МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра АТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи за курсом
«Чисельні методи комп'ютерного аналізу»
для студентів денної форми навчання за напрямом підготовки:
6.050802 Електронні пристрої та системи, спеціалізація:
«Електронні системи»

№

Розглянуті на засіданні кафедри
«Автоматика та телекомунікації»
протокол № 12 від 22 листопада 2011р.

Затверджені на засіданні
навчально-видавничої ради ДонНТУ
протокол № 8 від 22.12.2011 р.

Донецьк – 2011

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи за курсом «Чисельні методи комп'ютерного аналізу» для студентів денної форми навчання напряму підготовки 6.050802 Електронні пристрої та системи, спеціалізація «Електронні системи» / Долгіх І.П., Зайцева Е.Є., Червінська Н.В., Яремко І.М. – Донецьк, ДонНТУ, 2011. – 24 с.

Укладачі: ст. викл. Долгіх І.П.
ас. Зайцева Е.Є.
ас. Червінська Н.В.
ст. викл. Яремко І.М.

Рецензенти: к.т.н., доц. каф. АСУ Світлична В.А.
к.т.н., доц. каф. АТ Федюн Р.В.

Затверджені на засіданні кафедри
«Автоматика та телекомунікації»
протокол № 12 від 22 листопада 2011р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Під час розв'язку практичних задач часто необхідно знайти похідні вказаних порядків для функції $y = f(x)$, що задана таблицею. Також можливо, що через початковий не елементарний аналітичний вираз вихідної функції, безпосереднє її диференціювання є складним. В таких випадках зазвичай використовують наближене диференціювання.

Методи розв'язку задачі

Для виводу формул наближеного диференціювання задану функцію $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ замінюють інтерполяційною функцією $P_n(x)$ (яка часто є поліномом), а потім приймають

$$f'(x) = P_n'(x) \tag{1}$$

при $a \le x \le b$.

Аналогічно роблять, коли шукають похідні вищих порядків функції $f(x)$.

Якщо для інтерполяційної функції $P_n(x)$ відома похибка

$$R(x) = f(x) - P_n(x), \tag{2}$$

то похибку похідної $P_n'(x)$ можна виразити формулою

$$r(x) = f'(x) - P_n'(x) = R'(x), \tag{2*}$$

тобто похибка похідної інтерполяційної функції дорівнює похідній похибки цієї функції.

Оскільки знак похибки в певних випадках не є цікавим, можна обчислювати замість (2*) абсолютну або відносну похибки за формулами:

$$r(x) = | f'(x) - P_n'(x) |,$$

$$\delta = \left| \frac{f'(x) - P_n'(x)}{f'(x)} \right| \cdot 100\%.$$

Тому далі у вказівках будемо обчислювати відносну похибку розрахунків.

Те саме вірно і для похідних вищих порядків.

Наближене диференціювання є операцією менш точною за інтерполювання. Дійсно, близькість одна до одної ординат двох кривих

$$y = f(x) \text{ и } Y = P(x)$$

на відрізку $[a,b]$ ще не гарантує близькості на цьому відрізку їх похідних $f'(x)$ и $P'(x)$, тобто малого розходження кутових коефіцієнтів дотичних до кривих, що розглядаються, за однакових значень аргументу.

Наближене диференціювання в початку і в кінці таблиці зазвичай виконують з використанням першої та другої інтерполяційних формул Ньютона. В середині таблиці використовують формулу Стерлінга. Однак, якщо при цьому кількість точок n достатня для отримання похідної з заданою точністю, використовують також першу або другу інтерполяційні формули Ньютона.

1. ФОРМУЛИ НАБЛИЖЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ, ЗАСНОВАНІ НА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ФОРМУЛАХ НЬЮТОНА

1.1. Перша інтерполяційна формула Ньютона

Нехай маємо функцію $y(x)$, що задана в рівновіддалених точках $x_i\,(i = 0,1,2,...,n)$ відрізка $[a,b]$ за допомогою значень $y_i = f(x_i)$. Для пошуку на $[a,b]$ похідних $y' = f'(x),\;\; y'' = f''(x)$ і т.д. функцію y наближено замінимо інтерполяційним поліномом Ньютона, який побудовано для системи вузлів $x_0, x_1,...,x_k\;(k \le n)$.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + ..., \end{aligned} \qquad (3)$$

де $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ і $h = x_{i+1} - x_i\;\;(i = 0,1,...)$.

Виконавши перемноження біномів, отримаємо:

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + ... \end{aligned}. \qquad (3^*)$$

Оскільки

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\cdot\frac{dy}{dq},$$

то

$$\begin{aligned} P_n'(x) = \frac{1}{h}\Big[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + ...\Big] \end{aligned}. \qquad (4)$$

Аналогічно, оскільки $y''(x) = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{d(y')}{dq}\cdot\dfrac{dq}{dx}$, то

$$P_n''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12}\Delta^4 y_0 + ...\right]. \qquad (5)$$

В той самий спосіб за необхідності можна обчислити і похідні функції $y(x)$ будь-якого порядку.

