

## **АВТОМОБІЛЬНІ ДОРОГИ ТА СПОРУДИ**

УДК 531.7:625.7

**Сухой С.В., к.т.н.**

**АДИ ДонНТУ, г. Горловка**

### **О МЕТОДЕ КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ ФОРМЫ ГЛАДКИХ ПОЛОГИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

*Рассматривается метод косвенного определения координат плоского контура пологой поверхности по измеренным значениям кривизны. Для восстановления декартовых координат контура применены системы дифференциальных и интегральных уравнений, использующих в качестве аргумента натуральную координату – длину дуги. Предложен метод решения интегральных уравнений с использованием сплайнов под напряжением.*

#### ***Постановка проблемы***

Во многих отраслях народного хозяйства решаются задачи измерения формы тех или иных поверхностей с целью, например, их контроля или воспроизведения. В дорожном строительстве и строительстве аэродромов для предварительной оценки ровности покрытия дорог применяются мобильные установки (ПКРС-2), использующие косвенные динамические характеристики, связанные с параметрами колебаний поддрессоренной части установки. По результатам предварительной оценки выполняется локальный контроль отклонений профиля покрытия геодезическими методами и инструментами или измеряются значения стрелки отклонений контролируемой поверхности от базовой линейки, укладываемой на поверхность дороги (аэродрома) [1,2]. Контроль отклонений профиля дороги в соответствии с принятой методикой не дает полного представления о форме поверхности дороги. В результате могут быть пропущены отклонения, выходящие за рамки допуска. Кроме того, стандартная методика требует применения ручного измерения и фиксации в большом числе (не менее 120 на 300 метрах дороги) точек, установленных предварительным контролем. Трудоемкость таких измерений может быть значительной. Использование принятой методики связано с отсутствием простых автоматизированных мобильных средств измерений, которые давали бы аналитическое представление формы поверхности дороги или аэродрома для последующего компьютерного расчета отклонений от заданной формы и иного анализа полученных данных. Разработка новых или применение известных в других отраслях методов непрерывного измерения формы профиля поверхностей, которые имеют протяженность, составляющую сотни метров, представляется актуальной задачей.

#### ***Анализ последних исследований и публикаций***

Для поиска решения сформулированной задачи необходим анализ существующих методов и средств измерений, применяемых в технике, геодезии и других отраслях народного хозяйства. Данные о форме поверхностей в машиностроении, приборостроении, строительстве получают различными методами и средствами. Используются профилографы, автоколлиматоры, геодезическая съемка поверхности земли с вычислением полигонометрического хода, методы стереометрии, голографии и другие методы и средства [3, 4]. Перечисленные методы разработаны и реализованы для конкретных условий. Прямое применение большинства этих методов для измерения формы протяженных (сотни и тысячи метров) объектов, какими являются автомобильные дороги, взлетно-посадочные полосы аэродромов, либо невозможно, например из-за необходимости использования жестких баз, либо нецелесооб-

разно, например из-за дороговизны и необходимости стационарного размещения сложного оборудования. Известно описание автоматизированной установки для оперативного контроля качества автомобильных дорог. В состав этой установки входят сложные и дорогостоящие компоненты: высокочувствительный лазерный датчик линейных перемещений, прецизионный акселерометр, прецизионная гиросtabilизированная платформа. Применение последней компоненты технически сложно и представляется экономически неоправданным. Анализ других известных многочисленных методов измерений формы профилей поверхностей выходит за рамки этой статьи.

Анализ проблемы позволил сформулировать цель разработки такого метода и реализующих его средств измерения формы профиля протяженных объектов, который бы не требовал непрерывного использования жестких баз, мог бы быть реализован мобильными установками, которые давали бы данные о профиле поверхности объекта в виде непрерывной функции. Выполнение последнего требования важно для решения задачи анализа полученных результатов с применением вычислительной техники.

