ЦІЛІ ТА ЗМІСТ НАВЧАННЯ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ У СИСТЕМІ ІНЖЕНЕРНОЇ ОСВІТИ

Н. А. Прокопенко,

Донецький національний технічний університет, Донецьк, Україна.

Анотація. У статті розглянуто вміння з векторної алгебри, які використовуються для розв’язання задач в деяких дисциплінах у системі інженерної освіти. Визначені цілі та зміст навчання векторної алгебри. Складена тематична компонента предметної моделі студента.

Сучасна дійсність вимагає модернізації вищої освіти. Це означає, що в процесі навчання студенти повинні виконувати навчальну діяльність, яка моделює їх майбутню професійну діяльність. Задовольнити цій вимозі може діяльнісне навчання.

Для реалізації діяльнісного навчання в своїй практиці викладач повинен усвідомити і прийняти сформульовані нижче методологічні положення [1,с.7]:

— кінцевою метою навчання є формування способу дій, тобто вмінь, що забезпечують здійснення майбутньої професійної діяльності;

— при проектуванні і організації навчання первинними є задана характером майбутньої спеціальності діяльність і дії, що становлять цю діяльність;

— зміст навчання складає задана характером майбутньої спеціальності система дій і тільки ті знання, які забезпечують виконання всіх цих дій;

— знання не самодостатні, вони є усього лише засобом виконання дій і навчання ним. Знання відіграють службову роль, пояснюючи і готуючи практичні дії;

— в процесі навчання ті, кого навчають, повинні здійснювати навчальну діяльність, яка моделює майбутню професійну діяльність, а не накопичувати знання;

— механізмом здійснення навчальної діяльності є вирішення задач, а не опрацювання навчального матеріалу, і якщо студент не вирішує навчальні задачі, то це означає, що його навчальна діяльність не організована;

— в сучасному розумінні знати – значить за допомогою знань здійснювати певну діяльність, а не тільки пам'ятати певні знання;

— засвоювати знання можна, тільки використовуючи їх і оперуючи ними, а не запам'ятовуючи їх. Запам’ятовування знань повинне бути результатом їх застосування та використання;

— навчання являє собою сукупність двох взаємопов'язаних, але самостійних діяльностей: діяльності навчаючого і діяльності тих, кого навчають, або навчальної діяльності;

— діяльність викладача полягає в проектуванні навчальної діяльності, організації навчальної діяльності і управлінні навчальною діяльністю.

Відповідно до цього принциповим питанням для кожного викладача є проектування навчального курсу: визначення його цілей і змісту. Задача визначення змісту навчального курсу вирішується в процесі структурування знань цього курсу або моделювання навчальної предметної області. Це моделювання полягає в побудові предметної моделі студента, яка складається з тематичної, семантичної, процедурної, операційної і функціональної частин. Цілями навчання є вміння, які забезпечують формування способів дій майбутньої професійної діяльності. Ці вміння складають операційну компоненту предметної моделі студента.

Метою роботи є визначення цілей та змісту навчання розділу векторна алгебра курсу вищої математики, що викладається студентам інженерних спеціальностей. Векторна алгебра є дуже важливим розділом дисципліни «Вища математика» в системі інженерної освіти. При формуванні цілей і змісту навчання векторної алгебри необхідно враховувати, які вміння з цього розділу використовуються як в самому курсі вищої математики, так і в інших дисциплінах. Наведемо приклади використання вмінь з векторної алгебри при розв'язанні деяких задач.

Наприклад, векторна алгебра використовується при розв‘язанні задач теорії поля, яка застосовується в гідродинаміці, електростатиці, теорії магнетизму тощо.

Задача 1. *Знайти ротор векторного поля* $\overline{F} = (P,Q,R)$*, де P, Q, R – деякі задані функції змінних x, y, z.*

Розв'язання: Ротор векторного поля $\overline{F} = (P,Q,R)$ – це вектор, який знаходиться за формулою: $\overline{rot}\overline{F} = \overline{grad} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

У результаті отримаємо: $\overline{rot}\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cdot \bar{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) \cdot \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \bar{k}$.

Для розв‘язання цієї задачі треба вміти: *за наданими координатами двох векторів знаходити векторний добуток цих векторів*.

Задача 2. *Знайти дивергенцію векторного поля* $\overline{F} = (P,Q,R)$*, де* P, Q, R *– деякі задані функції змінних x, y, z.*

Розв'язання: $div\overline{F} = \overline{grad} \cdot \overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

У цьому випадку треба вміти: *за наданими координатами двох векторів знаходити скалярний добуток цих векторів*.

