Фролов О.В. Гелікоїд Діні, як поверхня Іоахімсталя. Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2007. . - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т. 35. – С. 100-107.
УДК 515.2

ГЕЛІКОЇД ДІНІ, ЯК ПОВЕРХНЯ ІОАХІМСТАЛЯ

Фролов О.В., к.т.н.
Донецький національний технічний університет
Тел. (062) 338-4885

Анотація – розглянута поверхня гелікоїда Діні з позиції конструктивної схеми формоутворення класу поверхонь Іоахімсталя.

Ключові слова - гелікоїд, поверхня Іоахімсталя, лінії кривини, трактриса, ортогональна траєкторія.

Постановка проблеми. Різні підходи до формоутворення вже відомих поверхонь дозволяють ні тільки більш детальніше дослідити ці поверхні, але надають проектувальникові нові засоби керування формою. Це стає можливим завдяки залученню до визначника поверхні нових елементів, що її визначають орієнтуючись на потреби проектування. Оскільки, гвинтові поверхні є одними з найбільш поширених у техніці, розробка засобів керування їхньою формою станових актуальну проблему.

Аналіз останніх досліджень. Гелікоїд Діні являє собою поверхню, що утворюється гвинтовим рухом трактриси відносно її осі [1]. Якщо взяти на осі трактриси довільну точку T та проводити із неї дотичні до трактриси в різних положеннях останньої, то, згідно з основною властивістю трактриси, довжина дотичної від точки T її осі до поточної точки M дотику є сталою, що дорівнює параметру трактриси $MT=a$. Отже, точки дотику утворюють лінію, що належить сфері радіуса a із центром у точці T. Ця сфера перетинаючи гелікоїд утворює з ним прямих кут. Згідно з теоремою Іоахімсталя, сферична лінія буде лінією кривини гелікоїда Діні. Оскільки, дотична до трактриси в її поточному положенні збігається із радіусом сфери, то напрямки трактрис на поверхні гелікоїда будуть ортогональними до напрямків сферичних ліній кривини, а, отже, сім'я трактрис буде другою сім'єю ліній кривини. Тобто, гелікоїд Діні можна віднести до класу поверхонь Іоахімсталя, одну сім'ю ліній кривини утворюють плоскі криві, що належать до одного пучка площин, а другу складають лінії, які лежать на сферах із центрами на осі пучка [2].

Формулювання цілей статті. Дослідити поверхню гелікоїда Діні, як поверхню, що утворюється за конструктивною схемою Іоахімсталя та основі отриманих залежностей запропонувати нові підходи до конструювання цієї поверхні.

Основна частина. Конструктивна схема формоутворення поверхонь Іоахімсталя в загальному вигляді була розглянута в роботах [4, 5,6]. Згідно із цією схемою конструювання будь-якої поверхні Іоахімсталя складається з двох етапів: 1) отримання конгруенції траєкторій ортогональних до сім'ї сфер із центрами на одній прямій; 2) розподіл зазначених траєкторій у просторі за деяким законом.

Щоб визначити ортогональні траєкторії до сім’ї сфер із коллінійними центрами просторову схему замінюють на плоску [3]: подають сім'ю кіл із центрами на прямій та отримують ортогональні траєкторії до неї. Подання сім'ї кіл зводиться до визначення функцій залежності положення центра поточного кола сім’ї на прямій та радіуса цього кола від одного параметру. Конструктивно це можна зробити за допомогою деякої ліній, яка певним чином перетинає всі кола сім'ї.

Перейдемо до конкретного випадку. Розташуємо на площині трактрису так, щоб її віссю була вісь *Oy* прямокутної системи координат, а її точка звороту знаходилась на осі *Ox*. Тоді параметричні рівняння трактриси матимуть вигляд:

$$x = f = a\sin u, \;\; y = \varphi = a\,(\cos u + \ln tg\frac{u}{2}). \qquad (1)$$

Функції, що визначають сім'ю кіл ортогональну до трактриси визначимо за формулами [3]:

$$r = f\sqrt{1-\left(\frac{\varphi'}{f'}\right)} = a, \;\; b = \varphi - f\frac{\varphi'}{f'} = a\ln tg\frac{u}{2}. \qquad (2)$$

Рівняння сім'ї кіл запишемо у вигляді:

$$x^2 + (y - at)^2 - a^2 = 0\,, \qquad (3)$$

де $t = \ln tg\frac{u}{2}$ - параметр сім'ї. Як бачимо, зазначена сім’я складається з кіл сталого радіуса, що дорівнює параметру трактриси.

