

Министерство образования и науки, молодежи и спорта

Донецкий национальный технический университет

Улитин Г.М., Гончаров А.Н.

КУРС ЛЕКЦИЙ

по высшей математике

Учебное пособие

Донецк – 2011

УДК 51 (075.8)

ББК 22.11я73

У 48

Рекомендовано к печати Ученым Советом
ДонНТУ (протокол № 3 от 18.03.11)

Улитин Г.М., Гончаров А.Н. Курс лекций по высшей математике. – Учебное пособие (для студентов всех специальностей). – Донецк, ДонНТУ, 2011. – 351 с.

В учебном пособии в соответствии с программой системно изложены лекции для первого и второго курсов обучения высшей математике, которые включают разделы: „Линейная и векторная алгебра”, „Аналитическая геометрия”, „Введение в анализ функции одной переменной”, „Дифференциальное исчисление”, „Интегральное исчисление”, „Функции нескольких переменных”, „Дифференциальные уравнения”, „Ряды”, „Кратные интегралы и элементы теории поля”, „Теория вероятностей и элементы математической статистики”, „Теория функций комплексной переменной”, „Операционное исчисление”. Краткость лекционного материала в пособии сочетается с вполне приемлемым уровнем строгости и полноты изложения. Изложение сопровождается решением достаточного количества примеров и задач.

Для студентов высших технических учебных заведений всех специальностей.

Рецензенты: Герасимчук В.С., доктор физ.-мат. наук, профессор,
кафедра математической физики НТУ „КПИ”
Левин В.М., доктор технических наук, профессор,
зав.кафедрой высшей и прикладной математики и информатики ДонНАСА
Лесина М.Е., доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры
высшей математики им. В.В.Пака ДонНТУ

© Донецкий национальный технический университет

© Улитин Г.М., Гончаров А.Н.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Линейная алгебра	4
Лекция № 1. Тема: Определители	4
Определители второго и третьего порядков	4
Основные свойства определителей	5
Вычисление определителей	6
Лекция № 2. Тема: Системы линейных алгебраических уравнений	8
Правило Крамера	8
Метод Гаусса	10
Лекция № 3. Тема: Матрицы	13
Основные виды матриц	13
Действия над матрицами	14
Обратная матрица	15
Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы	16
Лекция № 4. Тема: Общий случай решения систем линейных алгебраических уравнений	18
Ранг матрицы	18
Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений	19
Однородные системы линейных алгебраических уравнений	22
Векторная алгебра	23
Лекция № 5. Тема: Векторы	23
Определение вектора	23
Линейные операции над векторами	23
Декартова система координат	25
Лекция № 6. Тема: Векторы (окончание)	28
Способы задания векторов	28
Тема : Скалярное произведение	29
Скалярное произведение двух векторов и его основные свойства	29
Скалярное произведение векторов, заданных координатами	30
Длина вектора. Угол между двумя векторами. Направляющие косинусы	30
Лекция № 7. Тема: Векторное произведение	32
Векторное произведение двух векторов и его основные свойства	32
Векторное произведение векторов, заданных координатами	32
Механический смысл векторного произведения	33
Тема : Смешанное произведение	34
Смешанное произведение двух векторов и его основные свойства	34
Смешанное произведение векторов, заданных координатами	35

