УДК 51

Мироненко Л.П., Прокопенко Н.А.
Донецкий национальный технический университет,
кафедра высшей математики им. В.В.Пака

Интегральная форма теоремы Лагранжа и ее применение к определенному интегралу

Анотація

Сформульовано інтегральний аналог теореми Лагранжа. За допомогою цієї теореми отримані важливі слідства інтегрального числення, саме перша і друга теореми про середнє. Інтегральна теорема Лагранжа може бути використана для означення визначеного інтеграла Римана, а також ввести формулу Ньютона-Лейбниця. Підхід значно спрощує доведення властивостей визначеного інтеграла.

Ключевые слова: интеграл, теорема, определенный интеграл, среднее значение, интеграл Римана, свойства.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, теорема Лагранжа или, как ее еще называют, формула конечных приращений Лагранжа относится к так называемым теоремам о среднем в математическом анализе, широко используется в дифференциальном исчислении для доказательства ряда математических положений [1-3]. Если говорить не о математическом содержании теоремы, а о ее «идеологическом» смысле, то она устанавливает связь между производной функции (т.е. предельному переходу отношения бесконечно малых) и конечными приращениями аргумента и функции. Проще говоря, она устанавливает переход от конечных величин к бесконечно малым. Этот феномен позволяет легко переходить от элементарной математики к математическому анализу и наоборот, что, в свою очередь, позволяет легко выводить и доказывать ряд математических положений. Например, используя теорему Лагранжа, легко выводится правило Лопиталя, устанавливается остаточный член формулы Тейлора, равенство смешанных вторых производных функции двух переменных и др.

Вводя интегральный аналог теоремы Лагранжа можно вывести и доказать ряд фундаментальных положений, таких как формулу Ньютона-Лейбница (основная формула интегрального исчисления), доказать теоремы о среднем в интегральном исчислении, доказать ряд свойств определенного интеграла, не прибегая к понятию интегральной суммы.

1. Интегральная формула Лагранжа и ее геометрический смысл

Напомним содержание теоремы Лагранжа. Если функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b), то существует точка $\xi \in (a,b)$, такая, что имеет место формула

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) \quad . \tag{1}$$

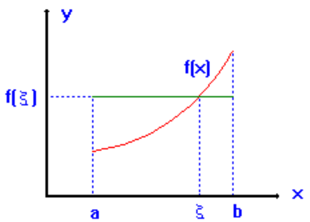
Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то учитывая формулу Ньютона-Лейбница $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ и $F'(\xi) = f(\xi)$,

получим формулу

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),. \tag{2}$$

которую можно рассматривать как интегральный аналог формулы Лагранжа (1).

Геометрический смысл формулы для неотрицательной функции $f(x)$ означает, что всегда найдется такая точка $\xi \in (a,b)$, что площадь криволинейной трапеции, выражаемой величиной интеграла, равна площади прямоугольника основанием $(b-a)$ и высотой $f(\xi)$. Это утверждение хорошо известно в анализе как частный случай первой теорема о среднем [1-3].

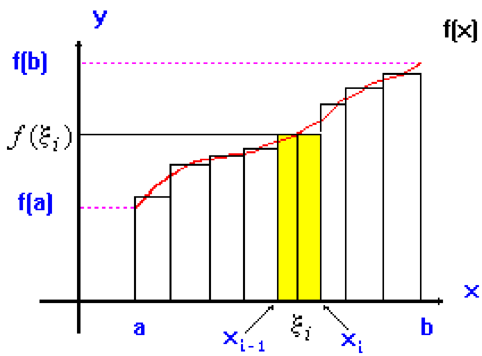


$$S_{трап.} = \int_a^b f(x)dx$$

$$S_{прям.} = f(\xi)(b-a).$$

2. Формула Ньютона-Лейбница.