Згідно із загальним алгоритмом отримання ортогональних траєкторій до будь-якої сім'ї ліній на площині [1], необхідно розв’язати рівняння (3) разом із рівнянням:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0\,, \qquad (4)$$

в якому коефіцієнт y' замінити на $-\frac{1}{y'}$. Будемо мати

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \;\; \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - at)\,,$$

та, підставляючи до (3)

$$xy' - y + at = 0\,. \qquad (5)$$

Усунемо параметр *t*, підставивши до (3) його значення з (5). Після скорочень отримаємо:

$$y'^2 - \frac{a^2}{x^2} + 1 = 0 \qquad (6)$$

- диференціальне рівняння ортогональних траєкторій до сім'ї (3). Проінтегрувавши рівняння (7) будемо мати:

$$y = \int\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\frac{\mathrm{a} + \sqrt{\mathrm{a}^2 - x^2}}{x} + C\,, \qquad (7)$$

де: *C* – довільна стала інтегрування.

Рівняння (8), якщо прийняти сталу інтегрування за параметр є рівнянням ортогональних траєкторій до сім'ї кіл (3) із центрами на осі трактриси. Перейдемо до параметричних рівнянь ортогональних траєкторій, підставивши замість x до (7) його вираз із (1). Отримаємо

$$x = a\sin u, y = a\cos u + \ln tg\frac{u}{2} + C. \qquad (8)$$

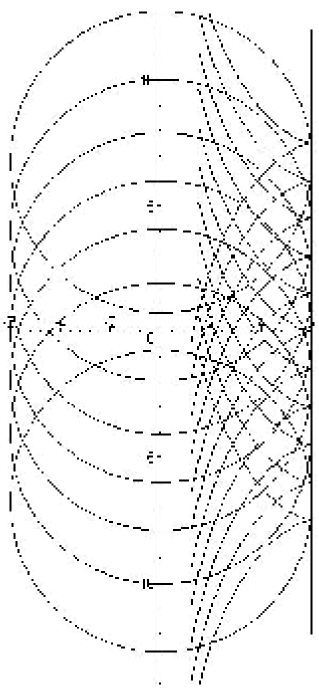

Рис.1. Розташування ортогональних траєкторій на площині.

Із рівнянь (8) випливає, що лінії сім’ї ортогональних траєкторій є трактрисами, які можна отримати з вихідної трактриси (1) її паралельним зміщенням у напрямку осі Oy на відстань, що дорівнює параметру сім'ї. Цю обставину наглядно демонструє рис. 1, на якому надані зображення ліній сім'ї ортогональних траєкторій разом з декількома колами сім'ї (3).

Параметричні рівняння конгруенції ортогональних траєкторій отримаємо, сумістивши вісь Oz просторової системи з віссю Oy системи координат на площині та обертаючи сім'ю ліній (8) навколо цієї осі:

$$x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v, z = a\cos u + \ln tg\frac{u}{2} + C, \quad (9)$$

де параметрами конгруенції будуть v та C.

У теорії поверхонь Іоахімсталя важливе значення має наявність обвідної сім'ї кіл (3), оскільки в точках перетину обвідної та ортогональної траєкторії остання має точку звороту. У нашому випадку такої обвідною буде пряма, що паралельна осі Oy та знаходить від неї на відстані радіусу кіл (3) $r = a$, що є сталою величиною. Точкам обвідної відповідає стале значення параметра траєкторій (8) $u_0 = \frac{\pi}{2}$, яке відповідає точці звороту трактриси. Переходячи до просторової схеми, зауважимо, що область існування конгруенції (9) буде обмежена поверхнею циліндра обертання з віссю Oz та радіусу основи, що дорівнює a. Цей циліндр буде обвідною поверхнею сім'ї сфер, до яких ортогональні лінії конгруенції. Отже, на будь-якій поверхні конгруенції (9) лінії $u_0 = \frac{\pi}{2}$ буде відповідати геометричне місце особливих точок поверхні, тобто її ребро звороту.

