

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

до виконання лабораторних робіт з курсу
“Теорія імовірностей та математична статистика”

(для студентів спеціальностей 7.092401 ТКС та 7.091401 СУА)

Затверджено на засіданні кафедри
„Автоматики та телекомунікацій”
Протокол № ____
від «____» _____ 2006 р.

Затверджено на засіданні науково-
видавничої ради ДонНТУ
Протокол № ____
від «____» _____ 2006 р.

Донецьк, ДонНТУ 2006

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу “Теорія імовірностей та математична статистика” (для студентів спеціальностей 7.092401 ТКС та 7.091401 СУА))”/Укл. Воропаєва В. Я., Червинський В. В., Верховський Я. М., Ступак Г. В. – Донецьк. ДонНТУ, 2006. – 20 с.

Містить короткі теоретичні відомості та методичні рекомендації щодо виконання лабораторних робіт з курсу „Теорія імовірностей та математична статистика”. Курс складається з чотирьох лабораторних робіт. В кінці опису кожної лабораторної роботи студенти мають змогу ознайомитись з переліком контрольних запитань та змістом звіту з лабораторної роботи.

Методичні вказівки призначені для студентів спеціальностей 7.092401 „Телекомунікаційні системи та мережі” та 7.091401 „Системи управління та автоматики”.

Укладачі Воропаєва В. Я.
Червинський В. В.
Верховський Я. М.
Ступак Г. В.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

ІМОВІРНІСТЬ ТА ВІДНОСНА ЧАСТОТА

- Ціль роботи: 1) навчитись розраховувати імовірність за класичним визначенням (з використанням формул комбінаторики);
- 2) опанувати основні статистичні функції Excel;
- 3) навчитись проводити статистичні випробування та обробляти їх результати;
- 4) порівняти теоретичний та статистичний ряди розподілу.

Завдання на виконання лабораторної роботи

В наборі з N карт M – червоного кольору. Знайти імовірність того, що серед n довільно вибраних карт знаходиться t червоних.

Значення N , M , n , t вказані в таблиці варіантів.

Порядок виконання роботи

1. Виконати розрахунок заданої імовірності за класичним визначенням, використовуючи необхідні формули комбінаторики.
2. Знайти ту ж імовірність за допомогою функції ГИПЕРГЕОМЕТ Excel, порівняти зі значенням, отриманим в п.1.
3. Побудувати в Excel ряд розподілу для дискретної випадкової величини (ДВВ) X , що дорівнює кількості червоних карт серед n вибраних, у вигляді табл. 1.1:

Таблиця 1.1 – Ряд розподілу ДВВ

X	0	1	2	...	$k = \min(M, n)$
$P(X)$	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$...	$P(k)$

Імовірності $P(k)$ знайти за допомогою функції ГИПЕРГЕОМЕТ Excel. Виконати перевірку $\sum_{i=0}^k P(i) = 1$. Побудувати кругову діаграму ряду розподілу.

4. Провести 3 серії статистичних випробувань по умовам завдання:
- Перша – з N випробувань,
 - Друга – з $3N$ випробувань,
 - Третя – з $5N$ випробувань.

Результати статистичних випробувань занести в протокол у вигляді табл. 1.2:

Таблиця 1.2 – Протокол випробувань

№ випробування	1	...	N	$N+1$...	$3N$...	$5N$
Результат (число червоних карт)								

5. Виконати обробку результатів статистичних випробувань: підрахувати частоту w_i появи i -го значення X в кожній серії, після чого обчислити відносну частоту $W_i = w_i / K$, де K – кількість випробувань (обсяг серії). Результати записати у вигляді таблиці 1.3 – 1.5 (для кожної серії):

Таблиця 1.3 – Статистичний ряд розподілу (серія 1)

X	0	1	2	...	$k = \min(M, n)$
w_i	$w(0)$	$w(1)$	$w(2)$...	$w(k)$
W_i	$W(0)$	$W(1)$	$W(2)$...	$W(k)$

6. Порівняти відповідні значення імовірності та відносної частоти, обчисливши абсолютну похибку між імовірністю та відносною частотою для кожного i -го значення X в кожній серії: $\delta_{i1} = |W_i - p_i|$ та середнє значення похибки. Результати записати у вигляді таблиці 1.6.

