УДК 514.18

КОНІЧНІ МНОГОЧЛЕНИ П'ЯТОГО СТУПЕНЯ

Ольховиченко Н. Г., к. т. н.
Донецький національний технічний університет
Тел. (062) 388-00-57

***Анотація.* У роботі розглянуто умови, за яких два многочлени п'ятого ступеня, що інцидентні паралельним площинам і мають три точки перегину, належать конічній поверхні.**

***Ключові слова* - многочлени п'ятого ступеня, конічні криві, точки перегину, паралельність дотичних.**

Постановка проблеми. Проблема виявлення умов, за яких два многочлени п'ятого ступеня, що інцидентні паралельним площинам є конічними кривими має теоретичний інтерес для вивчання конічних поверхонь.

Аналіз останніх досліджень. У роботі [1] розглянуто конічні поверхні третього ступеня. У роботі [2] розглянуто умови, за яких два многочлени третього та четвертого ступеня є конічними кривими.

Формулювання цілей статті. Ціль статті - виявлення умов, за яких два многочлени п'ятого ступеня, що інцидентні паралельним площинам і мають три точки перегину, належать конічній поверхні.

Основна частина. Многочлени п'ятого ступеня можуть мати одну, дві або три точки перегину. У роботі розглянуті многочлени п'ятого ступеня, що мають три точки перегину.

Покажемо, що два многочлени п'ятого ступеня, які інцидентні паралельним площинам і мають три точки перегину, належать конічній поверхні, якщо дотичні у послідовних точках перегину цих кривих паралельні. Вершина конуса розташована за площинами кривих. Якщо дотична у перший точці перегину однієї кривої паралельна дотичній у третій точці перегину другої кривої і дотичні у других точках перегину кривих паралельні, вершина конуса розташована між площинами кривих.

Попередньо покажемо, що безмежна множина многочленів п'ятого ступеня, що інцидентні паралельним площинам і мають три точки перегину, і дотичні у послідовних точках перегину цих кривих паралельні або дотичні у перших точках перегину цих кривих паралельні дотичним у третіх точках перегину і дотичні у других точках перегину паралельні, мають однакове співвідношення координат відповідних точок перегину.

Нехай,

$$X_1 = t_1;\ Y_1 = r_1;\ Z_1 = A_5\Delta_1^5 + A_4\Delta_1^4 + A_3\Delta_1^3 + A_2\Delta_1^2 + A_1\Delta_1 + A_0\ ;$$

- рівняння многочлену п'ятого ступеня, яке задано у правій системі декартових координат у параметричному вигляді, де $\Delta_1 = t_1 - p_1;\ p_1$- абсциса першої точки перегину кривій Z_1.

Нехай, $p_1; p_2; p_{3;}$;- абсциси послідовних точок перегину многочлену п'ятого ступеня Z_1 а $k_1; k_2; k_3$ - значення перших похідних у послідовних точках перегину кривій Z_1.

$$Z_1^{'}(p_1) = k_1; \quad Z_1^{'}(p_2) = k_2; \quad Z_1^{'}(p_3) = k_3 .$$

Диференціюємо рівняння кривій Z_1 двічі, вважаючи $t_1 = p_1; Z_1^{''} = 0$; отримаємо: $A_1 = k_1; A_2 = 0.$

Друга похідна в точках перегину кривій Z_1 -

$$2\Delta_1(10A_5\Delta_1^2 + 6A_4\Delta_1 + 3A_3) = 0.$$

Вважаючи на зв'язок між коефіцієнтами та коренями цього рівняння маємо

$A_3 = {}^{10}\!/_3 A_5\Delta_3\Delta_4$; $A_4 = -{}^{5}\!/_3 A_5(\Delta_3 + \Delta_4)$; де $\Delta_3 = p_2 - p_1$; $\Delta_4 = p_3 - p_1$. (1)

Диференціюємо рівняння кривій Z_1 і підставимо в отримане рівняння ці вирази.

$$Z_1^{'} = {}^{5}\!/_3 A_5\Delta_1^2\left[3\Delta_1^2 - 4(\Delta_3 + \Delta_4)\Delta_1 + 6\Delta_2\Delta_3\right] + k_1 . \quad (2)$$

Вважаючи в цьому рівнянні

$t_1 = p_2$; ${}^{p_3 - p_1}\!/_{p_2 - p_1} = \eta$; отримаємо, $k_2 - k_1 = {}^{5}\!/_3 A_5\Delta_3^4(2\eta - 1)$. (3)

Вважаючи в рівнянні (2) $t_1 = p_3$, отримаємо

$$k_3 - k_1 = {}^{5}\!/_3 A_5\Delta_4^4\, {}^{(2-\eta)}\!/_{\eta} = {}^{5}\!/_3 A_5\Delta_4^4(2-\eta)\eta^3 . \quad (4)$$

Звідки ${}^{k_3 - k_1}\!/_{k_2 - k_1} = {}^{2\eta^3 - \eta^4}\!/_{2\eta - 1}$.

Нехай, ${}^{k_3 - k_1}\!/_{k_2 - k_1} = b$.

