УДК 514.18

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНІЧНИХ КРИВИХ

Ольховиченко Н. Г., к. т. н.,
Донецький національний технічний університет
Тел. (062) 338-00-57

***Анотація* - у статті доведено умови, за яких дві криві, що інцидентні паралельним площинам, задані рівняннями і мають точки, в яких друга похідна дорівнює нулю (наприклад, точки перегину) або безмежна, належать конічній поверхні.**

***Ключові слова* – конічні криві, взаємно однозначна відповідність, паралельність дотичних, точки, в яких друга похідна дорівнює нулю або безмежна.**

Постановка проблеми. Проблема визначення умов, за яких дві криві, що належать паралельним площинам, задані рівняннями і мають точки, в яких друга похідна дорівнює нулю (наприклад, точки перегину) або безмежна, належать конічній поверхні має теоретичний інтерес для вивчання конічних поверхонь. Практична необхідність виявлення цих умов виникає, наприклад, при побудові торсових поверхонь, що задані кривими, які описані сплайнами.

Аналіз останніх досліджень. Конічні поверхні третього ступеня розглянуті в роботі [1]. У роботі [2] розглянуто умови, за яких многочлени третього та четвертого ступеня, що належать двом паралельним площинам, є конічними кривими.

Формулювання цілей статті. Ціль статті - виявлення умов, за яких дві криві, що інцидентні паралельним площинам, задані рівняннями і мають точки, в яких друга похідна дорівнює нулю (наприклад, точки перегину) або безмежна, належать конічній поверхні.

Основна частина. Покажемо справедливість наступного положення. Дві криві, що належать паралельним площинам і задані рівняннями, які задовольняють вказаним нижче умовам, є конічними, якщо між точками кривих можна встановити взаємно однозначну відповідність за умови паралельності дотичних у відповідних точках всій області визначення обох кривих.

Будемо вважати, що рівняння кривих, які належать паралельним площинам і задані рівняннями задовольняють наступним умовам:

1. Рівняння кривих мають неперервні похідні *n-го* порядку ($n>2$) або неперервно диференційовані в усій області визначення кривих за виключенням, може бути, деяких точок. У точках кривих, в яких рів-

няння кривих не можуть бути диференційовані, вони мають бути неперервні і мати дотичну, що перпендикулярна до осі абсцис.

2. Криві мають точки, в яких друга похідна дорівнює нулю (наприклад, точки перегину) або безмежна. Дотичні у цих точках мають бути відповідно паралельними.

3. У точках кривих, в яких другі похідні дорівнюють нулю або безмежні, мають бути кінцеві похідні вищих порядків, що не дорівнюють нулеві.

4. Якщо, криві мають тільки одну точку, в який друга похідна дорівнює нулю або безмежна і рівняння кривих відповідають вказаним вище умовам, то визначену раніше взаємно однозначну відповідність можна встановити, коли непарні похідні *і-го, і=3, 5,…т,* порядку, що не дорівнюють нулю, мають однакові знаки у цій точці.

Якщо, рівняння кривих задовольняють умовам пунктів 1-3 і мають декілька точок, в яких другі похідні дорівнюють нулю або безмежні, то визначену раніше взаємно однозначну відповідність між точками кривих можна встановити у двох випадках:- відповідні точки кривих, в яких другі похідні дорівнюють нулю або безмежні розташовані на кривих в однаковому порядку;- відповідні точки кривих, в яких другі похідні дорівнюють нулю або безмежні розташовані на кривих у протилежному порядку, тобто, перша така точка однієї кривої є відповідною останній такій точці другої кривої, друга така точка однієї кривої є відповідною передостанній такій точці другої кривої і так далі.

У першому випадку криві визначають конус, вершина якого розташована за площинами кривих. У другому випадку криві визначають конус, вершина якого розташована між площинами кривих.

Якщо криві мають тільки одну точку, в який друга похідна дорівнює нулю або безмежна і рівняння кривих відповідають умовам пунктів 1-4, то визначену раніше взаємно однозначну відповідність між точками кривих можна встановити як першим так і другим способом.

Нехай : $X_1 = t_1$; $Y_1 = b_1$; $Z_1 = Z_1(t_1)$; $X_2 = t_2$; $Y_2 = b_2$ $Z_2 = Z_2(t_2)$ - рівняння двох кривих, що задовольняють умовам пунктів1-4 і задані в параметричному вигляді. Криві задані в правій системі декартових координат і належать площинах $Y_1 = b_1$; $Y_2 = b_2$.

Будемо вважати що між точками цих кривих встановлена взаємно однозначна відповідність за умовою рівності перших похідних у відповідних у точках всій області визначення двох кривих. Тобто, у всій області визначення двох кривих, за винятком точок, у яких дотичні перпендикулярні осі абсцис, якщо вони є, справедливе рівняння

$$Z_1'(t_1) = Z_2'(t_2). \qquad (1)$$

Аналогічне рівняння справедливе і для зворотних функцій

$$t_1 = f_1(Z_1); \quad t_2 = f_2(Z_2); \quad f_1'(Z_1) = f_2'(Z_2).$$

Якщо на кривих є точки, в яких дотичні перпендикулярні осі абсцис, то у цих точках справедлива рівність похідних зворотних функцій $f_1'(Z_{1,i}) = f_2'(Z_{2,i}) = 0$; де $Z_{1,i}$ і $Z_{2,i}$; $i=1,...c$ - значення функцій у точках, в яких друга похідна дорівнює нулю або безмежна, а дотична перпендикулярна до осі абсцис. Доведення, що подані далі, справедливі як до прямої так і для зворотної функції.

