УДК 515.2

# Конічні многочлени третього та четвертого ступеня

Ольховиченко Н. Г., к. т. н.,
Донецький національний технічний університет
Тел. (062) 338-00-57

***Анотація-*** **У роботі розглядаються умови, за яких многочлени третього та четвертого ступеня належать конічній поверхні.**

***Ключові слова*** **–конічна поверхня, взаємно однозначна відповідність, паралельність дотичних у точках перегину.**

*Постановка проблеми.* Проблема виявлення умов, за яких многочлени третього та четвертого ступеня належать конічній поверхні має теоретичний інтерес для вивчання конічних поверхонь. Практична необхідність виявлення цих умов виникає, наприклад, при побудові торсових поверхонь, що задані кривими, описаними сплайнами .

*Аналіз останніх досліджень.* Конічні поверхні третього ступеня розглянуті у роботі [1]. Проблема виявлення умов, за яких многочлени третього та четвертого ступеня належать конічній поверхні не вирішувалась.

*Формулювання цілей статті.* Ціль статті - виявлення умов, за яких многочлени третього та четвертого ступеня належать конічній поверхні.

*Основна частина.* Визначимо умови, за яких дві криві, що належать паралельним площинам, належать конічній поверхні.

Нехай : $X_1 = t_1$; $Y_1 = b_1$ ; $Z_1 = Z_1(t_1)$;

$X_2 = t_2$; $Y_2 = b_2$; $Z_2 = Z_2(t_2)$;

рівняння двох кривих, що мають неперервні похідні *n+1-го* порядку, або неперервно диференційовані. Криві задані в лівій системі декартових координат. Вони лежать у площинах $Y_1 = b_1$; $Y_2 = b_2$ , які паралельні площині $ZOX$ і задані в параметричному вигляді.

Криві належать торсовій поверхні, якщо між точками цих кривих встановлена однозначна відповідність за умовою рівності перших похідних у відповідних точках. Будемо вважати, що така відповідність між точками кривих існує. Точки кривих в яких перші похідні рівні, будемо називати відповідними.

Нехай $c_1$ і $c_2$ - будь-які два фіксованих значення області визначення $t_1$ кривій $Z_1(t_1)$, а $l_1, l_2$, - відповідні значення області визначення $t_2$ кривій $Z_2(t_2)$, а $Z_1(c_1)$, $Z_1(c_2)$ і $Z_2(l_1), Z_2(l_2)$- значення функції у цих точках кривих.

Ці криві належать конічній поверхні, якщо у відповідних точках кривих виконується умова

$$\frac{c_2 - c_1}{l_2 - l_1} = \frac{Z_1(c_2) - Z_1(c_1)}{Z_2(l_2) - Z_2(l_1)} = m \text{, де } m \text{ - постійне число.} \qquad (1)$$

За таких умов відповідність точок кривих буде взаємно однозначною.

Покажемо що, дві кубічні параболи належать конічній поверхні, якщо дотичні у точках перегину кривих паралельні і треті похідні рівнянь кривих мають однакові знаки.

Рівняння двох кубічних парабол, що лежать у паралельних площинах, записані щодо точок перегину з абсцисами $p_1$ і $d_1$:

$X_1=t_1;\quad Y_1=b_1;\quad Z_1(t_1) =A_3(t_1-p_1)^3+A_2(t_1-p_1)^2+A_1(t_1-p_1)+A_0;$

$X_2=t_2;\quad Y_2=b_2;\quad Z_2(t_2) =B_3(t_2-d_1)^3+B_2(t_2-d_1)^2+B_1(t_2-d_1)+B_0;$

Кубічна парабола-це крива, симетрична щодо точки перегину. Якщо дотичні у точках перегину двох кубічних парабол паралельні і знаки коефіцієнтів $A_3$ і $B_3$ рівнянь кривих однакові, між точками кривих можна встановити взаємно однозначну відповідність за умовою паралельності дотичних.

Покажемо, що за таких умов кубічні параболи належать конічній поверхні, тобто у відповідних точках виконується умова (1).

Продиференціювавши рівняння кубічних парабол тричі і вважаючи в цих рівняннях

$$t_1 = p_1;\quad Z_1''(p_1) = 0;\quad t_2 = d_1;\quad Z_2''(d_1) = 0;$$

визначимо коефіцієнти рівнянь кубічних парабол:

$$A_0 = Z_1(p_1);\quad A_1 = Z_1'(p_1);\quad A_2 = 0;\quad A_3 = \frac{Z_1'''(t_1)}{3!};$$

$$B_0 = Z_2(d_1);\quad B_1 = Z_2'(d_1);\quad B_2 = 0;\quad B_3 = \frac{Z_2'''(t_2)}{3!}.$$

Запишемо умови паралельності дотичних у точках перегину кубічних парабол.

$$Z_1'(p_1) = Z_2'(d_1),\quad A_1 = B_1 = k.$$

де $k$ – значення першої похідної у точках перегину кривих.

