

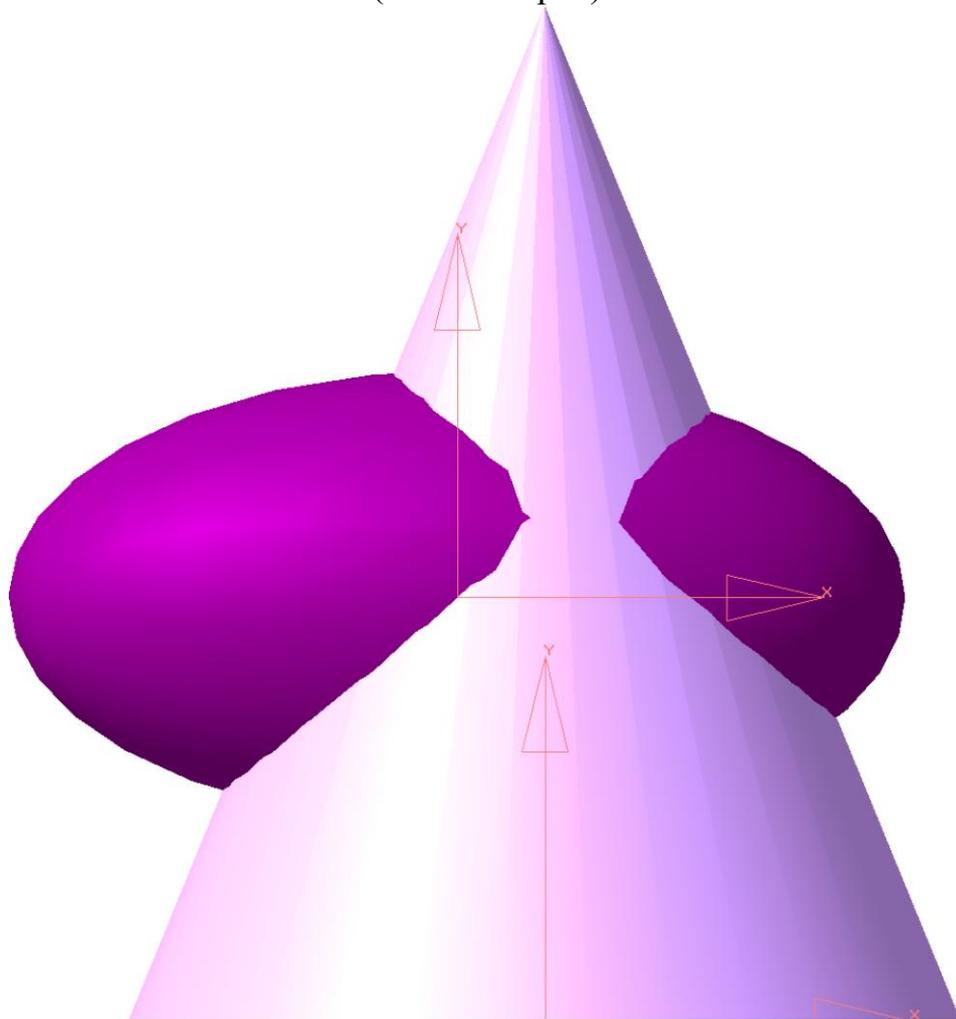
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Донецкий национальный технический университет

Червоненко А. П., Катькалова Е. А.

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПРОЕКЦИЙ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С ОБЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ СИММЕТРИИ**

Учебное пособие
(Часть вторая)



Донецк 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Донецкий национальный технический университет

Червоненко А. П., Катькалова Е. А.

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПРОЕКЦИЙ ЛИНИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С ОБЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ СИММЕТРИИ**

Учебное пособие
(часть вторая)

РАССМОТРЕНО
на заседании кафедры начертательной
геометрии и инженерной графики
Протокол №10 от 10.05.2011 г.

У Т В Е Р Ж Д Е Н О
на заседании учебно – издательского
совета ДонНТУ
Протокол №4 от 10.06.2011 г.

Донецк 2011

УДК 515

Червоненко А. П., Катькалова Е. А. Геометрические характеристики проекций линий пересечения поверхностей второго порядка с общей плоскостью симметрии: Учеб. пособие (часть вторая). ДонНТУ, Донецк: 2009. – 23 с.: ил.

В пособии исследованы особенности проекций линий пересечения поверхностей второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии, на плоскость, параллельную этой плоскости симметрии. Предложены приемы построения центров, фокусов и других элементов кривых второго порядка, в которые проецируются линии пересечения.

Пособие предназначено для преподавателей, аспирантов, студентов, изучающих начертательную геометрию по углубленной программе. Оно может быть использовано в научно – исследовательской и конструкторской работе студентами, аспирантами и конструкторами.

Составители:

А. П. Червоненко, ст. преп.
О. А. Катькалова, доц.

Рецензент:

Проф. кафедры начертательной
геометрии и инженерной
графики, доц., к. т. н.

А. Ф. Коломиец

Ответственный за выпуск:

И. А. Скидан, проф.

Рекомендовано ученым советом ДонНТУ как учебное пособие для преподавателей, аспирантов, студентов, изучающих начертательную геометрию по углубленной программе. Протокол №6 от 17.06.2011 г.

ВВЕДЕНИЕ

В первой части учебного пособия [5] было частично рассмотрено построение линий пересечения кривых поверхностей вращения второго порядка с общей плоскостью симметрии на плоскость параллельную их осям.

Были рассмотрены задачи, в которых оси тел вращения поверхностей второго порядка пересекаются. При таком расположении поверхностей линии пересечения проецировались в гиперболы или параболы.

Во второй части учебного пособия мы попытаемся рассмотреть примеры, когда линии пересечения в задачах с пересекающимися осями вращения проецируются в эллипсы или окружности, а также построение линий пересечения таких поверхностей с параллельными осями вращения.

На рис 1. показаны линии пересечения конусов вращения с углами при вершине в 30° , 45° , 60° , 75° со сферой. Вершина конусов S находится на конце горизонтального диаметра сферы. Конусы вращения и сфера имеют две общие плоскости симметрии – фронтальную, проходящую через ось конусов, и горизонтальную, проходящую через вершину конусов и экватор сферы.

На фронтальную плоскость проекций, параллельную общей плоскости симметрии, линии пересечения сферы и конусов проецируются в виде парабол [1,5]. Вершины парабол находятся в вершине конусов S . Остальные элементы парабол находятся известным способом. Рассмотрим построения элементов на примере пересечения конуса с углом при вершине 30° . Контурная образующая конуса пересекается с главным меридианом сферы в т. 1 ($1_1, 1_2$). Дискриминант параболы равен 0,5. Расстояние $S_2 M_2$ равно расстоянию $S_2 I_2$. Касательная к параболе в т. 1_2 проходит через т. I_2 . Из точки пересечения касательной $1_2 I_2$ параболы относительно фокуса проводим прямую, перпендикулярную к касательной $1_2 I_2$ до пересечения с осью параболы. Это и есть фокус данной параболы. Директриса параболы находится на расстоянии SF слева от вершины S . Остальные параболы и их элементы построены аналогично.

На горизонтальную плоскость проекций линии пересечения сферы и данных конусов проецируются в пучок окружностей, взаимнокасательных в т. S_1 , и перпендикулярных к пучку касающихся окружностей в той же точке S_1 [4,6].

На рис. 2 показаны линии пересечения конусов вращения с углами при вершине 15° , 30° , 45° , 60° со сферой. Вершине конусов S находится на профильно-проецирующем диаметре сферы на расстоянии $m(25 \text{ мм})$ от центра сферы. Конусы вращения и сфера имеют две общие плоскости симметрии – фронтальную, проходящую через ось конусов и горизонтальную, проходящую через вершину конусов и экватор сферы.

На фронтальную плоскость проекции, параллельную общей плоскости симметрии, линии пересечения сферы и конусов проецируются в параболы [1, 5]. Все вершины парабол находятся в одной точке (A_2). Нахождение вершины показано на примере пересечения конуса с углом при вершине 15° со сферой. Контурные образующие этого конуса пересекаются с главным меридианом сферы в точках $1_2, 1'_2, \bar{1}_2, \bar{1}'_2$. Проводим через них вертикальные контурные образующие цилиндра вращения. Через окружности этого цилиндра, лежащую в плоскости экватора сферы проводим произвольную сферу радиуса R^{15} с центром, лежащим на оси этого цилиндра. Эта сфера пересекается с заданной исходной сферой по окружности, проецирующейся в прямую линию. Эта линия и линия проекции плоскости основания цилиндра пересекается в вершине A_2 . Фокус этой параболы находится с помощью подеры в т. A_2 и касательной к этой параболе в т. $1'_2$. Так как дискриминант параболы равен 0,5, то положение касательной $1'_2 N_{15}$ определяется по расстоянию n .