Таблиця 1.6 – Співвідношення між імовірністю та відносною частотою

X	0	1	2	...	k	середня
<i>серія 1</i>	Δ_{01}	Δ_{11}	Δ_{21}		Δ_{k1}	$(\sum \Delta) / k$
<i>серія 2</i>	Δ_{02}	Δ_{12}	Δ_{22}		Δ_{k2}	$(\sum \Delta) / k$
<i>серія 3</i>	Δ_{03}	Δ_{13}	Δ_{23}		Δ_{k3}	$(\sum \Delta) / k$

7. Зробити висновки про співвідношення між імовірністю та відносною частотою залежно від обсягу серії.

Зміст звіту з лабораторної роботи

1. Самостійний розрахунок шуканої імовірності.
2. Лист Excel з таблицею 1.1 та круговою діаграмою для теоретичного ряду розподілу ДВВ X .
3. Лист Excel з таблицею 1.2 протоколу випробувань та 1.3 – 1.5 для статистичних рядів розподілу ДВВ X у трьох серіях випробувань.
4. Таблиця 1.6 співвідношення між імовірністю та відносною частотою
5. Висновки по роботі.

Контрольні питання

1. Які події називаються:
 - a) сумісними
 - b) несумісними
 - c) рівно можливими
 - d) достовірними
 - e) неможливими?

Навести приклади.

2. Що називають „повною групою подій”? Дати приклад.
3. Навести класичне визначення імовірності.
4. Основні властивості імовірності.
5. Як розрахувати кількість комбінацій з K елементів, що розрізняються порядком їх розташування?
6. Як розрахувати кількість комбінацій з K різних елементів по M елементів, що розрізняються:
 - a) складом елементів
 - b) або складом елементів, або порядком їх розташування?
7. Що називають „частотою” та „відносною частотою” події?
8. Яка різниця між відносною частотою та імовірністю події? Який між ними зв'язок? Від чого він залежить?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ

- Ціль роботи: 1) навчитись будувати ряд розподілу та функцію розподілу ДВВ самостійно та в Excel;
- 2) вивчити основні закони розподілу ДВВ (біноміальний, Пуассона, геометричний, гіпергеометричний);
- 3) навчитись розраховувати числові характеристики ДВВ (математичне очікування, дисперсію, середнє квадратичне відхилення);
- 4) опанувати використання абсолютної, відносної та змішаної адресації та роботу з масивами при завданні формул в Excel.

Порядок виконання роботи

1. Біноміальний розподіл.
 - а) Отримати ряд розподілу для ДВВ X , що дорівнює числу появ події A у K випробуваннях при заданій імовірності p появи події A в одному випробуванні (дивись таблицю варіантів). Використати функцію БИНОМРАСП Excel з відповідними параметрами та типами адресації. Останнє значення ряду розподілу обчислити як різницю між 1 та сумою решти імовірностей.
 - б) Побудувати функцію розподілу за допомогою функції БИНОМРАСП Excel з відповідними параметрами та типами адресації. Результати виконання пунктів а) і б) оформити у вигляді таблиці.
 - в) Побудувати ряд розподілу у вигляді стовпчикової діаграми (гістограми) та графік функції розподілу.

2. Розподіл Пуассона.

- a) Нехай імовірності p зменшилась до p_1 , а кількість випробувань збільшилась до K_1 . Отримати ряд розподілу для ДВВ X , рівній числу появ події A у K_1 випробуваннях при заданій імовірності p_1 появи події A в одному випробуванні (перші 20 значень). Використати функцію ПУАССОН Excel з відповідними параметрами та типами адресації.
- b) Обчислити відповідні імовірності за допомогою функції БИНОМРАСП. Порівняти отримані значення. Обчислити відносне розходження для кожного значення ряду розподілу.
- c) Побудувати функцію розподілу для цієї ДВВ. Результати виконання пунктів а), б) і с) оформити у вигляді таблиці.
- d) Побудувати графік ряду розподілу у вигляді стовпчикової діаграми (гістограми) та графік функції розподілу.
- e) Проаналізувати залежність максимумів розподілу Пуассона від значення параметру $\lambda = p_1 N_1$. При цьому довільно змінювати значення N_1 або p_1 так, щоб параметр λ приймав різні значення (як цілі, так і дробові).