### ***Цель статьи***

Предложить решение задачи измерения формы протяженных поверхностей с применением мобильных средств измерения косвенного параметра формы, не требующего непрерывного использования жесткой геометрической базы. Границы применимости предлагаемого решения: пологие, относительно гладкие поверхности значительной протяженности (десятки и более метров) для различных практических приложений, например для контроля формы дорожных покрытий, взлетно-посадочных полос аэродромов и т.п.

### ***Изложение основного материала исследований***

В данной статье дается обоснование метода получения геометрических параметров (координат) плоского контура произвольной пологой поверхности, которым может быть, в частности, продольный профиль автомобильной дороги, взлетно-посадочной полосы аэродрома и т.п., который отвечает сформулированным требованиям. Метод основан на измерении кривизны контура поверхности и восстановлении координат профиля с использованием тех или иных зависимостей. Известны различные вариации этого метода реализованные в других отраслях техники [5, 6]. Существенным свойством метода является то, что измерения выполняются без использования жестких баз, задаваемых эталонными поверхностями или оптическими системами, как это реализовано в машиностроении и строительстве.

Декартовы координаты плоского контура (рис. 1) могут быть получены по заданной функции его кривизны, определенной в функции длины дуги, расчетом с использованием известных из дифференциальной геометрии зависимостей [7]:

$$\begin{cases} y(s) = \int_0^s \sin \left[ \int_0^s \kappa(s) ds + \alpha_0 \right] ds + y_0; \\ x(s) = \int_0^s \cos \left[ \int_0^s \kappa(s) ds + \alpha_0 \right] ds + x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $y(s)$  и  $x(s)$  — декартовы координаты плоского контура в функции от длины дуги (натуральный параметр);

$\kappa(s)$  — функция кривизны контура относительно длины дуги;

$\alpha_0$  — угол между касательной к линии в начальной точке и осью абсцисс;

$y_0$  и  $x_0$  — координаты начальной точки.

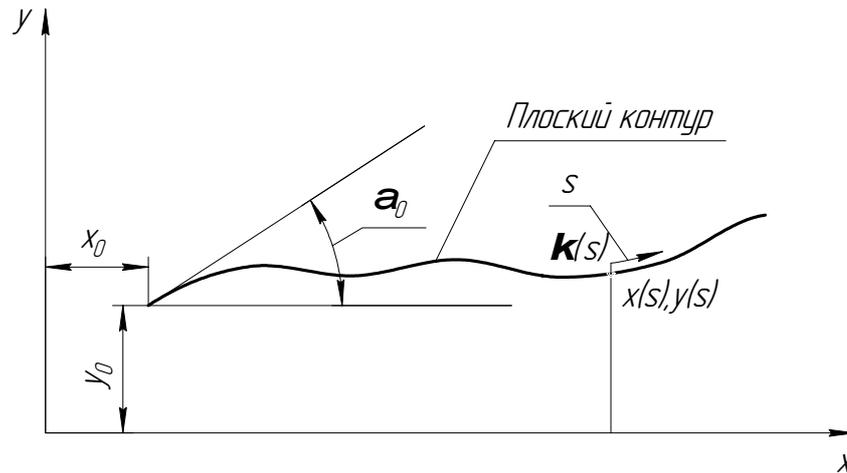


Рис. 1. Задание контура в функции длины дуги

Система уравнений (1) путем дифференцирования по натуральному параметру  $s$  приводится к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y''(s) = \kappa(s)\sqrt{1-[y'(s)]^2}; \\ x''(s) = -\kappa(s)\sqrt{1-[x'(s)]^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) также может быть использована при построении расчетных систем для восстановления функции координат контура.

После того, как будут найдены декартовы координаты контура в виде непрерывной функции, последняя может быть использована для различных видов обработки, например для автоматизированного сравнения с проектным (теоретическим) профилем измеряемого объекта. На основании этого сравнения может быть сделан вывод о соответствии измеренной поверхности нормативным или иным требованиям.