Аналитическая геометрия	37
Лекция № 8. Тема: Линии на плоскости и их уравнения	37
Линии и их уравнения в декартовой системе координат	37
Параметрические уравнения линии	37
Уравнение линии в полярной системе координат	38
Преобразование системы координат. Уравнение линии в новой системе координат	39
Лекция № 9. Тема: Прямая линия на плоскости	41
Уравнения прямой линии	41
Угол между двумя прямыми	42
Взаимное расположение двух прямых	43
Уравнение прямой, проходящей через две точки	43
Уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом	44
Расстояние от точки до прямой	44
Лекция № 10. Тема: Линии второго порядка	45
Эллипс	46
Гипербола	47
Парабола	49
Классификация линий второго порядка	50
Лекция № 11. Тема: Плоскость	51
Уравнение плоскости. Построение плоскости	51
Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору	51
Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки	52
Угол между двумя плоскостями	52
Расстояние от точки до плоскости	53
Тема : Прямая в пространстве	54
Уравнение прямой	54
Лекция № 12. Тема: Прямая в пространстве (окончание).	55
Уравнение прямой, проходящей через две точки	55
Угол между двумя прямыми	55
Расстояние от точки до прямой	56
Угол между прямой и плоскостью	57
Пересечение прямой с плоскостью	57
Лекция № 13. Тема: Поверхности	59
Уравнение поверхности	59
Поверхности второго порядка	60
Введение в анализ функции одной переменной	65
Лекция № 14. Тема: Функции	65
Определение функции	65
Способы задания функции	66
Элементарные функции	68
Лекция № 15. Тема: Пределы	69
Предел последовательности и переменной величины	69
Предел функции	71

Лекция № 16. Тема: Пределы (продолжение)	72
Бесконечно малые и бесконечно большие величины	72
Теорема о пределе функции	73
Основные теоремы о пределах	74
Раскрытие неопределенностей	75
Лекция № 17. Тема: Пределы (окончание)	76
Первый стандартный предел	76
Число e	77
Второй стандартный предел	77
Сравнение бесконечно малых величин	79
Лекция № 18. Тема: Непрерывность	80
Определение непрерывной функции	80
Основные теоремы о непрерывных функциях	
Непрерывность элементарных функций	81
Классификация точек разрыва функции	81
Свойства функций, непрерывных на отрезке	83
Дифференциальное исчисление	84
Лекция № 19. Тема: Производная и дифференциал	84
Производная функции	84
Производные основных элементарных функций	85
Механический смысл производной	86
Геометрический смысл производной	86
Правила дифференцирования	87
Производная сложной функции	88
Лекция № 20. Тема: Производная и дифференциал (окончание)	89
Производная обратной функции	89
Производная функции, заданной параметрическими	
уравнениями	89
Производная функции, заданной неявно	90
Производная степенно-показательной функции	90
Производные высших порядков	91
Дифференциал функции	92
Лекция № 21. Тема: Основные теоремы	
о дифференцируемых функциях	94
Теорема Ролля	94
Теорема Лагранжа	94
Правило Лопиталя	95
Формула Тейлора	96
Лекция № 22. Тема: Исследование функций	98
Возрастание и убывание функций	98
Экстремум функции. Необходимые условия экстремума	98
Достаточные условия экстремума	99
Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке	101
Лекция № 23. Тема: Исследование функций (продолжение)	102
Выпуклость функции и точки перегиба	102
Асимптоты линий	103
Общий план исследования функции и	
построение графиков	104

Лекция № 24. Тема: Исследование функций (окончание)	106
Исследование функций (пример)	106
Кривизна кривой	107
Интегральное исчисление	110
Лекция № 25. Тема: Неопределенный интеграл	110
Первообразная и неопределенный интеграл	110
Основные свойства неопределённого интеграла	111
Таблица неопределённых интегралов	111
Интегрирование методом замены переменной (способ подстановки)	112
Лекция № 26. Тема: Неопределенный интеграл (продолжение) . . .	114
Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трёхчлен	114
Интегрирование по частям	115
Многочлены и рациональные дроби	116
Лекция № 27. Тема: Неопределенный интеграл (продолжение) . . .	118
Интегрирование рациональных дробей	118
Интегрирование тригонометрических функций	119
Лекция № 28. Тема: Неопределенный интеграл (окончание)	121
Интегрирование некоторых иррациональных функций	121
Понятие о неберущихся интегралах	124
Лекция № 29. Тема: Определенный интеграл	125
Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла . . .	125
Определение определённого интеграла	126
Основные свойства определённого интеграла	127
Интеграл как функция верхнего предела	129
Лекция № 30. Тема: Определенный интеграл (окончание)	129
Формула Ньютона – Лейбница	129
Замена переменной в определённом интеграле	130
Интегрирование по частям в определённом интеграле	132
Лекция № 31. Тема: Приложения определённого интеграла	133
Площадь плоской фигуры	133
Длина дуги плоской кривой	135
Площадь поверхности тела вращения	136
Вычисление объёма тела по площадям поперечных сечений . .	137
Лекция № 32. Тема: Приложения определённого интеграла (окончание)	138
Приложения определённого интеграла к некоторым задачам физики	138
Тема: Несобственные интегралы	139
Несобственные интегралы первого рода (с бесконечными пределами)	139
Несобственные интегралы второго рода (от разрывных функций)	141

