.7y'(1.6) = 2,$ $y(1.9) = 0.8$
30	$y'' - y'x + 2xy = 0.8$	[1.2;1.5]	$y(1.2) = 0$ $y'(1.2) = 2$	м3; м5.	$y(1.2) - 0.5y'(1.2) = 1,$ $y'(1.5) = 2$

Таблиця 3.2 – Методи розв’язку задачі Коші

Індекс	Метод
м1	Ейлера-Коші модифікований
м2	Ейлера-Коші з ітераціями
м3	Рунге-Кута 4 порядку
м4	двокроковий Адамса
м5	трикроковий Адамса

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Демидович Б.П, Марон И.А. Основы вычислительной математики. 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1966. – 664 стр.

2. Краскевич В.Е., Зеленский К.Х., Гречко В.И. Численные методы инженерных исследований. – Киев: Высшая шк., 1986. – 263 стр.

3. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование – М.: Высш. шк., 1990. – 544 стр.

4. Копченова Н.В., Марон И.В. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 512с.

5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с. –С. 190 – 195.

6. Н.Н. Калиткин. Численные методы. Главная редакция физико-математической литературы "Наука", М., 1978. – С. 138 – 146.

7. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 288 с. С. 14-20, 26-45.

8. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 336 с.

9. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение. – М.: Мир, 1998. – 575 с.

10. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

11. ДСТУ 3008-95. Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення.

12. ГОСТ 19.701-90 Единая система программной документации. Схемы алгоритмов, программ, данных и систем. Условные обозначения и правила выполнения.

ДОДАТОК

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Структура курсових робіт

Курсові роботи умовно поділяють на: 1 – вступну частину, 2 – основну частину, 3 – список використаних джерел, 4 – додатки.

Вступна частина повинна мати такі структурні елементи: титульний лист, зміст, перелік умовних позначень, символів, одиниць, скорочень і термінів.

Основна частина містить такі структурні одиниці: вступ, текст курсової роботи, висновки, рекомендації, перелік посилань.

Додатки розміщують після основної частини курсової роботи.

Структурні елементи «титульний лист», «зміст», «вступ», «текст», «висновки», «перелік посилань» є обов’язковими.

Курсова робота виконується державною мовою або іноземною, що вивчається.

Обсяг курсової роботи – 1 др.арк./**20-25** сторінок машинописного тексту/35-40 рукописних сторінок; кількість джерел – не менше **25**.

Титульний аркуш

Титульний аркуш є першою сторінкою курсової роботи і є основним джерелом бібліографічної інформації, необхідної для оброблення та пошуку документа.

Титульний аркуш повинен мати відомості, які подають у такій послідовності:

а) назва міністерства і навчального закладу;

б) гриф допущення до захисту;

в) прізвище, повні ім’я і по батькові автора;

г) повна назва документа;

д) підписи відповідальних осіб, включаючи керівника роботи;

є) рік виконання курсової роботи;

Зміст вміщує в собі перелік скорочень, умовних позначень, символів, одиниць і термінів (якщо вони є), вступ, заголовки розділів і підрозділів (якщо вони є), висновки, список використаних джерел, додатки (якщо вони є) із вказівкою номера сторінки, з якої починається розділ чи підрозділ.

Перелік умовних позначень, символів, скорочень і термінів

Усі прийняті у курсовій роботі малопоширені умовні позначення, символи, одиниці, скорочення і терміни пояснюють у переліку, який вміщують безпосередньо після змісту, починаючи з нової сторінки.

Незалежно від цього при першій появі цих елементів у тексті курсової роботи наводять їх розшифровку.

Вимоги до структурних елементів основної частини

У **вступі** має бути:

Актуальність проблеми, яка зумовила вибір теми дослідження, коротко викладена історія питання (ступінь вивчення теми) за хронологічним чи концептуальним принципом.

Об’єкт дослідження:...

Предмет дослідження:...

Мета дослідження: вивчити і науково обґрунтувати...

Гіпотеза дослідження (якщо вона є):...

У відповідності з метою і гіпотезою дослідження ставляться такі **завдання**:

1) …

2) …

3) …

Методи дослідження:

Наукова новизна дослідження полягає у тому...

Практичне значення дослідження.

Логіка дослідження зумовила **структуру** куркової роботи: вступ, розділи, висновки, список використаних джерел із ... найменувань, ... додатків. Загальний обсяг … сторінок.

Вимоги до викладу тексту курсової роботи

Текст курсової роботи – це виклад відомостей про предмет (об'єкт) дослідження, які є необхідними й достатніми для розкриття сутності означеної роботи (опис теорії, методів роботи) та її результати.

Текст курсової роботи викладають, поділяючи матеріал на розділи. Розділи можуть поділятися на пункти або на підрозділи і пункти. Пункти, якщо це необхідно, поділяють на підпункти. Кожен пункт і підпункт повинен містити закінчену інформацію і висновки.

Висновки

Висновки вміщують безпосередньо після викладу тексту, починаючи з нової сторінки.

Висновки повинні містити в собі синтез «наскрізних» висновків за розділами, оцінку повноти вирішення поставлених завдань.

Рекомендації

У курсовій роботі на основі одержаних висновків можуть наводитись рекомендації. Рекомендації вміщують після висновків, починаючи з нової сторінки. Текст рекомендації може поділятись на пункти.

Посилання у курсовій роботі

Перелік джерел, на які є посилання в основній частині курсової роботи, наводять у кінці тексту, починаючи з нової сторінки. Його розміщують в алфавітному порядку і складають відповідно до чинних стандартів.

Посилання в тексті роботи робляться в квадратних дужках:

– з наведенням прізвища автора (в транскрипції оригіналу), року видання і сторінки. Наприклад: [Арутюнова 1999, с. 342; Austin 1994, с. 89]

– при наявності кількох робіт одного автора одного року видання, після дати додається маленька латинська літера. Наприклад: [Арутюнова 1999а, с. 342; Austin 1994a, с. 89]

– при посиланні на колективні видання наводити повну назву роботи. Наприклад [Дискурс іноземномовної комунікації 1996, с. 89]

– при посиланні на періодичні видання (після прикладів) давати повну або скорочену назву, але з її поясненням у списку використаних джерел. Наприклад: [РМ № 245 1994, с. 89]

– при наявності 2-3 авторів наводити першого і відповідної позначки. Наприклад [Левицький і др.1989, с. 89; Austin et all 1994, с. 89]

Бібліографічні описи посилань у переліку наводять відповідно до чинних стандартів з бібліотечної та видавничої справи (ГОСТ 7.1 – 84. Бібліографічні описи документу. Загальні вимоги і правила складання).

Вимоги до додатків

У додатках вміщують матеріал, який:

– є необхідним для повноти курсової роботи, але включення його до основної частини наукової роботи може змінити впорядковане і логічне уявлення про дослідження.

– не може бути розміщений в основній частині курсової роботи через великий обсяг або способи його відтворення.

У додатки можуть бути включені:

– додаткові ілюстрації або таблиці;

– матеріали, які через великий обсяг, специфіку викладання або форму подання не можуть бути внесені до основної частини (оригінали фотографій, мікрофіші, формули, розрахунки, опис комп'ютерних програм, розроблених у процесі виконання роботи та ін. Кожен додаток повинен починатися з нового аркуша і мати заголовок, виконаний великими літерами. У правому верхньому кутку над заголовком великими літерами пишеться відповідно: ДОДАТОК А, ДОДАТОК Б тощо.