Задача 3. *За допомогою формули Стокса перетворити криволінійний інтеграл* $\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$*, де* P, Q, R *– деякі задані функції змінних x, y, z.*

Розв'язання: Формула Стокса зв'язує криволінійний інтеграл за замкненим контуром L (циркуляцію) з поверхневим інтегралом за поверхнею Σ, що обмежена контуром L:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\Sigma rot\overline{F} \cdot \overline{n}\, d\sigma,$$

де $\overline{F} = (P, Q, R)$, а $\overline{n}$ - нормальний вектор поверхні Σ.

Для розв'язання цієї задачі необхідно знайти $rot\,\overline{F}$ за формулою $\overline{rot\overline{F}} = \overline{grad} \times \overline{F}$ та обчислити скалярний добуток $rot\overline{F} \cdot \overline{n}$. Для цього треба вміти:

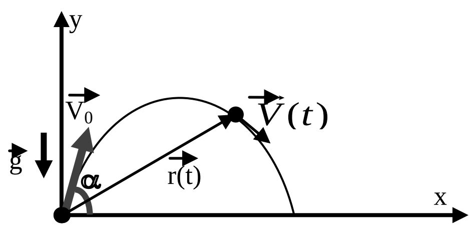
– *за наданими координатами векторів знаходити векторний добуток векторів;*

– *за наданими координатами векторів знаходити скалярний добуток векторів.*

Векторна алгебра також застосовується у деяких розділах фізики, наприклад, у кінематиці та динаміці.

Задача 4. *Тіло кинуте зі швидкістю V_0 під кутом α до горизонту. За польотом тіла спостерігають в оптичну трубу, встановлену в точці кидання. Через який час швидкість тіла буде перпендикулярна вісі труби? Прискорення вільного падіння дорівнює g.*

Розв'язання: Спершу зробимо малюнок до задачі:



Необхідно визначити момент часу, коли радіус-вектор точки $\overrightarrow{r(t)}$, що зображає тіло, перпендикулярний швидкості тіла $\overrightarrow{V(t)}$. Для цього скористаємося умовою перпендикулярності векторів: скалярний добуток перпендикулярних векторів рівний нулю.

$\vec{r}(t) \cdot \vec{V}(t) = 0$, де $\overrightarrow{V(t)} = (V_x(t), V_y(t))$, $\overrightarrow{r(t)} = (r_x(t), r_y(t))$

Виразимо скалярний добуток через координати векторів:

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{V}(t) = r_x V_x + r_y V_y\,,$$

Враховуючи, що $\overrightarrow{V_0(t)} = (V_{0x}(t), V_{0y}(t))$ та формули кінематики отримаємо

$$r_x = V_{0x}t,\, V_x = V_{0x},\, r_y = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2},\, V_y = V_{0y} - gt\,.$$

Після алгебраїчних перетворень ми отримаємо кубічне рівняння:

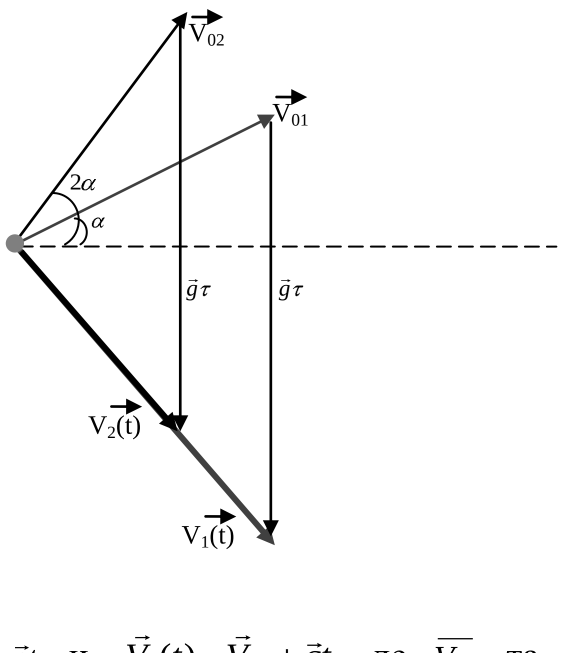
$$V_{0x}t\cdot V_{0x} + (V_{0y}t - \frac{gt^2}{2})\cdot(V_{0y} - gt) = 0$$

Розв'язком цього рівняння є такі значення t: $t_1 = 0;\, t_{2,3} = \frac{V_0}{2g}\left(3\sin\alpha \pm \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}\right)$

Причому значення часу $t_1 = 0$ відповідає моменту кидка.

Задача 5. *Два тіла кинуті з однаковими по модулю швидкостями V_0 під різними кутами до горизонту – перше тіло під кутом α, друге - 2α до горизонту. Знайти момент часу t, коли вектора швидкості тіл будуть паралельні. Прискорення вільного падіння рівне g.*

Розв'язання: Розглянемо малюнок до задачі.