Функции нескольких переменных	143
Лекция № 33. Тема: Функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность. Частные производные	143
Определение функции нескольких переменных	143
Предел и непрерывность функции двух переменных	144
Частные производные функции двух переменных	145
Полный дифференциал функции двух переменных	146
Производная сложной функции	147
Лекция № 34. Тема: Частные производные. Производная по направлению. Градиент	148
Полная производная	148
Частные производные функции, заданной неявно	148
Частные производные высших порядков	148
Производная по направлению	149
Градиент	150
Лекция № 35. Тема: Частные производные. Производная по направлению. Градиент (окончание)	152
Касательная и нормаль к поверхности	152
Тема: Векторная функция скалярного аргумента	153
Векторная функция. Предел. Непрерывность	153
Производная векторной функции	154
Лекция № 36. Тема: Экстремум функции нескольких переменных	156
Необходимые условия экстремума	156
Достаточные условия экстремума	157
Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области	158
Лекция № 37. Тема: Экстремум функции нескольких переменных (окончание)	160
Условный экстремум	160
Метод наименьших квадратов	163
Дифференциальные уравнения	165
Лекция № 38. Тема: Дифференциальные уравнения. Введение	165
Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям	165
Определение дифференциального уравнения.	165
Тема: Дифференциальные уравнения первого порядка	166
Общие понятия. Теорема существования и единственности	166
Уравнения с разделяющимися переменными	167
Лекция № 39. Тема: Дифференциальные уравнения первого порядка (окончание)	169
Однородные уравнения	169
Линейные уравнения первого порядка	171
Уравнения Бернулли	171
Уравнения в полных дифференциалах	172

Лекция № 40. Тема: Дифференциальные уравнения высших порядков .	174
Определение дифференциального уравнения n -го порядка . . .	174
Уравнения, допускающие понижение порядка.	175
Тема: Линейные дифференциальные уравнения	
второго порядка	176
Линейные однородные дифференциальные уравнения второго	
порядка (ЛОДУ-2). Определитель Вронского	
и его свойства	176
Теорема о структуре общего решения ЛОДУ-2	178
Лекция № 41. Тема: Дифференциальные уравнения второго порядка	
(продолжение).	179
ЛОДУ-2 с постоянными коэффициентами.	179
Линейные неоднородные дифференциальные уравнения	
второго порядка	180
Метод вариаций произвольных постоянных	182
Лекция № 42. Тема: Дифференциальные уравнения второго порядка	
(окончание).	183
ЛНДУ-2 с постоянными коэффициентами	
со специальной правой частью	183
Лекция № 43. Тема: Линейные дифференциальные уравнения	
высших порядков	187
Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка	187
Понятие о краевой задаче	189
Лекция № 44. Тема: Системы дифференциальных уравнений	191
Нормальные системы дифференциальных уравнений	191
Решение нормальных систем ДУ методом исключений	194
Ряды	196
Лекция № 45. Тема: Числовой ряд.	
Необходимый признак сходимости	196
Числовой ряд и его сумма	196
Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд	198
Тема: Достаточные признаки сходимости рядов	
с положительными членами	199
Признаки сравнения	199
Лекция № 46. Тема: Достаточные признаки сходимости рядов	
с положительными членами (окончание)	200
Признак Даламбера	200
Радикальный признак Коши	201
Интегральный признак Коши	202
Тема: Знакопеременные ряды	203
Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница	203
Абсолютная и условная сходимость	204