Зауважимо, що при знаходженні похідних $y'(x)$, $y''(x), \ldots$в фіксованій точці x за x_0 необхідно обирати найближче табличне значення аргументу.

Іноді необхідно знаходити похідні функції y в основних табличних точках x_i. В цьому випадку формули чисельного диференціювання спрощуються. Оскільки кожне табличне значення можна вважати за початкове, то припустимо $x = x_0$, $q = 0$. Тоді отримаємо:

$$P_n'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - ...\right) \qquad (6)$$

і

$$P_n''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + ...\right). \qquad (7)$$

Приклад 1. Обчислити першу та другу похідні функції $y(x) = \sin(x)$ в точці $x = 0{,}2$. Функція задана на відрізку $[0; \frac{\pi}{2}]$ в рівновіддалених вузлах, $n = 4$.

Будемо виконувати всі розрахунки з трьома знаками після коми.

Обчислимо крок розрахунків:

$$h = \frac{\pi / 2 - 0}{4} = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}393.$$

Складемо таблицю значень функції та таблицю кінцевих різностей:

Таблиця 1 – Таблиця значень функції
в рівновіддалених вузлах

i	x_i	$y_i = \sin(x_i)$
0	0	0
1	0,393	0,383
2	0,785	0,707
3	1,178	0,924
4	1,571	1

Таблиця 2 – Таблиця кінцевих різностей

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0,000	0,000	0,383	-0,058	-0,049	0,016
0,393	0,383	0,324	-0,108	-0,033	
0,785	0,707	0,217	-0,141		
1,178	0,924	0,076			
1,571	1,000				

Обчислимо значення q:

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0{,}2 - 0}{0{,}393} = 0{,}509\,.$$

Обчислимо коефіцієнти при $\Delta^k y_0, k = \overline{1,4}$ в формулі (4), результати обчислень занесемо в таблицю:

Таблиця 3 – Коефіцієнти формули Ньютона

Коефіцієнт	Значення
$\dfrac{2q-1}{2}$	0,009
$\dfrac{3q^2-6q+2}{6}$	-0,046
$\dfrac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}$	0,044

За формулою (4) обчислимо значення $y'(0{,}2)$:

$$y'(0{,}2) \approx \frac{1}{0{,}393}\left[0{,}383 + 0{,}009 \cdot (-0{,}058) + (-0{,}046) \cdot (-0{,}049) + \right.$$
$$\left. 0{,}044 \cdot 0{,}016\right] = 0{,}981.$$

Точне значення $y'(0{,}2) = \cos(0{,}2) = 0{,}980$. Похибка обчислень складає:

$$\delta = \left|\frac{0{,}981 - 0{,}980}{0{,}980}\right| \cdot 100\% = 0{,}073\%.$$

Обчислимо другу похідну функції $y''(0{,}2)$.

Значення коефіцієнтів при $\Delta^k y_0, k = \overline{2{,}4}$, необхідні для розрахунку за формулою (5) занесемо в таблицю:

Таблиця 4 – Коефіцієнти формули Ньютона

Коефіцієнт	Значення
$q-1$	-0,491
$\frac{6q^2 - 18q + 11}{12}$	0,282

Тоді за формулою (5) отримаємо:

$$y''(0{,}2) \approx \frac{1}{0{,}393^2}\left[-0{,}058 + 0{,}491 \cdot 0{,}049 + 0{,}282 \cdot 0{,}016\right] = -0{,}191.$$

Точне значення $y''(0{,}2) = -\sin(0{,}2) = -0{,}199$. Похибка обчислень складає:

$$\delta = \left|\frac{-0{,}199 + 0{,}191}{-0{,}199}\right| \cdot 100\% = 4{,}053\%.$$

■

1.2. Друга інтерполяційна формула Ньютона

Використовуючи другу інтерполяційну формулу Ньютона, перша похідна функції може бути обчислена так:

$$P_n'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2}(2q+1) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{6}(3q^2 + 6q + 2) + \ldots\right). \qquad (8)$$

Для диференціювання в вузлових точках формула (8) прийме вид:

$$P_n'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} + \frac{2\Delta^3 y_{n-3}}{3!} + \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4!} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} \right). \tag{9}$$

Другу похідну можна обчислити з виразу

$$P_n''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3}(q+1) + \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{12}(6q^2 + 18q + 1) + \ldots \right). \tag{10}$$

Приклад 2. Обчислити першу та другу похідні функції $y(x) = \sin(x)$ в точці $x = 1{,}4$. Функція задана на відрізку $[0; \frac{\pi}{2}]$ в рівновіддалених вузлах, $n = 4$.

