УДК 378.147:51

О. Г. Євсеєва, Н. А. Прокопенко

ВИЗНАЧЕННЯ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ З ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ, НЕОБХІДНИХ ДЛЯ РОЗВ‘ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ПРОСТОРІ, НА ОСНОВІ ПРЕДМЕТНОЇ МОДЕЛІ СТУДЕНТА ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Анотація. Розроблено перелік типових задач з аналітичної геометрії у просторі. На основі предметної моделі студента технічного університету з вищої математики визначено спектри вмінь та знань з векторної алгебри, необхідних для розв‘язання задач. Наведено приклади задач і показано, який спектр знань та вмінь вони мають.

Ключові слова: діяльнісне навчання**,** предметна модель студента, вміння, знання, векторна алгебра, розв‘язання задач з аналітичної геометрії.

На сучасному етапі соціально-економічного і науково-технічного розвитку країни пред'являються нові вимоги як до загальної, так і до професійної освіти. Досягнення науки і техніки зумовлюють необхідність по-новому підійти до підготовки фахівців інженерно-технічного профілю.

Сутність нового підходу до навчання у вищій технічній школі полягає в тому, що воно має здійснюватися на засадах діяльнісного підходу. Таке навчання є альтернативою традиційному навчанню, яке Б. Ц. Бадмаєв назвав знаньовим [3, с. 36]. Деякі положення діяльнісного навчання розроблені в роботах Б. Ц. Бадмаєва, П. Я. Гальпєріна, Ю. І. Машбиця, З. О. Рєшетової, Н. Ф.Тализіної та інших. В завершеному вигляді теорія діяльнісного навчання сформульована Г. О. Атановим [1, 2].

Основним положенням діяльнісного навчання є той факт, що первинними при проектуванні та організації навчання є способи дій майбутньої професійної діяльності. Особливо актуально це при навчанні фундаментальних дисциплін у вищій технічній школі, зокрема математики.

Питанням математичної підготовки студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів присвячено чимало робіт провідних математиків-методистів (В. В. Гнеденка, В. І. Клочка, Т. В. Крилової, Л. Д. Кудрявцева, З. І. Слєпкань, В. А. Треногіна, Н. Г. Яруткіна, Л. Л. Креша, М. В. Працьовитого та ін.). Вони одностайні в тому, що математика в роботі інженера покликана вирішувати професійні задачі. Цим пояснюється необхідність тісного зв'язку навчання математики з потребами професії.

При вивченні спеціальних дисциплін студентам часто доводиться мати справу з векторами. Векторна алгебра є надійним містком між елементарною та вищою математиками, геометрією та алгеброю, математикою та фізикою. Важливу роль грає векторна алгебра в системі інженерної освіти [8]. Вміння з векторної алгебри потрібні студентам при розв‘язанні задач в таких дисциплінах як фізика, теоретична механіка, гідродинаміка, теорія механізмів і машин, опір матеріалів, теоретичні основи електротехніки. Крім того, векторна алгебра застосовуються в різних розділах самого курсі вищої математики. Одним з таких розділів є аналітична геометрія.

Метою статті є визначення знань та вмінь з векторної алгебри, необхідних для розв‘язання задач з аналітичної геометрії у просторі, на основі предметної моделі студента технічного університету.

У найширшому значенні під моделлю студента розуміють знання про нього, які використовуються для організації навчального процесу. Знання про те, яким ми хочемо бачити студента в результаті навчання, тобто вимоги до його кінцевого стану як за окремими предметами, так і як до фахівця в цілому, називають нормативною моделлю.

Нормативна модель щодо фахівця в цілому отримала назву моделі спеціаліста, щодо окремого навчального предмета – предметної моделі студента [2]. В роботі [4] описано п'ятикомпонентну предметну модель студента з вищої математики, що складається з семантичного, процедурного, операційного, тематичного і функціонального компонент.