Попереднє рівняння має вигляд

$$\eta^4 - 2\eta^3 + 2b\eta - b = 0 . \quad (5)$$

Оскільки, у цьому рівнянні η залежить тільки від величини b, то воно справедливе для усіх многочленів п'ятого ступеня, що інцидентні паралельним площинам, і мають такі значення перших похідних у точках перегину, як і крива Z_1 або такі значення перших похідних у точках перегину:

$$Z_1^{'}(p_1) = k_3; \quad Z_1^{'}(p_2) = k_2; \quad Z_1^{'}(p_3) = k_1;$$

Для цих кривих ${}^{-(k_3 - k_1)}\!/_{-(k_2 - k_1)} = b$.

За умови задачі, що розглядається η *>1.*

Визначимо кількість дійсних коренів цього рівняння, які завбільшки одиниці, за правилом Декарта.

Заміна η на $\eta + 1$ у цьому рівнянні дає

$$\eta^4 - 2\eta^3 + 2(b-1)\eta + b - 1 = 0.$$

Кількість додатних дійсних коренів дорівнює кількості змін знаку у послідовності коефіцієнтів рівняння, або менше цього числа на парне число.

Якщо *b<1,* це рівняння має єдиний додатний дійсний корінь, який завбільшки одиниці. Якщо *b>1,* це рівняння не має додатних дійсних коренів, які завбільшки одиниці. Якщо *b<0,* це рівняння має єдиний додатний дійсний корінь, який завбільшки одиниці.

Тобто, многочлен п'ятого ступеня, що має три точки перегину, існує, якщо *b<1.*

Якщо значення перших похідних у послідовних точках перегину задовольняють цій умові, то існує єдине можливе співвідношення абсцис точок перегину многочлена п'ятого ступеня. Оскільки ординати многочлену п'ятого ступеня є однозначною функцією відносно абсцис, то співвідношення ординат точок перегину многочлена п'ятого ступеня теж єдине можливе.

Покажемо, що два многчлена п'ятого ступеня Z_1 і Z_2, що задовольняють вказаним вище умовам, визначають конічну поверхню.

Нехай, $X_2 = t_2$; $Y_2 = r_2$; $Z_2 = B_5\Delta_2^5 + B_4\Delta_2^4 + B_3\Delta_2^3 + B_2\Delta_2^2 + B_1\Delta_2 + B_0$;

- рівняння деякого многочлену п'ятого ступеня, яке задано у правій системі декартових координат у параметричному вигляді, де $\Delta_2 = t_2 - d_1$; d_1 - абсциса першої точки перегину кривій Z_2.

Нехай, $d_1; d_2; d_3;$-- абсциси послідовних точок перегину многочлену п'ятого ступеня Z_2.

Розглянемо два випадки.

1.Дотичні у послідовних точках перегину кривих Z_1 і Z_2 паралельні:

$$Z_1'(p_1) = Z_2'(d_1) = k_1; \quad Z_1'(p_2) = Z_2'(d_2) = k_2; \quad Z_1'(p_3) = Z_2'(d_3) = k_3.$$

2.Дотичні у точках перегину кривій Z_2 мають такі значення:

$$Z_1'(p_1) = Z_2'(d_3) = k_1; \quad Z_1'(p_2) = Z_2'(d_2) = k_2; \quad Z_1'(p_3) = Z_2'(d_1) = k_3;$$

Криві Z_1 і Z_2, належать конічній поверхні, якщо для будь-яких точок кривих Z_1 і Z_2 з абсцисами c_1 і c_2, що розташовані між відповідними точками перегину, чи співпадають з точками перегину, дотичні в яких паралельні, виконується умова

$$\frac{c_2 - d_1}{c_1 - p_1} = \frac{Z_2(c_2) - Z_2(d_1)}{Z_1(c_1) - Z_1(p_1)} \pm m; \qquad (6)$$

де *m* – постійне дійсне число.

У першому випадку *m* є додатним числом, тобто вершина конічної поверхні розташована за площинами кривих Z_1 і Z_2.

У другому випадку *m* є від’ємним числом тобто вершина конічної поверхні розташована між площинами кривих Z_1 і Z_2.

Криві Z_1 і Z_2, належать циліндричній поверхні, якщо *m=1.*

У першому і другому випадку випадках для кривих Z_1 і Z_2 справедливе рівняння (5).

Нехай, $\eta = n_1$ - це єдиний додатний корінь рівняння (5), тобто для кривих Z_1 і Z_2 справедлива умова

$$\frac{p_3 - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{d_3 - d_1}{d_2 - d_1} = n_1 \text{; де } n_1 > 1;$$

$$\frac{Z_1(p_3) - Z_1(p_1)}{Z_1(p_2) - Z_1(p_1)} = \frac{Z_2(d_3) - Z_2(d_1)}{Z_2(d_2) - Z_2(d_1)} = n_2; \qquad (7)$$

де n_2-дійсне число.