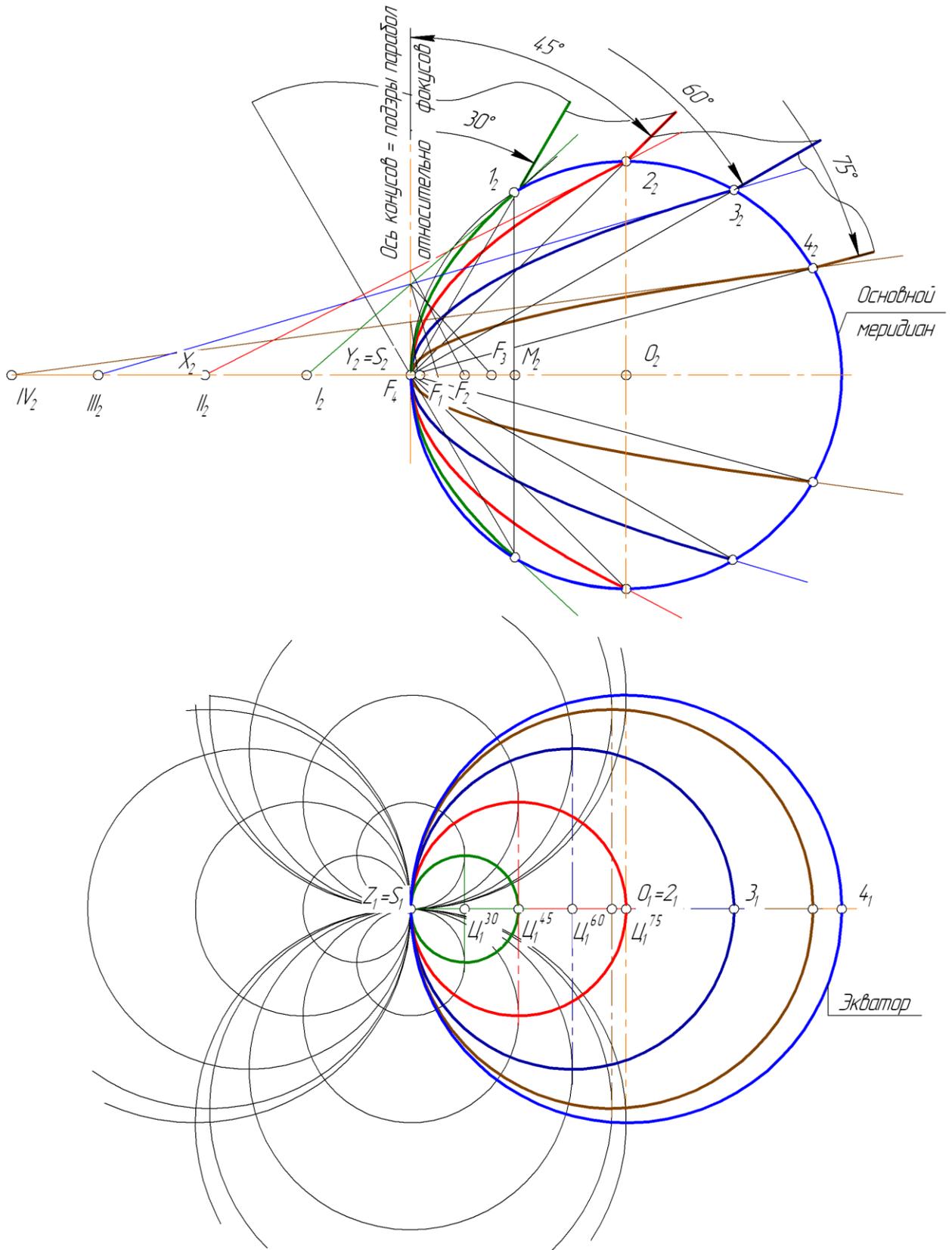


Рис. 1 Пересечение конусов и сфер, имеющих общие плоскости симметрии. Вершины конусов лежат на конце профильно-проецирующего диаметра сферы

Фокус этой параболы F_2^1 определяется с помощью подеры, проведенной в вершине параболы. Остальные параболы и их элементы находятся

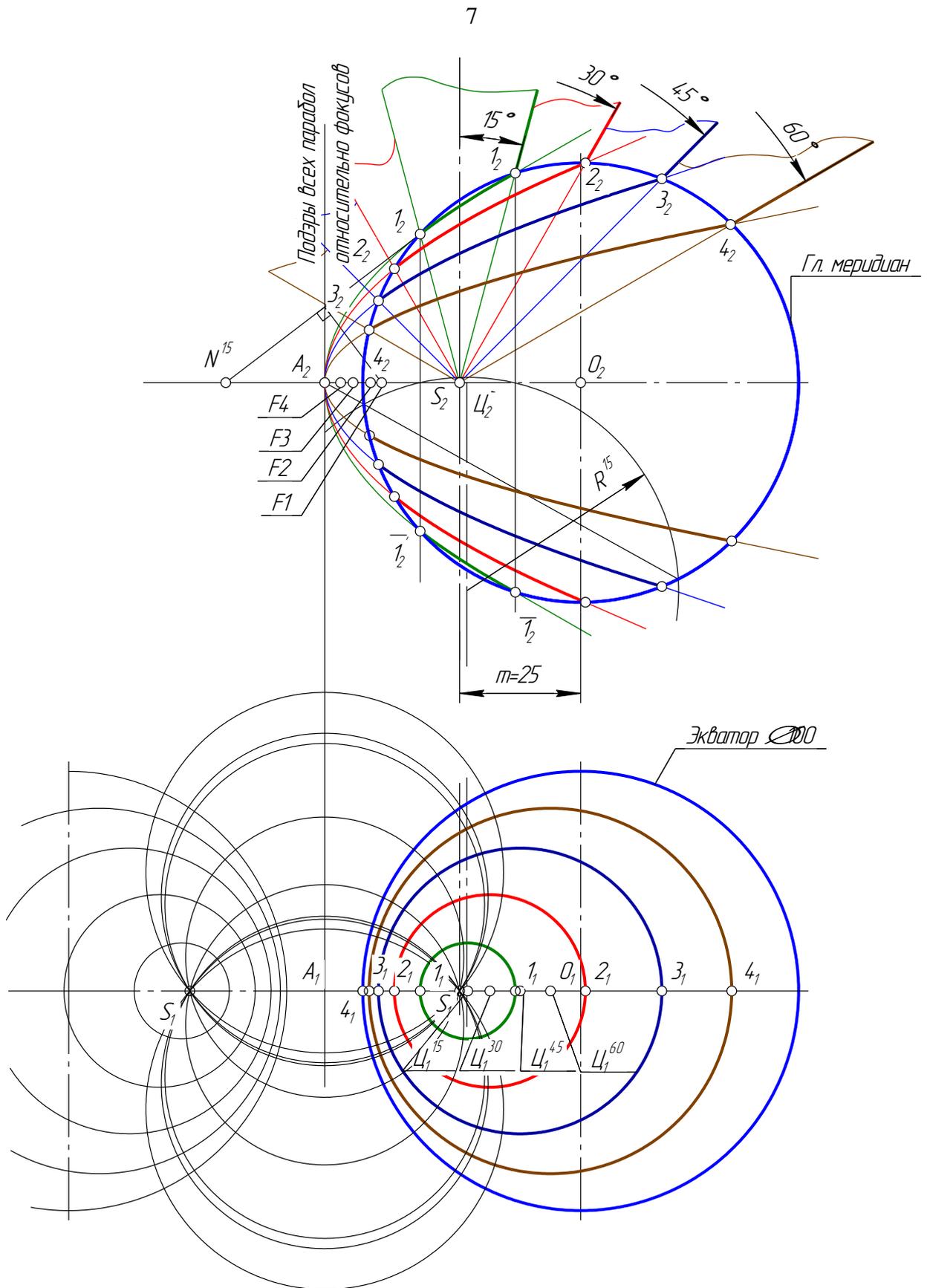


Рис. 2 Пересечение конусов и сфер, имеющих общие плоскости симметрии. Вершины конусов сдвинуты от центра сферы на расстояние $m=25$

аналогично. На горизонтальную плоскость проекций линии пересечения сфе-

ры и данных конусов проецируются пучком окружностей, не имеющих общих точек, и перпендикулярных к пучку пересекающихся окружностей, проходящих через точки S_1 и S_1' [4, 6].