Зауважимо, що крок розрахунків, таблиця значень функції та таблиця кінцевих різностей будуть ті самі, як і обчислені в прикладі 1, але для розрахунків використаємо формули (8) та (10). Обчислення будемо проводити з чотирма знаками після коми. Коефіцієнти при $\Delta^k y_0, k = \overline{1{,}4}$ занесемо в таблицю:

Таблиця 5 – Коефіцієнти другої формули Ньютона

	Коефіцієнт	Значення
	$q = \dfrac{x - x_4}{h}$	-0,4349
для першої похідної	$\dfrac{2q+1}{2}$	0,0651
	$\dfrac{3q^2 + 6q + 2}{6}$	-0,0070
	$\dfrac{2q^3 + 9q^2 + 11q + 3}{12}$	-0,0205
для 2-ї похідної	$q + 1$	0,5651
	$\dfrac{6q^2 - 18q + 11}{12}$	0,3589

Отримаємо:

$$y'(1{,}4) \approx \frac{1}{0{,}3927} \cdot \left(0{,}0761 + \frac{-0{,}1407}{2} \cdot 0{,}0651 + \frac{-0{,}0330}{6} \cdot (-0{,}0070) + \right.$$
$$\left. + \frac{0{,}0164}{12} \cdot (-0{,}0205) \right) = 0{,}1703.$$

Точне значення $y'(1{,}4)=\cos(1{,}4)=0{,}1700$. Похибка обчислень складає:

$$\delta=\left|\frac{0{,}1700-0{,}1703}{0{,}1700}\right|\cdot 100\%=0{,}1757\%.$$

Обчислимо другу похідну функції $y''(1{,}4)$.

$$y''(1{,}4)\approx\frac{1}{0{,}3927^2}\left(-0{,}1407-0{,}0330\cdot 0{,}5651+\frac{0{,}0164}{12}\cdot 0{,}3589\right)=-0{,}9949.$$

Точне значення $y''(1{,}4)=-\sin(1{,}4)=-0{,}9854$. Похибка обчислень складає:

$$\delta=\left|\frac{-0{,}19854+0{,}9949}{-0{,}9854}\right|\cdot 100\%=0{,}9546\%.$$

■

1.3. Формула Ньютона для нерівновіддалених вузлів інтерполяції

Формула Ньютона для не рівновіддалених вузлів інтерполяції має вид:

$$\begin{aligned}P(x)&=y_0+[x_0,x_1](x-x_0)+[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots\\ &\ldots+[x_0,x_1,\ldots x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).\end{aligned}\tag{11}$$

Тут $[x_i,x_{i+1}\ldots x_{i+n}]=\dfrac{[x_{i+1}\ldots x_{i+n}]-[x_i\ldots x_{i+n-1}]}{x_{i+n}-x_i}$ $(n=1,2,\ldots;i=0,1,2\ldots)$, – розподілені різниці n-го порядку

Позначимо,

$$x-x_i=\alpha_i.$$

Диференціюючи обидві частини рівності (11) один раз, отримаємо:

$$\begin{aligned}P'(x)\approx{}&[x_0,x_1]+(\alpha_0+\alpha_1)[x_0,x_1,x_2]+(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)[x_0,x_1,x_2,x_3]+\ldots\\ &+(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}+\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})[x_0,x_1,\ldots,x_n]\end{aligned}\tag{12}$$

Друга похідна функції за формулою Ньютона:

$$\begin{aligned}P''(x)\approx 2\cdot\big(&[x_0,x_1,x_2]+(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)[x_0,x_1,x_2,x_3]+\\ &+(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_0\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]+\ldots\\ &+(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}+\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-4}\alpha_{n-2}+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1})[x_0,x_1,\ldots,x_n]\big)\end{aligned}\tag{13}$$

Для диференціювання в вузлах інтерполювання формули (12) – (13) спрощуються, оскільки при $x = x_i$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ відповідне значення $\alpha_i = 0$. Так, наприклад, для $x = x_0$, маємо:

$$\begin{aligned} P'(x) \approx [x_0, x_1] + \alpha_1 [x_0, x_1, x_2] + \alpha_1\alpha_2 [x_0, x_1, x_2, x_3] + \ldots \\ + \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} [x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned} \qquad (14)$$

$$\begin{aligned} P''(x) \approx 2 \cdot \big([x_0, x_1, x_2] + (\alpha_0 + \alpha_2)[x_0, x_1, x_2, x_3] + \\ + (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_0\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] + \ldots \\ + (\alpha_0\alpha_2 \ldots \alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{n-1})[x_0, x_1, \ldots, x_n] \big) \end{aligned} \qquad (15)$$

Приклад 3. Знайти першу та другу похідні функції $y(x) = \sin(x)$ в точці $x = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}393$, якщо функція задана таблицею:

Таблиця 6 – Таблиця значень функції в нерівновіддалених вузлах

№	x	$y(x)$
0	0	0
1	0,628	0,588
2	0,785	0,707
3	1,047	0,866
4	1,571	1

Складемо таблицю розподілених різностей:

x	$y(x)$				
0	0	$[x_i, x_{i+1}]$			
		0,935	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$		
0,628	0,588		-0,224	$[x_i, \ldots, x_{i+3}]$	
		0,760		-0,134	$[x_i, \ldots, x_{i+4}]$
0,785	0,707		-0,364		0,029
		0,607		-0,088	
1,047	0,866		-0,447		
		0,256			
1,571	1				

Обчислимо першу та другу похідні функції $y(x)$.

