Фролов О.В. Побудова сітки із ліній кривини на каналових поверхнях Іоахімсталя, твірні кола яких мають спільну радикальну вісь. Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2006. . - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т. 33. – С. 157-164.

УДК 515.5

ПОБУДОВА СІТКИ ІЗ ЛІНІЙ КРИВИНИ НА КАНАЛОВИХ ПОВЕРХНЯХ ІОАХІМСТАЛЯ, ТВІРНІ КОЛА ЯКИХ МАЮТЬ СПІЛЬНУ РАДИКАЛЬНУ ВІСЬ

Фролов О.В., к.т.н.
Донецький національний технічний університет
Тел. (062) 338-4885

Анотація – порівнюються різні методи отримання координатної сітки з ліній кривини на каналових поверхнях Іоахімсталя, що утворюються із конгруенції кіл із спільною радикальною віссю.

Ключові слова - поверхня Іоахімсталя, ортогональна координатна сітка, лінії кривини, радикальна вісь, коефіцієнти квадратичної форми поверхні.

Постановка проблеми. Сучасні методи розрахунку на міцність вимагають дискретизації серединної поверхні оболонки, тобто поділення поверхні за допомогою сітки на скінчену кількість елементів, які припускають пов'язаними між собою у вузлових точках. Так, для розрахунку оболонок у формі каналових поверхонь Іоахімсталя застосовують варіційно - різницевий метод [1]. Згідно з цим методом серединна поверхня оболонки покривається сіткою з постійним або змінним кроком. Лінії сітки збігаються з координатними лініями головних кривин поверхні. Деформування оболонки розглядається відносно вузлових переміщень. Розрахунок складових потенційної енергії деформування, роботи зовнішніх сил базується на різницевій схемі, де область інтегрування Ω поділяється на підобласті $d\Omega_{ij}$, які визначаються в околі вузла *ij* координатними лініями, що проходять між сусідніми вузлами основної сітки. В свою чергу області $d\Omega_{ij}$ поділяють на додаткові підобласті $d\Omega_{ij}^{t}$ (t=1, 2, 3, 4), які відповідають чотирьом квадрантам в околі вузла *ij* [2]. Таким чином, на достовірність отриманих в результаті розрахунку результатів суттєво впливає кількість вузлових точок та якість покриття координатною сіткою серединної поверхні оболонки. Так, збільшення вузлів покращує результати розрахунку, але водночас вимагає більших затрат машинного часу навіть для найсучасніших ЕОМ. На складних поверхнях можуть відбуватися різкі зміни кривини, які потребують згущення сітки на окремих ділянках поверхні. Тому проблема побудова математичних моделей поверхонь, які відповідають вимогам сучасних методів розрахунку оболонок із точки зору отримання локальних геометричних характеристик, що входять до розрахунку матриці жорсткості оболонки, та можливості керування координатною сіткою з ліній кривини є актуальною.

Аналіз останніх досліджень. Аналітична модель каналових поверхонь Іоахімсталя з сім'єю твірних кіл, що мають спільну радикальну вісь, у вигляді параметричних рівнянь вже досить відома – [3, 4, 5]. Наведемо ці рівняння:

$$x = [a(t) + \sqrt{a^2(t) + b_0^2 - r_0^2}\cos u]\cos\ t,$$

$$y = [a(t) + \sqrt{a^2(t) + b_0^2 - r_0^2}\cos u]\sin t, \qquad (1)$$

$$z = \sqrt{a^2(t) + b_0^2 - r_0^2}\sin u.$$

де: $a = a(t)$ - функція, що визначає розташування центра поточного кола каналової поверхні в площині Oxy;

$\pm d^2 = b_0^2 - r_0^2$ - стала, що визначає тип конгруенції кіл, із якої вилучається каналова поверхня Іоахімсталя: у випадку $b_0^2 < r_0^2$ ця конгруенція складається із кіл, які не перетинають радикальну вісь ($0z$), - гіперболічна конгруенція; якщо $b_0^2 > r_0^2$ всі кола, з яких складається каналова поверхня, матимуть перетин між собою в двох точках, що належать радикальній осі, та конгруенція буде еліптичною; випадку $b_0^2 = r_0^2$ відповідає параболічна конгруенція, для якої всі кола мають одну спільну точку, тобто дотикаються між собою у початку координат.

t, *u* – параметри, кожному значенню яких відповідають площина пучка з віссю Oz та точка на поточному колі каналової поверхні, що лежить в цій площині.