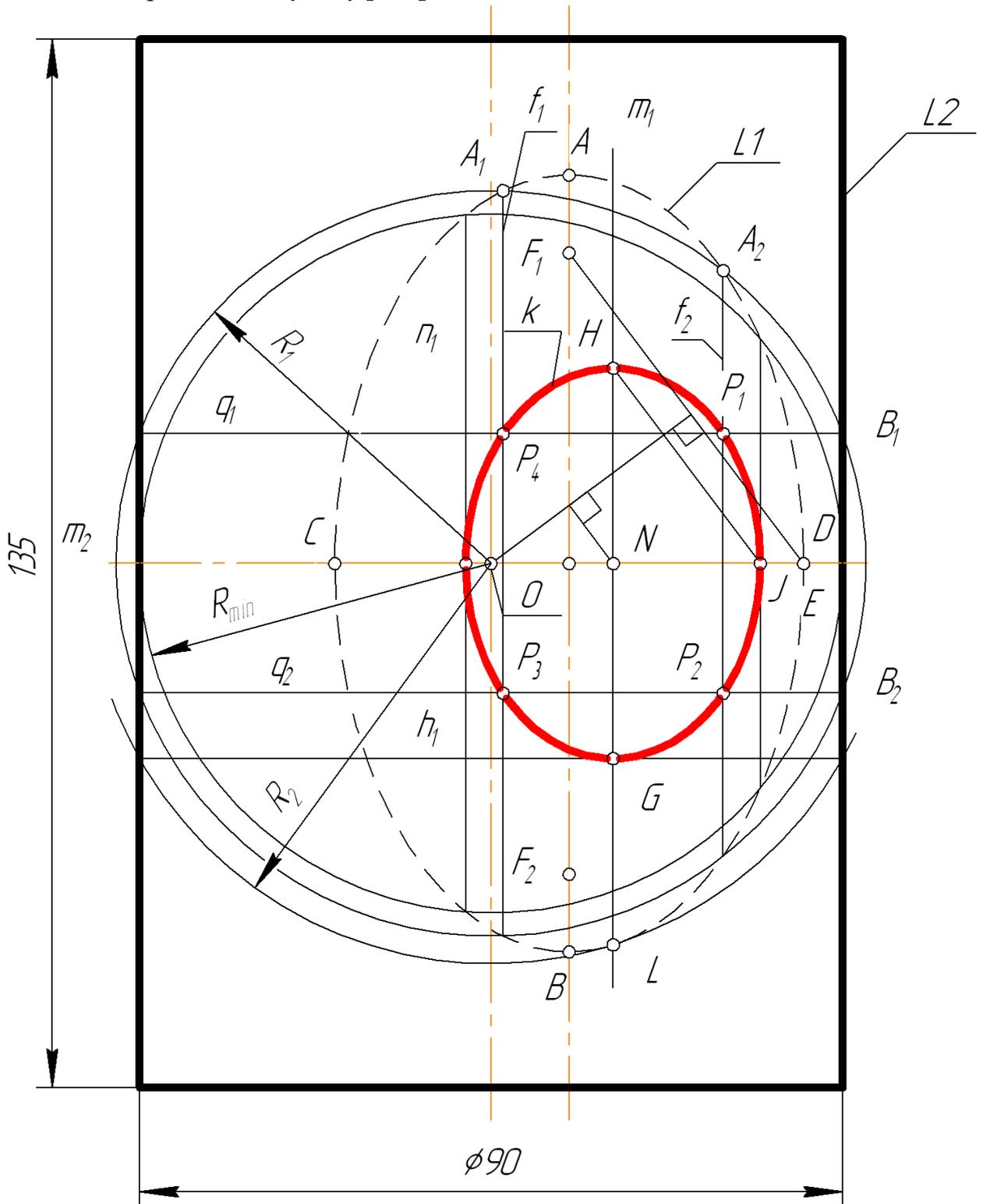


Рис.3 Пересечение цилиндра вращения и сжатого эллипсоида с параметрами очеркового эллипса $a = 50$ мм, $b = 30$ мм, $c = 40$ мм

На рис. 3 показано построение линии пересечения цилиндра вращения с вертикальной осью вращения и сжатого эллипсоида вращения с профильно-проецирующей осью вращения. Эти поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии. Очерк эллипсоида – Эллипс L_1 имеет параметры: $a = 50$ мм, $b = 30$ мм, $c = 40$ мм. Очерк цилиндра – L_2 . Линия пересечения этих поверхностей проецируется на фронтальную плоскость проекций в виде эллипса [1]. Построение этого эллипса рекомендуется начинать с проведения средних линий исходных поверхностей. Из т. О пересечения оси цилиндра и оси вращения эллипсоида проводим сферу радиуса R_1 . Пересечение этой сферы с цилиндром дает окружности, которые проецируются в виде прямых q_1 и q_2 . Находим среднюю линию – m_2 .

Эта же сфера пересекается с эллипсоидом по окружности, которые проецируются в виде прямых f_1 и f_2 . Четыре точки P_1, P_2, P_3, P_4 пересечения f_1 и f_2 с q_1 и q_2 принадлежат эллипсу, в который проецируется линия пересечения цилиндра и эллипсоида на общую плоскость симметрии, параллельную Π_2 . Находим среднюю линию m_1 . Более точно эта линия находится с помощью построений, показанных на рис 4 [5] и на самом рис. 3 данного пособия.

Точка N пересечения m_1 и m_2 есть центр искомого эллипса. Там, где средняя линия m_1 эллипсоида пересекается с его очерком, получим т. L. Радиусом OL проводим сферу R_2 , которая пересекается с цилиндром по окружности, проецирующейся в виде прямой h_1 . Другая прямая h_2 не показана. Точка G пересечения h_1 и m_1 есть конец одной из осей искомого эллипса. NG – большая полуось искомого эллипса. Вторая полуось NH находится по симметрии элементов.

Малую полуось искомого эллипса можно найти двумя способами.

Первый способ – вписать сферу радиуса R_{\min} в цилиндр. Эта сфера **касается** цилиндра по окружности, проецирующейся в виде прямой m_2 а с эллипсоидом по окружности, проецирующейся в виде прямых n_1 и n_2 .

Точки т. Пересечения найденных прямых – есть концы малой оси эллипса.

Второй способ. Провести линию F_1E – линию соединения фокуса исходного очеркового эллипса с концом малой полуоси его же – точкой E. Из т. N проводим линию NJ, параллельную F_1E . Доказательство смотри в [1].

Полученный эллипс k может превратиться в окружность, если в исходном эллипсоиде вращения малая полуось b будет равна половине фокусного расстояния $2C$, т.е. $b = c$.

На рис. 4 показано построение линии пересечения цилиндра вращения с вертикальной осью вращения и сжатого эллипсоида вращения с профильно-проецирующей осью вращения. Эти поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии. Очерк эллипсоида – эллипс I_1 . Его элементы $b = 40$ мм, $c = 40$ мм, $a = \sqrt{b^2 + c^2} \cong 56,57$ мм. Очерк цилиндра – L_2 . Линия пересечения этих поверхностей проецируется на фронтальную плоскость проекций в виде частного случая эллипса – окружностью [1]. Построение этой окружности рекомендуется с проведения средних линий исходных поверхно-

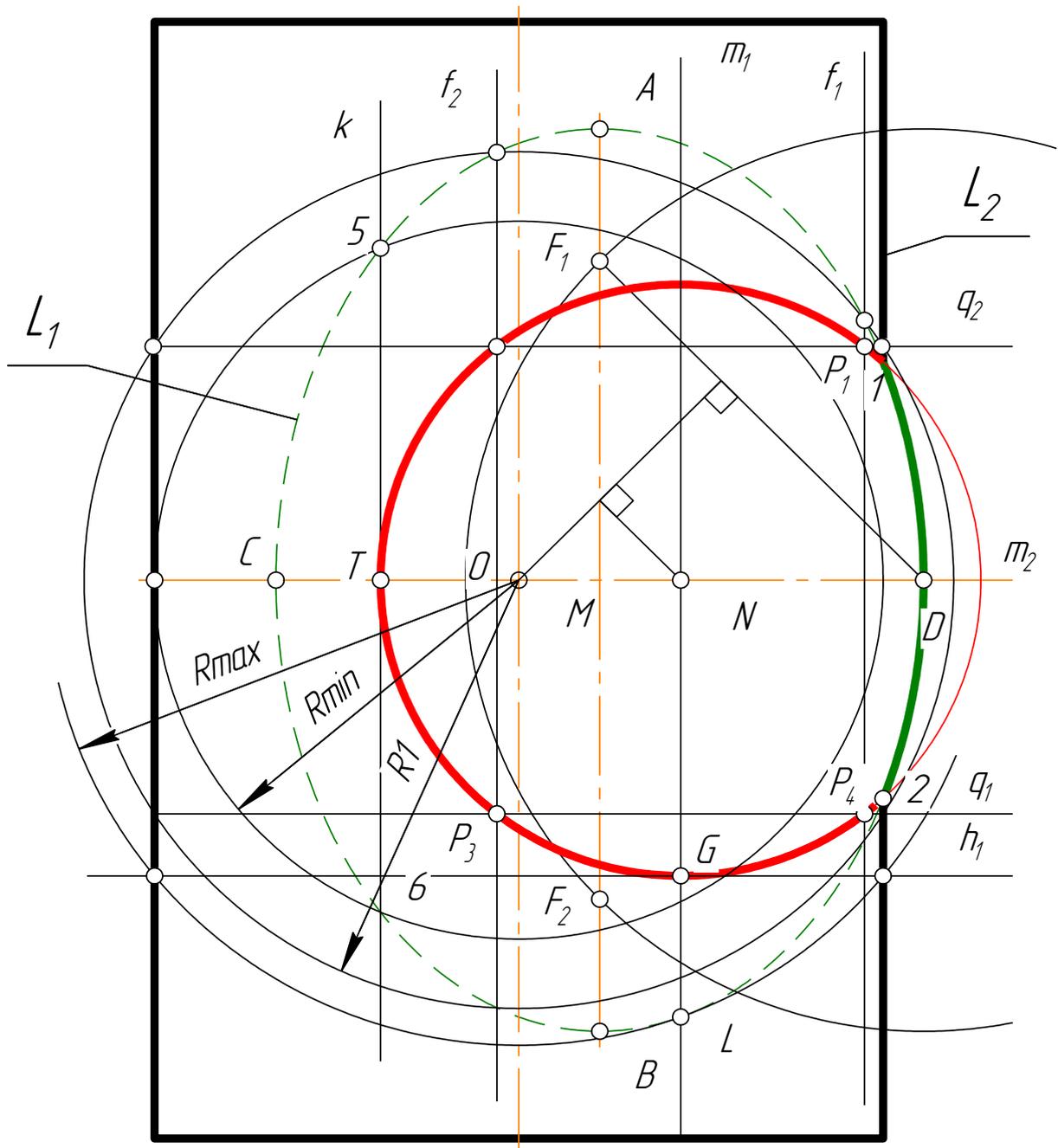


Рис.4 Пересечение цилиндра вращения и сжатого эллипсоида с параметрами очеркового эллипса

$$b = 40 \text{ мм}, c = 40 \text{ мм}, a = \sqrt{b^2 + c^2} \approx 56,57 \text{ мм}$$