3. Геометричний розподіл.

- a) Нехай випробування проводяться до появи події A (при заданій імовірності p появи події A в одному випробуванні). Отримати ряд розподілу для ДВВ Y , рівній кількості випробувань (перші 20 значень). Використати математичну функцію СТЕПЕНЬ Excel з відповідними типами адресації для формування імовірностей ряду
- b) Побудувати функцію розподілу для цієї ДВВ, використовуючи визначення функції розподілу. Результати виконання пунктів а) і б) оформити у вигляді таблиці.
- c) Побудувати ряд розподілу у вигляді стовпчикової діаграми (гістограми) та графік функції розподілу.

4. Обчислити для кожного з отриманих розподілів імовірність:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

для біноміального розподілу перевірити отримане значення, використовуючи функцію ВЕРОЯТНОСТЬ Excel.

5. Розрахувати для кожного з отриманих розподілів:

a) математичне очікування (використати функцію СУММПРОИЗВ),

b) дисперсію за формулою:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

c) середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

При обчисленні дисперсії використати масиви при завданні відповідної формули в Excel. Увага! При роботі з масивами редагування формул завершується натисканням клавіш CTRL+SHIFT+ENTER (а не ENTER, як при завданні звичайних формул) і у вікні формул відображаються фігурні дужки, наприклад:

{=СУММ(A34:A54^2*D34:D54)-B55^2}

6. Здійснити наступні перевірки:

a) Для біноміального розподілу перевірити рівність

$$M = n p \text{ та } D = n p q.$$

b) Для розподілу Пуассона перевірити рівність дисперсії та математичного очікування

$$M = D$$

c) Для геометричного розподілу перевірити рівність

$$M = 1/p$$

Зміст звіту з лабораторної роботи

1. ДВВ з біноміальним розподілом:

- a) основні теоретичні відомості
- b) ряд та функція розподілу – таблиця Excel
- c) ряд та функція розподілу – діаграма Excel (стовпчикова та графік)
- d) самостійний та автоматичний розрахунок імовірності

$$P(a \leq X < b)$$

- e) розрахунок числових характеристик та перевірка відповідних співвідношень
- f) висновки

2. Розподіл Пуассона

- a) основні теоретичні відомості
- b) ряд та функція розподілу, значення відповідних імовірностей, розрахованих за біноміальним розподілом, відносні розходження – таблиця Excel
- c) ряд та функція розподілу – діаграма Excel (стовпчикова та графік)
- d) розрахунок імовірності $P(a \leq X < b)$
- e) розрахунок числових характеристик та перевірка відповідних співвідношень
- f) висновки

3. Геометричний розподіл

- a) основні теоретичні відомості
- b) ряд та функція розподілу – таблиця Excel
- c) ряд та функція розподілу – діаграма Excel (стовпчикова та графік)

- d) розрахунок імовірності $P(a \leq X < b)$
- e) розрахунок числових характеристик та перевірка відповідних співвідношень
- f) висновки

Контрольні питання

1. Дати визначення випадкової величини, дискретної та безперервної випадкової величини. Навести приклади.
2. Які існують способи опису ДВВ?
3. Яка випадкова величина розподілена за біноміальним законом?
4. Яка випадкова величина розподілена за законом Пуассона?
5. Які максимуми має розподіл Пуассона?
6. Яка випадкова величина має геометричний розподіл?
7. Яка випадкова величина має гіпергеометричний розподіл?
8. Назвіть основні числові характеристики випадкових величин. Дайте їх визначення. Які розмірності вони мають?
9. Які властивості має математичне очікування?
10. Які формули існують для розрахунку ДВВ?
11. Які властивості має дисперсія?
12. Для чого введена характеристика – середнє квадратичне відхилення?
13. Дати визначення функції розподілу випадкової величини.
14. Які властивості має функція розподілу випадкової величини?
15. Як визначити імовірність влучання випадкової величини в заданий інтервал?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

- Ціль роботи: 1) навчитись розігрувати значення дискретної ВВ за допомогою метода Монте-Карло;
- 2) виконати моделювання безперервної ВВ за допомогою метода Монте-Карло;
- 3) опанувати генерування псевдовипадкових чисел в Excel.