Вектори $\vec{V}_1(t) = \vec{V}_{01} + \vec{g}t$ и, $\vec{V}_2(t) = \vec{V}_{02} + \vec{g}t$, де $\overline{V_{01}}$ та $\overline{V_{02}}$ початкові швидкості першого та другого тіла відповідно, за умовою колінеарні: $\vec{V}_1(t) \parallel \vec{V}_2(t)$.

Для розв’язання скористаємося однією з умов колінеарності двох векторів: векторний добуток двох колінеарних векторів дорівнює нульовому вектору.

Вираз векторного добутку векторів $\overline{V_1} = (V_{1x}, V_{1y}, V_{1z})$ та $\overline{V_2} = (V_{2x}, V_{2y}, V_{2z})$ в прямокутних координатах має вигляд:

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y})\vec{i} + (V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z})\vec{j} + (V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x})\vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - вектори декартового базису. Вважатимемо, що рух відбувається в площині XY. Тоді всі проекції на вісь Z дорівнюють нулю. Для виконання умови колінеарності повинна виконуватися рівність

$V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x} = 0$ (1), де $V_{1x} = V_0 \cos\alpha, V_{1y} = V_0 \sin\alpha - gt$ та $V_{2x} = V_0 \cos 2\alpha, V_{2y} = V_0 \sin 2\alpha - gt$.

Після підстановки координат векторів $\overline{V_1}$ та $\overline{V_2}$ у рівність (1) отримаємо:

$$t = \frac{V_0}{g} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}.$$

Для розв’язання задач 4, 5 треба вміти:

– *виконувати лінійні операції з геометричними векторами;*

– *за наданими координатами двох векторів знаходити векторний добуток векторів;*

– *за наданими координатами двох векторів знаходити скалярний добуток векторів.*

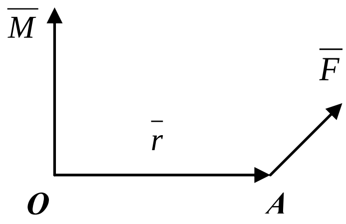
Задача 6. *Під дією сталої сили* $\overline{F}$ *матеріальна точка переміщується з точки А у точку В. Знайти роботу, яка при цьому виконується.*

Розв’язання: $A = \overline{F} \cdot \overline{AB}$.

У цьому випадку треба вміти: *за наданими координатами двох векторів на площині, чи у просторі знаходити скалярний добуток цих векторів*.

Задача 7. *Визначити момент сили* $\overline{F}$*, прикладеної до точки* A*, відносно точки О.*

Розв'язання: $\overline{M} = \bar{r} \times \overline{F}$, де $\bar{r} = \overline{OA}$.



У цьому випадку треба вміти: *за наданими координатами двох векторів на площині, чи у просторі знаходити векторний добуток цих векторів.*

Векторна алгебра також застосовується і в деяких розділах математики, наприклад: в аналітичній геометрії та теорії функції багатьох змінних.

Задача 8. *Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Розв'язання: Нехай $M(x, y, z)$– довільна точка прямої. Тоді вектор $\overline{M_1M}$ колінеарен вектору $\overline{M_1M_2}$. Знайдемо координати цих векторів: $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ і $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. З умови колінеарності векторів, зважаючи на довільність вибору точки $M(x, y, z)$, одержимо рівняння прямої M_1M_2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

У цій задачі використовують такі вміння:

– *за наданими координатами початку і кінця вектору знайти координати цього вектора;*

– *за наданими координатами векторів перевірити умову колінеарності векторів.*

Задача 9. *Скласти рівняння площини, що проходить через надану точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно даному вектору* $\bar{n} = (A, B, C)$.

Розв'язання: Нехай $M(x,y,z)$– довільна точка площини. Тоді вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярний вектору $\overline{n}=(A,B,C)$. Знайдемо координати вектора $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. З умови перпендикулярності векторів, зважаючи на довільність вибору точки $M(x,y,z)$, одержимо рівняння площини:

$$\overline{M_0M}\cdot\overline{n}=0 \text{ або } A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0.$$

У цій задачі використовують такі вміння:

– *за наданими координатами початку і кінця вектору знайти координати цього вектора;*

– *за наданими координатами векторів перевірити умову перпендикулярності векторів.*

Задача 10. *Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки:* $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

Розв'язання: Нехай $M(x,y,z)$– довільна точка площини. Тоді вектори $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$ -компланарні. Знайдемо координати цих векторів: $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, $\overline{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$ і $\overline{M_0M_2}=(x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0)$. З умови компланарності векторів, зважаючи на довільність вибору точки $M(x,y,z)$, одержимо рівняння площини:

$$\overline{M_0M}\times\overline{M_0M_1}\cdot\overline{M_0M_2}=0 \text{ або } \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

У цій задачі використовують такі вміння:

– *за наданими координатами початку і кінця вектору знайти координати цього вектора;*

– *за наданими координатами векторів перевірити умову компланарності векторів.*

Задача 11. *Знайти похідну функції* $U=f(x,y)$ *за напрямом вектора* $\overline{l}$.