Лекция № 47. Тема: Функциональные ряды	205
Определение функционального ряда	205
Равномерная сходимостъ функциональных рядов	205
Тема: Степенные ряды	206
Определение степенного ряда. Теорема Абеля	206
Лекция № 48. Тема: Степенные ряды (окончание)	208
Разложение функций у степенные ряды	208
Применение рядов Тейлора	210
Лекция № 49. Тема: Ряды Фурье	211
Определение ряда Фурье	211
Условия разложения функций в ряд Фурье	213
Ряд Фурье для функций с периодом $T = 2l$	214
Лекция № 50. Тема: Ряды Фурье (окончание)	216
Ряды Фурье для четных и нечетных функций	216
Разложение неперидических функций в ряд Фурье	217
Интеграл Фурье	219
Уравнения математической физики	220
Лекция № 51. Тема: Уравнения математической физики	220
Основные типы уравнений математической физики	220
Решение волнового уравнения методом Фурье	221
Кратные интегралы	224
Лекция № 52. Тема: Определение кратного интеграла	224
Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла	224
Определение кратного интеграла	
и его основные свойства	224
Тема: Двойной интеграл	226
Определение двойного интеграла	226
Вычисление двойного интеграла	227
Лекция № 53. Тема: Двойной интеграл (продолжение)	229
Замена переменных в двойном интеграле	229
Двойной интеграл в полярной системе координат	230
Приложения двойного интеграла:	231
площадь плоской фигуры	231
Лекция № 54. Тема: Двойной интеграл (окончание)	233
Приложения двойного интеграла:	233
объем тела	233
площадь поверхности	233
масса плоского тела	234
центр масс плоского тела	235
моменты инерции	236
Лекция № 55. Тема: Тройной интеграл	237
Определение и вычисление тройного интеграла	237
Замена переменных в тройном интеграле	237
Приложения тройного интеграла:	239
объем тела	239
центр масс тела	239
моменты инерции	241

Лекция № 56. Тема: Криволинейные интегралы	242
Криволинейные интегралы первого рода или по длине дуги:	
определение интеграла	242
вычисление интеграла	242
вычисление длины дуги	243
вычисление центра масс линии	243
Криволинейные интегралы второго рода или по координатам:	
определение интеграла	244
вычисление интеграла	245
вычисление работы силы	245
Лекция № 57. Тема: Криволинейные интегралы (окончание)	246
Формула Грина	246
Условие независимости криволинейного интеграла второго рода	
от линии интегрирования	247
Тема: Поверхностные интегралы	248
Поверхностные интегралы первого рода	248
Поверхностные интегралы второго рода	249
Приложения поверхностных интегралов	251
Лекция № 58. Тема: Элементы теории поля	252
Понятие поля	252
Формула Гаусса – Остроградского	253
Формула Стокса	254
Теория вероятностей	257
Лекция № 59. Тема: Общие понятия	257
Предмет теории вероятностей	257
Пространство элементарных событий	257
Операции над событиями	258
Статистический подход к понятию вероятности	260
Лекция № 60. Тема: Общие понятия (окончание)	261
Элементы комбинаторики	261
Классическое определение вероятности	263
Аксиоматическое определение вероятности	264
Лекция № 61. Тема: Основные теоремы теории вероятностей	265
Теорема умножения вероятностей	265
Теорема сложения вероятностей	265
Теорема полной вероятности	266
Формула Бейеса	267
Лекция № 62. Тема: Повторение испытаний	268
Независимые испытания. Формула Бернулли	268
Локальная теорема Муавра – Лапласа	269
Интегральная теорема Лапласа	270
Теорема Пуассона	271
Вероятность отклонения частоты от постоянной вероятности	
в независимых испытаниях	272
Лекция № 63. Тема: Случайные величины и функции распределения	273
Случайные величины (СВ)	273
Функция распределения вероятностей для дискретной СВ	274
Непрерывная СВ. Функция распределения и плотности	
распределения вероятности	275