Порядок виконання роботи

1. Розігрування значень дискретної ВВ за допомогою метода Монте-Карло
 - а) розіграти методом Монте-Карло 5К значень дискретної ВВ з гіпергеометричним розподілом (таблицю розподілу взяти з ЛР № 1), випадкові числа генерувати за допомогою функції СЛЧИС Excel, для перевірки приналежності випадкового числа тому або іншому частковому інтервалу використати функцію Excel ЕСЛИ;
 - б) рекомендація: перед використанням функції СЛЧИС доцільно відключити опцію автоматичного виконання обчислень (меню “сервіс” – “параметри”, вкладка “вычисления”, опцію “автоматически” замінити на “вручную”) і при необхідності здійснити новий крок обчислень користуватися клавішею F9;
 - в) здійснити статистичну обробку отриманих результатів – побудувати модельний статистичний ряд розподілу розіграної ДВВ за методикою, використаною в ЛР № 1;
 - г) порівняти значення імовірностей теоретичного та модельного ряду, обчисливши абсолютну похибку для кожного значення ДВВ та середнє значення похибки;

- e) порівняти значення імовірностей теоретичного та експериментального статистичного ряду, побудованого в ЛР № 1 для серії з максимальним числом випробувань, обчисливши абсолютну похибку для кожного значення ДВВ та середнє значення похибки;
- f) зробити висновки – який експеримент, натурний чи модельний, краще збігається з теоретичним розподілом.
2. Моделювання значень нормальної безперервної ВВ за допомогою метода Монте-Карло
- a) отримати масив (50*12) випадкових чисел за допомогою функції СЛЧИС Excel,
- b) отримати 50 можливих значень нормалізованої нормально-розподіленої безперервної ВВ Z з параметрами $a=0$ та $\sigma=1$ за формулою:
- $$z_i = (r_1 + r_2 + \dots + r_{12}) - 6$$
- c) змоделювати 50 можливих значень нормально-розподіленої безперервної ВВ X з параметрами a та σ , вказаними в таблиці варіантів, за формулою:
- $$x_i = \sigma z_i + a$$
- d) оцінити параметри розіграної величини (МО та СКВ) за допомогою функцій СРЗНАЧ та СТАНДОТКЛОН Excel та порівняти їх з параметрами a та σ , обчисливши відносну похибку;
- e) зробити висновки про можливість використання методу Монте-Карло для моделювання ВВ та його точність

Зміст звіту з лабораторної роботи

1. Сутність методу Монте-Карло для моделювання ВВ
2. Таблиця Excel результатів моделювання значень дискретної ВВ з гіпергеометричним розподілом
3. Таблиця Excel статистичного ряду розподілу розіграної ДВВ з порівнянням теоретичних, модельних та експериментальних імовірностей.

4. Таблиця Excel результатів моделювання значень нормалізованої нормально-розподіленої безперервної ВВ Z з параметрами $a=0$ та $\sigma=1$ та нормально-розподіленої безперервної ВВ X з параметрами a та σ
5. Оціника параметрів розіграної нормально-розподіленої безперервної величини, відносні похибки цих параметрів
6. Висновки

Контрольні питання

1. Що таке випадкові числа?
2. Як використовується метод Монте-Карло для розігрування дискретної випадкової величини із заданим законом розподілу?
3. Як використовується метод Монте-Карло для розігрування безперервної випадкової величини із заданим законом розподілу?
4. В чому полягає метод зворотних функцій?
5. Як використовується метод Монте-Карло для розігрування нормально-розподіленої безперервної випадкової величини?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ (ЗМОДЕЛЬОВАНИХ) ДАНИХ