Знайдемо $\alpha_i, i=\overline{0,4}$:

x_i	0	0,628	0,785	1,047	1,571
$\alpha_i = x - x_i$	0,393	-0,236	-0,393	-0,654	-1,178

Оскільки

$$\begin{aligned}P'(x) = [x_0,x_1] + (\alpha_0+\alpha_1)[x_0,x_1,x_2] + (\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)[x_0,x_1,x_2,x_3] + \\ +(\alpha_0\alpha_1\alpha_2+\alpha_0\alpha_1\alpha_3+\alpha_0\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3)[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]\end{aligned},$$

отже,

$$P'(0{,}393) = 0{,}925.$$

Точне значення $y'(x)=\cos(x)=0{,}924$. При цьому похибка складає

$$\delta = \left|\frac{0{,}925-0{,}924}{0{,}924}\right|\cdot 100\% = 0{,}124\%.$$

Для другої похідної

$$\begin{aligned}P''(x) = 2\cdot\big([x_0,x_1,x_2] + (\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)[x_0,x_1,x_2,x_3] + \\ +(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_0\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]\big)\end{aligned}$$

Відповідне значення

$$P''(0{,}393) = -0{,}385.$$

Точне значення $y''(x) = -\sin(x) = -0{,}383$. Похибка складає

$$\delta = \left|\frac{-0{,}385+0{,}383}{-0{,}383}\right|\cdot 100\% = 0{,}517\%.$$

Обчислимо за допомогою формули Ньютона для нерівновіддалених вузлів значення першої та другої похідної в вузлі $x = x_1 = \dfrac{\pi}{5} \approx 0{,}628$. В цьому випадку $\alpha_1 = 0$ і формули для обчислення похідних спрощуються:

$$P'(x) = [x_0,x_1] + \alpha_0[x_0,x_1,x_2] + \alpha_0\alpha_2[x_0,x_1,x_2,x_3] + \alpha_0\alpha_2\alpha_3[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4],$$

$$P''(x) = 2\big([x_0,x_1,x_2] + (\alpha_0+\alpha_2)[x_0,x_1,x_2,x_3] + (\alpha_0\alpha_2+\alpha_0\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]\big).$$

Тут $\alpha_i = x_1 - x_i, i=\overline{0,4}$.

x_i	0	0,628	0,785	1,047	1,571
$\alpha_i = x_1 - x_i$	0,628	0	-0,157	-0,419	-0,942

Звідки отримаємо

$$P'(0{,}628) = 0{,}8092.$$

Точне значення і похибка:

$$y'(0{,}628) = 0{,}8090, \ \delta = \left|\frac{0{,}8092 - 0{,}8090}{0{,}8090}\right| \cdot 100\% = 0{,}0282\%.$$

Друга похідна в вузлі:

$$P''(0{,}628) = -0{,}5916.$$

Точне значення і похибка:

$$y''(0{,}628) = -0{,}5878, \ \delta = \left|\frac{-0{,}5916 + 0{,}5878}{-0{,}5878}\right| \cdot 100\% = 0{,}6501\%.$$

■

2. ФОРМУЛА НАБЛИЖЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ, ЗАСНОВАНА НА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОМУ ПОЛІНОМІ ЛАГРАНЖА

Нехай маємо функцію $y(x)$, яка задана в рівновіддалених точках $x_i\,(i = 0,1,2,...,n)$ відрізка $[a,b]$ значеннями $y_i = f(x_i)$. Для пошуку на $[a,b]$ похідних $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ і т.д. функцію y наближено замінимо інтерполяційним поліномом Лагранжа.

2.1 Випадок рівновіддалених вузлів

Припустимо, що $n = 2$, тобто маємо систему вузлів x_0, x_1, x_2. Причому $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h = const$.