Реализация метода требует решения следующих взаимосвязанных, но самостоятельных задач:

- 1) измерение с заданной точностью кривизны измеряемого контура и фиксация измеренных значений;
- 2) восстановление декартовых координат контура по измеренным значениям кривизны;
- 3) определение отклонений измеренного контура от реального (оценка точности полученных результатов).

Решение первой задачи возможно известными средствами автоматизированного измерения кривизны контура поверхности [8, 9]. Эти средства допускают измерение кривизны с заданным шагом с мобильных установок. Конструктивно эти установки просты и не требуют технически сложного обслуживания. Шаг измерения кривизны определяется требованиями точности к результатам восстановления декартовых координат контура.

В данной статье рассматривается решение второй из перечисленных задач.

Выбор исходных зависимостей (1) или (2) зависит от точности, которая может быть обеспечена расчетной схемой, построенной на выбранных зависимостях. Точное решение системы (1) или (2) требует аналитического задания функции  $\kappa = \kappa(s)$ . В результате измерений могут быть получены дискретные значения кривизны  $\kappa_i = \kappa(s_i)$ , которые, в силу естественных причин, содержат случайные отклонения от проектных значений. По этой причине точное аналитическое задание функции кривизны реального контура получить нельзя. Для

задания кривизны в виде приближенной функции может быть использована интерполяционная сплайн-функция. Сплайны, как известно, эффективны при численном интегрировании и при численном решении дифференциальных уравнений [10]. Однако использование параболических сплайнов, например кубических, для численного решения систем уравнений (1) или (2) по измеренным значениям кривизны может дать неприемлемые результаты из-за так называемой избыточной гладкости этих сплайнов. Из-за нее кубический сплайн, построенный на измеренных значениях кривизны реальных поверхностей, может содержать «посторонние точки перегиба» (рис. 2) (термин, введенный Cline A.K.) [11]. Посторонние точки перегиба могут давать недопустимые погрешности интегрирования с помощью квадратур, построенных на основе интерполирующих сплайнов.

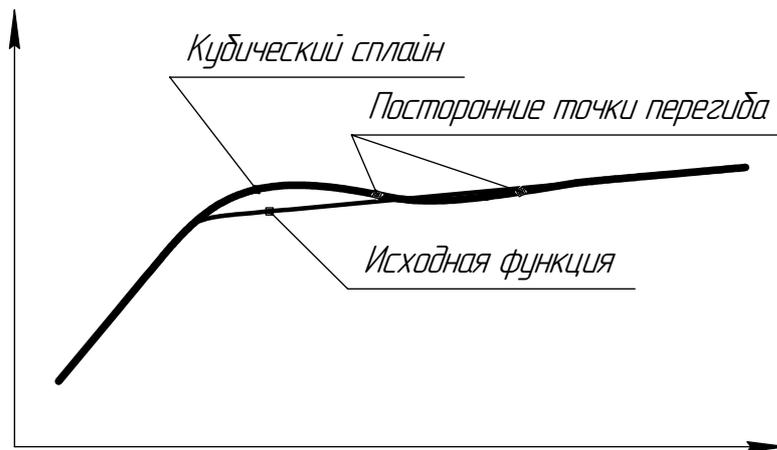


Рис. 2. Образование посторонних точек перегиба при интерполяции кубическим сплайном

Существуют сплайны, в которых степень гладкости является управляемой. Это сплайны под напряжением (“spline under tension”) [11]. Данные сплайны имеют вид:

$$T(x) = [T''(x_i)/\sigma^2] \cdot sh(\sigma(x_{i+1} - x)) / sh(\sigma(x_{i+1} - x_i)) + [y_i - T''(x_i)/\sigma^2] \times \\ \times (x_{i+1} - x) / (x_{i+1} - x_i) + [T''(x_{i+1})/\sigma^2] \cdot sh(\sigma(x - x_i)) / sh(\sigma(x_{i+1} - x_i)) + \\ + [y_{i+1} - T''(x_{i+1})/\sigma^2] \cdot (x - x_i) / (x_{i+1} - x_i), \quad (3)$$

где  $y_i$  — значения интерполируемой функции в узлах сетки;

$T(s_i)$ ,  $T''(s_i)$  — значения сплайна и его второй производной в узлах сетки;

$T(s)$  — сплайн-функция на интервале  $(s_i, s_{i+1})$  сетки;

$\sigma$  — фактор напряжения.

