УДК 378.14

Н.А.Прокопенко
(Донецький національний
технічний університет,
м. Донецьк, Україна)

РОЗВЯ`ЗАННЯ ЗАДАЧ З ТЕОРЕТИЧНИХ ОСНОВ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ ЗАСОБАМИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ У СИСТЕМІ ІНЖЕНЕРНОЇ ОСВІТИ

Сучасна дійсність вимагає кваліфіковані інженерні кадри. Тому підготовці спеціалістів технічного профілю приділяється значна увага. Загальна професійна підготовка інженерів має багато складових, але однією з важливих є математична підготовка. Рівень математичної підготовки задається характером майбутньої професійної діяльності, а саме тими задачами, які повинен вирішувати майбутній інженер.

Будь-яка діяльність здійснюється шляхом розв‘язування задач, причому ці задачі повинні бути специфічними для діяльності даного виду. Кожну задачу можна характеризувати її *структурою* — певним набором елементів і зв'язків між ними. Різні автори виділяють різні елементи структури задачі: характеристики даних, характеристики завдання; предметну область, тобто клас об'єктів (предметів), про які йде мова в задачі; відносини, що зв'язують об'єкти предметної області; оператори, тобто сукупність тих дій (операцій), які треба зробити над умовами задачі, щоб виконати її вимоги тощо.

Метою статті є методика розробки системи задач з теоретичних основ електротехніки на основі предметної моделі студента з векторної алгебри. У найширшому значенні під моделлю студента розуміють знання про нього, які використовуються для організації процесу навчання. Знання про те, яким ми хочемо бачити студента в результаті навчання, тобто вимоги до його кінцевого стану як за окремими предметами, так і як до фахівця в цілому, називають нормативною моделлю. Нормативна модель щодо фахівця в цілому отримала назву моделі спеціаліста, щодо окремого навчального предмета – предметної моделі [1]. В роботі [2] описано п’ятикомпонентну предметну модель студента з вищої математики, що складається з семантичної, процедурної, операційної, тематичної і функціональної компонент.

Векторна алгебра є дуже важливим розділом дисципліни «Вища математика» в системі інженерної освіти. При формуванні цілей і змісту навчання векторної алгебри враховують, які вміння з цього розділу використовуються як в самому курсі вищої математики, так і в інших дисциплінах. Наведемо приклади використання вмінь з векторної алгебри при розв’язанні задач ТОЕ (теоретичних основ електротехніки).

Курс ТОЕ фактично включає дві частини – теорію ланцюгів і теорію електромагнітного поля.

У теорії ланцюгів елементи векторної алгебри використовуються тільки в символічному (комплексному) методі розрахунку і аналізу ланцюгів синусоїдального струму, а також в методі векторних діаграм (без застосування комплексних величин). Потрібні не стільки формули векторної алгебри, скільки розуміння фізичного, математичного, геометричного значення понять.

У теорії поля векторна алгебра використовується вже згідно своєму призначенню: при використовуванні різних ортогональних систем координат (Декартової, циліндрової, сферичної), при використовуванні формул диференціювання в просторі (дивергенція, градієнт, ротор, скалярний Лапласіан). Розкладання на проекції сил і векторів напруженості поля використовується при знаходженні результуючого поля. Рішення рівнянь Пуассона і Лапласа. Особливо часто доводиться вдаватися до векторної алгебри при розрахунку полів змінного струму.

Задача 1. По тонкому провіднику, що є колом радіусу *a = 1,2 см* і створює виток, тече струм *I = 5 А*. Необхідно визначити магнітну індукцію на осі витка.

Розв'язання:

1. Розташуємо виток у площині XOY декартової системи координат так, щоб початок координат співпадав з центром кола, а напрям осі z – з позитивним напрямом нормалі до площини кругу, як це показано на мал.1.

2. Обчислимо магнітну індукцію на осі витка, тобто у довільній точці $M(0;0;z)$. Магнітна індукція на осі кругового струму обчислюється за формулою $B=\int\limits_0^{2\pi} dB_z$, де $dB_z -$ проекція вектора $d\overline{B}$ на вісь Z. $d\overline{B}$ - частка $\overline{B}$ від кожного малого елемента кола.

3. Проекція вектора $d\overline{B}$ на вісь Z обчислюється за формулою $dB_z=\left|d\overline{B}\right|\cdot\cos\gamma$, де $\cos\gamma -$ напрямний косинус вектора $d\overline{B}$, а $\gamma -$ кут між вектором $d\overline{B}$ та віссю Z.

4. Розрахунок магнітної індукції виконаємо за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа $d\overline{B}=\dfrac{\mu_0 I\cdot\overline{dl}\times\overline{R_0}}{4\pi\cdot\overline{R}^2}$, де μ_0 = $4\pi\cdot 10^{-7}$ *Гн/м* – магнітна стала, $\overline{dl}$ - елемент кола і $\overline{R_0}$ - орт вектора $\overline{R}$. Початок вектора $\overline{R}$ - елемент $\overline{dl}$, кінець вектора $\overline{R}$ - точка М.