Отримаємо:

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 =$$
$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}y_2$$

$$y(x) = \frac{1}{2h^2}\left[(x-x_1)(x-x_2)y_0 - 2(x-x_0)(x-x_2)y_1 + (x-x_0)(x-x_1)y_2\right].$$

Тоді

$$y'(x) = \frac{1}{2h^2}\left[\left[(x-x_1)+(x-x_2)\right]y_0 - 2\left[(x-x_0)+(x-x_2)\right]y_1 + \right.$$
$$\left. + \left[(x-x_0)+(x-x_1)\right]y_2\right], \tag{16}$$

$$y''(x) = \frac{1}{2h^2}\left[2\cdot y_0 - 2\cdot 2\cdot y_1 + 2\cdot y_2\right] = \frac{1}{h^2}\left[y_0 - 2y_1 + y_2\right]. \tag{17}$$

В випадку $n = 4$ і системи 5 рівновіддалених вузлів x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 ($h = const$) отримаємо таку формулу для обчислення першої та другої похідної. Позначимо $\alpha_i = x - x_i$, $i = \overline{0,4}$, тоді

$$L_4(x) = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{24h^4}y_0 + \frac{\alpha_0\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{-6h^4}y_1 + \frac{\alpha_0\alpha_1\alpha_3\alpha_4}{4h^4}y_2 + \frac{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_4}{-6h^4}y_3 + \\ + \frac{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{24h^4}y_4,$$

або

$$L_4(x) = \frac{1}{24h^4}\cdot\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 y_0 - 4\alpha_0\alpha_2\alpha_3\alpha_4 y_1 + 6\alpha_0\alpha_1\alpha_3\alpha_4 y_2 - 4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_4 y_3 + \\ + \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 y_4\right). \qquad (18)$$

Диференціюючи (18) один раз, отримаємо:

$$L_4'(x) = \frac{1}{24h^4}\cdot\left((\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)y_0 - \\ -4(\alpha_0\alpha_2\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2\alpha_4 + \alpha_0\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)y_1 + \ldots + \\ +(\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3)y_4\right). \qquad (19)$$

Перегрупуємо доданки в (19):

$$L_4'(x) = \frac{1}{24h^4}\cdot\left(\alpha_0\alpha_1\alpha_2(-4y_3 + y_4) + \alpha_0\alpha_1\alpha_3(6y_2 + y_4) + \alpha_0\alpha_1\alpha_4(6y_2 - 4y_3) + \\ + \alpha_0\alpha_2\alpha_3(y_4 - 4y_1) + \alpha_0\alpha_2\alpha_4(-4y_1 - 4y_3) + \alpha_0\alpha_3\alpha_4(6y_2 - 4y_1) + \alpha_1\alpha_2\alpha_3(y_0 + y_4) + \\ + \alpha_1\alpha_2\alpha_4(y_0 - 4y_3) + \alpha_1\alpha_3\alpha_4(y_0 + 6y_2) + \alpha_2\alpha_3\alpha_4(y_0 - 4y_1)\right). \qquad (20)$$

Друга похідна обчислюється за формулою:

$$L_4''(x) = \frac{1}{12h^4}\cdot\left(\alpha_0\alpha_1(6y_2 - 4y_3 + y_4) + \alpha_0\alpha_2(-4y_1 - 4y_3 + y_4) + \\ + \alpha_0\alpha_3(-4y_1 + 6y_2 + y_4) + \alpha_0\alpha_4(-4y_1 + 6y_2 - 4y_3) + \alpha_1\alpha_2(y_0 - 4y_3 + y_4) + \\ + \alpha_1\alpha_3(y_0 + 6y_2 + y_4) + \alpha_1\alpha_4(y_0 + 6y_2 - 4y_3) + \alpha_2\alpha_3(y_0 - 4y_1 + y_4) + \\ + \alpha_2\alpha_4(y_0 - 4y_1 - 4y_3) + \alpha_3\alpha_4(y_0 - 4y_1 + 6y_2)\right) \qquad (21)$$

Приклад 4. Знайти $y'(0{,}2)$ та $y''(0{,}2)$ для функції $y(x) = \sin(x)$ (див. табл. 1).

Розрахунки будемо проводити з трьома знаками після коми.

Результати проміжних обчислень першої похідної занесемо в таблицю:

Таблиця 7 – Обчислення першої похідної за формулою Лагранжа

		значення y_i		0,000	0,383	0,707	0,924	1,000		
i	α_i	індекси i, j, k	I	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	II	$\mathrm{I} \cdot \mathrm{II}$
			$\alpha_i \alpha_j \alpha_k$	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	$\sum_{i=0}^{4} \gamma_i \cdot y_i$	
0	0,200	012	0,023	0	0	0	-4	1	-2,696	-0,061
1	-0,193	013	0,038	0	0	6	0	1	5,243	0,198
2	-0,585	014	0,053	0	0	6	-4	0	0,547	0,029
3	-0,978	023	0,115	0	-4	0	0	1	-0,531	-0,061
4	-1,371	024	0,160	0	-4	0	-4	0	-5,226	-0,839
		034	0,268	0	-4	6	0	0	2,712	0,727
		123	-0,110	1	0	0	0	1	1,000	-0,110
		124	-0,155	1	0	0	-4	0	-3,696	0,571
		134	-0,258	1	0	6	0	0	4,243	-1,096
		234	-0,785	1	-4	0	0	0	-1,531	1,201

Суму елементів останнього стовпчика поділимо на $24h^4$, отримаємо:

$$y'(0{,}2) \approx \frac{0{,}560}{24 \cdot 0{,}393^4} = 0{,}981.$$

Похибка обчислень (точне значення похідної було знайдено в п. 1.1):

$$\delta = \left| \frac{0{,}981 - 0{,}980}{0{,}980} \right| \cdot 100\% = 0{,}073\%.$$

Так само складемо таблицю проміжних розрахунків для обчислення другої похідної (табл. 8).