стей. Из т. О пересечения оси цилиндра и оси вращения эллипсоида проводим произвольную сферу радиуса R_1 . Пересечения этой сферы с цилиндром дает окружности, которые проецируются в виде прямых g_1 и g_2 . Находим среднюю линию m_2 . Эта же сфера пересекается эллипсоидом вращения по окружности, которая проецируется в виде прямых f_1 и f_2 . Четыре точки P_1, P_2, P_3, P_4 пересечения прямых f_1 и f_2 с g_1 и g_2 принадлежат будущей окружности, в которую проецируется линия пересечения цилиндра и эллипсоида на общую плоскость симметрии, параллельной Π_2 . Находим среднюю линию m_1 . Более точно эта средняя линия находится с помощью построений, показан-

ных на рис. 3 или в [5] на рис. 4. Точка N пересечения m_1 и m_2 – есть центр окружности. Там, где средняя линия m_1 пересекается с очерком эллипсоида, получим т. L. Радиусом OL проводим сферу R_{\max} , которая пересекается с цилиндром по окружности, проецирующейся в виде прямой h_1 . Другая прямая h_2 не показана. Точка G пересечения h_1 и m_1 – есть конец радиуса окружности. Другой способ нахождения конца радиуса следующий: вписываем в цилиндр сферу радиуса R_{\min} . Она касается цилиндра по линии m_2 , а с эллипсоидом пересекается по окружности, которая проецируется в виде прямой k . Точка пересечения m_2 и k т. T – есть конец радиуса искомой окружности. Этот способ менее точный.

На рис. 5 показано построение линии пересечения конуса вращения с вертикальной осью вращения и сжатого эллипсоида вращения с профильно-проецирующей осью вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости вращения. Очерковый эллипс данного эллипсоида имеет параметры: $a=50\text{мм}$, $b=30\text{мм}$, $c=40\text{мм}$. Конус вращения имеет \varnothing основания 110 мм и высоту 175 мм.

Находим точку пересечения осей вращения данных поверхностей – т.О. Определяем средние линии данных поверхностей. Для конуса – это окружность, которая проецируется в виде прямой m_2 . Для эллипсоида вращения среднюю линию находим с помощью сферы R_1 , произвольного радиуса. Она пересекается с эллипсоидом по окружности, которая проецируется в виде прямой f_1 . Опустив перпендикуляр из т. О на линию, соединяющую F_1 и D, находим точку пересечения его с большой осью очеркового эллипса – т. T_1 . Из т. T_1 перпендикулярно к OS проводим прямую до пересечения с малой осью CD очеркового эллипса – т. H. Через нее проходит средняя линия эллипсоида вращения m_1 .

Линия f_2 расположена симметрично f_1 относительно средней линии m_1 .

Как уже отмечено, произвольная сфера радиуса R_1 пересекается с конусом по окружностям, которые проецируются в виде прямых q_1 и q_2 . Пересечение линий q_1 , q_2 , f_1 , f_2 дают четыре точки P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , которые принадлежат будущей линии пересечения, проецирующейся в виде эллипса [1].

Центр эллипса – т. N – есть точка пересечения средних линий m_1 , m_2 . Там, где средняя линия m_1 пересекается с очерком эллипсоида, получим т. L. Радиусом OL проводим сферу R_{\max} , которая пересекается с конусом по окружности, проецирующейся в виде прямой h_1 . Другая прямая h_2 не показана. Точка G пересечения h_1 и m_1 – есть конец одной полуоси искомого эллипса.

Для определения размера второй оси можно воспользоваться соотношением между осями искомого эллипса – $\frac{a'}{b'} = \frac{b}{c \cdot \cos \alpha}$, где a' и b' – полуоси искомого эллипса [1].

Отложив на проекции образующей конуса отрезок $10 - 9 = MF_1 = C$ и опустив перпендикуляр $9 - 11$ на проекцию оси конуса, получим отрезок $10 - 11 = C \cos \alpha$. Построив отрезок $MJ = 10 - 11$ и соединив прямой точки J и D

($MD = b$), проводим через точку E прямую $EK \parallel JD$, которая в пересечении с m_2 дает конец второй полуоси эллипса – $t. K$.

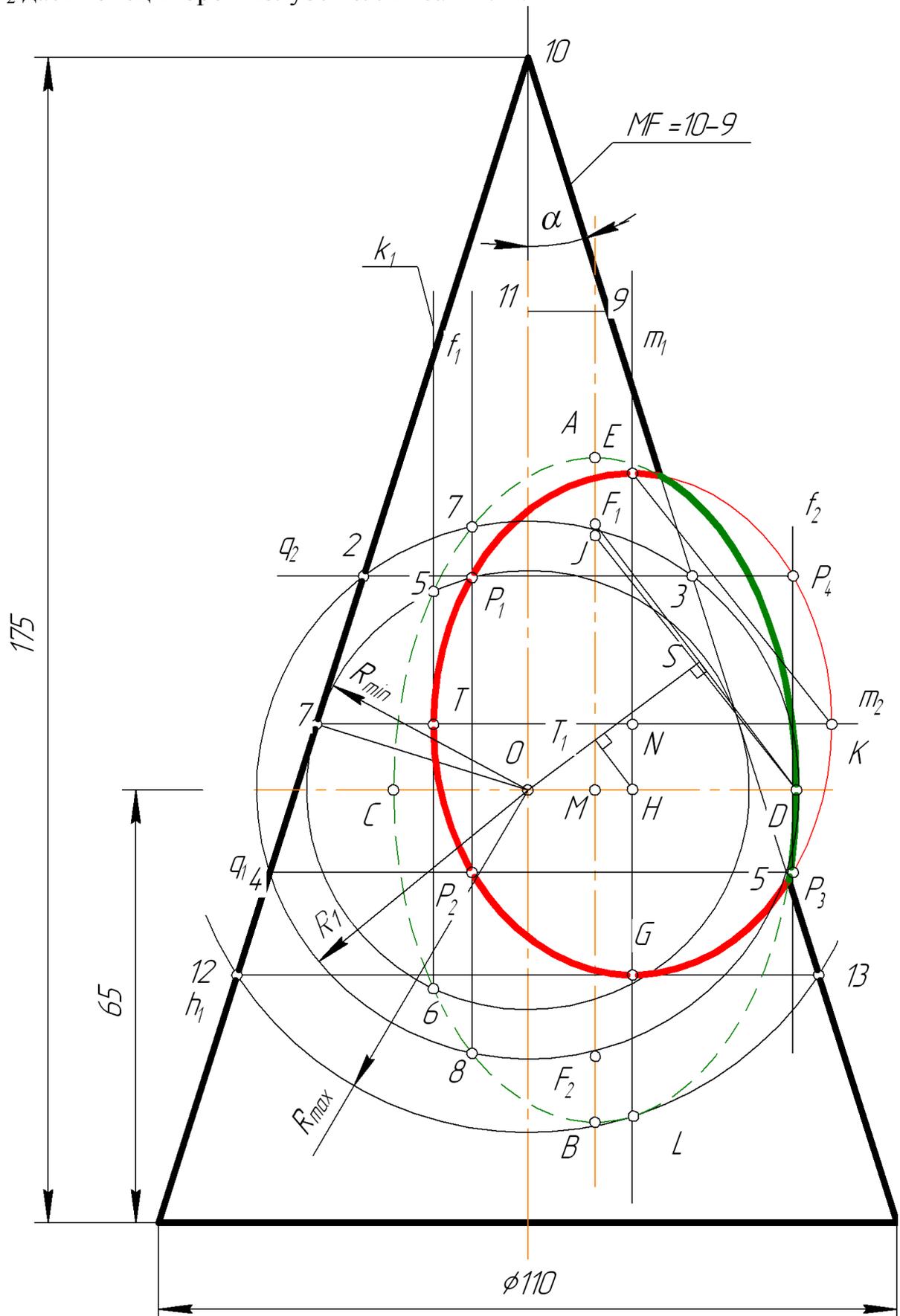


Рис. 5 Пересечение конуса вращения и сжатого эллипсоида вращения

Другой способ нахождения конца второй полуоси искомого эллипса следующий. Вписываем в конус сферу радиуса R_{\min} . Она касается конуса по линии m_2 а с эллипсоидом пересекается по окружности, которая проецируется в виде прямой k_1 . Точка пересечения m_2 и k_1 – t . T – есть конц второй полуоси эллипса. Этот способ менее точный.