У рівнянні (1) будемо вважати, що t_2 є деяка диференційована функція від t_1; $t_2 = t_2(t_1)$. Якщо ця функція є лінійною, $t_2 = kt_1 + l_1$, то функція $Z_2(t_2)$ теж є лінійною, $Z_2(t_2) = kZ_1(t_1) + l$, де l - постійна інтегрування, що легко довести, помноживши обидві частини рівняння (1) на dt_2 та інтегруючи обидві частини рівняння. Тобто, криві $Z_1(t_1)$ і $Z_2(t_2)$ є конічними.

Покажемо, що функція $t_2 = t_2(t_1)$ є лінійною, якщо рівняння кривих $Z_1(t_1)$ і $Z_2(t_2)$ задовольняють умовам пунктів 1-4.
Продиференціюємо рівняння (1).

$$Z_1''(t_1) = Z_2''(t_2) \cdot t_2'(t_1)\,;\; t_2'(t_1) = \frac{Z_1''(t_1)}{Z_2''(t_2)}.$$

У точках кривих, в яких друга похідна дорівнює нулю, наприклад точки перегину, або безмежна $t_2'(t_1) = 0/0$; або $t_2'(t_1) = \infty/\infty$.
Для розкриття невизначеності застосуємо правило Бернуллі-Лопіталя.

$$t_2'(t_{p,i}) = \lim_{t_1 \to t_{p,i}} \frac{Z_1''(t_1)}{Z_2''(t_2)} = \lim_{t_1 \to t_{p,i}} \frac{Z_1'''(t_1)}{Z_2'''(t_2) \cdot t_2'(t_1)};$$

де $t_{p,i}$; $t_{d,i}$ - абсциси точок кривих Z_1 і Z_2, у яких друга похідна дорівнює нулю, або безмежна. Усі функції, що входять у цей вираз мають межі, які дорівнюють значенням функцій у точках перегину.

$$Z_1'''(t_{1p}) = [t_2'(t_{1p})]^2 \cdot Z_2'''(t_{2p}). \qquad [t_2'(t_{1p})]^2 = \frac{Z_1'''(t_{1p})}{Z_2'''(t_{2p})};$$

Якщо це відношення також є невизначеністю, то будемо застосовувати правило Бернуллі- Лопіталя поки не отримаємо відношення похідних, які не обертаються в нуль у точках перегину.

$$Z_1^n(t_{1p}) = [t_2'(t_{1p})]^{n-1} \cdot Z_2^n(t_{d,i}).$$

Оскільки, t_1; t_2 - є коренями рівняння (1), то ці рівняння справедливі і для будь-яких коренів цього рівняння.

$$Z_1'''(t_1) = [t_2'(t_1)]^2 \cdot Z_2'''(t_2); \qquad Z_1^n(t_1) = [t_2'(t_1)]^{n-1} \cdot Z_2^n(t_2).$$

Такий результат диференціювання свідчить, що t_2 є лінійною функцією від t_1, тобто, $t_2' = k$ - постійна величина.

Якщо криві $Z_1(t_1)$ і $Z_2(t_2)$ мають тільки одну точку, в якій друга похідна дорівнює нулю або безмежна і рівняння кривих відповідають вказаним вище умовам, то необхідною умовою існування t_2', а тобто, і конічної поверхні, є однаковість знаків непарних похідних, що не дорівнюють нулю.

Якщо криві $Z_1(t_1)$ і $Z_2(t_2)$ мають декілька точок, в який друга похідна дорівнює нулю або безмежна і рівняння кривих відповідають вказаним вище умовам, то коефіцієнт $t_2' = k$ визначається координатами цих точок.

$$t_2' = k = \frac{t_{p,i} - t_{p,i-1}}{t_{d,i} - t_{d,i-1}} = \frac{Z_1(t_{p,i}) - Z_1(t_{p,i-1})}{Z_2(t_{d,i}) - Z_2(t_{d,i-1})} \ ,$$

тобто, знаки непарних похідних, що не дорівнюють нулю у цих точках однакові, а знаки парних похідних однакові, якщо $t_2' = k > 0$, і різні, якщо $t_2' = k < 0$. Якщо $t_2' = 1$, то криві $Z_1(t_1)$ і $Z_2(t_2)$ визначають циліндричну поверхню.

Паралельним конічним перерізам притаманна наступна закономірність. У точках кривих, через які проходять твірні конічної поверхні, відношення похідних n-го порядку дорівнює відношенню других похідних у ступені $n-1$ і ці відношення є постійна величина.

$$\mathrm{Z}_1'(t_1) = \mathrm{Z}_2'(t_2); \quad \left[\frac{Z_1''(t_1)}{Z_2''(t_2)}\right]^{n-1} = \frac{Z_1^n(t_1)}{Z_2^n(t_2)}.$$

Висновки. Якщо між точками двох кривих, що належать двом паралельним площинам і задані рівняннями, що задовольняють вказаним у статті умовам, і мають точки, в яких друга похідна дорівнює нулю (наприклад, точки перегину) або безмежна, можна встановити взаємно однозначна відповідність за умови паралельності дотичних у відповідних точках всій області визначення обох кривих, то ці криві є конічними.

Література

1. *Михайленко В. Е., Обухова В. С., Подгорный А. Л.* Формообразование оболочек в архитектуре - Киев: Будівельник, 1972-206 с.: ил.

2. Ольховиченко Н. Г. Конічні многочлени третього та четвертого ступеня // Праці Тавр. Держ. агротех. академії. – Вип. 4, т. 31 – Мелітополь, 2006. –С. 78 -82.

Research of conic curves

Olhowichenco N. G.

Summary

In article conditions at which two curves laying in parallel planes, set conic or cylindrical general view a surface are proved. Law of ratio of derivatives in point of parallel conic section through which pass forming conic surfaces also is lead up.