- Ціль роботи: 1) навчитись групувати експериментальні дані та будувати статистичні ряди
- 2) опанувати методику точечних та інтервальних оцінок числових характеристик генеральної сукупності по вибіркових даних;
- 3) навчитись перевіряти гіпотези про закон розподілу генеральної сукупності;

Порядок виконання роботи

1. Групування експериментальних даних та побудова статистичного ряду
 - а) Отримати $n = 50$ значень “експериментальних” даних за допомогою методу Монте-Карло для моделювання нормально-розподіленої випадкової величини по методиці, засвоєній при виконанні ЛР № 3.
 - б) Здійснити групування даних, для чого:
 - і. скопіювати отримані значення на новий лист Excel (за допомогою команди “Специальная вставка – Только значения”) та упорядкувати їх за зростанням (команда “Данные – Сортировка”)
 - іі. розбити весь масив даних на 7 інтервалів довжиною

$$h = (x_{max} - x_{min})/7$$

Значення варіанти для кожного інтервалу x_i обчислити як середнє арифметичне кінців інтервалу

- ііі. підрахувати кількість елементів, що потрапили до кожного інтервалу (частоту n_i відповідної варіанти)
- с) Обчислити відносну частоту попадання випадкової величини у i -й інтервал:

$$W_i = n_i/n = n_i/50$$

d) Результати обчислень подати у вигляді таблиці:

№	X	h	№ int	нижня	верхня	x_i	n_i	W_i	W_i/h
1	x_{min}	$(x_{max} - x_{min})/7$	1	x_{min}	$x_{min}+h$	x_1			
	...								
			7		x_{max}	x_7			
	...								
50	x_{max}								

e) Побудувати гістограму відносних частот

2. Визначити точечні та інтервальні оцінки генеральної середньої \bar{x}_G та генерального СКО σ_G на базі отриманої при моделюванні вибіркової послідовності.

a) Точечну оцінку генеральної середньої та генерального СКО здійснити за допомогою вибіркової середньої \bar{x}_B та виправленого СКО S , використовуючи функції СРЗНАЧ та СТАНДОТКЛОН Excel;

b) Інтервальна оцінка генеральної середньої здійснюється за допомогою розподілу Стьюдента (оскільки нам невідоме значення СКО ГС) з надійністю $\gamma = 0,95$:

$$\bar{x}_B - t_\gamma (S/\sqrt{n}) < a < \bar{x}_B + t_\gamma (S/\sqrt{n})$$

де t_γ можна знайти або по таблиці розподілу Стьюдента для

$$n = 50, \gamma = 0,95$$

або через функцію СТЬЮДРАСПОБР для

$$s = n - 1 = 50 - 1 \text{ (число ступенів свободи), } \alpha = 1 - \gamma = 0,05$$

c) Інтервальна оцінка СКО здійснюється за допомогою розподілу χ^2 з надійністю $\gamma = 0,95$:

$$S(1 - q) < \sigma < S(1 + q) \text{ (при } q < 1)$$

$$0 < \sigma < S(1 + q) \text{ (при } q > 1)$$

де q знаходять по таблиці розподілу для $n = 50, \gamma = 0,95$

3. Здійснити перевірку гіпотези про закон розподілу ГС з рівнем значимості

$$\alpha = 0,05$$

- a) Сформулювати основну (нульову) та альтернативну гіпотези:
- основна – розподіл ГС відповідає нормальному закону
 - альтернативна – розподіл ГС не відповідає нормальному закону
- b) Обчислити теоретичні частоти n_i' попадання ВВ у відповідний інтервал:

$$n_i' = P_i * n = 50 P_i$$

де P_i – імовірність попадання ВВ у відповідний інтервал, обчислюється як різниця інтегральної функції розподілу на границях інтервалу. Для обчислення інтегральної функції розподілу нормального розподілу використати функцію НОРМРАСП Excel. Тоді

$$P_i = F(x_в) - F(x_н)$$

де $x_в$ та $x_н$ – відповідно верхня та нижня границі кожного інтервалу. Оскільки нормально розподілена НВВ визначена на усій числовій осі, то для першого інтервалу $x_н = -500$, для останнього інтервалу $x_в = 500$

