ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Волков С.В.
Донецький національний технічний університет
Красноармійський індустріальний інститут

ЗАГАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ЕРМІТА НА ОСНОВІ ВИЗНАЧНИКА ВАНДЕРМОНДА

Нехай задана $X=\{x_0,x_2,...,x_s\}$ множина різних комплексних (або дійсних) чисел та визначена на ньому довільна неперервна разом зі своїми похідними деяка функція $f(x)$. Загальна задача інтерполяції Ерміта полягає в побудові многочлена $W(x)$, що фіксує не тільки значення функції на X, а й довільне число послідовних похідних. Очевидно $W(x)$ є розв`язком системи рівнянь

$$W^{(i_k)}(x_k)-f^{(i_k)}(x_k)=0,\quad \begin{cases} k=\overline{0,s}\,, \\ i_k=\overline{0,m_k-1}\,. \end{cases} \tag{1}$$

Зрозуміло, що маємо найпростіший випадок розв`язку (1), многочлен Лагранжа, коли $m_k\equiv 1$, та під $f^{(0)}(x)$ розуміємо значення самої функції. У випадку $m_k\equiv 2$, (1) може бути розв'язана за допомогою многочлена Ерміта. В інших випадках розв'язок (1) значно ускладнюється, і задачу на його відшукання називають загальною інтерполяцією Ерміта. При цьому $W(x)$ називають інтерполяційним многочленом Лагранжа–Сильвестра.

Відоме загальне правило знаходження та побудови розв`язків системи (1), сенс якого у побудові, так званих, базисних многочленів $l_{ki}(x)$, які володіють відповідними базисними інтерполяційними властивостями. Враховуючи $l_{ki}(x)$, можемо скласти інтерполяційний многочлен, але їх структура та спосіб побудови є громіздкими.

В роботі пропонується нова конструкція побудови розв'язків (1), що основана на визначнику Вандермонда.

Зауважимо, що система (1) має єдиний розв`язок, коли $W(x)$ многочлен степені не більш за $\sum\limits_{k=0}^{s}m_k-1$.

Розв`язок (1) запишемо формально у вигляді визначника (2)

$$W(x)=\begin{vmatrix} Z_0(x) & . & Z_k(x) & . & Z_s(x) \\ (x-x_0)^{m_0} & . & (x-x_k)^{m_k} & . & (x-x_s)^{m_s} \\ (x-x_0)^{1+m_0} & . & (x-x_k)^{1+m_k} & . & (x-x_s)^{1+m_s} \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^{s+m_0-1} & . & (x-x_k)^{s+m_k-1} & . & (x-x_s)^{s+m_s-1} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

де $k=\overline{0,s}$, $Z_k(x)$ – многочлени з невідомими коефіцієнтами, степені не більш за m_k-1.

Для спрощення позначимо (2) як:

$$W(x)=\Delta\left[Z_k(x)\ :(x-x_k)^{t+m_k-1}\right]_{t=1,\,k=0}^{s}. \tag{3}$$

Встановивши, по – перше, що (3) є многочлен степені не більш за $\sum\limits_{k=0}^{s}m_k-1$ і визначивши, по – друге, $Z_k(x)$, $k=\overline{0,s}$ так, щоб (3) задовольняв (1) ми зможемо побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа–Сильвестра (3).

Перше з'ясувати неважко. Застосовуючи теорему Лапласа, розкладемо визначник (2) за першим рядком і винесемо спільні множники з кожного алгебраїчного доповнення

$$W(x)=\sum_{t=0}^{s}(-1)^t Z_t(x)\prod_{k\neq t=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}\Delta\left[1;(x-x_k)^{l-1}\right]_{k=0,\,l=2}^{k\neq t}, \tag{4}$$

останні множники в (4) є не що інше, як визначники Вандермонда.

Отже, $\Delta\left[1;(x-x_k)^{l-1}\right]_{k=0,\,l=2}^{k\neq t}=\prod\limits_{\substack{k>l=0\\ l,k\neq t}}^{s}(x_k-x_l)$ не залежить від змінної x і на степінь $W(x)$ не впливає. Враховуючи це, маємо рівність

$$\deg W(x)=\max_t\left(\deg Z_t(x)+\deg\prod_{k\neq t=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}\right)=m_t-1+\sum_{k\neq t=0}^{s}m_k=\sum_{k=0}^{s}m_k-1.$$

Для визначення $Z_k(x)$, $k=\overline{1,s}$ виділимо ядро методу (3) $\Delta\left[1\ :(x-x_k)^{t+m_k-1}\right]_{t=1,\,k=0}^{s}$ і введемо до розгляду допоміжну функцію (5)

$$\bar f(x)=\frac{f(x)}{\Delta\left[1\ :(x-x_k)^{t+m_k-1}\right]_{t=1,\,k=0}^{s}}. \tag{5}$$

Розглянемо різницю $W(x)-f(x)$ і враховуючи (3), (5) представимо її як

$$W(x)-f(x)=\Delta\left[\left(Z_k(x)-\bar f\right)\ :(x-x_k)^{t+m_k-1}\right]_{t=1,\,k=0}^{s} \tag{6}$$

Невідомі $Z_k(x)$, $k=\overline{0,s}$ необхідно визначити такими, що забезпечують

$$W(x)-f(x)=\prod_{k=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}F(x), \tag{7}$$

де $F(x_k)\neq 0$, $k=\overline{0,s}$, що, очевидно, забезпечить (1).

Для отримання (7), необхідно, щоб була можливість виділити у першому рядку (6) множник $(x-x_k)^{m_k}$, що є спільним для відповідного стовпця. Замітимо, що для цього $Z_k(x)$ необхідно взяти як зрізаний ряд Тейлора функції (5). В цьому випадку перший рядок (6) прийме вигляд

$$Z_k(x)-\overline{f}=Z_k(x)-\sum_{i=0}^{m_k-1}\frac{\overline{f}^{(i)}(x_k)}{i!}(x-x_k)^i=\frac{\overline{f}^{(m_k)}(\xi_k)}{m_k!}(x-x_k)^{m_k}. \quad (8)$$

Враховуючи (8) та (6), маємо (7), що, очевидно, є тотожнім забезпеченню (1). Дійсно

$$W(x)-f(x)=\Delta\left[\frac{\overline{f}^{(m_k)}(\xi_k)}{m_{k!}}(x-x_k)^{m_k}:(x-x_k)^{i+m_k-1}\right]_{\substack{i=1\\k=0}}^{s}=\prod_{k=1}^{s}(x-x_k)^{m_k}\Delta\left[\frac{\overline{f}^{(m_k)}(\xi_k)}{m_k!}:(x-x_k)^{i-1}\right]$$

звідки очевидно $W(x)-f(x)=\prod_{k=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}F(x)$ і $W^{(i_k)}(x_k)-f^{(i_k)}(x_k)=0,\ \begin{cases}k=\overline{0,s}\,,\\ i_k=\overline{0,m_k-1}\,.\end{cases}$

Отже (2) буде інтерполяційним многочленом Лагранжа–Сильвестра, тобто розв`язком системи (1), коли в (2) прийняти

$$Z_k(x)=\sum_{i=0}^{m_k-1}\frac{\overline{f}^{(i)}(x_k)}{i!}(x-x_k)^i. \quad (9)$$