Суму елементів останнього стовпчика поділимо на $12h^4$, отримаємо:

$$y''(0{,}2) \approx \frac{-0{,}054}{12 \cdot 0{,}393^4} = -0{,}191.$$

Похибка обчислень (точне значення похідної було знайдено в п. 1.1):

$$\delta = \left| \frac{-0{,}199 + 0{,}191}{-0{,}199} \right| \cdot 100\% = 4{,}053\%.$$

Таблиця 8 – Обчислення другої похідної за формулою Лагранжа

значення y_i		0,053	0,115	0,160	0,268	-0,110		
індекси i, j	I $\alpha_i \alpha_j$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	II $\sum_{i=0}^{4} \gamma_i \cdot y_i$	$\mathrm{I} \cdot \mathrm{II}$
		γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4		
01	-0,039	0	0	6	-4	1	1,547	-0,060
02	-0,117	0	-4	0	-4	1	-4,226	0,495
03	-0,196	0	-4	6	0	1	3,712	-0,726
04	-0,274	0	-4	6	-4	0	-0,984	0,270
12	0,113	1	0	0	-4	1	-2,696	-0,304
13	0,188	1	0	6	0	1	5,243	0,988
14	0,264	1	0	6	-4	0	0,547	0,145
23	0,573	1	-4	0	0	1	-0,531	-0,304
24	0,802	1	-4	0	-4	0	-5,226	-4,194
34	1,341	1	-4	6	0	0	2,712	3,636

Зауважимо, що простіше знайти емпіричну формулу – інтерполяційний поліном, і тоді знаходити похідні вихідної функції як похідні цього поліному.

В випадку функції $y(x)$ з таблиці 1, маємо таку емпіричну формулу:

$$L_4(x) = 0{,}029x^4 - 0{,}204x^3 + 0{,}020x^2 + 0{,}996x,$$

тоді

$$L_4'(x) = 0{,}115x^3 - 0{,}611x^2 + 0{,}040x + 0{,}996,\ L_4'(0{,}2) = 0{,}981,$$

$$L_4''(x) = 0{,}345x^2 - 1{,}222x + 0{,}040,\ L_4''(0{,}2) = -0{,}191.$$

Тобто були отримані ті самі значення похідних, що і при розрахунках за формулами (20) та (21), а отже, ті самі значення похибок.

■

2.2 Випадок нерівновіддалених вузлів

Позначимо через β_i – знаменник i-го доданку в інтерполяційній формулі Лагранжа:

$$\beta_i = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n),\ i = \overline{0,n}.$$

Очевидно, що $\beta_i = const,\ i = \overline{0,n}$. Нехай $\alpha_i = x - x_i,\ i = \overline{0,n}$. Розглянемо випадок системи 5 вузлів, $n = 4$, тоді

$$L_4(x)=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\frac{y_0}{\beta_0}+\alpha_0\alpha_2\alpha_3\alpha_4\frac{y_1}{\beta_1}+\alpha_0\alpha_1\alpha_3\alpha_4\frac{y_2}{\beta_2}+\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_4\frac{y_3}{\beta_3}+$$
$$+\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\frac{y_4}{\beta_4}. \tag{22}$$

Диференціюючи (22) один раз, та перегруповуючи доданки, отримаємо:

$$L_4'(x)=\alpha_0\alpha_1\alpha_2\left(\frac{y_3}{\beta_3}+\frac{y_4}{\beta_4}\right)+\alpha_0\alpha_1\alpha_3\left(\frac{y_2}{\beta_2}+\frac{y_4}{\beta_4}\right)+\alpha_0\alpha_1\alpha_4\left(\frac{y_2}{\beta_2}+\frac{y_3}{\beta_3}\right)+$$
$$+\alpha_0\alpha_2\alpha_3\left(\frac{y_1}{\beta_1}+\frac{y_4}{\beta_4}\right)+\alpha_0\alpha_2\alpha_4\left(\frac{y_1}{\beta_1}+\frac{y_3}{\beta_3}\right)+\alpha_0\alpha_3\alpha_4\left(\frac{y_1}{\beta_1}+\frac{y_2}{\beta_2}\right)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\left(\frac{y_0}{\beta_0}+\frac{y_4}{\beta_4}\right)+$$
$$+\alpha_1\alpha_2\alpha_4\left(\frac{y_0}{\beta_0}+\frac{y_3}{\beta_3}\right)+\alpha_1\alpha_3\alpha_4\left(\frac{y_0}{\beta_0}+\frac{y_2}{\beta_2}\right)+\alpha_2\alpha_3\alpha_4\left(\frac{y_0}{\beta_0}+\frac{y_1}{\beta_1}\right). \tag{23}$$