Вміння, які мають бути сформовані в процесі вивчення якого-небудь предмета, визначає операційна компонента предметної моделі студента [6]. Ці вміння становлять частину змісту навчання (інша частина — це знання, що забезпечують освоєння цих вмінь). Звідси витікає, що до навчальних задач пред'являється жорстка вимога: склад системи задач, що розв'язуються з курсу, повинен забезпечити формування всіх вмінь, що входять в операційну компоненту предметної моделі студента. За допомогою однієї задачі формується одне або декілька вмінь. Розв'язування ж задачі забезпечується раніше сформованими вміннями і знаннями.

В роботі [5] описано спектральний підхід до розробки системи навчальних задач з вищої математики на основі предметної моделі студента. Сутність цього підходу полягає в тому, що на основі операційного компонента предметної моделі студента для кожної задачі, що входить до системи, визначається спектри знань та вмінь, необхідних для її розв'язання. На основі цих спектрів складається спектри знань та вмінь всієї системи задач.

З точки зору інженерії знань розрізняють знання декларативні і процедурні [2, с.98]. Перші являють собою твердження, або декларації, про об'єкти предметної області, їх властивості і відносини між ними. Загальноприйнята точка зору тут полягає у тому, що декларативні знання — це факти з предметної області, або фактичні знання. Процедурні ж знання – це правила перетворення об'єктів предметної області. Для розв'язування задач необхідні як процедурні, так і декларативні знання. В сукупності ці знання складають спектр знань задачі. Спектр знань задачі задається семантичною и процедурною компонентами предметної моделі студента. В роботі [7] описано семантичну компоненту предметної моделі студента технічного університету з векторної алгебри.

Описаний підхід було застосовано до визначення вмінь та знань з векторної алгебри, необхідних для розв'язання задач з аналітичної геометрії у просторі в курсі вищої математики, що викладається студентам технічних спеціальностей.

За для цього було розроблено перелік типових задач з аналітичної геометрії у просторі. Під типовими задачами розуміються такі задачі, за допомогою яких формуються базові вміння з аналітичної геометрії, які використовуються для розв'язання будь яких задач з аналітичної геометрії. Ці задачі наведено у таблиці 1.

З операційної компоненти предметної моделі студента з векторної алгебри [6] було вибрано вміння, а з семантичної та процедурної компоненти – знання з векторної алгебри, необхідні для розв'язання типових задач з аналітичної геометрії у просторі .

Таким чином, для кожної задачі були визначені знання та вміння з векторної алгебри, за допомогою яких вона розв'язується. Вони також подані у таблиці 1.

Знання та вміння з векторної алгебри,
необхідні для розв'язання задач з аналітичної геометрії

Таблиця 1.

Типові задачі з аналітичної геометрії у просторі		Знання з векторної алгебри	Вміння з векторної алгебри
№ п/п	Умова задачі		
1.	Скласти рівняння площини, що проходить через надану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендику-	1. Умова перпендикулярності двох ненульових векторів.	1. Знаходити координати вектора. 2. Знаходити скаля-

	лярно наданому вектору $\overline{n}=(A,B,C)$.		рний добуток двох векторів.
2.	Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки: $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ та $M_3(x_3,y_3,z_3)$	1.Умова компланарності трьох ненульових векторів.	1.Знаходити координати вектора; 2. Знаходити мішаний добуток трьох векторів.
3.	Скласти рівняння площини, що проходить через надану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ паралельно двом наданим векторам: $\overline{a_1}=(l_1,m_1,n_1)$ та $\overline{a_2}=(l_2,m_2,n_2)$.	1.Умова компланарності трьох ненульових векторів.	1.Знаходити координати вектора; 2. Знаходити мішаний добуток трьох векторів.
4.	Скласти рівняння площини, що проходить через дві задані точки: $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, паралельно заданому вектору: $\overline{a}=(l,m,n)$	1.Умова компланарності трьох ненульових векторів.	1.Знаходити координати вектора; 2. Знаходити мішаний добуток трьох векторів.
5.	Знайти кут між двома площинами: $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	1. Визначення кута між двома векторами.	1. Знаходити координати вектора. 2. Знаходити модуль вектора. 3. Знаходити скалярний добуток двох векторів.
6.	Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ паралельно даному вектору $\overline{s}=(m,n,p)$.	1. Умова колінеарності двох векторів.	1. Знаходити координати вектора.
7.	Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.	1. Умова колінеарності двох векторів.	1. Знаходити координати вектора.
8.	Скласти канонічне рівняння прямої, що є лінією перетину двох площин $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.	1. Визначення векторного добутку двох ненульових векторів.	1. Знаходити векторний добуток двох векторів.
9.	Знайти кут між двома прямими: $l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ та $l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$.	1. Визначення кута між двома векторами.	1. Знаходити координати вектора. 2. Знаходити модуль вектора. 3. Знаходити скалярний добуток двох векторів.
10.	Знайти кут між площиною	1. Визначення кута	1. Знаходити коор-

