УДК 51

ПелашенкоА.В.
Донецкий национальный университет,
кафедра высшей математики.
Прокопенко Н.А.
Донецкий национальный технический университет,
кафедра высшей математики им. В.В.Пака.

Анализ чувствительности задач линейного программирования

Анотація

Сформульовано економічне завдання: завдання лінійного програмування. Складена математична модель. Знайдено не лише її рішення за допомогою пакету спеціальних програм: надбудови «Пошук вирішення» офісного додатка Microsoft Excel і WINQSB, але і ряд додаткових показників: аналіз чутливості рішення.

Ключевые слова: задача линейного программирования, математическая модель, симплекс-метод, анализ чувствительности.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время вопрос оптимизации становится особенно актуальным в науке, экономике и других областях человеческой деятельности. Линейное программирование является одним из наиболее часто используемых аппаратов математической теории оптимального принятия решения. По оценкам американских экспертов, около 75% общего числа оптимизационных методов, применяемых в экономике, приходится именно на линейное программирование. Поэтому важно научить студентов экономических специальностей использовать аппарат математического программирования для решения экономических задач.

Практическое использование методов оптимизации требует огромной вычислительной работы, которую трудно, а в ряде случаев невозможно реализовать без использования вычислительной техники. Для решения задач линейного программирования разработано сложное программное обеспечение, дающее возможность эффективно и надежно решать практические задачи больших объемов. Эти программы и системы снабжены развитыми системами подготовки исходных данных, средствами их анализа и представления полученных результатов. Поэтому при изложении курсов «Математическое программирование», «Математические методы исследования операций» и «Экономико-математическое моделирование» студентам экономических специальностей целесообразно акцентировать внимание не на самом методе получения решения (в частности, симплекс-методе), а на его экономическом анализе и анализе чувствительности.

Для решения задач линейного программирования симплекс методом можно использовать надстройку «Поиск решения» офисного приложения Microsoft Excel. Существуют также специальные программы, например WinQSB, которые позволяют получить не только непосредственно решение задачи, но и ряд дополнительных показателей, позволяющих провести более полный экономический анализ решения.Продемонстрируем это на примере экономической задачи, для которой необходимо составить математическую модель, найти ее решение и провести анализ чувствительности решения.

Задание. Предприятие производит три вида продукции, используя ресурсы *R1, R2, R3*. Нормы расхода ресурсов для производства соответствующего вида продукции приведены в таблице.

Таблица 1.

Ресурсы / Продукция	*R1*	*R2*	*R3*
P1	3	2	1
P2	4	1	3
P3	2	2	2

В распоряжении предприятия имеется 90 ед. ресурса *R1,* 54 ед. ресурса *R2* и 93 ед. ресурса *R3* . Прибыль от реализации 1 единицы продукции *P1* составляет 30 грн., продукции *P2* – 40 грн., продукции *P3* – 35 грн.

Математическая модель:

Обозначим $x_j -$количество $j-$го вида продукции, производимой предприятием $j=\overline{1,3}$ $x_j \geq 0$. Ограничения по запасам ресурсов:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 90 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 54 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 93 \end{cases}$$

Целевая функция максимизирует прибыль от реализации продукции:

$$Z = 30x_1 + 40x_2 + 35x_3 \to \max$$

Решим задачу, используя ППП WinQSB. Для этого необходимо выбрать раздел «Линейное и целочисленное программирование» (Linear and Integer Programming) и вводятся данные задачи (рис. 1)

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	30	40	35		
C1	3	4	2	<=	90
C2	2	1	2	<=	54
C3	1	3	2	<=	93
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

Рис. 1. Ввод исходных данных задачи.

Решение задачи приведено в итоговой таблице (рис. 2). Отметим, что при необходимости можно решать задачу пошагово.

