УДК 51-76

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Николайчук Т. И., Улицкая Н.Ю., Ларина А.
Донецкий национальный технический университет

Подано опис математичної моделі, що відтворює процес розвитку популяції конфігурацій, які відтворюють самі себе, а також самоліквідуються через певний проміжок часу.

Математика применяется в очень многих сферах человеческой жизни. Уже много столетий математика, переплетаясь с физикой, механикой и другими науками развивается и стимулирует развитие как этих наук, так и прикладных аспектов человеческой деятельности. Для исследования какого-либо процесса, явления, механизма создается его математическая модель, которая позволяет с большой точностью изучить этот объект. Но есть некоторые науки, где математика применяется весьма редко. Примером такой науки может быть биология, но тем интереснее рассмотреть те случаи, когда математика и биология тесно сотрудничают между собой. Одной из удачных математических моделей можно считать, например, модель Томаса Мальтуса, ученого-демографа и экономиста. Согласно этой модели население Земли растет в геометрической прогрессии, а производство продуктов питания - в арифметической, усиливая этим борьбу за существование.

Разумеется, в своей повседневной работе биологи прибегают к математике. Как исследователь биолог должен согласовать полученные им результаты со статистическими критериями (некоторые из них были разработаны Фишером), а соотношение, которые он установил, обычно изображаются кривыми из аналитической геометрии. Уравнения термодинамики широко используются в биохимии. Статистические методы сыграли важную роль в расшифровке генетического кода и составлении хромосомных карт. Обычно биологи пользуются лишь традиционной математикой. Однако вполне вероятно, что новые математические исследования на основе вычислительной техники внесут более значительный вклад в биологию, чем использование простейших моделей биологических процессов.

Особая ценность математики для биологии состоит не в применении ее как аппарата исследований, а в возможности абстрактно подойти к решению фундаментальных проблем и обнаружить связь между принципиально различными явлениями и процессами. Организмы – это машины, хотя и очень высокоорганизованные. Предполагается, что подлинное сотрудничество математики с биологией возникнет при анализе «теории машин», которая, как выяснилось, имеет отношение к основным проблемам биологии.

Клод Э. Шеннон из Массачусетского технологического института и Джон Маккарти из Станфордского университета отмечали, что когда люди находят машинные аналоги для человеческого организма, то их представления соответствуют духу времени. Декарт сравнивал человеческое тело с водяными часами и фонтанами сложной конструкции. В первой половине нашего века мозг рассматривали как нечто похожее на автоматическую телефонную станцию. В последние годы чаще всего пользуются аналогией с вычислительной машиной. Быть может, именно поэтому большинство исследователей, занимавшихся последнее время проблемой связи между организмом и машиной, концентрировали своё внимание на изучении центральной нервной системы. Они стремились разрешить два вопроса: «Является ли человеческий мозг своего рода вычислительной машиной?» и «Можно ли построить вычислительную машину, которая бы «умела думать» подобно мозгу?»

В теории автоматов изучается не внутреннее устройство автомата, а особенности его внешних проявлений. Говоря словами Джона фон Неймана, элементы машины или организма «рассматриваются как автоматы, чья внутренняя структура не обязательно должна быть вскрыта, но которые предполагаются реагирующими на отдельные определённые раздражители некоторым точно определённым образом».

Одной из весьма полезных абстрактных машин такого рода является «машина с конечным числом состояний», или «конечный автомат». Это некий «чёрный ящик», который имеет конечное число дискретных внутренних «состояний». Располагая конечным автоматом и набором правил его перехода из одного состояния в другое, можно точно определить (по начальному состоянию и последовательности сигналов на входе), каковы будут состояние автомата и сигнал на выходе в любой заданный момент времени.

В 1943г. Уоррен Маккалок и У.С. Питтс из Массачусетского технологического института разработали абстрактную и в высшей степени простую модель основного биологического элемента нервной системы –

нервной клетки, или нейрона. По существу это был конечный автомат всего с двумя возможными состояниями: возбуждения и покоя. Комбинируя эти элементы, они получили модель нервной системы.

Английский учёний А.М. Тьюринг совсем по-иному подошёл к проблеме создания «думающей машины». Он попытался определить в терминах логики автомат, который смог бы в принципе выполнить какие-то точно определимые вычисления, но никаких аналогий с физиологией мозга при этом не проводил. Машина Тьюринга осуществляет большое число самых простых операций. Она так же представляет собой автомат с конечным числом состояний, однако снабжённый бесконечно длинным набором входных данных.