Фактор напряжения  $\sigma$  определяет степень плавности сплайна. При изменении  $\sigma$  от нуля до пятидесяти сплайн под напряжением видоизменяется от кубического сплайна до практически ломаной линии. Изменяя величину  $\sigma$ , можно добиться в конкретных условиях наивысшей точности численного интегрирования.

Величины коэффициентов сплайна  $M_i = T''(s_i)/\sigma^2$  определяются из решения системы уравнений, образованной условиями непрерывности сплайна в узлах сетки  $T'(s_i-0) = T'(s_i+0)$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{h} - \frac{\sigma}{sh(\sigma h)} \right) M_{i-1} + 2 \left( \frac{\sigma \cdot ch(\sigma h)}{sh(\sigma h)} - \frac{1}{h} \right) M_i + \left( \frac{1}{h} - \frac{\sigma}{sh(\sigma h)} \right) M_{i+1} = \\ & = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h}; \quad i = 1, n-1; \\ & M_0 = 0; \quad M_n = 0. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Интегрирование сплайна под напряжением позволило получить квадратурную формулу для численного интегрирования функций  $T(s) \approx f(s)$ ,  $T(s_i) = f(s_i)$  на равномерной сетке с шагом  $h = s_i - s_{i-1} = const$ :

$$\begin{aligned} \int_0^x T(s) ds &= (M_1 + M_i) \times \left( \frac{ch(\sigma h) - 1}{\sigma \cdot sh(\sigma h)} - 0.5h \right) + 0.5h(y_1 + y_i) + h \sum_{j=2}^{i-1} y_j + \\ & \frac{1}{h \cdot \sigma^2} \left( 1 - \frac{\sigma h \cdot sh(\sigma h)}{2(ch(\sigma h) - 1)} \right) \times (y_1 - y_2 - y_{i-1} + y_i + \frac{\sigma h - sh(\sigma h)}{sh(\sigma h)} \times \\ & \times (M_1 - M_2 - M_{i-1} + M_i)). \end{aligned} \quad (5)$$

Высокая эффективность формулы численного интегрирования (5) была подтверждена при решении задач из области геофизики [12].

Восстановление контура по измеренным значениям кривизны с использованием системы уравнений (1) требует задания начальных значений  $y_0$ ,  $x_0$ ,  $\alpha_0$ . Если задание начальных координат контура  $y_0$ ,  $x_0$ , например измерением, не является сложным, то измерение начального угла  $\alpha_0$  с достаточной точностью не представляется возможным. Задание начального угла измерением предложено заменить вычислением по полученной нами формуле:

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{[y(b) - y(0)] - y_0(b) \sqrt{(y_0(b))^2 + (x_0(b))^2 - (y(b) - y(0))^2}}{(y_0(b))^2 + (x_0(b))^2}, \quad (6)$$

где  $y(0)$  и  $y(b)$  — ординаты контура в начальной и конечной точках соответственно;  $y_0(b)$  и  $x_0(b)$  — координаты контура в его конечной точке, вычисленные по (1) с нулевыми начальными условиями  $y_0=0$ ,  $x_0=0$ ,  $\alpha_0=0$ .

Ординаты  $y(0)$  и  $y(b)$  могут быть легко измерены с достаточной точностью, например, геодезическими инструментами.

