УДК 519.324

Ю.Н. Добровольский, К.Н. Ефименко

Государственное высшее учебное заведение

Донецкий национальный технический университет, Украина

Исследование свойств разностных операторов первого и второго порядка в конечномерных линейных пространствах.

Введение

Многие задачи газовой динамики приводят к таким математическим моделям физики, разработка теории которых находится в начальной стадии. На практике приходится численно решать такие нелинейные задачи математической физики, для которых еще не доказаны даже теоремы существования и единственности.

Для любой задачи можно построить определенное множество вычислительных алгоритмов, которые обладают, например, одинаковыми асимптотическими свойствами. Использовать рационально не все такие методы, а лишь те из них, которые пригодны для работы на ЭВМ.

В связи с этим возникает необходимость трактовать разностные схемы как операторные уравнения, при этом важное значение имеют следующие свойства операторов: самосопряженность, положительная определенность, существование A^{-1} (обратного оператора), $A^{1/2}$ (корень квадратный из оператора) и в каком случае их можно найти в явном виде.

1. Разностные операторы первого порядка

Рассмотрим H_{N+1} - пространство функций, заданных на

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ h \succ 0,\ i = 0,1,...,N,\ hN = \ell\}$$

Скалярное произведение в H_{N+1} определим следующим образом:

$$[y,v]=\sum_{i=0}^{N} y_i v_i h \qquad \|[y]\|=\sqrt{[y,y]} \tag{1}$$

Рассмотрим формулу суммирования по частям:

$$\left(y, v_{\bar{x}}\right] = -\left[y_x, v\right) + y_N v_N - y_0 v_0\,; \tag{2}$$

перепишем её в виде:

$$y_0 \frac{v_0}{h} h + \left(y, v_{\bar{x}}\right] = \left[-y_x, v\right) + \frac{y_N}{h} v_N h \tag{2*}$$

Левая часть этого тождества представляет собой скалярное произведение в H_{N+1} функции $y=\{y_0, y_1, ..., y_N\}$ и функции Av, определённой тождествами:

$$(Av)_0 = \frac{v_0}{h}, \quad (Av)_i = v_{\bar{x},i}, \quad i=1, 2, ..., N \tag{3}$$

Соотношения (3) задают оператор $A: H_{N+1} \to H_{N+1}$ (действующий из H_{N+1} в H_{N+1}), который будем называть оператором левой разностной производной. Левая часть формулы (2*) есть $[y, Av]$, а правая часть может быть записана в виде $[A^* y, v]$, где A^* - сопряженный оператор, определяемый формулами

$$\left(A^* y\right)_i = -y_{x,i}, \quad i=0,1,...,N-1, \quad \left(A^* y\right)_N = \frac{y_N}{h} \tag{4}$$

Оператор (4) будем называть оператором правой разностной производной. Матрицы операторов (3) и (4) имеют порядок $(N+1)\times(N+1)$ и взаимно сопряжены:

$$A=\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Дадим несколько определений.

Определение 1. Оператор $A: H \to H$ называется самосопряженным, если $A^* = A$, т. е. $(Ay, v) = (y, Av), \quad \forall\, y, v \in H$

Определение 2. Оператор A называется нормальным, если $A^*A = AA^*$; унитарным, если $A^*=A^{-1}$, и кососимметричным, если $A^* = -A$.

Любой оператор А всегда можно представить в виде суммы самосопряженного и кососимметричного операторов:

$$A = A_0 + A_1, \text{ где } \quad A_0 = 0{,}5(A + A^*) = A_0^*, \quad A_1 = 0{,}5(A - A^*) = -A_1^*$$

Представим оператор (3) в виде суммы $A = A_0 + A_1$, где $A_0 = 0{,}5\left(A + A^*\right)$ - симметрическая часть оператора А и $A_1 = 0{,}5\left(A - A^*\right)$ - кососимметричная часть оператора А. Операторы A_0 $и$ A_1 определяются соответственно тождествами:

$$\left.\begin{aligned} &(A_0 y)_0 = -0{,}5\left(y_{x,0} - {y_0}/{h}\right), \ (A_0 y)_N = 0{,}5\left(y_{\bar{x},N} + {y_N}/{h}\right) \\ &(A_0 y)_i = -0{,}5 h y_{\bar{x}x,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &(A_1 y)_0 = 0{,}5\left(y_{x,0} + {y_0}/{h}\right) = {y_1}/{(2h)}, \\ &(A_1 y)_N = 0{,}5\left(y_{\bar{x},N} - {y_N}/{h}\right) = -{y_{N-1}}/{(2h)}, \\ &(A_1 y)_i = 0{,}5\left(y_{x,i} + y_{\bar{x},i}\right) = y_{\overset{0}{x},i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из определения оператора A_1 ясно, что этот оператор – кососимметричный, тогда при $\forall\, y, v \in H_{N+1}$ имеем $[A_1 y, v] = -[y, A_1 v]$, $[A_1 y, y] = 0$.