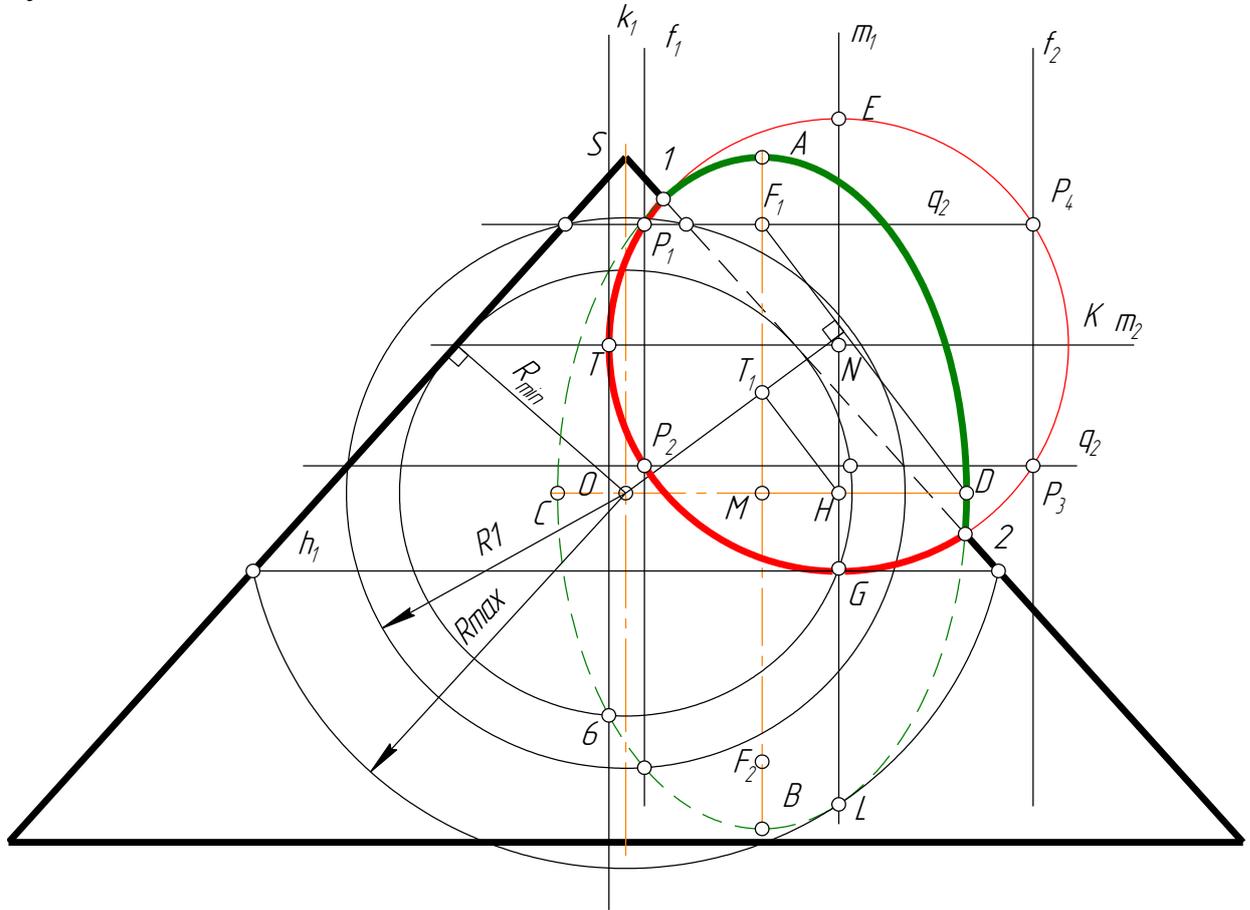


Рис. 6 Пересечение конуса вращения с углом при вершине $\alpha = 41^\circ 36'$ и сжатого эллипсоида вращения

На рис. 6 показано построение линии пересечения конуса вращения с вертикальной осью вращения и сжатого эллипсоида вращения с профильно-проецирующей осью вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций.

Рассмотрим частный случай, когда линия пересечения таких тел проецируется на общую плоскость симметрии в виде окружности. Для этого необходимо что бы $b = c \cdot \cos \alpha$, где b – малая ось очеркового эллипса эллипсоида вращения, c – фокусное расстояние очеркового эллипса эллипсоида вращения, α – угол при вершине исходного конуса вращения.

Мы рассмотрим два примера, когда пересечение таких поверхностей дает на плоскость симметрии проекцию в виде окружности.

На рис. 6 задан эллипсоид вращения, ось вращения которого перпендикулярна к профильной плоскости проекций.

Очерковый эллипс имеет параметры: $a = 50$ мм, $b = 30$ мм, $c = 40$ мм.

Чтобы $b = c \cdot \cos \alpha$, необходимо взять конус вращения с углом при

вершине $\alpha = 41^\circ 36'$ ($b = c \cdot \cos \alpha \Rightarrow 30 = 40 \cos \alpha$, $\cos \alpha = 0,75$; $\alpha = 41^\circ 36'$).

Точка пересечения осей вращения – точка O . Определим средние линии этих тел вращения. Для конуса это окружность, которая проецируется в виде прямой m_2 с помощью сферы R_{\min} .

Для эллипсоида вращения среднюю линию находим с помощью сферы R_1 произвольного радиуса. Она пересекается с эллипсоидом вращения, по окружности, которая проецируется в виде прямой f_1 . Опустив перпендикуляр из т. O на линию, соединяющую F_1 и D , находим точку пересечения его с большой осью очеркового эллипса – т. T_1 . Из т. T_1 параллельно F_1D проводим линию до пересечения с осью CD – т. H . Через нее проходит средняя линия эллипсоида вращения m_1 . Линия f_2 расположена симметрично f_1 относительно средней линии m_1 .

Произвольная сфера радиуса R_1 пересечется с конусом по окружности, которые проецируются в виде прямых q_1 и q_2 . Пересечение линий q_1 , q_2 , f_1 , f_2 дает точки P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , которые принадлежат будущей линии пересечения, проецирующейся в виде окружности – т. N – есть точка пересечения средних линий m_1 , m_2 .

Там, где средняя линия m_1 пересекается с очерком эллипсоида, получим т. L . Радиусом OL проводим сферу R_{\max} , которая пересекается с конусом по окружности, проецирующейся в виде прямой h_1 . Другая прямая h_2 не показана. Точка G пересечения h_1 и m_1 – есть конец радиуса окружности, в которую проецируется линия пересечения данных тел.

Другой способ нахождения радиуса окружности следующий.

Вписываем в конце сферы радиуса R_{\min} . Она касается конуса по линии m_2 , а с эллипсоидом пересекается по окружностям, которые проецируются в виде прямой k_1 . Точка пересечения m_2 и k_1 – т. T – есть конец радиуса окружности.

Этот способ менее точный.

На рис. 7 показано построение линии пересечения конуса вращения с вертикальной осью вращения и сжатого эллипсоида вращения с профильно проецирующей осью вращения, имеющих общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций.

Взят частный случай, когда пересекается конус вращения с углом при вершине 30° а эллипсоид вращения имеет очерковый эллипс с параметрами:

$$c=40 \text{ мм}, \quad b = c \cos \alpha = 40 \cos 30^\circ = 40 \times 0,8660 \cong 34,64 \text{ мм},$$

$$a \cong \sqrt{c^2 + b^2} \cong 52,92.$$

При таких параметрах на плоскость симметрии линия пересечения проецируется в виде окружности. Все построения аналогично рисунку 6 и построениям к нему.