В случае, когда необходим анализ отклонений формы контура от проектного, тогда необходимость в вычислении угла  $\alpha_0$  может отпасть. Например, при анализе локальных отклонения контура от проектного. Тогда проектный контур целиком (или его участки) может рассматриваться как приближающийся к реальному с минимизацией среднеквадратического отклонения или с минимизацией максимального отклонения (Чебышевская норма). Выбор нормы приближения зависит от действующих нормативов или решаемой задачи при проектировании объекта контроля. Расчет отклонений реального контура от заданного в таком случае выполняется с использованием известных методов аппроксимации.

### ***Выводы***

Метод косвенного измерения формы контуров реальных поверхностей таких, как одежда автомобильной дороги или поверхность взлетно-посадочной полосы аэродрома, использующий в качестве исходного измеряемого параметра кривизну плоского контура, дает возможность восстановить декартовы координаты контура в виде аналитической функции для последующей компьютерной обработки и анализа. Метод измерения, реализуемый в виде относительно простых мобильных технических средств в сочетании с обычной персональной вычислительной техникой, позволит снизить трудоемкость контрольных операций, предусматриваемых стандартной методикой, и даст полное аналитическое описание формы поверхности взамен контроля отклонений профиля в отдельных точках.

### ***Перспективы продолжения исследований в выбранном направлении***

Развитием настоящей работы может быть разработка аппарата восстановления формы реальной поверхности в целом по измеренным предлагаемым методом отдельным плоским контурам. Еще одним направлением исследований может быть разработка косвенных методов измерения неплоских контуров с использованием кривизны и других дифференциальных параметров поверхности. Исследованию также может подлежать точность метода применительно к реальным условиям измерения различных объектов, в том числе, дорожного полотна. В рамках исследований точности метода должны быть проанализированы существующие средства измерения кривизны, обоснован выбор их геометрических параметров, в частности, расстояние между опорными элементами, их количество, аппроксимирующая контур функция, использующаяся при связывании перемещения подвижной опоры датчика и кривизны контура.

### ***Список литературы***

1. Средства измерений, допущенные к выпуску в обращение в СССР. Описание утвержденных образцов. - М.: Издательство стандартов, 1988.
2. ГОСТ 30412-96. Межгосударственный стандарт. Дороги автомобильные и аэродромы. Методы измерений неровностей оснований и покрытий. - М.: Изд. Стандартов, 1996.
3. Клюев В.В. Машиностроение: Энциклопедия в 40 томах. Том 3-7. Измерения, контроль, испытания и диагностика.- М.: Машиностроение, 2001.
4. Фельдман В.Д. Основы инженерной геодезии.- М.: Высшая школа, 2001.
5. Макаров В.В., Завозин Ж.Г., Сухой С.В., Расчетное определение отклонений формы произвольного контура: Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 4. - Судостроение.- Хабаровск, 1975.
6. Payne J.M., Hollis J.M., Findlay J.W. New method of measuring the shape of precise antenna reflectors// Revue of scientific Instruments.- 1976.- January. - Vol. 47.- No. 1.
7. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956
8. Электромагнитный датчик кривизны выпуклых поверхностей: А. С. № 399717 СССР, МКИ G 016b 7/28/ Шевченко Ф.И. – 1485287/25-28; Заявлено 26.10.70; Опубл. 03.10.73, Бюл. №39.
9. Patent USA № 3037294/ P.De Graff, Vertical Deviation for Roadways and Roadway Forms – June 5, 1962.
10. Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения.- М.: Мир, 1972.
11. Cline A.K., Scalar- and Planar-Valued Curve Fitting Using Spline Under Tension// Communication of the ACM.- 1974.- V. 17.- No 4.- P. 218-220.
12. Василенко Ю.М., Сухой С.В. О численном решении задач индукционного каротажа// Ред. журн. Известия вузов. Геология и разведка.- М., 1978.- бс.-Деп. В ВИНТИ 10.04.78, № 1217-78 деп.

© Сухой С.В., 2005