Друга похідна обчислюється за формулою:

$$L_4''(x)=2\cdot\Bigg(\alpha_0\alpha_1\left(\frac{y_2}{\beta_2}+\frac{y_3}{\beta_3}+\frac{y_4}{\beta_4}\right)+\alpha_0\alpha_2\left(\frac{y_1}{\beta_1}+\frac{y_3}{\beta_3}+\frac{y_4}{\beta_4}\right)+$$
$$+\alpha_0\alpha_3\left(\frac{y_1}{\beta_1}+\frac{y_2}{\beta_2}+\frac{y_4}{\beta_4}\right)+\alpha_0\alpha_4\left(\frac{y_1}{\beta_1}+\frac{y_2}{\beta_2}+\frac{y_3}{\beta_3}\right)+\alpha_1\alpha_2\left(\frac{y_0}{\beta_0}+\frac{y_3}{\beta_3}+\frac{y_4}{\beta_4}\right)+$$
$$+\alpha_1\alpha_3\left(\frac{y_0}{\beta_0}+\frac{y_2}{\beta_2}+\frac{y_4}{\beta_4}\right)+\alpha_1\alpha_4\left(\frac{y_0}{\beta_0}+\frac{y_2}{\beta_2}+\frac{y_3}{\beta_3}\right)+\alpha_2\alpha_3\left(\frac{y_0}{\beta_0}+\frac{y_1}{\beta_1}+\frac{y_4}{\beta_4}\right)+ \tag{24}$$
$$+\alpha_2\alpha_4\left(\frac{y_0}{\beta_0}+\frac{y_1}{\beta_1}+\frac{y_3}{\beta_3}\right)+\alpha_3\alpha_4\left(\frac{y_0}{\beta_0}+\frac{y_1}{\beta_1}+\frac{y_2}{\beta_2}\right)\Bigg)$$

Приклад 5. Знайдемо першу та другу похідні функції $y(x)=\sin(x)$, що задана табл. 6.

Будемо проводити обчислення з чотирма знаками після коми. Результати проміжних розрахунків за формулою (23) занесемо в таблицю 9.

Таблиця 9 – Обчислення першої похідної за формулою Лагранжа

i	α_i	β_i	y_i/β_i	індекси i, j, k	I $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$	II $y_l/\beta_l + y_m/\beta_m$	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}$
0	0,3927	0,8117	0,0000	012	0,0363	-12,7602	-0,4636
1	-0,2356	-0,0390	-15,0855	013	0,0606	29,5177	1,7876
2	-0,3927	0,0254	27,8751	014	0,1090	13,4723	1,4686
3	-0,6545	-0,0601	-14,4028	023	0,1009	-13,4429	-1,3568
4	-1,1781	0,6088	1,6426	024	0,1817	-29,4883	-5,3573
				034	0,3028	12,7896	3,8726
				123	-0,0606	1,6426	-0,0995
				124	-0,1090	-14,4028	1,5700
				134	-0,1817	27,8751	-5,0643
				234	-0,3028	-15,0855	4,5678

Знайдемо суму елементів останнього стовпчика, це буде значення першої похідної:

$$y'(0{,}3927) = 0{,}9250\,.$$

Похибка обчислень (точне значення похідної було знайдено в п. 1.3):

$$\delta = \left|\frac{0{,}9250 - 0{,}9239}{0{,}9239}\right| \cdot 100\% = 0{,}1244\%\,.$$

За формулою (24) розрахуємо значення другої похідної. Таблиця 10 містить проміжні результати.

Таблиця 10 – Обчислення другої похідної за формулою Лагранжа

індекси i, j	I $\alpha_i\alpha_j$	II $\sum_{l=1,\ l\neq i, l\neq j}^{5} y_l/\beta_l$	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}$
01	-0,0925	15,1149	-1,3985
02	-0,1542	-27,8457	4,2942
03	-0,2570	14,4322	-3,7094
04	-0,4626	-1,6131	0,7463
12	0,0925	-12,7602	-1,1807
13	0,1542	29,5177	4,5520
14	0,2776	13,4723	3,7397
23	0,2570	-13,4429	-3,4551
24	0,4626	-29,4883	-13,6424
34	0,7711	12,7896	9,8616

Подвоєна сума елементів останнього стовпчика буде значенням другої похідної:

$$y''(0{,}3927) = 2 \cdot (-0{,}1923) = -0{,}3847\,.$$

Похибка обчислень (точне значення похідної було знайдено в п. 1.3):

$$\delta = \left|\frac{0{,}3847 - 0{,}3827}{0{,}3827}\right| \cdot 100\% = 0{,}5169\%\,.$$

Зауважимо, що так само, як і в прикладі 4, простіше знайти інтерполяційний поліном для заданої функції, а тоді знаходити її похідні як похідні цього поліному.