	$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ та пряму $l:\frac{x-x_\circ}{m}=\frac{y-y_\circ}{n}=\frac{z-z_\circ}{p}$.	між двома векторами.	динати вектора. 2. Знаходити модуль вектора. 3. Знаходити скалярний добуток двох векторів.
11.	Знайти відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$.	1. Визначення проекції вектора на вісь іншого вектора.	1. Знаходити проекцію вектора на вісь іншого вектора. 2. Знаходити скалярний добуток двох векторів.
12.	Знаходити відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямої $l:\frac{x-x_\circ}{m}=\frac{y-y_\circ}{n}=\frac{z-z_\circ}{p}$.	1. Визначення векторного добутку двох ненульових векторів.	1. Знаходити векторний добуток двох векторів. 2. Знаходити модуль вектора.
13.	Визначати, чи є дві площини $\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ колінеарними або перпендикулярними.	1. Умова колінеарності двох векторів. 2. Умова перпендикулярності двох ненульових векторів.	1. Визначати, чи є два вектори колінеарними. 2. Визначати, чи є два вектори перпендикулярними
14.	Визначати, чи є дві прямі: $l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ та $l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ колінеарними або перпендикулярними.	1. Умова колінеарності двох векторів. 2. Умова перпендикулярності двох ненульових векторів.	1. Визначати, чи є два вектори колінеарними. 2. Визначати, чи є два вектори перпендикулярними.
15.	Визначати, чи є площина $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ та пряма $l:\frac{x-x_\circ}{m}=\frac{y-y_\circ}{n}=\frac{z-z_\circ}{p}$ колінеарними або перпендикулярними.	1. Умова колінеарності двох векторів. 2. Умова перпендикулярності двох ненульових векторів.	1. Визначати, чи є два вектори колінеарними. 2. Визначати, чи є два вектори перпендикулярними.

Проведений аналіз показав, що для розв'язання задач аналітичної геометрії у просторі необхідні такі вміння з векторної алгебри:

- за наданими координатами вектора у просторі визначати модуль вектора;
- визначати координати вектора у просторі за наданими координатами начала і кінця вектора;
- за наданими координатами двох векторів у просторі:
  – визначати, чи є вектори колінеарними;
  – знаходити скалярний добуток векторів;
  – визначати, чи є вектори перпендикулярними;
  – знаходити проекцію одного вектора на інший;

– визначати косинус кута між векторами;
– знаходити векторний добуток векторів;

- за наданими координатами трьох векторів у просторі знаходити мішаний добуток векторів.

Крім того, для розв'язання задач аналітичної геометрії у просторі необхідні такі декларативні знання з векторної алгебри:

- визначення
  - нульового вектора, колінеарних, перпендикулярних та компланарних векторів;
  - проекції вектора на вісь;
  - скалярного добутку двох векторів;
  - векторного добутку двох векторів;
  - мішаного добутку трьох векторів;
  - кута між векторами;
- умови
  - перпендикулярності двох ненульових векторів;
  - колінеарності двох ненульових векторів;
  - компланарності трьох ненульових векторів.