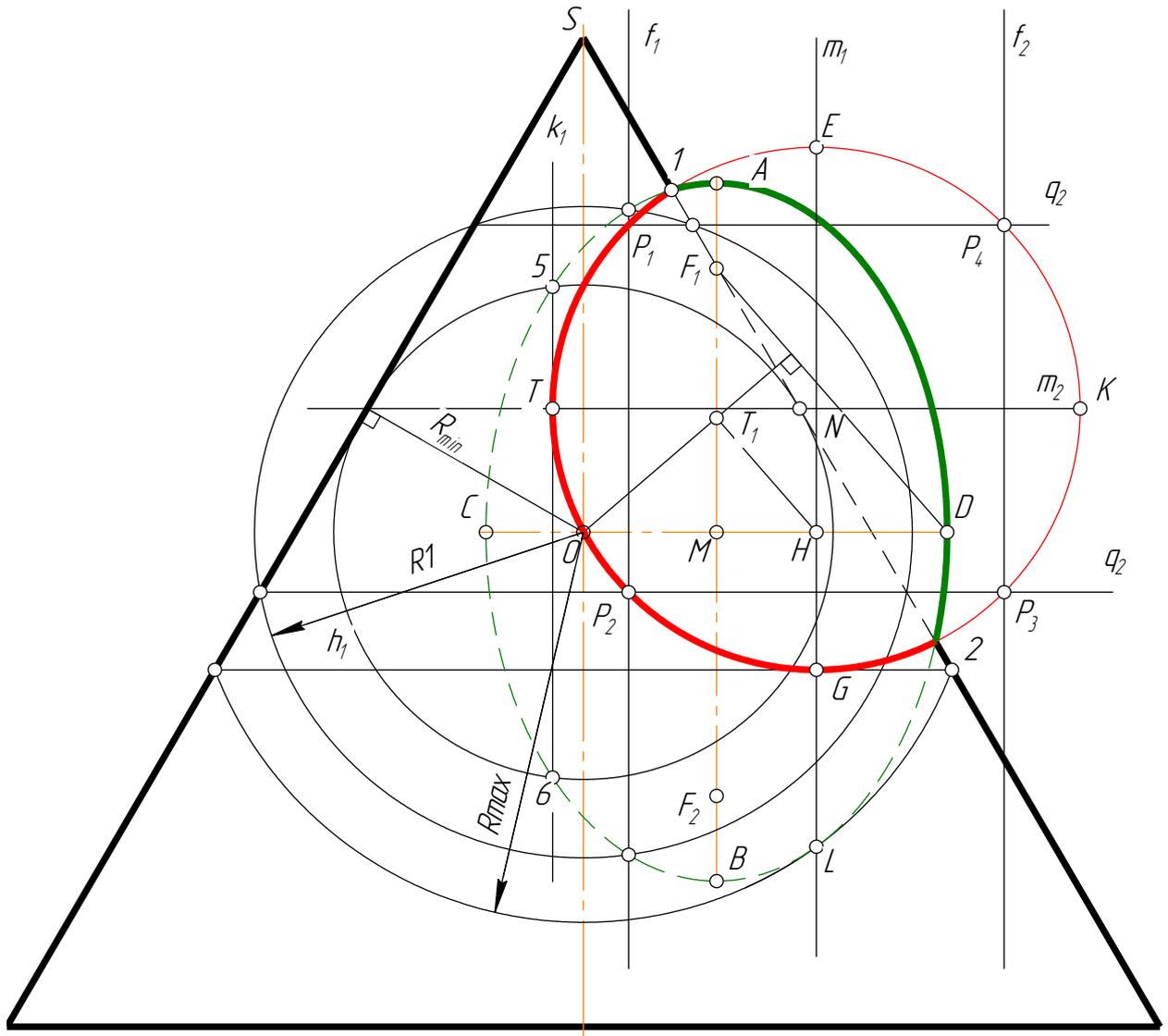


Рис. 7 Пересечение конуса вращения с углом при вершине $\alpha = 30^\circ$ и сжатого эллипсоида вращения с параметрами:
 $c=40$ мм, $b = c \cos \alpha = 40 \cos 30^\circ \cong 34,64$ мм, $a \cong \sqrt{c^2 + b^2} \cong 52,92$

На рис. 8 показано построение линии пересечения наклонного цилиндра вращения с фронтальной осью и сжатого эллипсоида вращения с вертикальной осью вращения. Они имеют общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси тел вращения пересекаются в т. О.

Очерковый эллипс эллипсоида вращения имеет параметры: $b=40$ мм, $c=40$ мм, $a = \sqrt{b^2 + c^2} \cong 56,57$ мм.

При пересечении сжатого эллипсоида вращения с цилиндром вращения при вышеописанном положении получается на проекции эллипс.

Исходные точки 1,2,3,4 находятся как точки пересечения контуров поверхностей вращения. Вписанная в цилиндр сфера, радиусом R_{\min}^u касается цилиндра по окружности, которая проецируется в виде прямой 11-12. Она же пересекается с эллипсоидом вращения по окружностям, которые проецируют

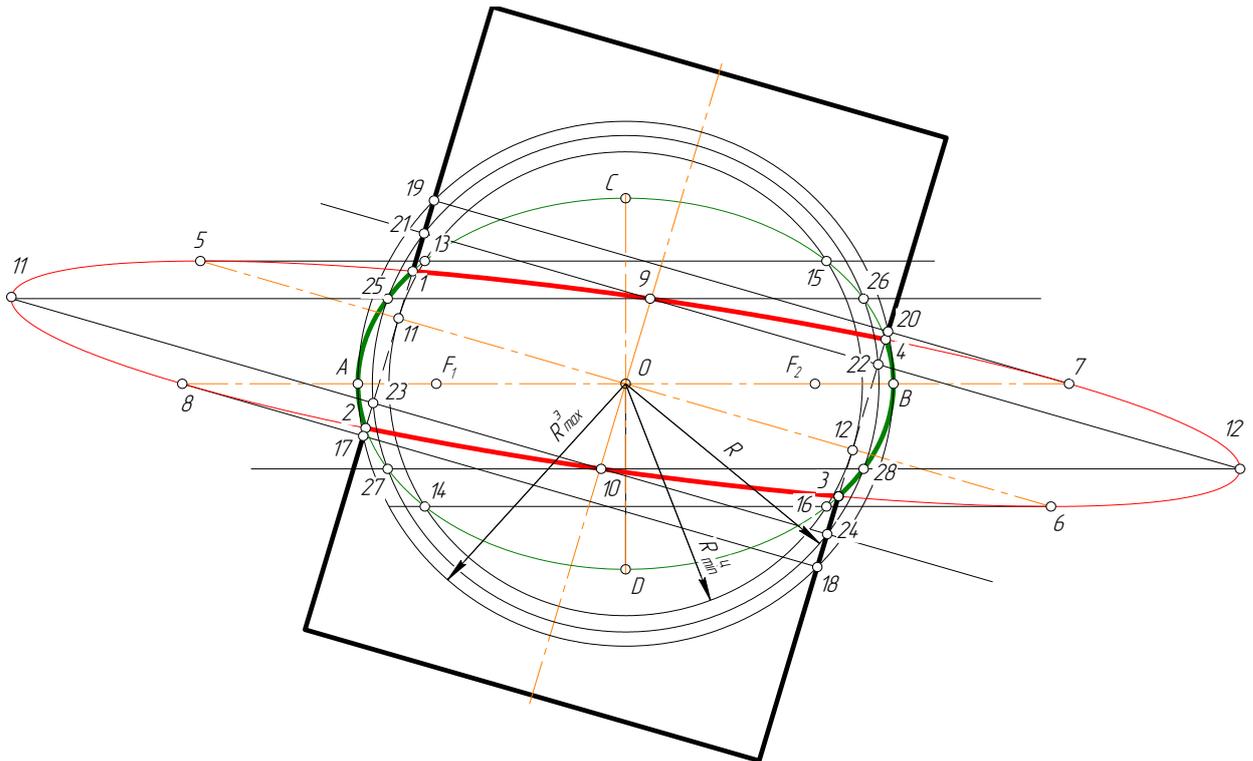


Рис. 8 Пересечение наклонного цилиндра и сжатого эллипсоида вращения

ся в виде прямых 13-15, 14-16. Точки пересечения прямой 11-12 с прямыми 13-15, 14-16 есть точки 5 и 6, принадлежащие эллипсу. Сфера радиуса R_{\max}^3 описанная вокруг эллипсоида, касается последнего по окружности, проецирующейся в виде большой оси очеркового эллипса АВ. Она же пересекается с цилиндром по окружностям, которые проецируются в виде прямых 17-18 и 19-20. Точки пересечения этих соответствующих линий есть точки 7 и 8, принадлежащие эллипсу.

Для нахождения произвольных точек проводим сферу радиуса R. Эта сфера пересекается с цилиндром по окружностям, которые проецируются в виде прямых 21-22 и 23-24, а с эллипсоидом – по линиям 25-26 и 27-28.

Точки пересечения соответствующих прямых дают точки 9, 10 и 10, 12, принадлежащие искомому эллипсу.

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ, ИМЕЮЩИХ ОБЩУЮ ПЛОСКОСТЬ СИММЕТРИИ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ОСИ ВРАЩЕНИЯ

На рис. 9 показано построение линии пересечения поверхностей вращения с общей плоскостью симметрии и параллельные оси вращения.

Пересекается сжатый эллипсоид вращения с очерковым эллипсом с параметрами $b=40$ мм, $c=40$ мм, $a=\sqrt{b^2+c^2} \cong 56,57$ мм и вертикальной осью вращения. Цилиндр вращения имеет $\varnothing 60$ мм и вертикальную ось вращения.