Матрица оператора (7) равна

$$A_1 = \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Остановимся подробнее на свойствах оператора (6). Этот оператор является самосопряженным, а его матрица имеет порядок (N+1)×(N+1) и равна

$$A_0 = \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Матрица (9) – это аналог матрицы для оператора

$$\left(\overset{0}{A}y\right)_i = -y_{\bar{x}x,i}\,, \quad i = 1,2,\cdots,N-1 \qquad (3^*)$$

действующего в $\overset{0}{\Omega}: \left\{y \text{ на } \overline{\omega}_h\,, \quad y_0 = y_N = 0\right\}$

$$\overset{0}{A} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (4^*)$$

для которой собственные функции $\mu_k(x_i) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\frac{\pi k x_i}{\ell}, \quad k = 1,2,\cdots,N-1 \qquad (5^*)$

и собственные значения $\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k h}{2\ell} \qquad (6^*)$

Матрица (9) отличается от матрицы (4^*) лишь множителем 0,5h и порядком. Поэтому по аналогии с (5^*) и (6^*) можно выписать в явном виде собственные функции и собственные значения оператора

$$\overset{0}{A} = \frac{2}{h}A_0\ :$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu_k(x_i) = \sin\alpha_k(x_i + h), \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha_k h}{2}, \\ &\alpha_k = \frac{\pi k}{\ell + 2h}, \quad k = 1,2,\cdots,N+1, \quad i = 0,1,\cdots,N, \quad hN = \ell \end{aligned}\right\}$$

Оценка снизу для минимального собственного значения λ_1 дается неравенством:

$$\lambda_1 \geq \frac{8}{(\ell + 2h)^2}.$$

Так как $h \leq \ell/2$ и $\ell + 2h \leq 2\ell$, то $\lambda_1 \geq 2/\ell^2 \qquad (10)$

Для максимального собственного значения λ_{N+1} имеем очевидную оценку:

$$\lambda_{N+1} \leq 4/h^2 \qquad (11)$$

Отсюда и из ортогональности функций $\mu_k(x)$ заключаем, что при любых $y \in H_{N+1}$ справедливы неравенства:

$$\frac{2}{\ell^2}\|[y]\|^2 \le \left[\overset{0}{A}y, y\right] \le \frac{4}{h^2}\|[y]\|^2, \quad \overset{0}{A} = \frac{2}{h}A_0 \qquad , \tag{12}$$

$$\frac{h}{\ell^2}\|[y]\|^2 \le [A_0 y, y] \le \frac{2}{h}\|[y]\|^2 \tag{13}$$

Далее, так как $[A_1 y,y]=0$, то для оператора (3) справедливы оценки:

$$\frac{h}{\ell^2}\|[y]\|^2 \le [Ay, y] = [A_0 y, y] \le \frac{2}{h}\|[y]\|^2 \tag{14}$$

Таким образом, (3) – несамосопряженный положительно определенный оператор.

Из определения оператора $\overset{0}{A}$ и первой разностной формулы Грина:

$$\left(y, \left(a v_{\bar{x}}\right)_x\right) = -\left(y_{\bar{x}}, a v_{\bar{x}}\right] + y_N a_N v_{\bar{x},N} - y_0 a_1 v_{\bar{x},1} \tag{7^*}$$

следует тождество

$$\left[\overset{0}{A}y, y\right] = \left\|y_{\bar{x}}\right]\|^2 + \frac{1}{h}\left(y_0^2 + y_N^2\right) \tag{15}$$

Поэтому неравенство (12) можно переписать в виде

$$\left\|y_{\bar{x}}\right]\|^2 + \frac{1}{h}\left(y_0^2 + y_N^2\right) \ge \frac{2}{\ell^2}\|[y]\|^2 \tag{16}$$

$$\left\|y_{\bar{x}}\right]\|^2 + \frac{1}{h}\left(y_0^2 + y_N^2\right) \le \frac{4}{h^2}\|[y]\|^2 \tag{17}$$

Если оператор A несамосопряженный, то его норму приходится вычислять дополнительно.