Модель нейронов Маккалока - Питтса и более абстрактная машина Тьюринга послужили основой для интересных исследований на тему о природе мышления и о предельных возможностях машин. Специалисты по теории автоматов, например, попытались промоделировать способность биологических систем к самовосстановлению, а также их высокую надёжность работы, несмотря на то, что они выполнены из малонадёжных компонентов.

По-видимому, существуют иные, более совершенные принципы создания вычислительных машин, чем имитация мозга, как мы его понимаем, и более совершенное толкование принципов его работы, отличающееся от современной упрощенной точки зрения на поведение нейронов. Фон Нейман предполагал, что наипростейшее из возможных описаний операций, свойственных только мозгу, может быть выполнено в виде диаграммы, отражающей все возможные нервные связи! Может быть, и возникнет когда-нибудь математическая логика, способная объяснить работу мозга, но для этого, несомненно, потребуется метод на несколько порядков сложнее тех, которые были изобретены математиками до сих пор.

Существуют ли всё же какие-нибудь свойства живых существ, более доступных логическому анализу? Фон Нейман был первым, кто в деталях рассмотрел методы создания самовоспроизводящихся машин. Он показал, что если машину снабдить соответствующей программой действия и поместить в «среду - кладовую», состоящую из таких же деталей, что и сама машина, то она будет бродить среди них, отыскивая необходимые для самовоспроизведения детали; следовательно, со временем таких машин окажется уже две, затем четыре, восемь, и это будет продолжаться до тех пор, пока не иссякнет запас необходимых деталей в «кладовой».

Недавние открытия в генетике показывают, что существует поразительное сходство между моделью фон Неймана и процессами, происходящими в живой клетке. В – это набор генов, построенных из дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК), кодирующей наследственные признаки. С – фермент ДНК – полимераза, который катализирует процесс репликации цепочек ДНК и тем самым копирует гены. О – система из информационной рибонуклеиновой кислоты (РНК), ферментов и рибосом, выстраивающая в определённой последовательности аминокислоты в соответствии с программой ДНК; при этом синтезируются ферменты и другие белки и строится новая клетка. Система, состоящая из мозаичного пространства, клеточных машин, допустимых состояний и правил перехода, называется «мозаичной структурой». Конечный блок из клеток называется «конфигурацией» в том случае, когда заданы состояния ее клеток.

Рассмотрим, как быстро может расти популяция из самовоспроизводящихся конфигураций. Популяция не может расти по экспоненциальному закону, скажем, каждый раз удваиваться. Популяция, образованная двумерной мозаикой, никогда не сможет численно стать больше квадрата времени ее воспроизводства. Сформулируем это утверждение в виде теоремы: если самовоспроизводящаяся конфигурация способна репродуцировать $f(T)$ отпрысков за время T, то существует такая положительная константа k, что $f(T) \leq kT^2$.

Эта теорема может быть доказана следующим образом. Пусть C – самовоспроизводящаяся конфигурация, и размер наименьшего квадратного построения, вмещающего копию C, равен $D\times D$. Тогда в любой момент времени T общее число клеток, не находящихся в состоянии покоя, будет не более чем $(2T+D)^2$, поскольку указанный квадрат может за единицу времени увеличиваться не больше чем на одну клетку с каждой стороны. Если V –число клеток в C, то

$$f(T)\leq(2T+D)^2/V$$

Это неравенство можно подвергнуть последовательному упрощению и получить конечный вывод теоремы.

Теперь сформулируем следующую теорему: в мозаичной структуре, обладающей стираемыми конфигурациями, существуют так же конфигурации «райский сад».

Эта теорема доказывается в общих чертах следующим образом. Пусть n – целое положительное число, такое, что имеет некоторое построение размером $n \times n$, которое включает стираемую конфигурацию. Рассмотрим тогда более крупное построение размером $kn \times kn$ (рис.1).

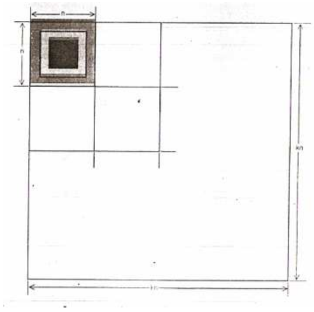

Рис.1

Каждое из k^2 построений размером $n \times n$ достаточно велико, чтоб могло содержать копию стираемой конфигурации; k выбирается так, чтобы в крупном построении содержалось много таких стираемых конфигураций. Если для каждой клетки допустимо A состояний, то все построение в момент времени T имеет $A^{(kn)^2}$ возможных конфигураций. Рассмотрим далее построение, в которое вышеуказанное первое построение переходит за единицу времени. Напомним, что мы не можем определить состояние для «внешнего незаполненного квадрата» в момент $T+1$. Поэтому для построения, соответствующего моменту времени $T+1$, допустимо лишь меньшее число состояний, а именно $A^{(kn-2)^2}$.