- c) Розрахувати фактичне значення критерію Пірсона за формулою:

$$\chi_{\phi}^2 = \sum_{i=1}^7 \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

Обчислення зручно подати у вигляді таблиці:

<i>№ інт</i>	$x_н$	$x_в$	n_i	$F(x_н)$	$F(x_в)$	P_i	n_i'	$(n_i - n_i')^2$
--------------	-------	-------	-------	----------	----------	-------	--------	------------------

- d) Знайти критичне значення критерію $\chi_{кр}^2$ Пірсона за таблицею або з використанням функції ХИ2ОБР для числа ступенів вільності

$$r = k - 1 - a = 7 - 1 - 2 = 4$$

- e) Порівняти отримані значення та зробити висновок щодо прийняття нульової гіпотези:

- i. якщо $\chi_{факт}^2 < \chi_{кр}^2$, гіпотеза приймається
- ii. якщо $\chi_{факт}^2 > \chi_{кр}^2$, гіпотеза відкидається

Вміст звіту з лабораторної роботи

1. Таблиця Excel результатів моделювання 50 значень (впорядкованих за зростанням) нормально-розподіленої безперервної ВВ з параметрами μ та σ
2. Таблиця Excel статистичного розподілу – варіаційний ряд
3. Гістограма відносних частот
4. Точечна оцінка параметрів ГС за даними вибірки
5. Інтервальна оцінка параметрів ГС за даними вибірки
6. Нульова та альтернативна гіпотези про вид розподілу ГС
7. Таблиця Excel для перевірки гіпотези по критерію Пірсона
8. Результати перевірки гіпотези по критерію Пірсона
9. Висновки

Контрольні питання

1. Що таке генеральна та вибіркова сукупності? Які існують способи відбору даних?
2. Як будується емпірична функція розподілу, полігон та гістограма?
3. Яким вимогам повинні відповідати статистичні оцінки параметрів розподілу?
4. Чим точечні оцінки відрізняються від інтервальних?
5. Дати визначення довірчої імовірності, довірчого інтервалу, точності та надійності оцінки.
6. Як оцінюється істинне значення вимірюваної величини?
7. Як оцінюється точність вимірювань?
8. Що таке умовні варіанти та умовні емпіричні моменти?
9. Як оцінюються центральні моменти по умовним?
10. Що таке статистична гіпотеза? Якими вони бувають?
11. Що таке критична область? Якими вони бувають?

Таблиця варіантів

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
<i>N</i>	15	11	11	15	12	12	15	15	16	16	18	18	20	20	20	18	19	19	20	20	15	14	14	14	14
<i>M</i>	6	6	7	7	6	7	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	9	9	6	9	8	8
<i>n</i>	5	5	4	5	5	5	6	6	6	5	7	8	7	8	5	5	5	6	6	6	5	5	5	5	6
<i>m</i>	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	2	2	4	4	4	2	1	1	3	3	3	3	3	2	2
<i>K</i>	20	15	25	20	30	15	20	25	30	15	20	25	30	15	20	25	30	15	20	25	30	15	20	25	30
<i>p</i>	0,3	0,25	0,2	0,15	0,35	0,3	0,25	0,25	0,15	0,35	0,4	0,1	0,3	0,25	0,2	0,15	0,35	0,4	0,1	0,3	0,25	0,2	0,15	0,35	0,4
<i>K_I</i>	300	400	500	350	450	500	300	400	500	350	450	500	300	400	500	350	450	500	300	400	500	350	450	500	300
<i>p_I</i>	0,01	0,005	0,002	0,01	0,01	0,003	0,025	0,005	0,002	0,01	0,005	0,002	0,01	0,01	0,003	0,025	0,005	0,002	0,01	0,005	0,002	0,01	0,01	0,003	0,025
<i>a</i>	5	3	8	4	10	2	12	14	5	1	10	2	15	5	7	8	15	2	4	1	11	5	3	8	17
<i>b</i>	10	12	15	18	20	7	20	23	25	15	15	12	30	10	13	18	25	14	16	11	21	14	19	18	29
<i>a</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	1	2	3	4	5
<i>σ</i>	0,5	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	0,5	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5