УДК 571.51

ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ СУМИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ И ИХ МОДИФИКАЦИЯ

Волков С.В.
Красноармейский индустриальный институт ДонНТУ

Пусть функция $f(x)$ из множества суммируемых на периоде функций, и ряд

$$S(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right) \qquad (1)$$

где $a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt$, $b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt$,

является рядом Фурье этой функции.

При помощи бесконечных числовых матриц $\Lambda_1=\left\{\lambda_{k,1}^{(n)}\right\},\Lambda_2=\left\{\lambda_{k,2}^{(n)}\right\}$ таких, что $\forall n\in \mathrm{N}\ \ \lambda_{0,i}^{n}=1,\ k\ge n,\ \lambda_{k,i}^{n}=0,\ i=1,2$ каждой функции $f(x)$ на основании ряда (1) поставим в соответствие последовательность тригонометрических полиномов $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ вида

$$U_n(f;x;\Lambda_{1,2})=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\lambda_{k,1}^{(n)}a_k(f)\cos kx+\lambda_{k,2}^{(n)}b_k(f)\sin kx\right). \qquad (2)$$

Процесс преобразования ряда (1) в ряд (2) называют суммированием ряда Фурье. Нетрудно проверить, что метод преобразования (1) в (2) является линейным. В силу этого методы построения полиномов (2) называются линейными методами суммирования рядов Фурье. Метод можно считать заданным, если заданы его матрицы $\Lambda_1=\left\{\lambda_{k,1}^{(n)}\right\},\Lambda_2=\left\{\lambda_{k,2}^{(n)}\right\}$.

Известны многие линейные методы, которые могут, в частности, быть получены из (2). Поведение полиномов (2) при $\Lambda_1=\Lambda_2=\left\{\lambda_k^{(n)}\right\}$ изучено.

Так, в случае:

1. $\lambda_k^{(n)}=1$, (2) есть частичные суммы Фурье

$$S_n\left(f,x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k\left(f\right)\cos kx+b_k\left(f\right)\sin kx\right);$$

2. $\lambda_k^{(n)}=1-\frac{k}{n}, k=1,..,n-1$, (2) есть суммы Фейера (Чезаро) $\sigma_n(f,x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(f,x)$;

3. $\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}1, & k=0,1,...,n-p\\ 1-\frac{k-n+p}{p}, & k=n-p+1,...,n-1\end{cases}$, (2) является суммами Валле-Пуссена

$$V_{n,p}(f,x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_{k+1}(f,x);$$

4. $\lambda_k^{(n)}=\cos\frac{k\pi}{2n}, k=0,1,...,n-1$, (2) задают суммы Рогозинского;

5. $\lambda_k^{(n)}=1-(\frac{k}{n})^s$, $s>0, k=0,1,...n-1$ (2) будут суммами Зигмунда.

Все перечисленные выше методы суммирования (1) входят в группу классических методов.

Развитие идеи общих методов построения суммирующих полиномов привело к так называемым „у-эн-фи-эф” методам, которые соответствуют (2) при $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \left\{ \lambda_n^{\varphi,F}\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$, где $\lambda_n^{\varphi,F}(x)$ – последовательность непрерывных функций задаваемых соотношением:

$$\lambda_n^{\varphi,F}(x) = 1 - \frac{\varphi_n(nx)}{\varphi_n(n)} F_n(x). \qquad (3)$$

При соответствующих подборах последовательностей $\varphi_n(x)$, и $F_n(x)$ „у-эн-фи-эф” методы будут задавать вышеперечисленные классические методы суммирования.

Автором изучен вопрос равномерной сходимости полиномов $U_n(f; x; \Lambda_{1,2})$ при $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$.

Для равномерной сходимости полиномов (2) на пространстве C, пространстве непрерывных на всей оси 2π – периодических функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{k,i}^{(n)} = 1, \quad i = 1, 2, \qquad (4)$$

и

$$L_n(\Lambda_{1,2}) = O(1), \quad n \to \infty, \qquad (5)$$

где $L_n(\Lambda_{1,2}) = \sup_{|f|<1} \|U_n(f; x; \Lambda_{1,2})\|_C$ – константы Лебега данного метода.

В теории приближения наибольший интерес представляет поведение отклонения $\|f(x) - U_n(f; x; \Lambda_{1,2})\|_C$. Задача нахождения скорости стремления к нулю этой разности невероятно сложная и зависит от метода построения приближающих полиномов и структурных свойств приближаемой функции. Однако, никакой метод не может обеспечить скорости стремления к нулю более высокой, чем некоторая величина, определяемая свойствами самой функции. Для метода (2) определить эту величину можно из полученного автором соотношения

$$\frac{\sqrt{\left[\left(1-\lambda_{k,1}^{(n)}\right)a_k(f)\right]^2 + \left[\left(1-\lambda_{k,2}^{(n)}\right)b_k(f)\right]^2}}{2} \leq \|f(x) - U_n(f; x; \Lambda_{1,2})\|_C. \qquad (6)$$

В рамках единого обобщенного подхода к методам суммирования рядов Фурье рассмотрено новый метод (2). Определены необходимые и достаточные условия (4) и (5) равномерной сходимости на пространстве

C последовательности полиномов (2). Получено неравенство (6) для оценки снизу отклонения тригонометрических полиномов, построенных на основе нового метода, от функции, что их задает.

Автор занимается исследованием величины $\sup_{f \in C_\infty^{\overline{\psi}}} \|f(x) - U_n(f; x; \Lambda_{1,2})\|$, где $C_\infty^{\overline{\psi}}$ –класс функций из C, имеющих ограниченную ψ производную, и в качестве определяющих метод матриц $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ рассматриваются матрицы, элементы которых, представимы в виде (3).

Так, если функции $\varphi_n(nv)\psi_i(nv)$ и $g_n(nv)\psi_i(nv)$ $i = 1, 2$, в представлении (3), возрастают, выпуклы вверх или вниз то при $n \to \infty$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in C_\infty^{\overline{\psi}}} \|f(x) - U_n(f; x; \Lambda_{1,2})\| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \left(\tau_{n,1}(v)\cos vt + \tau_{n,2}(v)\sin vt\right) dv \right| dt + \int_0^n \left| \left(\frac{\varphi_n(v)}{\varphi_n(n)} F_n(0) - \frac{g_n(v)}{g_n(n)} H_n(0) \right) \right| \frac{|\psi_2(v)|}{v} dv + O(1)\overline{\psi}(n).$$

При оценке $\sup_{f \in C_\infty^{\overline{\psi}}} \|f(x) - U_n(f; x; \Lambda_{1,2})\|$ первое слагаемое было уже многими изучено, автором же полечено, дополнительное, второе слагаемое.