Теперь если в исходном $(kn \times kn)$-построении было одно $(n \times n)$-построение со стираемой конфигурацией, то два возможных состояния – то, которое соответствует этой конфигурации, и другое, которое соответствует взаимно стираемой с нею конфигурации, - перейдут в единственное возможное состояние в момент $T+1$. Если имелись два экземпляра стираемой конфигурации, то четыре соответствующих им возможных состояний снова перейдут в единственное возможное. Вообще, если в момент T имелось s экземпляров стираемой конфигурации, то в момент $T+1$ все 2^s их состояний перейдут в одно. Это положение изображено на рис. 2

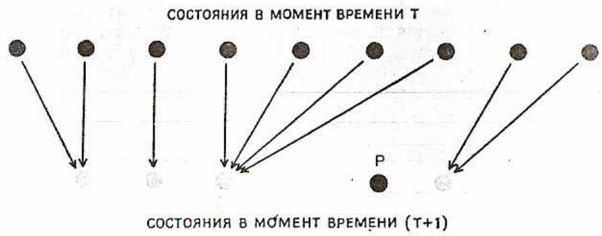

Рис. 2

Теперь необходимо лишь показать, что потеря в числе состояний, подлежащих стиранию, должна быть больше потери от сокращения числа граничных клеток, т. е. возникающей за счет разности между $A^{(kn)^2}$ и $A^{(kn-2)^2}$.

Рассмотрим вместо самого числа состояний их логарифмы. Логарифм отношения, которое указывает потерю, связанную со сжатием граничного слоя, имеет линейный порядок роста в зависимости от k. Логарифм же числа состояний, теряемых нами при стирании, возрастает так же, как число стираемых конфигураций, а, следовательно, приблизительно так же, как общая площадь построения, т. е. квадрат числа k. Тогда для больших k при стирании будет потеряно больше состояний, чем при сокращении пограничного слоя. Поэтому в момент времени $T+1$ должно существовать такое состояние P, которое не может быть достигнуто ни из какого состояния, соответствующего моменту времени T.

Состояние P и есть конфигурация «райский сад», о которой говорится в теореме. Это состояние можно себе представить, однако его нельзя достичь из какого-либо предшествующего состояния. Оно соответствует машине, которая может быть описана как соединение определённых частей, но которую нельзя создать из них.

По всей вероятности, рассмотрения двух упомянутых теорем достаточно для того, чтобы получить представление о том, как такой процесс самовоспроизведения можно рассмотреть в абстрактной форме и математически его исследовать. Но это не означает, что должна существовать тесная связь между мозаичной моделью самовоспроизведения и биологическим воспроизведением – это еще требует доказательств. Тем не менее, представляется реальным, что обращение к машинным моделям, в конце концов, поможет нам преодолеть трудности, которые возникают при описании биологических процессов или при установлении для них определенных критериев.

Возьмём такой пример. Предполагается, что жизнь на Земле возникла вследствие случайных взаимодействий неживой материи. Насколько правдоподобна такая версия, судить трудно. Быть может, из мозаичной модели нам как раз удастся узнать, насколько сложным должен быть набор отдельных частей, чтобы он был способен к самовоспроизведению и дальнейшей эволюции к более сложному потомству. Даже если и будет доказана абсолютная неприменимость к биологии промашинного воспроизведения, оно, тем не менее, может само по себе представлять исключительный интерес.

Рассмотрена математическая модель развития популяции конфигураций, которые воспроизводят сами себя. Рассмотрены способы подсчета количества появившихся объектов, а также учитывается количество потерь ранее появившихся конфигураций. Такая математическая модель может демонстрировать развитие какой-либо популяции некоторых живых организмов. С ее помощью можно проследить возникновение и развитие всей биологической жизни на Земле, показать насколько сложным есть процесс эволюции и естественного отбора всего живого.

Литература

1. Математика в современном мире/ Азимов А. – М.: ООО «Издательство Мир».