УДК 51(09)

История формулы Ньютона-Лейбница.

Прокопенко Н.А., Чаплян Я.В.

Донецкий национальный технический университет

Одна из самых известных формул математического анализа – формула Ньютона-Лейбница: если F(x) есть первообразная для непрерывной на отрезке [a,b] функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Эта формула проста в обращении, т.к. существуют таблицы первообразных для многих функций. Она помогает вычислить определённый интеграл, который используется при решении задач в математике, физике, механике и других науках.

Геометрически определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху плоской кривой $y=f(x)$, снизу y=0 и прямыми x=a, x=b. Вычислением площадей плоских фигур еще до появления анализа бесконечно малых занимались многие известные ученые.

Ученик Галилея Бонавентура Кавальери (1598-1647) использовал метод неделимых, идея которого была высказана им в книге «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635). Совокупность неделимых, вводимая Кавальери, посуществу соответствует понятию определённого интеграла. Метод неделимых позволил решить множество трудных задач. Однако у этого метода были свои недостатки: во-первых – он был непригоден для измерения длин кривых; во-вторых – невозможность рационального объяснения понятия неделимого делали всю теорию необоснованной; в-третьих – ограниченность в использовании символики и приёмов алгебры.

Блез Паскаль (1628-1622) отошёл от метода неделимых гораздо дальше. Он заменил понятие суммы всех неделимых суммой элементарных площадок, образованных бесконечно близкими одинаково отстоящими друг от друга ординатами. Паскаль ввёл вспомогательный треугольник, который послужил прообразом дифференциального треугольника для Лейбница.

В этот же период английский учёный и учитель Ньютона – Исаак Барроу (1630-1677) издаёт “Лекции”. В этой книге не вводилось новых терминов и понятий, не было ни функций, ни производных. Она была посвящена одному единственному принципу: между задачами о касательных и задачами о площадях имеется двойственность. Этот принцип по разному был изложен ещё и Э. Торричелли, П. Менголи, Дж. Грегори. Книга Барроу читается с большим трудом, но фактически она посвящена формуле Ньютона-Лейбница. Ньютон, изучая лекции своего учителя во многих случаях, упрощал или улучшал изложение. Но главных пунктов – формулы Ньютона-Лейбница и решение уравнений с разделяющими переменными – Ньютон не изменял. Это заслуга самого Барроу и Ньютон на эти открытия некогда не претендовал.

В своём труде “Метод флюксий” Иссаак Ньютон (1642-1727) описывает это правило применительно к квадратуре кривых: “Для получения должного значения площади прилежащей к некоторой части абсциссы, эту площадь всегда следует брать равной разности значений z , соответствующих частям абсцисс, ограниченным началом и концом площади”. Здесь в z есть величина, флюксией (производной) которой является ордината y квадрируемой кривой [3].

Говоря об этой формуле нельзя не сказать о Лейбнице (1646-1716). Лейбниц вывел аналогичное правило только в своей трактовке с использованием новой и такой привычной для нас символики: d –бесконечно малая разность, $\int$ - интеграл (это обозначение введено учеником Лейбница И. Бернулли, с согласия Лейбница).

Но всё же это не было такая родная и привычная нам формула. Интеграл, определённый у Лейбница, как сумма бесконечно большого числа бесконечно малых дифференциалов, а интегрирование сводилось к отысканию первообразных функций, здесь возникли трудности так как геометрических методов оказалось недостаточно. Поэтому приходилось, чтобы интегрирование оказалось возможным, представлять функции степенными рядами и другими формулами, но прежде всего необходимо было уточнить понятие функции. Постепенно, это связано с вычислением различных специальных интегралов, определённые интегралы становятся самостоятельными объектами теории. Л Эйлер (1707-1783) из понятия неопределённого интеграла вывел систему определений. Интеграл вместе с произвольной аддитивной постоянной интегрирования называется по Эйлеру полным, а если зафиксировать произвольную постоянную, приходим к частному интегралу – эквивалент определённого интеграла. Леонард Эйлер считал, что “ Математика, вероятно, некогда не достигла бы такой высокой степени совершенства, если бы древние не приложили столько усилий для изучения вопросов, которыми сегодня многие пренебрегают из-за их мнимой бесполезности”.

Мы, спустя более чем 150 лет, пользуемся трактатом Эйлера, только в современном изложении. Лаплас в 1779г. предложил символ Эйлера $\int$ **f(x)dx[abx = a]** назвать определённым интегралом. В 1816 г. Фурье вводит привычное нам обозначение интеграла $\int$ **f(x)dx[abx.** Произошло возрождение концепции интеграла как суммы. Метод интегральных сумм Архимед применял ещё для определения площади первого витка спирали Архимеда. Свой метод он назвал “ Методом исчерпывания”, но понятия интеграла и понятия предела у него не было. Введением “ Метода исчерпывания” Архимеда сыграл очень большую роль в математике. С его помощью удалось объединить самые разные задачи – вычисление площади, объёма, массы, работ, давления и т.д.

В 1814 г., в одной из своих работ, Коши определял интеграл как предел интегральных сумм. Затем он переходит к интегралам с переменным верхним пределом и доказывает существование первообразной для всякой непрерывной функции. И после всех этих добавлений, изменений и упрощений правило приобретает тот вид, с которым мы привыкли иметь дело. Далее теорию интегралов развивали Риман, Борель, Лебег, Лузин и др.

В наше время в каждом ВУЗе изучается курс Высшей математики, где дифференцирование и интегрирование функций является основным аппаратом, с помощью которого возможно изучение этого предмета. А формула Ньютона-Лейбница позволяет быстро вычислять определенный интеграл, площади плоских фигур, длины плоских кривых, объем тела вращения, а также используется при решении механических задач.

Библиография

1. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристалов. – М.; Наука – 1989. –96с.
2. Рыбников К.А. История математики. – М.; Изд-во МГУ – 1994. –496с.
3. Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей. Под. Ред. А.П.Ющкевича. – М.; Просвещение –1977.-224с.