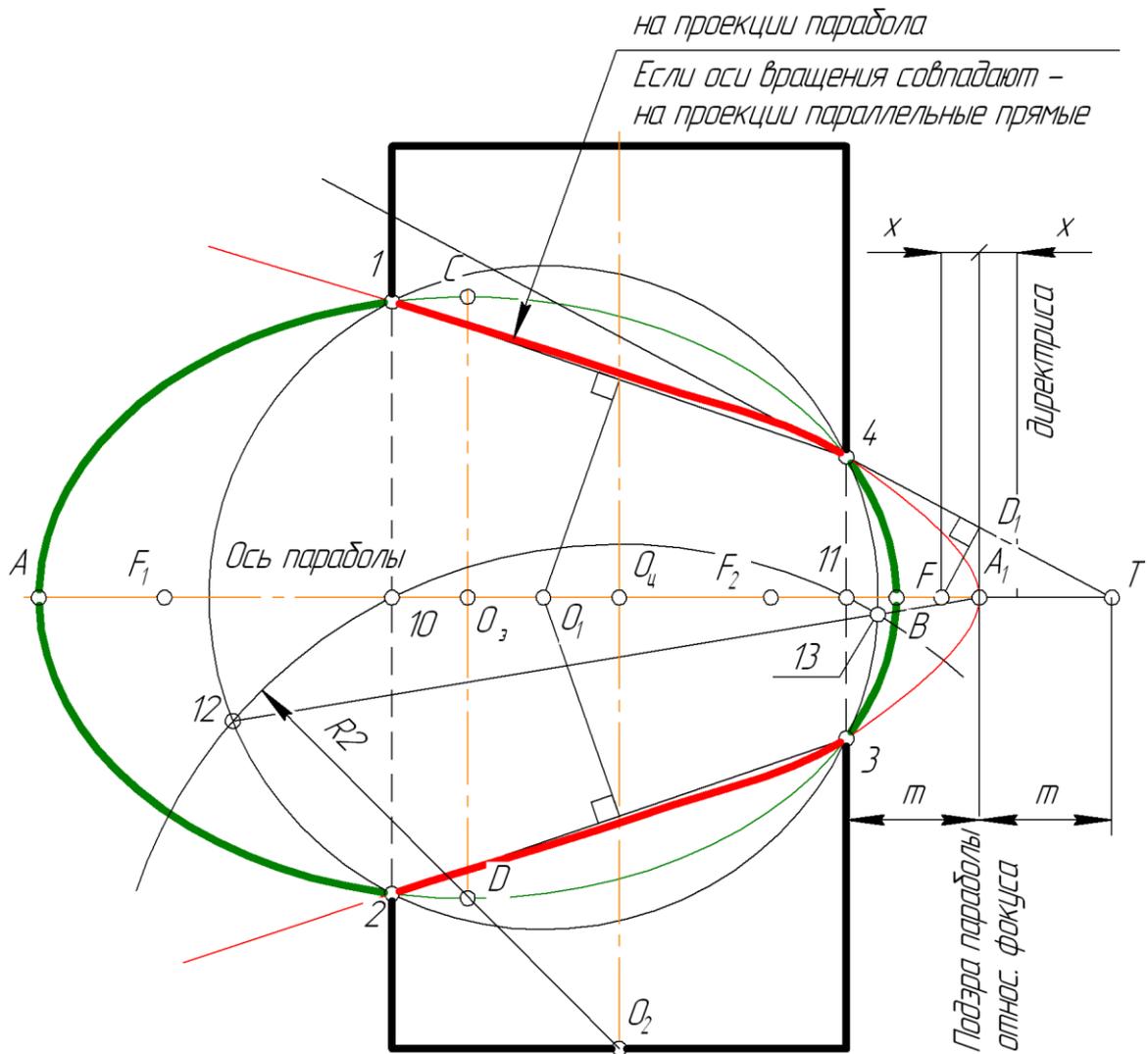


Рис. 9 Пересечение цилиндра и сжатого эллипсоида вращения

Если оси вращения указанных тел совпадают, то на плоскость проекций, параллельную общей плоскости симметрии, линия пересечения данных тел будет проецироваться в виде двух параллельных прямых.

Если оси вращения располагаются на каком-то расстоянии – линия пересечения проецируется в виде параболы [1]. На рис. 9 оси вращения располагаются на расстоянии 20 мм друг от друга.

Исходные точки 1,2,3,4 есть точки пересечения очерков данных тел. Парабола определяется четырьмя точками. Эти точки можно представить как точки пересечения сферы R_1 с цилиндром. Они так же имеют плоскости симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекции.

Перпендикуляры, проведенные через середины отрезков 1-4 и 2-3, в пересечении дают центр O_1 из которого проводится сфера R_1

Проводим сферу R_2 с центром O_2 на оси цилиндра и проходящую через точки 10 и 11. Эта сфера пересекается со сферой R_1 по окружности, которая проецируется в виде прямой 12-13, а с цилиндром – по окружности, которая проецируется в виде прямой 10-11. Точка их пересечения дает вершину пара-

болы A_1 . Ось параболы – горизонтальная и совпадает с большой осью очеркового эллипса АВ. Дискриминант параболы равен 0,5 поэтому расстояние A_1T равно A_1H . Касательная к параболе в точке 4 пересекает ось параболы в т. Т. Пересечение этой касательной с подэрой параболы относительно фокуса ее дает т. D_1 . Прямая перпендикулярная к касательной в т. D_1 пересекается с осью параболы в ее фокусе F. Директриса параболы располагается на расстоянии FA_1 справа от вершины A_1 .

На рис. 10 показано построение линии пересечения сжатого эллипсоида вращения с вертикальной осью вращения и конусом вращения с вертикальной осью вращения. Оси поверхностей параллельны и вертикальны.

Очерковый эллипс эллипсоида вращения имеет параметры $b=40$ мм, $c=40$ мм, $a = \sqrt{b^2 + c^2} \cong 56,57$ мм.

Конус вращения имеет диаметр основания 100 мм и высоту 165 м. Если оси вращения данных тел совпадают, то на плоскость проекций, параллельной общей плоскости симметрии, линии пересечения данных тел будут проецироваться в виде двух параллельных прямых. Если оси вращения располагаются на каком-то расстоянии – линия пересечения проецируется в виде параболы [1]. На рис. 10 оси вращения располагаются на расстоянии 15 мм друг от друга.

Исходные точки 1,2,3,4 есть точки пересечения очерков данных тел. Парабола определяется четырьмя точками. Эти точки можно представить как точки пересечения сферы R_1 с конусом. Они так же имеют плоскости симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекции.

Перпендикуляры, проведенные через середины отрезков 1-4 и 2-3, в пересечении дают центр O_1 из которого проводится сфера R_1

Пересечение плоскости экватора сферы R_1 с осью конуса дает центр сфер O_2 , средняя линия для которых (на чертеже эти сферы не показаны), является осью параболы.

Проводим произвольную сферу R_3 через точки 5 и 6 с центром O_3 , лежащим на оси конуса. Эта сфера пересекается с конусом и сферой O_1 по окружностям, которые проецируются в виде прямых линий 5-6 и 7-8. Точка пересечения этих прямых и есть вершина параболы A_1 . Дискриминант параболы равен 0,5 поэтому расстояние m , отложенное от вершины параболы A_1 дает т. 9. Прямая 3-9 есть касательная к параболе в т. 3. С помощью подэры параболы относительно фокуса находим фокус этой параболы т. F/ Директриса параболы находится на расстоянии A_1F от вершины A_1 .

На рис. 11 показано построение линии пересечения сжатого и растянутого эллипсоидов с вертикальными и параллельными осями вращения и имеющих общую (фронтальную) плоскость симметрии.

Сжатый эллипсоид имеет следующие параметры очеркового эллипса:

$$b_1=40 \text{ мм}, c_1=40 \text{ мм}, a_1 = \sqrt{b^2 + c^2} \cong 56,57 \text{ мм}.$$

Растянутый эллипсоид имеет параметры очеркового эллипса:

$$b_2 = 30 \text{ мм}, c_2 = 40 \text{ мм}, a_2 = 50 \text{ мм}.$$

Если оси вращения данных поверхностей совпадают, то на плоскость проекций, параллельную общей плоскости симметрии, линия пересечения данных тел будет проецироваться в виде двух параллельных прямых. Если оси