Координатна сітка поверхні (1) не є ортогональною, оскільки вираз середнього коефіцієнта її першої квадратичної форми

$$F = -a'(t)\sin u\sqrt{a^2(t) + b_0^2 - r_0^2} \qquad (2)$$

в загальному випадку не дорівнює нулеві. Точніше, лише для ліній $u_1 = 0, u_2 = \pi$, які належать до площини лінії центрів твірних кіл ($0xy$), вираз (2) обертається на нуль. Отже, з ліній *u=const* лише дві $u_1 = 0$ та $u_2 = \pi$ будуть лініями кривини.

Щоб отримати інші лінії кривини в рівняннях (1) припускають заміну параметра

$$u = 2\,\mathrm{arctg}[v(a + \sqrt{a^2 + b^2 - r^2})]\ [3]. \qquad (3)$$

Підстановка правої частини (3) замість *u* до рівнянь (1) дає поверхню, координатна сітка якої складається з ліній кривини. Однак, така параметризація поверхні має суттєві недоліки: щоб отримати точки кола, що належить площині пучка зі сталим значенням параметра *t*, згідно з (1) потрібно змінювати параметр *u* в межах від $-\pi$ до π, при цьому згідно рівнянню (3) параметр *v* повинен змінюватись від $-\infty$ до $+\infty$; рівняння (3) дає нелінійну залежність *u* від *v*, що ускладнює керування сіткою на поверхні (при лінійній зміні *v* лінії *v=const* в одних областях поверхні згущуються, а в інших знаходяться далеко одна від одної).

Формулювання цілей статті. Отримати в загальному вигляді рівняння каналової поверхні Іоахімсталя з сім'єю твірних кіл, що мають спільну радикальну вісь, в параметризації, яка б дозволяла більш гнучко керувати координатною сіткою з ліній кривини.

Основна частина. В роботі [6] наведена загальна модель отримання параметричних рівнянь будь-якої поверхні Іоахімсталя в лініях кривини. Нагадаємо, що одна сім'я ліній кривини такої поверхні складається з ліній, які належать сферам сім'ї з центрами на прямій, а друга – з ортогональних траєкторій до цієї сім'ї сфер. Оскільки множина траєкторій, ортогональних до сім'ї сфер із центрами на прямій, складає конгруенцію, то поверхню Іоахімсталя можна вважати поверхнею, що виділена з цієї конгруенції. У випадку каналової поверхні Іоахімсталя, що розглядається, всі сфери сім'ї матимуть спільну радикальну площину, а ортогональні траєкторії до цієї сім'ї складають конгруенцію кіл із спільною радикальною віссю, яка є прямою, де розташовані центри сфер.

Параметричні рівняння поверхні Іоахімсталя, що віднесена до ліній кривини, мають вигляд [6]:

$$x = \frac{2rCE}{C^2 + E^2}\cos t,\ y = \frac{2rCE}{C^2 + E^2}\sin t,\ z = b + \frac{r(C^2 - E^2)}{C^2 + E^2}, \tag{4}$$

де: *r=r(u), b=b(u)* – функції залежності радіусу поточної сфери сім'ї та точки центру цієї сфери від параметра сім'ї *u*;

C=C(t) – функція, що пов'язує параметри конгруенції ортогональних траєкторій *C* і *t* (параметр пучка площин з віссю *Oz*);

$E = \exp\int \frac{b'}{r} du$ - функція від параметру сім'ї сфер.

Щоб отримати на основі цих рівнянь параметричні рівняння розглядуваних поверхонь, потрібно записати вирази функцій таким чином, щоб вони задавали сім'ю сфер із спільною радикальною площиною. Це можливо зробити двома шляхами: 1) безпосередньо записавши ці вирази на основі рівняння сім'ї сфер із спільною радикальною площиною (площина *Oxy*):

$$x^2 + y^2 + [z - (b_0 - \frac{1}{2m})]^2 - r_0^2 + b_0^2 - (b_0 - \frac{1}{2m})^2 = 0; \tag{5}$$

2) задавши коло з центром a_0 в радикальній площині та вважаючи його одним із кіл конгруенції із спільною радикальною віссю (вісь *Oz*), отримати вирази функцій *r(u), b(u)* відповідно до перетину дотичної до поточної точки кола із радикальною віссю та відстанню між поточною точкою цього кола та центром поточної сфери сім'ї. В останньому випадку замість сталих b_0 та r_0, що визначають тип пучка сфер, до виразів функцій будуть надходити сталі a_0 та $\bar{r}_0$, які характеризуватимуть тип конгруенції кіл, ортогональної до сім'ї сфер.

В таблиці 1 наведені вирази функцій, що входять до рівнянь (4) та самі параметричні рівняння поверхні для першого та другого випадків подання пучка сфер. Проаналізуємо ці рівняння.