5. Знайдемо модуль вектора $d\overline{B}$: $\left|d\overline{B}\right|=\dfrac{\mu_0 I\cdot\left|\overline{dl}\times\overline{R_0}\right|}{4\pi\cdot\overline{R}^2}$

6. Т. к. $\overline{dl}$ спрямоване за дотичною до кола, то $\overline{dl}$ перпендикулярний до радіуса, який проведено у точку дотику (на малюнку її позначено *P*). *OP* – проекція вектора $\overline{R}$ на площину XOY.За шкільною теоремою «О трьох перпендикулярах» вектори $\overline{dl}$ і $\overline{R}$ перпендикулярні, тобто кут між ними 90°. Т. к. $\overline{R_0}$ - орт вектора $\overline{R}$, то $\overline{dl}$ і $\overline{R_0}$ також перпендикулярні (орт є колінеарним до свого вектору). Тому результат для модуля векторного добутку $\left|\overrightarrow{dl}\times\overrightarrow{R_0}\right|=\left|\overrightarrow{dl}\right|\cdot\left|\overrightarrow{R_0}\right|\cdot\sin 90^\circ=dl$ ($\overline{R_0}$ - орт $\Rightarrow$ одиничний вектор: $\left|\overline{R_0}\right|=1$, $\left|\overline{dl}\right|=dl$).

7. Т.к. $d\overline{B}=\dfrac{\mu_0 I\cdot\overline{dl}\times\overline{R_0}}{4\pi\cdot\overline{R}^2}$, то $d\overline{B}$ колінеарний вектору $\overline{dl}\times\overline{R_0}$, тобто $d\overline{B}\perp\overline{dl}, d\overline{B}\perp\overline{R_0}$ (за означенням векторного добутку двох векторів).

Т.к. $d\overline{B}\perp\overline{dl},\ \overline{R}\perp\overline{dl}, OZ\perp\overline{dl}\Rightarrow d\overline{B},\ \overline{R}, OZ -$ належать одній площині.

Т.к. $d\overline{B}\perp\overline{R_0}, \overline{R_0}\uparrow\uparrow\overline{R}\Rightarrow\ d\overline{B}\perp\overline{R}$.

Т.к. $d\overline{B}\perp\overline{R}$, $\angle MOP=90^\circ\Rightarrow\angle OPM=\gamma$

Розглянемо трикутник *MOP*. $OM=z; PM=\left|\overline{R}\right|; OP=a; \angle OPM=\gamma$

$$\left|\overline{R}\right|^2=OM^2+OP^2=z^2+a^2 \text{ (за теоремою Піфагора), } \cos\gamma=\frac{OP}{PM}=\frac{a}{\left|\overline{R}\right|}=\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

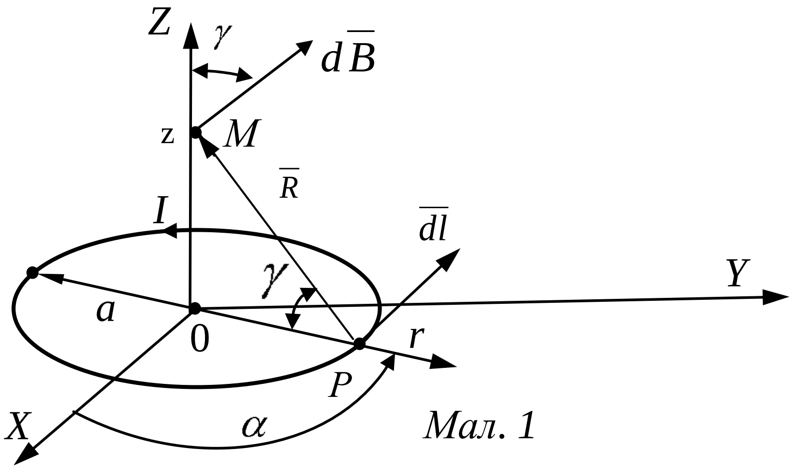
8. Знайдемо елемент контуру dl. dl - це елемент дуги, яка дорівнює добутку радіуса кола на відповідний центральний кут $d\alpha$: $dl=a\cdot d\alpha$. Де точка *P* з координатами $(\alpha;\rho;z)$ у циліндричній системі координат.

9. Із відомої з векторної алгебри властивості $\overline{R}^2 = \left|\overline{R}\right|^2$.

10. Одержимо $\left|d\overline{B}\right| = \dfrac{\mu_0 I \cdot \left|\overline{dl} \times \overline{R}_0\right|}{4\pi \cdot \overline{R}^2} = \dfrac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi \cdot \left|\overline{R}\right|^2} = \dfrac{\mu_0 I \cdot a \cdot d\alpha}{4\pi \cdot (z^2 + a^2)}$

11. З урахуванням отриманих виразів одержуємо

$$dB_z = \left|\overline{dB}\right| \cdot \cos\gamma = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a \cdot d\alpha}{z^2 + a^2} \cdot \cos\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a \cdot d\alpha}{z^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$



Мал. 1

Магнітна індукція на осі кругового струму

$$B = \int_0^{2\pi} dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a \cdot d\alpha}{z^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \alpha\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi = \frac{\mu_0 I \cdot a^2}{2\sqrt{(z^2 + a^2)^3}}.$$

У площині круга ($z = 0$) числове значення індукції

$$B = \frac{\mu_0 I \cdot a^2}{2 \cdot a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-2}} = 26{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ тл.}$$

Для розв‘язання цієї задачі треба вміти:

1.за наданими модулем вектора і його напрямними косинусами знаходити координати вектора;

2. за наданим вектором визначати його орт;

3. за наданими модулями двох векторів і куту між ними знаходити модуль векторного добутку цих векторів;

4. за наданим виразом векторів визначати колінеарність цих векторів;

5. за наданим модулем вектору знаходити його скалярний квадрат.