Процедурні знання складають такі алгоритми:

– знаходження модуля вектора;
– визначення, чи є два вектори колінеарними або перпендикулярними;
– визначення, чи є три вектори компланарними;
– знаходження косинуса кута між векторами, проекції одного вектора на інший;
– знаходження скалярного добутку двох векторів, векторного добутку двох векторів та мішаного добутку трьох векторів.

При розв'язанні задач для кожної з них визначається спектр знань і спектр вмінь, як з аналітичної геометрії, так і з векторної алгебри.

Наведемо приклад розв'язання типової задачі (задача 11) з аналітичної геометрії з використанням знань і вмінь з векторної алгебри.

Задача 1. Знайти відстань від точки $M_1(5;\,4;\,6)$ до площини $\alpha: 2x-3y+6z-2=0$.

Наведемо розв'язок задачі:

1. Знайдемо координати точки M_2, яка належить площині α. Для цього рівняння площини представимо у вигляді $z=\frac{1}{6}(2-2x+3y)$, де $x\in R,\ y\in R.$ Далі надамо довільних значень змінним x та y: $x=1$; $y=0$, та обчислимо значення z: $z=\frac{1}{6}(2-2\cdot 1+3\cdot 0)=0.$ Таким чином точка M_2 має координати $M_2(1;0;0)$.

2. Знайдемо координати вектора $\overline{M_1M_2}$, який належить площині. Для цього від координат точки M_2 віднімемо відповідні координати точки M_1: $\overline{M_1M_2}=(1-5;\,0-4;\,0-6)=(-4;-4;-6)$.

3. Запишемо координати нормального вектора $\overline{n}$ площини α. Для цього випишемо у відповідному порядку із загального рівняння площини α коефіцієнти при змінних x, y, z: $\overline{n}=(2;-3;6)$.

4. Знайдемо модуль вектора $\overline{n}$. Для цього обчислимо корінь квадратний із суми квадратів координат вектора $\overline{n}$:

$\left|\overline{n}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$.

5. Знайдемо скалярний добуток нормального вектора $\overline{n}$ площини α та вектора $\overline{M_1M_2}$. Для цього обчислимо суму добутків відповідних координат вектора $\overline{n}$ та вектора $\overline{M_1M_2}$: $\overline{n} \cdot \overline{M_1M_2} = 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-4) + 6 \cdot (-6) = -8 + 12 - 36 = -32$.

6. Знайдемо проекцію вектора $\overline{M_1M_2}$ на нормальний вектор $\overline{n}$. Для цього обчислимо відношення скалярного добутку $\overline{n}$ та вектора $\overline{M_1M_2}$ до модуля вектора $\overline{n}$: $Пр_{\overline{n}}\overline{M_1M_2} = \dfrac{-32}{7}$.

7. Знайдемо відстань від точки M_1 до площини α. Для цього знайдемо модуль проекції вектора $\overline{M_1M_2}$ на вектор $\overline{n}$: $d(M_1;\alpha) = \left|Пр_{\overline{n}}\overline{M_1M_2}\right| = \left|\dfrac{-32}{7}\right| = \dfrac{32}{7} = 4\dfrac{4}{7}$.

Спектр знань задачі складається з таких знань:

1. Декларативні знання з векторної алгебри:
   визначення понять: вектор, координати вектора, скалярний добуток двох векторів, модуль вектора, проекція вектора на вектор.
2. Декларативні знання з аналітичної геометрії:
   визначення понять: точка, що належить площині, загальне рівняння площини, нормальний вектор площини, відстань від точки до площини.
2. Процедурні знання:
   - алгоритм знаходження координат точки, яка належить площині;
   - алгоритм знаходження координат вектора;
   - алгоритм знаходження нормального вектора площини;
   - алгоритм знаходження модуля вектора;
   - алгоритм знаходження скалярного добутку двох векторів;
   - алгоритм знаходження проекції вектора на вектор;
   - алгоритм знаходження модуля числа.