Оскільки в першому випадку параметром ліній кривини, що ортогональні твірним колам, є параметр пучка сфер, який водночас визначає положення центра поточної сфери сім'ї на прямій, то радикальній площині, як сферам нескінченного радіуса, центри яких розташовані ліворуч і праворуч від радикальної вісі, повинні відповідати нескінченні значення цього параметра. Щоб забезпечити це, *u* необхідно вважати функцією *u=u(v)*, яка б на кінцевому інтервалі досягала нескінченних значень, наприклад *u*=tg*(v)*. Звернемо увагу також на геометричний зміст подвійного знаку в рівняннях (6). Задаючись послідовно додатним або від'ємним значенням перед $\sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - r^2}$ та змінюючи значення *a* та *u* на площині пучка, будемо мати на будь-якій площині пучка ортогональні траєкторії у вигляді півкіл, котрі розташовані у I та III координатних чвертях – відповідно знаку “+“ та в I та IV – відповідно знаку “-”. Це призводить до того, що поверхня (6) складається ніби з двох половинок, кожній з яких відповідає один із знаків.

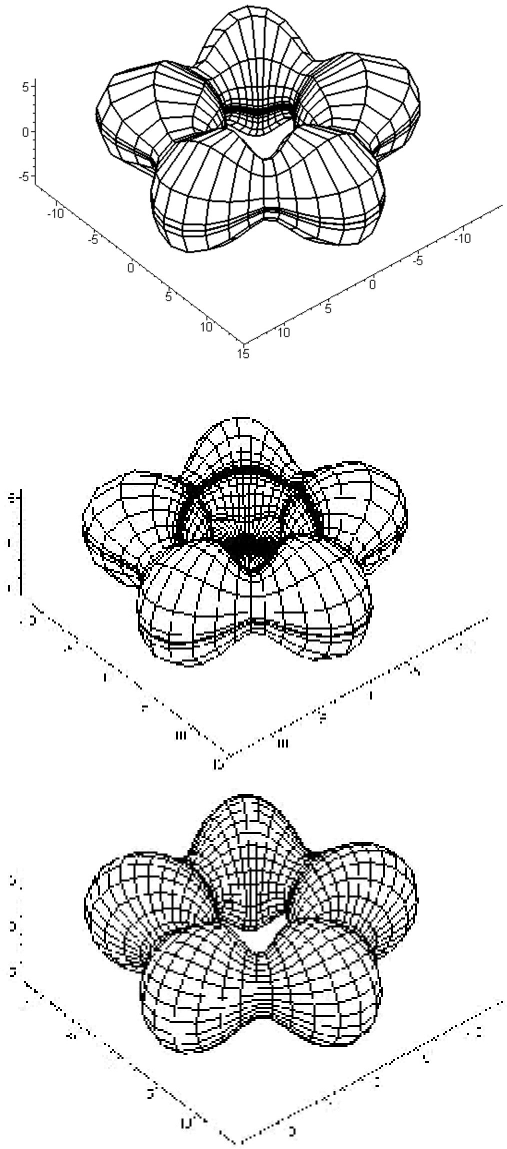
Таблиця 1

Найменування функції	Значення функції
Перший випадок подання пучка сфер	
Функції, що подають сім’ю сфер	$b=u$ $r=\sqrt{u^2 - b_0^2 + r_0^2}=\sqrt{u^2-d^2}\ \left(u=b_0-\dfrac{1}{2m}\right)$
Функція $E=E(u)$	$E=u+\sqrt{u^2-d^2}$
Функція $C=C(t)$	$C=a\pm\sqrt{a^2+d^2}$
Параметричні рівняння каналової поверхні Іоахімсталя	$x=\dfrac{2\sqrt{u^2-d^2}\,(u+\sqrt{u^2-d^2})\,(a\pm\sqrt{a^2+d^2})}{(a\pm\sqrt{a^2+d^2})^2+(u+\sqrt{u^2-d^2})^2}\cos t,$ $y=\dfrac{2\sqrt{u^2-d^2}\,(u+\sqrt{u^2-d^2})\,(a\pm\sqrt{a^2+d^2})}{(a\pm\sqrt{a^2+d^2})^2+(u+\sqrt{u^2-d^2})^2}\sin t,$ (6) $z=\dfrac{[(a\pm\sqrt{a^2+d^2})^2+d^2](u+\sqrt{u^2-d^2})}{(a\pm\sqrt{a^2+d^2})^2+(u+\sqrt{u^2-d^2})^2}.$
Другий випадок подання пучка сфер	
Функції, що подають сім’ю сфер	$b=\dfrac{\bar{r}_0+a_0\cos u}{\sin u};$ $r=\dfrac{a_0+\bar{r}_0\cos u}{\sin u}\ \left(\bar{r}_9=\sqrt{a_0^2+b_0^2-r_0^2}\right)$
Функція $E=E(u)$	$E=\operatorname{ctg}\dfrac{u}{2}$
Функція $C=C(t)$	$C=\dfrac{a+\sqrt{a^2-(a_0^2-\bar{r}_0^2)}}{a_0+\bar{r}_0}$
Параметричні рівняння каналової поверхні Іоахімсталя	$x=\dfrac{2(a_0+\bar{r}_0\cos u)(a+\sqrt{a^2-(a_0^2-\bar{r}_0^2)})(a_0+\bar{r}_0)}{(a+\sqrt{a^2-(a_0^2-\bar{r}_0^2)})^2(1-\cos u)+(a_0+\bar{r}_0)^2(1+\cos u)}\cos t,$ $y=\dfrac{2(a_0+\bar{r}_0\cos u)(a+\sqrt{a^2-(a_0^2-\bar{r}_0^2)})(a_0+\bar{r}_0)}{(a+\sqrt{a^2-(a_0^2-\bar{r}_0^2)})^2(1-\cos u)+(a_0+\bar{r}_0)^2(1+\cos u)}\sin t,$ (7)