Нехай $c_1$ і $l_1$, - будь-які два фіксованих значення області визначення $t_1$, і $t_2$ кривих $Z_1(t_1)$ і $Z_2(t_2)$.

Запишемо умову паралельності дотичних у точках кривих з абсцисами $c_1$, $l_1$.

$$3A_3(c_1 - p_1)^2 = 3B_3(l_1 - d_1)^2\quad;$$

Ця умова виконується, коли

$$\frac{(c_1-p_1)^2}{(l_1-d_1)^2}=\frac{B_3}{A_3}=m^2\ . \qquad (2)$$

Покажемо, що у цих точках

$$\frac{Z_1(c_1)-Z_1(p_1)}{Z_2(l_2)-Z_2(d_1)}=m\ . \qquad (3)$$

Підставимо $t_1= c_1$ і $t_2=l_1$ у рівняння многочленів $Z_1(t_1)$ і $Z_2(t_2)$. Підставимо в перше з отриманих рівнянь вирази (2 ) і виконавши перетворення , отримаємо вираз(3 ).

Якщо $m>0$, вершина конусу розташована за площинами напрямних кривих. Якщо $m<0$, вершина конусу розташована між площинами напрямними кривими. Якщо $m=1$, криві належать циліндричній поверхні.

Визначимо умови, за яких два многочлени четвертого ступеня належать конічній поверхні.

Многочлени четвертого ступеня мають одну, або дві точки перегину.

Покажемо що, два многочлени четвертого ступеня $Z_1\,(t_1)$ і $Z_2\,(t_2)$, які мають дві точки перегину, належать конічній поверхні, якщо дотичні у послідовних точках перегину кривих, з абсцисами $p_1$, $d_1$ і $p_2$, $d_2$, паралельні і знаки третіх похідних у точках перегину кривих однакові. Многочлени належать паралельним площинам.

$$Z_1'(p_1)=Z_2'(d_1)\,, \quad Z_1'(p_2)= Z_2'(d_2)\,.$$

Запишемо рівняння двох многочленів четвертого ступеня щодо точок перегину з абсцисами $p_1$ і $d_1$:

$$Z_1\,(t_1) = A_4\,(t_1-p_1)^4 +A_3\,(t_1-p_1)^3+A_2(t_1-p_1)^2+A_1\,(t_1-p_1)+A_0\,;$$

$$Z_2\,(t_2) =B_4(t_2-d_1)^4+B_3\,(t_2-d_1)^3+ B_2\,(t_2-d_1)^2+B_1(t_2-d_1) +B_0\,;$$

якщо $t_1=p_1$, $t_2=d_1$ то $A_0=Z_1(p_1)$, $B_0= Z_2\,(d_1)$.

Продиференціювавши ці рівняння, отримаємо:

якщо $t_1=p_1$, то $A_1=Z_1'(p_1)$, якщо $t_2=d_1$, то $B_1= Z_2'(d_1)$.

За умови паралельності дотичних у перших точках перегину

$Z_1'(p_1)=Z_2'(d_1)$, $A_1= B_1=k_1$,

де $k_1$- значення першої похідної у точках перегину.

Продиференціювавши перше рівняння ще раз, отримаємо:

якщо $t_1=p_1$, то $Z_1''(p_1)=0$, $A_2=0$.

Друга похідна в іншій точці перегину $t_1=p_2$:

$$2A_4\,(p_2-p_1)^2+A_3(p_2-p_1)=0;$$

Звідки вибігає

$$p_2-p_1=-\frac{A_3}{2A_4}\ .$$

Перша похідна в точці перегину $t_1=p_2$:

$$Z_1'(p_2) = \frac{A_3^3}{4A_4^2} + Z_1'(p_1).$$

Підставивши попереднє рівняння, отримаємо:

$$A_3\,(p_2 - p_1)^2 = Z_1'(p_2) - Z_1'(p_1).$$

Продиференціювавши інше рівняння двічі і виконавши попередні перетворення, отримаємо:

$$d_2 - d_1 = -\frac{B_3}{2B_4}.$$

$$B_3\,(d_2 - d_1)^2 = Z_1'(d_2) - Z_1'(d_1).$$

За умови паралельності дотичних у точках перегину , отримаємо:

$$\frac{(p_2 - p_1)^2}{(d_2 - d_2)^2} = \frac{B_3}{A_3} = m^2,\ \frac{(p_2 - p_1)^3}{(d_2 - d_2)^3} = \frac{B_4}{A_4} = m^3\ . \qquad (4)$$