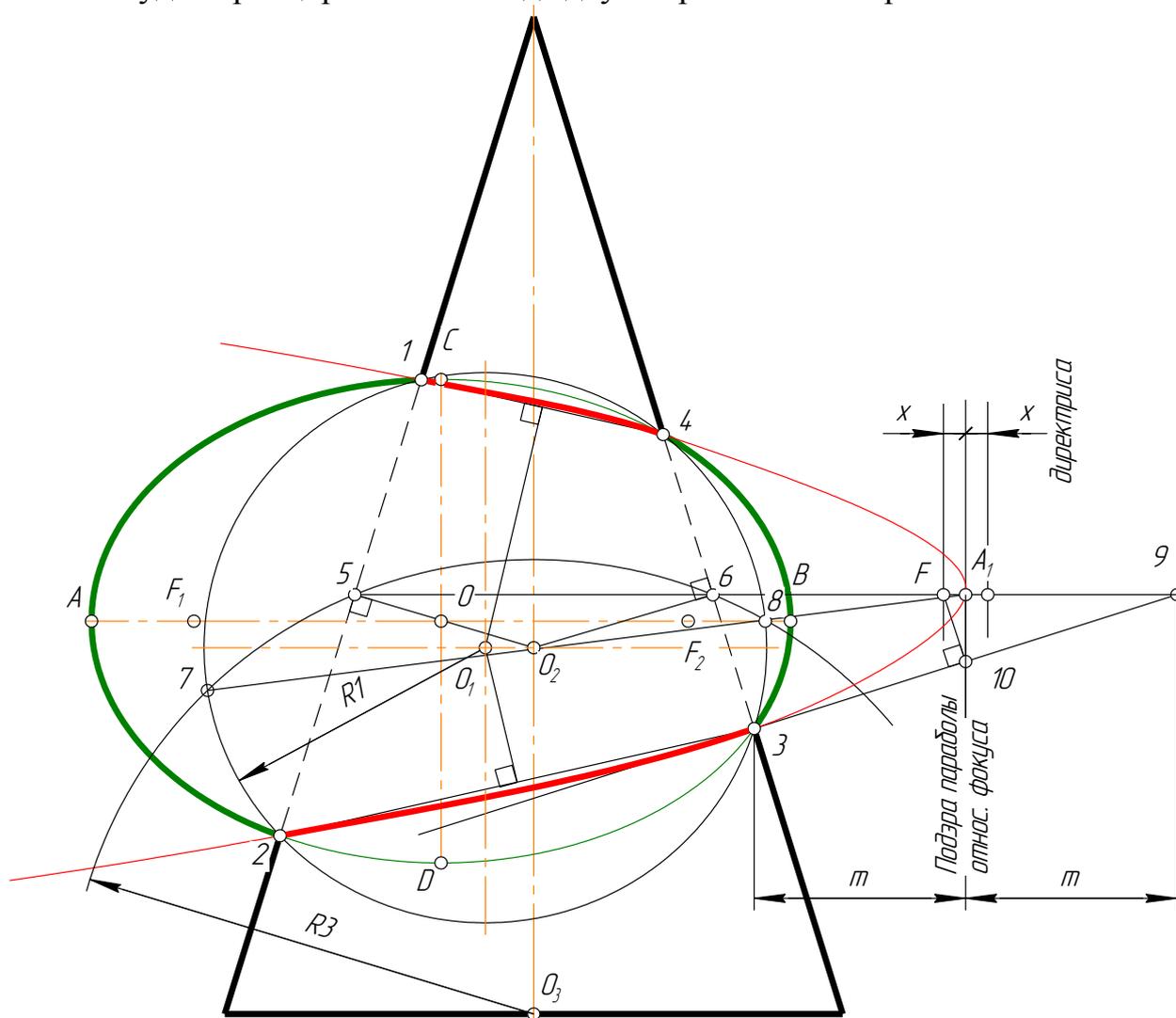


Рис. 10 Пересечение конуса и сжатого эллипсоида вращения

вращения располагаются на каком-то расстоянии – линия пересечения проецируется в виде параболы [1].

На рис. 11 оси вращения располагаются на расстоянии 20 мм друг от друга.

Исходные точки 1,2,3,4 есть точки пересечения очерков эллипсоидов. Парабола определяется четырьмя не коллинеарными точками. Эти точки можно представить как точки пересечения сферы с эллипсоидом вращения. Они так же имеют плоскости симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекции.

Перпендикуляры, проведенные через середины отрезков 1-4 и 2-3, в пересечении дают центр O_1 из которого проводится сфера R_1 . Ось параболы лежит в экваториальной плоскости эллипсоидов вращения и перпендикулярна к Π_3 .

Если оси вращения данных поверхностей совпадают, то на плоскость проекций, параллельную общей плоскости симметрии, линия пересечения данных тел будет проецироваться в виде двух параллельных прямых. Если

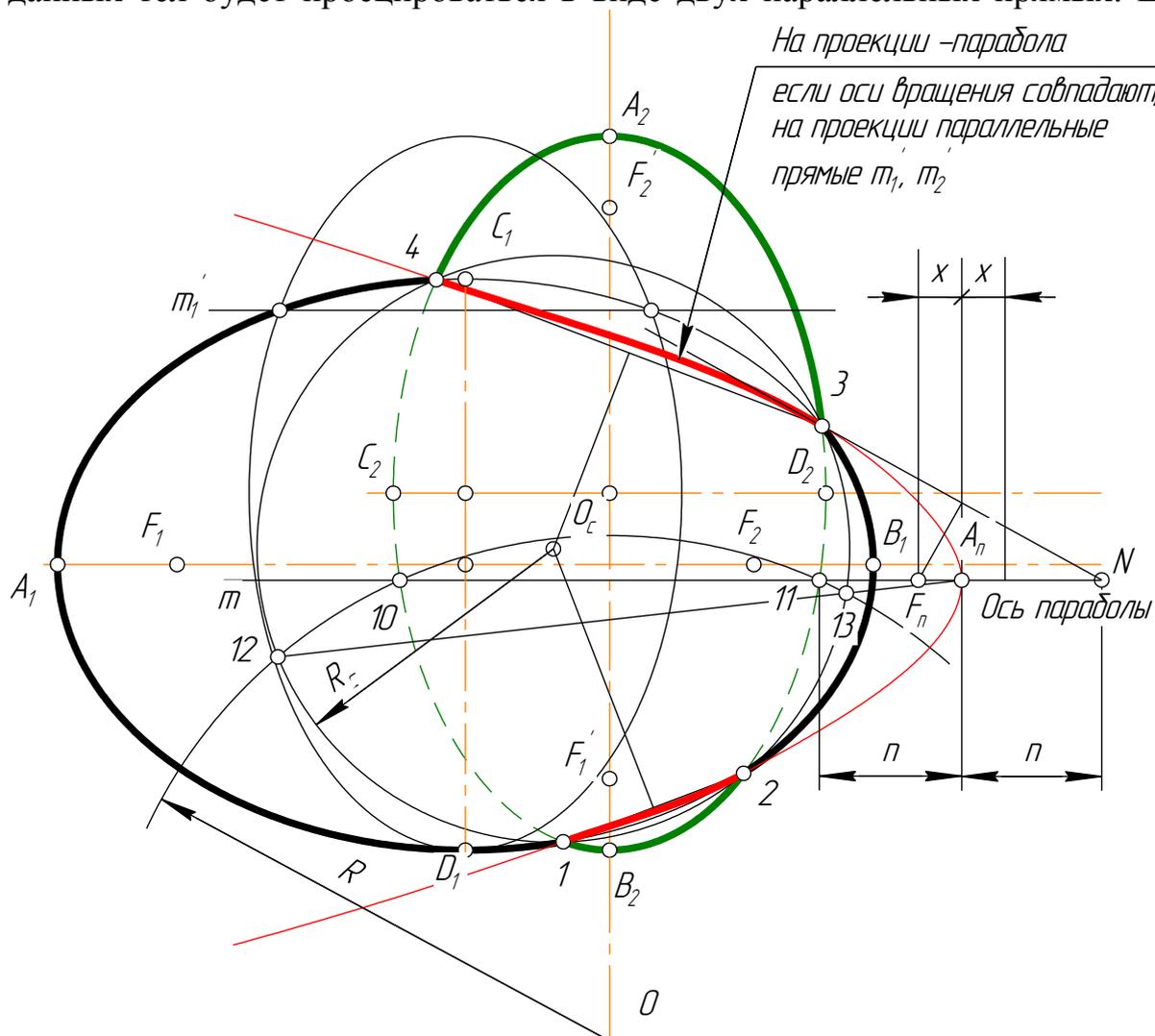


Рис. 12 Пересечение сжатого и растянутого эллипсоидов вращения (центр растянутого эллипсоида находится на 10 мм выше плоскости экватора сжатого эллипсоида)

оси вращения располагаются с параллельным сдвигом – линия пересечения проецируется в виде параболы [1].

На рис. 12 оси вращения располагаются на расстоянии 20 мм друг от друга, а центр растянутого эллипсоида находится на 10 мм выше плоскости экватора сжатого эллипсоида.

Исходные точки 1,2,3,4 есть точки пересечения очерков эллипсоидов. Парабола определяется четырьмя не коллинеарными точками. Эти точки можно представить как точки пересечения сферы с эллипсоидом вращения. Они так же имеют общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекции.

Перпендикуляры, проведенные через середины отрезков 1-4 и 2-3, в пересечении дают центр O_c из которого проводится сфера R_c . Для определе-

ния оси параболы сдвигаем растянутый эллипсоид до совмещения осей вращения. При таком положении линии пересечения эллипсоидов спроецируются в виде прямых m_1' и m_2' , а средняя линия m определит положение будущей параболы.

Вершина параболы определяется с помощью вспомогательной сферы у R с центром O , лежащем на оси вращения растянутого эллипсоида. Эта сфера пересекается с растянутым эллипсоидом и сферой R_c по окружностям, которые проецируются в виде прямых 10-11 и 12-13. Точка пересечения этих прямых и есть вершина параболы A_n . Прямая $3N$ есть касательная к параболе в т. 3. С помощью подэры параболы относительно ее фокуса находим фокус этой параболы т. F_n . Директриса параболы находится на расстоянии $A_n F_n$ от вершины A_n .

Два конуса вращения, имеющие общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций, вертикальные оси вращения и разные углы при вершинах, пересекаются по биквадратной кривой. Она проецируется на общую плоскость симметрии в виде параболы. Этот пример рассмотрен в [5] на стр. 20, рис. 16. То же касается и конуса вращения и цилиндра вращения с параллельными осями (см. [5] рис. 15, стр. 19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. – М.: «Советская наука», 1958. – 270 с.: ил.
2. А.А. Савелов. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). /Под редакцией А.п. Нордена. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 294 с.:ил.
3. Гаспар Монж. Приложение анализа к геометрии. Перевод с французского В.А. Глуковской. Под редакцией с предисловием и примечаниями М.Я. Выговского. Главная редакция общетехнических дисциплин. Москва 1936. Ленинград – 699 с.:ил.
4. Вопросы современной начертательной геометрии. Сборник статей под редакцией Н.Ф. Четверухина. ОГИЗ. Государственное издательство технико-теоретической литературы. – М. 1947. Л. 334 с.: ил.
5. Червоненко А.П., Каткалова Е.А. Геометрические характеристики проекций линий пересечения поверхностей второго порядка с общей плоскостью симметрии. Учебное пособие. Донецк, 2007, 28 с.: ил.
6. Яглом И.М. Геометрические преобразования. II Линейные и круговые преобразования. Государственное издательство технико-теоретической литературы. – М. 1956. – 611с.: ил.