Розв'язання: Спочатку знайдемо вектор, що є градієнтом функції U:

$\overline{grad}\,U = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Далі знайдемо орт вектора $\bar{l}$: $\overline{l_0} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|}$. А потім похідну за напрямом вектору $\bar{l}$: $\frac{\partial U}{\partial \bar{l}} = \overline{grad}\,U \cdot \overline{l_0}$.

У цій задачі використовують такі вміння:

– за наданими координатами вектора знайти модуль цього вектору;

– за наданими координатами вектора знайти орт цього вектору;

– за наданими координатами двох векторів знайти їх скалярний добуток;

Засвоєння якого-небудь навчального предмету означає послідовне засвоєння вмінь з декількох блоків, що складають систему вмінь. Ці вміння можуть бути розподілені за рубриками: базові, методологічні, загальні, предметні. Базові вміння мають самий загальний сенс і визначаються людською природою студента. У свою чергу, вони визначають його когнітивні (пізнавальні) здібності. Методологічні вміння визначають підхід до пізнання. Загальні вміння виконують організаційні, забезпечуючи і виконавчі функції. Предметні вміння також відносяться до одного певного навчального предмета. Предметні вміння визначаються, насамперед, характером предмета, що вивчається, хоча існують предметні вміння, загальні для різних предметів. На основі базових, методологічних і загальних вмінь будується система предметних вмінь, яка і являє собою операційну предметну модель.

З векторної алгебри були виділені такі вміння:

1. За наданими координатами вектора на площині, чи у просторі:

–визначати модуль вектора;

–визначати напрямні косинуси вектора ;

–записувати розвинення вектора за декартовим базисом;

–знаходити добуток вектора на число;

–знаходити орт вектора;

–визначати, чи є вектор одиничним;

–визначати, чи є вектор нульовим;

2. Визначати координати вектора на площині, чи у просторі:

– за наданими координатами начала і кінця вектора;

– за наданими напрямними косинусами та модулем;

– за наданим розвиненням вектора за декартовим базисом;

– за наданими координатами орта вектора та модулем;

3. За наданими координатами двох векторів на площині, чи у просторі:

– визначати, чи є вектори рівними;

– знаходити суму та різницю векторів;

– визначати, чи є вектори колінеарними;

– знаходити скалярний добуток векторів;

– визначати, чи є вектори перпендикулярними;

– знаходити проекцію одного вектора на інший;

– визначати косинус кута між векторами;

– знаходити векторний добуток векторів;

– знаходити площу паралелограма і трикутника, що побудовано на цих векторах;

4. За наданими координатами трьох векторів у просторі:

– знаходити мішаний добуток векторів;

– знаходити об'єм піраміди і паралелепіпеду, що побудовані на цих векторах;

– визначати, чи є вектори компланарними;

– визначати, чи можуть три вектори утворювати базис у просторі;

– переходити до нового базису у просторі.

Відповідно цим вмінням була виділена тематична компонента предметної моделі студента:

1. Види векторів.
2. Лінійні операції з векторами.

3. Базис. Проекція вектора на вісь.
4. Способи завдання векторів.
5. Скалярний добуток векторів.
6. Векторний добуток векторів.
7. Мішаний добуток векторів.

Таким чином вміння з векторної алгебри використовуються для розв'язання задач в таких дисциплінах як фізика, теоретична механіка, теорія механізмів та машин, гідродинаміка, електростатика, теоретичні основи електротехніки тощо. Для визначення цілей та змісту навчання векторної алгебри проаналізовано зміст прикладних дисциплін у системі інженерної освіти та визначено тематичну компоненту. Подальша робота повинна полягати в розробці ієрархії та структури предметних вмінь з векторної алгебри та побудови спектрів знань та вмінь кожного предметного вміння. Така робота дасть можливість розробити систему задач, спрямовану на формування предметних вмінь.

Література

1. Атанов Г. О. Знання як засіб навчання. – К., Кондор, 2008.
2. Атанов Г. О. Теорія діяльнісного навчання. – К., Кондор, 2007.
3. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К., Либідь, 1996.
4. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. – М., Высшая школа, 1971.

Прокопенко Наталья Анатольевна. Цели и содержание обучения векторной алгебры в системе инженерного образования.

Аннотация. В статье рассмотрены умения векторной алгебры, которые используются для решения задач некоторых дисциплин в системе инженерного образования. Определены цели и содержание обучения векторной алгебры. Составлена тематическая компонента предметной модели студента.