Щоб вилучити з конгруенції (9) деяку поверхню Іоахімсталя необхідно зв’язати параметри конгруенції v та C за допомогою неперервної диференційованої функції [3]. У випадку гелікоїда Діні достатньо вважати пропорційним лінійне та кутове переміщення трактриси:

$$C = kv, \qquad (10)$$

де: k – сталий коефіцієнт. Підставляючи (10) до (9), отримаємо

$$x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v, z = a\cos u + \ln tg\frac{u}{2} + kv. \qquad (12)$$

Параметричні рівняння (12) є відомими рівняннями гелікоїда Діні [1]. Звернемо увагу на те, що точкам поверхні (12) при $u_0 = \frac{\pi}{2}$ відповідає циліндрична гвинтова лінія:

$$x = a\cos v,\ \ y = a\sin v,\ z = kv, \tag{13}$$
яка є ребром звороту гелікоїда. Отже, можна вважати, що до визначника поверхні (12) входить твірна – трактриса (1) та гвинтова лінія (13), по якій рухається в процесі переміщення точка звороту твірної.

Як згадувалось раніше, до визначника гелікоїда Діні за схемою Іоахімсталя, крім твірної трактриси, входять лінії, що належать до сфер сім'ї із центрами на осі трактриси. Множина цих ліній складають другу сім'ю ліній кривини. Але координатну сітку поверхні (12) разом з трактрисами складають циліндричні гвинтові лінії, які не є лініями кривини цієї поверхні. Поставимо за мету ввести до визначника гелікоїда Діні, крім трактриси, деяку сферичну лінію кривини у відповідності до конструктивної схеми Іоахімсталя. Для цього оберемо інший шлях визначення ортогональних траєкторій, якій було викладено в роботі [3].

Рівняння (3) перепишемо в параметричному вигляді:
$$x = a\cos\alpha,\ y = a(t + \sin\alpha), \tag{14}$$
де α – параметр положення точки на колі.

У відповідності до [3] знаходимо:
$$b = at,\ \ r = a,\ \ E = \exp\int\frac{b'}{r}dt = e^{t}$$

Тоді параметричні рівняння сім'ї траєкторій, ортогональних колам (14) матимуть вигляд:
$$x = \frac{2rCE}{C^2 + E^2},\ y = b + \frac{r(C^2 - E^2)}{C^2 + E^2}$$
$$x = \frac{2aCe^{t}}{C^2 + e^{2t}},\ y = a\left(t + \frac{(C^2 - e^{2t})}{C^2 + e^{2t}}\right). \tag{15}$$

Параметричні рівняння конгруенції ортогональних траєкторій:
$$x = \frac{2aCe^{t}}{C^2 + e^{2t}}\cos v,\ \ y = \frac{2aCe^{t}}{C^2 + e^{2t}}\sin v,\ \ z = a\left(t + \frac{(C^2 - e^{2t})}{C^2 + e^{2t}}\right), \tag{16}$$
де v та C, як і раніше, параметри конгруенції.

Визначення функції $C = C(v)$, що відповідає зануренню сферичної лінії кривини до конгруенції ортогональних траєкторій, можна здійснити за формулою [4]:
$$C = \frac{E(t_0)(\sin\alpha(t) + 1)}{\cos\alpha(t)}, \tag{17}$$
де в нашому випадку $\alpha=\alpha(t)$ – функція, що визначає лінію на деякій сфері сім'ї:
$$x = a\cos\alpha\cos v,\ y = a\cos\alpha\sin v,\ z = a(t + \sin\alpha), \tag{18}$$
при $t=t_0$.

Щоб визначити деяку сферичну лінію кривини на поверхні гелікоїда Діні, підставимо до рівняння (7) замість x та y праву частину рівнянь (14), а замість С – праву частину (10). Після скорочень отримаємо:
$$\ln\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = hv - t_0,$$

Звідки

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{e^{hv-t_0}-1}{e^{hv-t_0}+1}, \tag{19}$$

де

$$h=\frac{k}{a}. \tag{20}$$

Підставимо праву частину (19) до (18), перетворивши останнє до вигляду:

$$C=\frac{E(t_0)(1+tg\frac{\alpha}{2})}{1-tg\frac{\alpha}{2}}. \tag{21}$$

Будемо мати

$$C=\frac{e^{t_0}}{e^{hv-t_0}}=e^{hv}. \tag{22}$$

Тобто, функція розподілу ортогональних траєкторій у просторі (22) не залежить від вибору сфери, на якій знаходиться сферична лінія кривини гелікоїда. Рівняння конгруенції (16) при підстановці до них правої частини (22) призводять до

$$x=\frac{2ae^{t+hv}}{e^{2hv}+e^{2t}}\cos v,\ \ y=\frac{2ae^{t+hv}}{e^{2hv}+e^{2t}}\sin v,\ \ z=a\left(t+\frac{(e^{2hv}-e^{2t})}{e^{2hv}+e^{2t}}\right). \tag{23}$$

Рівняння (23) є параметричними рівняннями гелікоїда Діні, віднесеного до координатної сітки з ліній кривини. Щоб перейти від рівнянь (12) до рівнянь (23) достатньо обчислити коефіцієнт *h* за формулою (20) при відповідних значення параметрів *a* та *k* гелікоїда.