В випадку функції $y(x)$ з таблиці 6, маємо таку емпіричну формулу:

$$L_4(x) = 0{,}0294x^4 - 0{,}2065x^3 + 0{,}0237x^2 + 0{,}9948x\,,$$

тоді

$$L_4'(x) = 0{,}1177x^3 - 0{,}6194x^2 + 0{,}0474x + 0{,}9948\,,\; L_4'(0{,}3927) = 0{,}9250\,,$$

$$L_4''(x) = 0{,}3530x^2 - 1{,}2388x + 0{,}0474\,,\; L_4''(0{,}3927) = -0{,}3847\,.$$

Тобто були отримані ті самі значення похідних, що і при розрахунках за формулами (23) та (24), а отже, ті самі значення похибок.

■

ЗАВДАННЯ

1) Скласти таблицю значень функції, наведеної в таблиці 11, розбивши заданий інтервал на 5 відрізків з $h = \text{const}$.

2) За допомогою інтерполяційних формул Ньютона та Лагранжа для рівновіддалених вузлів знайти значення першої та другої похідної в вузлах $x = x_0$ та $x = x_4$.

3) Скласти таблицю значень функції, розбивши заданий інтервал на 10 відрізків. З отриманої таблиці взяти значення $x_0, x_2, x_5, x_7, x_{10}$ і скласти нову таблицю значень функції.

4) За допомогою інтерполяційних формул Ньютона та Лагранжа для нерівновіддалених вузлів знайти значення першої та другої похідної в вузлах $x = x_0$ та $x = x_4$.

5) Обчислити похибку розрахунків.

Таблиця 11 – Варіанти завдань

№	Функція	Заданий інтервал	Формула
1	$\sin\sqrt{x}$	0;1	Ньютон І Ньютон нерівн.
2	e^{-2x}	0;10	Ньютон ІІ Ньютон нерівн.
3	$\cos(x^2)$	0;0,5	Лагранж рівн. Ньютон нерівн.
4	$\mathrm{tg}(x^3)$	0;05	Ньютон І Лагранж нерівн.
5	$\mathrm{arctg}(1/x)$	1;11	Ньютон ІІ Лагранж нерівн.
6	$\ln(\sin(x))$	$\pi/4;3\pi/4$	Лагранж рівн. Лагранж нерівн.
7	$\cos(e^x)$	1;2	Ньютон І Ньютон нерівн.
8	$\mathrm{tg}(\sqrt{x})$	0;2	Ньютон ІІ Ньютон нерівн.
9	$e^{\sin(x)}$	0;1	Лагранж рівн. Ньютон нерівн.
10	$\sin(\ln(x))$	0,1;1,1	Ньютон І Лагранж нерівн.

№	Функція	Заданий інтервал	Формула
11	$\cos(\sqrt{x})$	0;2	Ньютон II Лагранж нерівн.
12	$\sin(x^2)$	0;1	Лагранж рівн. Лагранж нерівн.
13	$\ln(1/x)$	1;2	Ньютон I Ньютон нерівн.
14	$\sin(1/x)$	$\pi/4;5\pi/4$	Ньютон II Ньютон нерівн.
15	$\arcsin(\sqrt{x})$	0;0,5	Лагранж рівн. Ньютон нерівн.
16	$\mathrm{tg}(x^2)$	0;1	Ньютон I Лагранж нерівн.
17	$\sqrt{\cos(x)}$	$0;\pi/2$	Ньютон II Лагранж нерівн.
18	$\sqrt{e^x}$	0;5	Лагранж рівн. Лагранж нерівн.
19	$\sqrt{\arcsin(x)}$	0;0,5	Ньютон I Ньютон нерівн.
20	$\cos(x^3)$	0;1	Ньютон II Ньютон нерівн.
21	$\arcsin(x^2)$	0;0,5	Лагранж рівн. Ньютон нерівн.
22	$(\arccos(x))^2$	0;0,5	Ньютон I Лагранж нерівн.
23	$e^{\sqrt{x}}$	0;5	Ньютон II Лагранж нерівн.
24	$\sin(e^x)$	0;0,2	Лагранж рівн. Лагранж нерівн.
25	$(\ln(x))^2$	1;2	Ньютон I Ньютон нерівн.
26	$\sqrt{x}\cos(x^2)$	0.4;1.4	Ньютон II Ньютон нерівн.
27	$\dfrac{\cos x}{x+2}$	0;1	Лагранж рівн. Ньютон нерівн.
28	$\dfrac{\sin x}{x+1}$	0.1;1.1	Ньютон I Лагранж нерівн.
29	$(x^2+1)\sin x$	1;2	Ньютон II Лагранж нерівн.
30	$\lg(x^2+3)$	0;1	Лагранж рівн. Лагранж нерівн.

ЛІТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664с.

2. Копчёнова Н.В., Марон И.В. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 512с.

3. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. – М.: Высш. шк.,1990 – 544с.

4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том I – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1962. – 464с.