Рассмотрим кратко процедуру определения определенного интеграла Римана от функции $f(x)$, определенной на произвольном отрезке $[a,b]$.. Произведем τ-разбиение отрезка $[a,b]$ точками $x_i, i = 0,1,...,n$, расположив их на отрезке так $a = x_o < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Обозначим длину каждого из отрезков разбиения $\Delta x_j = x_j - x_{j-1} > 0$, $j = 1,2,...,n$,а $|\tau| = \max \Delta x_j$ - наибольший



по длине из отрезков Δx_j ..Выберем на каждом из отрезков разбиения Δx_j произвольно точку ξ_j, вычислим значения функции $f(\xi_j)$ и построим интегральную сумму Римана $\sigma_\tau = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$. (3)

Если существует конечный предел интегральной суммы $\sigma = \lim_{n\to\infty,|\tau|\to 0} \sigma_\tau$, то этот предел называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Если $f(x) > 0$, то геометрически каждое слагаемое суммы (1) равно площади прямоугольника с основанием длины Δx_j и высотой $f(\xi_j)$. Вся же сумма σ_τ равна площади ступенчатой фигуры, полученной объединением всех этих прямоугольников. Особенностью определения интеграла Римана является произвольный выбор точек $\xi_j \in [x_{i-1}, x_i]$. Применим формулу Лагранжа к первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]: F(b) - F(a) = \dot{F}'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$

Произведем τ-разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = x_o < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ и применим формулу Лагранжа к каждому частичному отрезку

$$F(x_1) - F(x_o) = f'(\mu_1)(x_1 - x_o) = f'(\mu_1)\Delta x_1,$$
$$F(x_2) - F(x_1) = f'(\mu_2)\Delta x_2,$$
$$\dots$$
$$F(x_n) - F(x_{n-1}) = f'(\mu_n)\Delta x_{n\cdot 1},$$

Складываем равенства почленно, учтем, что $x_o = a, x_n = b$, получим

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} f(\mu_j)\Delta x_j. \qquad (4)$$

Справа интегральная сумма функции на отрезке. Перейдем формально к пределу в обеих частях равенства при $n \to \infty$ и $|\tau| \to 0$, получим формулу

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),. \qquad (5)$$

которая является *основной формулой интегрального исчисления* и называется ***формулой Ньютона-Лейбница.***

3. Свойства определенного интеграла

Свойства определенного интеграла следует из свойств сумм, но в некоторых случаях удобно привлечь формулу Ньютона-Лейбница.

1. $\int\limits_a^b dx = b - a$. Интегральная сумма $\forall\tau$ -разбиения отрезка $[a,b]$ равна

$\sigma_\tau = \sum\limits_{j=1}^{n} \Delta x_j = b - a \Rightarrow \lim \sigma_\tau = b - a$.С использованием формулы Ньютона-Лейбница выводится совсем просто $\int\limits_a^b dx = x\Big|_a^b = b - a$.

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

По формуле Ньютона-Лейбница интеграл равен $F(a) - F(a) = 0$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

4. $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]dx = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) =$$

$$= F(b) - F(a) + (G(b) - G(a) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

5. $\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$ $, c = const.$

$$\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c\int\limits_a^b f(x)dx.$$

6. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,\ c \in (a,b)$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(c)-F(a)+F(b)-F(c) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Замечание. Из способа доказательства следует, что равенство остается справедливым при $c \notin [a,b]$.

7. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Из неравенства $f(x) = F'(x) \geq 0$ следует, что функция $F(x)$ не убывает на отрезке $[a,b]$, следовательно, $F(b) \geq F(a)$ и $F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx \geq 0$..

8.. Свойства интегралов от четных и нечетных функций по симметричным пределам

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, \text{ если } & f(-x) = f(x), \\ 0, \quad \text{если} & f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = F(a)-F(-a) =$$

$$= \begin{cases} 2F(a) - 2\int_0^a f(x)dx, \text{ если } & F(-x) = -F(x) \Rightarrow f(-x) = f(x), \\ 0, \quad \text{если} & F(-x) = F(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

Здесь использовано свойство симметрии операций дифференцирования и интегрирования от четных и нечетных функций: если функция $f(x)$ четная, то функция $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ нечетная, и наоборот, если функция $f(x)$ нечетная , то функция $f'(x)$ четная.