Спектр вмінь задачі складається з таких вмінь:

1. Вміння з векторної алгебри:
   - за наданими координатами кінця та початку вектора знаходити координати вектора;
   - за наданими координатами двох векторів знаходити скалярний добуток векторів;
   - за наданими координатами вектора знаходити модуль вектора;
   - за наданими координатами двох векторів знаходити проекцію вектора на вектор.
2. Вміння з аналітичної геометрії:
   - за наданим рівнянням площини знаходити координати точки, яка належить цій площини;
   - за наданим рівнянням площини знаходити координати нормального вектору цієї площини;
3. Вміння з елементарної математики:
   - вилучати квадратний корінь з числа;
   - знаходити модуль числа.

Декларативні знання, необхідні для розв’язання задачі подаються у вигляді висловлювань семантичного конспекту [7]:

1. Висловлювання глави 1 «Види векторів»

1.9. Модулем вектора називається довжина відрізка, що задає вектор.

1.10. Проекцією ненульового вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ є проекція вектора $\bar{a}$ на вісь вектора $\bar{b}$.

1.11. Проекцію вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ позначають $Пр_{\bar{b}}\bar{a}$.

2. Висловлювання розділу 4. Координати вектора в прямокутній системі координат.

4.8. Координата вектора за координатною віссю прямокутної системи координат дорівнює числу, яке отримане відніманням від координати кінця вектора за даною координатною віссю відповідній координати початку вектора.

Наприклад:

$\overline{AB}=\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$,

$a_x=x_2-x_1, a_y=y_2-y_1, a_z=z_2-z_1,$ *де* $A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2)$

3. Висловлювання розділу 6. Скалярний добуток векторів

6.1 Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними.

6.2 Скалярний добуток векторів $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ позначається $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

6.3 Скалярний добуток двох векторів, що задані координатами, дорівняє сумі попарних добутків відповідних координат.

6.4 Скалярний добуток векторів $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$ знаходиться за формулою $\boldsymbol{\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}$.

4. Висловлювання розділу 10. Геометричні та механічні застосування векторів

10.4 Проекція вектора на вектор дорівнює відношенню скалярного добутку цих векторів до модуля вектора, на який знаходиться проекція.

10.5 Проекція вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ знаходиться за формулою $Пр_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Наведемо приклад задачі, яка не є типовою, але для розв’язання якої використано типову задачу (задача 12).

Задача 2. Знайти відстань між паралельними прямими $l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{4}$ та

$$l_2:\begin{cases}x=2t\\ y=-3t+1.\\ z=4t-3\end{cases}$$

Наведемо розв’язок задачі:

1. Знайдемо координати точки M_1, яка належить прямій l_1. Для цього запишемо рівняння прямої l_1 у параметричному вигляді: $l_1:\begin{cases}x=2t+1\\ y=-3t-1\\ z=4t\end{cases}$. Далі надамо значення параметру t: $t=0$, та обчислимо значення x,y,z: $\begin{cases}x=2\cdot0+1\\ y=-3\cdot0-1\\ z=4\cdot0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=0\end{cases}$. Таким чином точка M_1 має координати $M_1(1;-1;0)$.

2. Знайдемо координати точки M_2, яка належить прямій l_2. Для цього надамо значення параметру t: $t=0$, та обчислимо значення x, y, z: $\begin{cases} x = 2\cdot 0 \\ y = -3\cdot 0 + 1 \\ z = 4\cdot 0 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$. Таким чином точка M_2 має координати $M_2(0; 1; -3)$.

3. Знайдемо координати вектора $\overline{M_1M_2}$. Для цього від координат точки M_2 віднімемо відповідні координати точки M_1: $\overline{M_1M_2} = (-1; 1-(-1); -3-0) = (-1; 2; -3)$.