На рис. 2 зображено відсіки поверхні гелікоїда Діні, що побудовані за параметричними рівняннями (12) – перший випадок та за рівняннями (23) – другий.

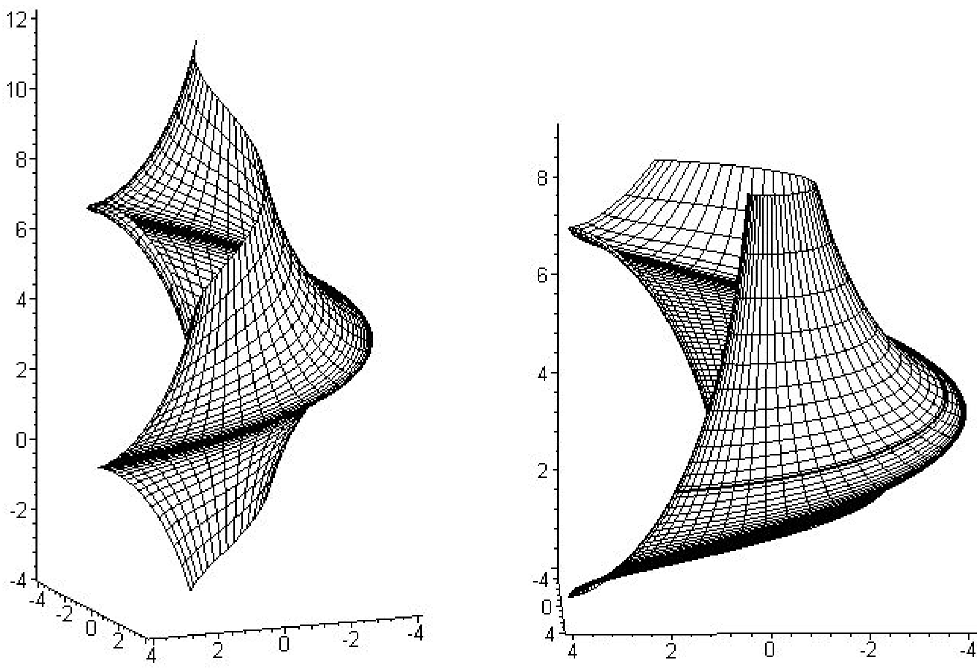

Рис.2. Поверхня гелікоїда Діні при a=4, k=1.2:
1) за рівняннями (12) v=0..2π, u=0.3 ..0.9 π.;
2) за рівняннями (23) v=0..2π, t=π/2 ..0.95 π.

Висновки. Одержані результати у вигляді параметричних рівнянь гелікоїда Діні дозволяють отримувати відсіки цієї поверхні за двома визначниками – як поверхні, що утворюється гвинтовим рухом трактриси, та, як поверхні Іоахімсталя із сім'ями плоских та сферичних ліній кривини. Зазначимо, що в останньому випадку відсік поверхні буде обмежений лініями кривини. Ця обставина становить перевагу параметричних рівнянь (23) з точки зору подальшого розрахунку на міцність чи стійкість методами теорії оболонок.

Література

1. Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия.- М.- Л.: ГИТТЛ, 1949. – 511 с.
2. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: Изд. иностр. лит., 1960. – 554с.
3. Фролов О. В. Моделі поверхонь Іоахімсталя, віднесених до ліній кривини // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2003. - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т. 18. – С. 110-117.
4. Фролов О. В. Конструювання поверхонь Іоахімсталя за поданою сферичною лінією кривини // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2004. - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т. 24. – С. 110-117.

DINI’S HELICOID AS IAOCHIMSTAL’S SURFACES

Froloff O.

Surface of Dini’s helicoid as a surface which is formed according to the Ioachimstal’s constructive forming scheme is considered. The received dependences can be used at shell’s designing, and also their stress analysis.