Нехай $c_1$ і $l_1$, - будь-які два фіксованих значення області визначення $t_1$, і $t_2$ кривих $Z_1(t_1)$ і $Z_2(t_2)$, такі, що

$$\frac{c_1 - p_1}{l_1 - d_1} = m,\quad c_1 - p_1 = (l_1 - d_1)m./ \qquad (5)$$

Покажемо, що у цих точках

$$\frac{Z_1(c_1) - Z_1(p_1)}{Z_2(l_2) - Z_2(d_1)} = m\,. \qquad (6)$$

Підставивши $t_1 = c_1$ і $t_2 = l_1$ у рівняння многочленів $Z_1(t_1)$ і $Z_2(t_2)$, і підставивши в перше із отриманих рівнянь вираз (5 ) і вирази (4 ) і виконавши перетворення , отримаємо вираз (6 ).

Покажемо, що дотичні у точках кривих $Z_1(t_1)$ і $Z_2(t_2)$. з абсцисами $c_1$ і $l_1$ паралельні.

Підставимо у рівняння перших похідних $t_1 = c_1$ і $t_2 = l_1$ .

Підставивши в перше із цих рівнянь вираз (5) і вирази ( 4), отримаємо:

$$Z_1'(c_1) = Z_2'(l_2).$$

Продиференціювавши рівняння многочленів чотири рази, якщо $t_1 = p_1$, $t_2 = d_1$, отримаємо:

$$A_3 = Z_1'''(p_1)/3!,\ B_3 = Z_2'''(d_1)/3!,\ A_4 = Z_1''''(t_1)/4!,\ B_4 = Z_2''''(t_2)/4!.$$

Конічна поверхня існує, коли існує *m,* тобто знаки третіх похідних $Z_1'''(p_1)$ і $Z_2'''(d_1)$ у точках перегину однакові.

Коли знаки четвертих похідних однакові - $m>0$, вершина конусу розташована за площинами напрямних кривих. Коли знаки четвертих похідних різні – $m<0$, вершина конусу розташована між площинами напрямних кривих.

Многочлени четвертого ступеня мають одну точку перегину, коли треті похідні у точках перегину рівні нулю.

$$A_3 = Z_1'''(p_1) = B_3 = Z_2'''(d_1) = 0.$$

Виконавши аналогічний аналіз, отримаємо, що такі криві належать конічній поверхні, коли дотичні у точках перегину паралельні. Коли знаки четвертих похідних однакові - $m>0$, вершина конусу розташована за площинами напрямних кривих. Коли знаки четвертих похідних різні – $m<0$, вершина конусу розташована між площинами напрямних кривих.

*Висновки.* Дві кубічні параболи належать конічній поверхні, якщо дотичні у точках перегину кривих паралельні і треті похідні рівнянь кривих мають однакові знаки. Якщо $m>0$, вершина конусу розташована за площинами напрямних кривих. Якщо $m<0$, вершина конусу розташована між площинами напрямних кривих.

Многочлени четвертого ступеня, які мають дві точки перегину належать конічній поверхні, коли дотичні у послідовних точках перегину паралельні, і знаки третіх похідних у цих точках однакові. Коли знаки четвертих похідних однакові - $m>0$, вершина конусу розташована за площинами напрямних кривих. Коли знаки четвертих похідних різні – $m<0$, вершина конусу розташована між площинами напрямних кривих.

Многочлени четвертого ступеня, які мають одну точку перегину належать конічній поверхні, коли дотичні у точках перегину паралельні. Коли знаки четвертих похідних однакові - $m>0$, вершина конусу розташована за площинами напрямних кривих. Коли знаки четвертих похідних різні – $m<0$, , вершина конусу розташована між площинами напрямних кривих.

Якщо $m=1$, криві належать циліндричній поверхні.

Літера

*1.Михайленко В. Е., Обухова В. С., Подгорный А. Л.* Формообразование оболочек в архитектуре - Киев: Будівельник, 1972- 206 с.: ил.

**Third and quadruple conic polynomials**

**Olhowichenco N. G.**

The Summary

In article conditions at which two curves laying in parallel planes, set conic or cylindrical general view a surface are proved.