4. Запишемо координати напрямного вектора $\bar{s}$ прямої l_1. Для цього випишемо у відповідному порядку числа, які знаходяться у знаменниках канонічного рівняння прямої l_1: $\bar{s} = (2; -3; 4)$.

5. Знайдемо координати вектора $\bar{a}$, який є векторним добутком вектора $\bar{s}$ на вектор $\overline{M_1M_2}$. Для цього обчислимо визначник третього порядку, у першому ряді якого знаходяться вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, у другому – координати вектора $\bar{s}$, а у третьому – координати вектора $\overline{M_1M_2}$: $\bar{a} = \bar{s} \times \overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k} = (1; 2; 1)$.

6. Знайдемо модуль вектора $\bar{a}$. Для цього обчислимо корінь квадратний із суми квадратів координат вектора $\bar{a}$: $|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$.

7. Знайти модуль напрямного вектора $\bar{s}$ прямої l_1. Для цього обчислимо корінь квадратний із суми квадратів координат вектора $\bar{s}$:

$$|\bar{s}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}.$$

8. Знайдемо відстань між паралельними прямими. Для цього обчислимо відношення модуля вектора $\bar{a}$ до модуля вектора $\bar{s}$: $d(l_1; l_2) = \dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{s}|} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\dfrac{6}{29}}$.

Спектр знань задачі складається з таких знань:

1. Декларативні знання з векторної алгебри:

визначення понять: вектор, координати вектора, векторний добуток двох векторів, модуль вектора, вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

2. Декларативні знання з аналітичної геометрії:

визначення понять: точка, що належить прямій, канонічне рівняння прямої, параметричне рівняння прямої, напрямний вектор прямої, відстань між паралельними прямими.

3. Процедурні знання:

- алгоритм знаходження параметричного рівняння прямої;
- алгоритм знаходження координат точки, яка належить прямій;
- алгоритм знаходження координат вектора;
- алгоритм знаходження напрямного вектора прямої;
- алгоритм знаходження векторного добутку двох векторів;
- алгоритм знаходження модуля вектора;

Спектр вмінь задачі складається з таких вмінь:

1. Вміння з векторної алгебри:

- за наданими координатами кінця та початку вектора знаходити координати вектора;
- за наданими координатами двох векторів знаходити векторний добуток векторів;
- за наданими координатами вектора знаходити модуль вектора;

2. Вміння з аналітичної геометрії:
   - за наданим канонічним рівнянням прямої записувати параметричне рівняння прямої;
   - за наданим параметричним рівнянням прямої знаходити координати точки, яка належить прямій;
   - за наданим канонічним рівнянням прямої знаходити координати напрямного вектора прямої;
3. Вміння з елементарної математики:
   - вилучати квадратний корінь з числа;
4. Вміння з лінійної алгебри:
   - обчислювати визначник третього порядку.

Для розв'язання задачі необхідно такі висловлювання семантичного конспекту з векторної алгебри:

1. Висловлювання розділу 1. Види векторів:

1.9. Модулем вектора називається довжина відрізка, що задає вектор.

2. Висловлювання глави 4 «Координати вектора в прямокутній системі координат»

4.19. Модуль вектора дорівнює кореню квадратному з суми квадратів його координат.

4.20. Модуль вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ обчислюється за формулою:

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

4.9. Координата вектора за координатною віссю прямокутної системи координат дорівнює числу, яке отримане відніманням від координати кінця вектора за даною координатною віссю відповідній координати початку вектора.

Наприклад:

$$\overline{AB} = \bar{a} = (a_x, a_y, a_z),$$

$$a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1, \text{ де } A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$$

3. Висловлювання розділу 7. Векторний добуток векторів:

7.8 Векторний добуток двох векторів $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ є вектор, координати якого обчислюються за формулою:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Необхідно відмітити, що для того, щоб студент міг розв'язувати задачі необхідно, щоб в нього були сформовані вміння та їм були засновані знання, що входять до їх спектрів.