Лекция № 64. Тема: Числовые характеристики случайных величин	277
Математическое ожидание	277
Дисперсия и среднее квадратичное отклонение	278
Понятие о моментах	280
Лекция № 65. Тема: Основные законы распределения СВ	281
Законы распределения дискретных СВ:	281
биномиальное распределение	281
распределение Пуассона	281
геометрическое распределение	282
Законы распределения непрерывных СВ:	283
равномерное распределение	283
показательное распределение	284
Лекция № 66. Тема: Основные законы распределения СВ (окончание)	286
Законы распределения непрерывных СВ:	286
нормальное распределение	286
Тема: Закон великих чисел	288
Неравенство Чебышева	288
Теорема Чебышева	289
Лекция № 67. Тема: Многомерные случайные величины	291
Многомерные СВ и их функции распределения	291
Числовые характеристики двумерной случайной величины	293
Элементы математической статистики	295
Лекция № 68. Тема: Введение. Предмет математической статистики	295
Тема: Статистические законы распределения выборки	295
Полигон и гистограмма	295
Эмпирическая функция распределения	297
Тема: Статистические оценки параметров распределения	298
Точечные оценки	298
Интервальные оценки	299
Лекция № 69. Тема: Проверка статистических гипотез.	
Критерий Пирсона	301
Тема: Элементы теории корреляции	303
Статистические зависимости	303
Линейная регрессия	304
Корреляционная таблица	305
Выборочный коэффициент корреляции	306
Теория функций комплексной переменной	307
Лекция № 70. Тема: Функции комплексной переменной	307
Комплексные числа и действия над ними	307
Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа	307
Определение функции комплексной переменной	309
Лекция № 71. Тема: Функции комплексной переменной (окончание).	311
Предел и непрерывность функции комплексной переменной	311
Тема: Ряды с комплексными членами	312
Числовые ряды	312
Степенные ряды	313
Основные элементарные функции комплексной переменной.	313

Лекция № 72. Тема: Производная функции комплексной переменной	. 315
Определение производной 315
Гармонические функции 317
Тема: Интеграл от функции комплексной переменной	. 318
Определение интеграла 318
Основная теорема Коши 319
Лекция № 73. Тема: Интеграл от функции комплексной переменной	
(окончание) 320
Интегральная формула Коши 320
Ряд Тейлора 321
Ряд Лорана 322
Лекция № 74. Тема: Вычеты 324
Изолированные особые точки аналитической функции 324
Определение вычета 325
Основная теорема о вычетах 327
Применение вычетов к вычислению интегралов 327
Операционное исчисление 329
Лекция № 75. Тема: Операционное исчисление 329
Определение оригинала и изображения 329
Изображения некоторых функций 330
Тема: Основные теоремы операционного исчисления	. 331
Теоремы подобия, запаздывания и смещения 331
Лекция № 76. Тема: Основные теоремы операционного исчисления	
(окончание) 333
Теорема о свертке 333
Теорема о дифференцировании оригинала 333
Теорема о дифференцировании изображения 334
Теорема об интегрировании оригинала 334
Теорема об интегрировании изображения 335
Теорема разложения 335
Лекция № 77. Тема: Приложения операционного исчисления 337
Решение линейных дифференциальных уравнений и систем	
с постоянными коэффициентами 337
Приложение операционного исчисления к задачам техники	. . . 339
Л и т е р а т у р а 341