	09:07:40		Monday	May	25	2009		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	30.0000	0	-12.5000	at bound	-M	42.5000
2	X2	12.0000	40.0000	480.0000	0	basic	17.5000	70.0000
3	X3	21.0000	35.0000	735.0000	0	basic	20.0000	80.0000
	Objective	Function	(Max.) =	1 215.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	90.0000	<=	90.0000	0	7.5000	54.0000	112.5000
2	C2	54.0000	<=	54.0000	0	10.0000	22.5000	90.0000
3	C3	78.0000	<=	93.0000	15.0000	0	78.0000	M

Рис. 2. Итоговая таблица.

Решение задачи следующее: $x_1 = 0,\ x_2 = 12,\ x_3 = 21,\ Z_{\max} = 1\,215$, То есть, продукцию первого вида производить нецелесообразно, продукцию второго вида необходимо выпускать в количестве 12 ед., третьего – 21 ед., при этом прибыль составит 1 215 грн.

Проведем анализ чувствительности данных задачи. Переменная x_1 не является базисной, то есть продукцию *P1* производить невыгодно. Альтернативная цена (Reduced Cost) для нее равна -12,5 и показывает, что каждая произведенная единица продукции будет снижать прибыль на 12,5 ден. ед. Кроме того, можно отметить, что если прибыль от реализации единицы продукции увеличится как минимум на 12,5, то есть будет составлять не менее 42, 5 тыс. грн., то производить эту продукцию будет выгодно. Переменные $x_2,\ x_3$ – базисные, поэтому для них альтернативная цена равна нулю. Границы устойчивости коэффициентов целевой функции указаны в столбцах «Allowable Min. c(j)» и «Allowable Max. c(j)». Для коэффициента целевой функции при переменной x_1 эти границы составляют $-\infty;42,5$, для переменных $x_2,\ x_3$ соответственно $17,5;\ 70$ и $20;\ 80$. То есть, до тех пор, пока соответствующие коэффициенты будут находиться в указанных пределах, текущий базис останется оптимальным.

Ограничения С1 и С2 являются связующими. Это означает, что ресурсы *R1* и *R2* используются полностью, то есть являются дефицитными. Это подтверждает и значение теневой цены (Shadow Price). Для ресурса *R1* теневая цена равна 7,5. Это означает, что каждая дополнительная единица данного ресурса увеличит прибыль на 7,5 грн. Теневую цену можно также рассматривать как максимальную цену, которую можно заплатить за единицу соответствующего ресурса. Однако дополнительно можно закупить не более 22,5 единиц ресурса, так как границы устойчивости для правой части ограничения С1, которые находятся в столбцах «Allowable Min. RHS» и

«Allowable Max. RHS», составляют (54; 112,5). Если правая часть ограничения превысит верхнюю границу (112,5), то текущий базис перестанет быть оптимальным. В этом случае задачу нужно решать заново. Аналогично можно провести анализ для ресурса *R2*.

Ограничение C3 не является связующим, поскольку ресурс *R3* используется не полностью – остается 15 единиц. Теневая цена для данного ресурса равна 0, а границы устойчивости – $(78; +\infty)$.

При решении задачи с использованием надстройки «Поиск решения» приложения Microsoft Excel также можно проводить анализ чувствительности решения. Для этого необходимо выбрать соответствующий тип отчета: «Результаты», «Устойчивость» и «Пределы» (рис. 3)

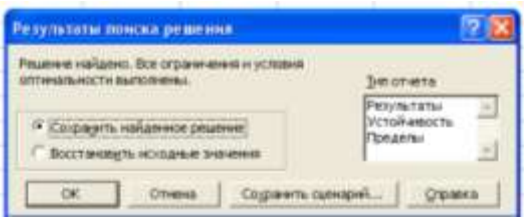

Рис. 3. Анализ чувствительности при решении задачи с использованием надстройки «Поиск решения»

Таким образом, изучение симплекс-метода на примере экономической задачи делает эту тему для студентов более интересной, приближенной к практическим условиям, учит их рассуждать.