Висновки. Складено перелік типових задач с аналітичної геометрії у просторі. Ці задачі можуть використовуватися як складові при розв'язанні різноманітних задач з цієї теми. На основі предметної моделі студента технічного університету з вищої математики визначено спектри вмінь та знань з векторної алгебри, необхідних для розв‘язання задач. Наведено приклади задач і показано, який спектр знань та вмінь вони мають. У спектрах знань подано окремо декларативні і процедурні знання.

Наведений підхід може бути використано для визначення зв‘язків як між різними розділами курсу вищої математики, так і між різними дисциплінами в системі інженерної освіти.

Література

1.Атанов Г. О. Теорія діяльнісного навчання. – К.: Кондор, 2007.

2.Атанов Г. О. Знання як засіб навчання. – К.: Кондор, 2008.

3.Бадмаев Б. Ц. Психология и методика ускоренного обучения. — М.: Владос, 1998.

4. Евсеєва О. Г. Моделювання навчальної предметної області. // Штучний інтелект. – 2009. – № 1. – С. 79-87.

5. Євсеєва О. Г. Спектральний підхід до розробки системи навчальних задач з вищої математики на основі предметної моделі студента // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 32. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2009. – С. 95-101.

6. Євсеєва О. Г., Прокопенко Н.А. Операційна компонента предметної моделі студента технічного університету з векторної алгебри // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 33. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2010. – С. 28-34.

7. Прокопенко Н.А. Семантичний конспект з векторної алгебри. // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – № 1. – Бердянськ, БДПУ, 2010. – С.80-88.

8. Прокопенко Н.А. Цілі та зміст навчання векторної алгебри в системі інженерної освіти // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 32. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2009. – С. 95-101.

Аннотация. Евсеева Е.Г. Определение знаний и умений по векторной алгебры, необходимых для решения задач по аналитической геометрии в пространстве, на основе предметной модели студента технического университета. Разработан перечень типовых задач по аналитической геометрии в пространстве. На основе предметной модели студента технического университета по высшей математики определены спектры умений и знаний по векторной алгебре, необходимых для решения задач. Приведены примеры задач и показано, какой спектр знаний и умений они имеют.

Ключевые слова: деятельностное обучение**,** предметная модель студента, умения, знания, векторная алгебра, аналитическая геометрия.

Summary. Evseeva E.G. Determination of knowledge and skills on vector algebra, which are necessary for the tasks decision on analytical geometry in space, on the base of subject student model

In this article the list of the tasks on analytical geometry in the space. The knowledge spectrum and the skills spectrum of the problem on vector algebra, which are necessary for the tasks decision on analytical geometry in space, are formulated on the base of subject student model. Such the approach gives us the opportunity to compound the system of problems are to be solved by a student for mastering definite theme. The examples of the tasks and their knowledge spectrums and skills spectrums are given.

Key words: activities teaching, the student subject model, the knowledge, the skills, vector algebra, analytical geometry.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

1. Прізвище, ім’я, по батькові. **Євсеєва Олена Генадіївна**

2. Науковий ступінь. **Кандидат фізико-математичних наук**

3. Вчене звання. **доцент**

4. Організація, посада. **Донецький національний технічний університет, доцент кафедри вищої математики**

5. Домашня адреса, індекс. **б.Шкільний, б.4, кв.89, м.Донецьк-15, 83015**

6. Телефони (домашній, мобільний). **дом. 8(062) 3377307, моб. 8(050) 4728948**

7. E-mail (обов’язково). **eeg.donntu@rambler.ru**

---

1. Прізвище, ім’я, по батькові. **Прокопенко Наталя Анатоліївна**

2. Науковий ступінь.

3. Вчене звання.

4. Організація, посада. **Донецький національний технічний університет, асистент кафедри вищої математики**

5. Домашня адреса, індекс. **вул. Челюскінців, б.184а, к. 1213, м.Донецьк-15, 83015**

6. Телефони (домашній, мобільний). **моб. 8(050) 923 0865**

7. E-mail (обов’язково). **pronatan@rambler.ru**