	$z=\dfrac{\sin u[(a+\sqrt{a^2-(a_0^2-\overline{r}_0^{\,2})})^2-(a_0^2-\overline{r}_0^{\,2})](a_0+\overline{r}_0)}{(a+\sqrt{a^2-(a_0^2-\overline{r}_0^{\,2})})^2(1-\cos u)+(a_0+\overline{r}_0)^2(1+\cos u)}$

У другому випадку подання сім'ї сфер її параметром служить параметр u деякого початкового кола конгруенції кіл, що ортогональна до пучка сфер. Кожному значенню цього параметра водночас відповідає одна з ліній кривини, яка ортогональна до твірних кіл каналової поверхні. Тому, змінюючи в рівняннях (7) параметр u в межах від $-\pi$ до π (або від 0 до 2π.), можливо отримати всі лінії кривини у відповідності з бажаною кількістю ліній та кроком зміни параметру.

На рисунку 1 представлені наочні зображення сітки із ліній кривини на каналових поверхнях Іоахімсталя, які побудовані за рівнянь (1), (3) – рис. 1а, (6) – рис.1б та (7) – рис. 1в. Зауважимо, що функція *a=a(t)* має однаковий вираз та приймає ті ж самі значення, а кількість координатних ліній та крок зміни параметрів в параметричних рівняннях лишаються сталими.



а) б) в)

Рис. 1. Каналова поверхня Іоахімсталя, подана функцією $a=8+0.8\sin 5t$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ b=2, r=7: а) за рівняннями (1) з урахуванням (2.126); б) за рівняннями (6); в) за рівняннями (7) та a_0=8.

Висновки. Аналіз параметричних рівнянь та наочні зображення, представлені на рис.1, дозволяють зробити висновок, що за якістю покриття поверхні координатною сіткою з ліній кривини та можливістю керування параметрами перевагу над іншими має параметризація (7). Ця обставина потребує врахування при розрахунках оболонок, що мають форму каналових поверхонь Іоахімсталя, на міцність чи стійкість.

Література

1. Иванов В. Н. Вариационно-разностный метод и метод глобальных элементов в расчете сопряженных отсеков оболочек //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвузовский сборник научных трудов. – М.: Изд-во АСВ, 2003. - Вып. 12. – С. 34-41.

2. Наср Юнес Ахмед Аббуши Геометрия, конструирование и исследование напряженно – деформированного состояния оболочек в форме каналовых поверхностей Иоахимсталя. Автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.23.17/ Рос. ун-т дружбы народов. - М., 2002. – 16 с.

3. Пилипака С. Ф. Конструювання каналових поверхонь Іоахімсталя сім'ями ліній кривини. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1998.- Вип. 64. - С. 171 - 173.

4. Сименко О. В. Проекціювання конгруенцією кіл із спільною радикальною віссю. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003.- Вип. 73. - С. 260 - 266.

5. Скидан І. А., Фролов О. В. Каналові поверхні Іоахімсталя з плоскою лінією центрів // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2002. . - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т. 16. – С. 130-134.

6. Фролов О. В. Моделі поверхонь Іоахімсталя, віднесених до ліній кривини // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2003. - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т. 18. – С. 110-117.

REFERENCE OF CURVATURE LINES ON IAOCHIMSTAL'S CANAL SURFACES

Froloff O.

In clause three parametrization of surfaces carried to lines of curvature are compared. In the first case of the equation of surfaces have been received on algorithm known earlier [2, 3], in the second and third case according to the general algorithm [6]. Comparison of the parametrical equations shows, that in most receptions for management of a coordinate grid on a surface the third case is.