9. З**аменой переменной.** Пусть:

1) функция $f(x)$ *непрерывная на* $\Delta_x = (a,b)$ *;*

2) $\varphi(t)$ непрерывно-дифференцируемая на $\Delta_t = (\alpha,\beta)$;

3) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$. Тогда имеет место подстановка

$$\int_a^b f(x)dx_{|x=\varphi(t)} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (6)$$

$$\int_a^b f(x)dx_{|x=\varphi(t)} = F(b)-F(a) = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

4. Теоремы о среднем

В наиболее общем виде первая теорема о среднем формулируется так.
Первая теорема о среднем. Пусть: функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$; а функция $g(x)$ имеет первообразную $G(x)$ и не меняет знак на $[a,b]$. Тогда $\exists\xi\in(a,b)$, такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \qquad (7)$$

В случае только интегрируемости функции $f(x)$ $\exists\mu, m\le f(x)\le M$, что в теореме $f(\xi)=\mu$.

Следствие. При $g(x)=1$ на $[a,b]$: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Применим интегральную теорему Лагранжа к функции $f(x)$, переписав ее в виде $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\int_a^b dx$. Произведем замену интегральной меры $dx\to dG(x)$, получим

$$\int_a^b f(x)dG(x) = f(\xi)\cdot\int_a^b dG(x) = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

Учитывая, что $dG(x)=G'(x)dx=g(x)dx$, окончательно имеем (7).

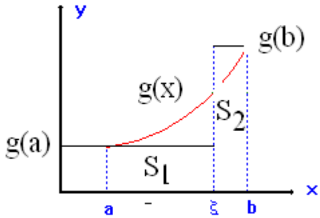
Замечание. Условие теоремы о знакопостоянстве функции $g(x)$ требуется для того, чтобы интегральная мера была неотрицательной $dG(x)\ge 0 \Rightarrow g(x)dx\ge 0$.

Вторая теорема о среднем. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$; а функция $g(x)$ монотонная и непрерывно-дифференцируемая на $[a,b]$. Тогда $\exists\xi\in[a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx. \qquad (8)$$

Доказательство. При $f(x)=1$ формула очевидна из геометрических соображений и монотонности функции $g(x)$.

$$\int_a^b g(x)dx = g(a)(\xi - a) + g(b)(b-\xi)$$



В силу свойств функции $g(x)$ найдется точка $\exists \xi \in [a,b]$, что

$$\int_a^b g(x)dx = S_1 + S_2.$$

Перепишем равенство в виде $\int_a^b g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} dx + g(b)\int_{\xi}^b dx,$ и обобщим его для интегральной меры $dF(x) = f(x)dx$

$$\int_a^b g(x)dF(x) = g(a)\int_a^{\xi} dF(x) + g(b)\int_{\xi}^b dF(x),$$

откуда следует теорема.

Замечание. Теорема остается справедливой при более слабых ограничениях - интегрируемости $f(x)$ и монотонности $g(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном процессе формула Ньютона-Лейбница вводится, как правило, на базе интеграла с переменным верхним пределом, при этом, уже требуется использовать свойства определенного интеграла. Последнее означает, что свойства интегралов должны быть сформулированными и доказанными. Доказательства проводятся на основе свойств конечных сумм и свойств пределов и носят достаточно простой характер. Однако во многих случаях предпочтительнее проводить доказательства на основе формулы Ньютона-

Лейбница.

Нами предлагается ввести формулу Ньютона-Лейбница сразу после определения определенного интеграла на основе интегральной формулы Лагранжа, которая не требует использования свойств интегралов. После этого формулировка свойств интегралов, точнее их доказательство не вызывает затруднений, поскольку проводится на базе формулы Ньютона-Лейбница.

Преимуществом подхода также является доказательства интегральных теорем о средних, поскольку первая теорема о среднем в усеченном виде (т.е. только для одной функции) совпадает с интегральной формулой Лагранжа.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Том I., Наука,1970 - 571 с.
2. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа, том 1, Изд. ФМЛ, Москва, 1956. -472 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2, Наука, «ФМЛ», 1972 - 795 с.
4. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра, Изд. Наука, «Физматлит», Москва, 1999. -296 с.