З умови (7) вибігає

$$\frac{d_3 - d_1}{p_3 - p_1} = \frac{d_2 - d_1}{p_2 - p_1} = \pm m; \quad \text{де } m\text{- дійсне число.}$$

Покажемо, що для кривих Z_1 і Z_2 виконується умова

$$\frac{Z_2(d_2) - Z_2(d_1)}{Z_1(p_2) - Z_1(p_1)} = \frac{d_2 - d_1}{p_2 - p_1} = \pm m.$$

Вважаючи, що в рівняннях (3) і (4) $\eta = n_1$, запишемо ці рівняння для кривій Z_2. З отриманих рівнянь для кривих Z_1 і Z_2 маємо

$$\frac{A_5}{B_5} = \frac{(d_2 - d_1)^4}{(p_2 - p_1)^4} = \frac{(d_3 - d_1)^4}{(p_3 - p_1)^4} = m^4.$$

Запишемо рівняння (1) для кривій Z_2. З отриманих рівнянь для кривих Z_1 і Z_2 маємо

$$\frac{A_4}{B_4} = \frac{(d_2 - d_1)^3}{(p_2 - p_1)^3} = \pm m^3; \quad \frac{A_3}{B_3} = \frac{(d_3 - d_1)^2}{(p_3 - p_1)^2} = m^2.$$

Вважаючи в рівнянні кривій Z_1 $t_1 = p_2$, і

$$A_5 = B_5 m^4; \quad A_4 = B_4(\pm m^3); \quad A_3 = B_3 m^2; \quad p_2 - p_1 = (d_2 - d_1)(\pm m); \qquad (8)$$

отримаємо:

$$Z_1(p_2) - Z_1(p_1) = \frac{T}{(\pm m)};$$

де $T = B_5\Delta_5^5 + B_4\Delta_5^4 + B_3\Delta_5^3 + B_2\Delta_5^2 + k_1\Delta_5$; $\Delta_5 = (d_2 - d_1)$.

Вважаючи в рівнянні кривій Z_2 $t_2 = d_2$, отримаємо $Z_2(d_2) - Z_2(d_1) = T$; тобто,

$$\frac{Z_2(d_2) - Z_2(d_1)}{Z_1(p_2) - Z_1(p_1)} = \frac{d_2 - d_1}{p_2 - p_1} = \pm m.$$

Аналогічно, $$\frac{Z_2(d_3) - Z_2(d_1)}{Z_1(p_3) - Z_1(p_1)} = \frac{d_3 - d_1}{p_3 - p_1} = \pm m.$$

Покажемо, що для кривих Z_1 і Z_2 виконується і умова (6).

Запишемо умову паралельності дотичних у точках кривих з абсцисами c_1 і c_2.

$$5A_5\Delta_6^4 + 4A_4\Delta_6^3 + 3A_3\Delta_6^2 = 5B_5\Delta_7^4 + 4B_4\Delta_7^3 + 3B_3\Delta_7^2;$$

де $\Delta_6 = c_1 - p_1$; $\Delta_7 = c_2 - d_1$;

Підставимо у це рівняння співвідношення (8).

$$5B_5m^4\Delta_6^4 + 4B_4m^3\Delta_6^3 + 3B_3m^2\Delta_6^2 = 5B_5\Delta_7^4 + 4B_4\Delta_7^3 + 3B_3\Delta_7^2 .$$

Оскільки аргумент цієї функції є однозначним відносно значення функції за визначених вище умов, з цього рівняння вибігає, що

$$\frac{c_2 - d_1}{c_1 - p_1} = \pm m .$$

Легко довести, що

$$\frac{Z_2(c_2) - Z_2(d_1)}{Z_1(c_1) - Z_1(p_1)} = \pm m ;$$

Висновки. Два многочлени п'ятого ступеня, що інцидентні паралельним площинам і мають три точки перегину, належать конічній поверхні, вершина якої розташована за площинами кривих, якщо дотичні у послідовних точках перегину цих кривих паралельні.

Вершина конічної поверхні, яку вони визначають, розташована за площинами кривих Z_1 і Z_2.

Два многочлени п'ятого ступеня, що інцидентні паралельним площинам і мають три точки перегину, належать конічній поверхні, вершина якої розташована між площинами кривих, якщо дотична у перший точці перегину однієї кривої паралельна дотичній у третій точці перегину другої кривої і дотичні у других точках перегину кривих паралельні.

Вершина конічної поверхні, яку вони визначають розташована між площинами кривих Z_1 і Z_2.

Криві Z_1 і Z_2 належать циліндричній поверхні, якщо *m=1.*

Література

1. *Михайленко В. Е., Обухова В. С., Подгорний А. Л.* Формообразование оболочекв архитектуре-Киев: Будівельник, 1972- 206 с.: ил. .

2. *Ольховиченко Н. Г.* Конічні многочлени третього та четвертого ступеня. // Праці. Тавр. держ. агротех. Академії. – Вип. 4, т. 31.- Мелітополь, 2006.- 78с.

Quintic conic polynomials

Olhowichenco N. G.

Summary

In article conditions at which two quintic polynomials laying in parallel planes, set conic or cylindrical general view a surface are proved.