Для операторов (3) и (4) имеем $\|[Ay]\|^2 = \frac{1}{h}y_0^2 + \left\|y_{\bar{x}}\right]\|^2, \quad \|[A^* y]\|^2 = \left\|y_{\bar{x}}\right]\|^2 + \frac{1}{h}y_N^2$.

Следовательно,

$$\|[Ay]\|^2 \le \left\|y_{\bar{x}}\right]\|^2 + \frac{1}{h}\left(y_0^2 + y_N^2\right) = \frac{2}{h}[A_0 y, y] \le \frac{4}{h^2}\|[y]\|^2 \tag{18}$$

$$\|[A^* y]\|^2 \le \frac{2}{h}[A_0 y, y] \le \frac{4}{h^2}\|[y]\|^2 \tag{19}$$

Отсюда следуют, в частности, оценки для норм операторов A и A^*:

$$\|A\| = \|A^*\| \le \frac{2}{h} \qquad (20)$$

Мы рассматривали до сих пор оператор (3) во всем пространстве H_{N+1}. Исследуем свойства этого оператора в следующих подпространствах:

$$\left.\begin{aligned} &H_N^+ = \{y \in H_{N+1}, \quad y_0 = 0\}, \quad (y,v)_{H_N^+} = (y,v], \\ &H_N^- = \{y \in H_{N+1}, \quad y_N = 0\}, \quad (y,v)_{H_N^-} = [y,v), \\ &H_{N-1} = \overset{0}{\Omega} = \{y \in H_{N+1}, \quad y_0 = y_N = 0\}, \quad (y,v)_{H_{N-1}} = (y,v) \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Пусть функции *y, v* обращаются в нуль при *i*=0. Тогда тождество (2^*) принимает вид $y_1 \frac{v_1}{h} h + ((y, v_{\bar{x}}] = (-y_x, v) + \frac{y_N}{h} v_N h,$ (22)

где $((y, v_{\bar{x}}] = \sum_{i=2}^{N} y_i v_{\bar{x},i} h.$

Отсюда следует, что в пространстве H_N^+ являются взаимно сопряженными операторы A и A^*, определяемые формулами:

$$(Av)_1 = v_1/h \quad , (Av)_i = v_{\bar{x},i} \quad , i = 2,3,\cdots,N, \qquad (23)$$

$$(A^* y)_i = -y_{x,i} \quad , i = 1,2,\cdots,N-1, \quad (A^* y)_N = y_N/h \qquad (24)$$

Матрицы операторов (23) и (24) отличаются от матриц операторов (3) и (4) лишь порядком, поэтому их исследование проводится так же, как и во всем пространстве H_{N+1}. Приведем окончательные результаты. Для операторов $A_0 = 0{,}5(A + A^*)$ и $\overset{0}{A} = \frac{2}{h} A_0$, построенных по операторам (23) и (24), справедливы оценки:

$$\frac{32}{9\ell^2} \|y]|^2 \le \left(\overset{0}{A} y, y\right] \le \frac{4}{h^2} \|y]|^2, \qquad (25)$$

$$\frac{16h}{9\ell^2} \|y]|^2 \le (A_0 y, y) \le \frac{2}{h} \|y]|^2, \qquad (26)$$

Так как при $y \in H_N^+$ $\quad \left(\overset{0}{A} y, y\right] = \|y_{\bar{x}}]|^2 + \frac{1}{h} y_N^2,$ (27)

то неравенства (25) , (26) можно переписать в виде

$$\|y_{\bar{x}}]|^2 + \frac{y_N^2}{h} \geq \frac{32}{9\ell^2}\|y]|^2, \quad y_0 = 0, \tag{28}$$

$$\|y_{\bar{x}}]|^2 + \frac{y_N^2}{h} \leq \frac{4}{h^2}\|y]|^2, \quad y_0 = 0, \tag{29}$$

Рассмотрим далее множество H_N^- функций, обращающихся в нуль при i=N. Формула (2*) принимает вид $y_0\frac{v_0}{h} + \left(y, v_{\bar{x}}\right) = -\left[y_x, v\right)\right) + \frac{y_{N-1}}{h}v_{N-1}h$, а операторы A и A* определяются формулами:

$$(Av)_0 = {}^{v_0}\!/_{h}, \quad (Av)_i = v_{\bar{x},i}, \quad i = 1,2,\cdots,N-1,$$

$$(A^*y)_i = -y_{x,i}, \quad i = 0,1,\cdots,N-2, \quad (A^*y)_{N-1} = {}^{y_{N-1}}\!/_{h}$$

Эти операторы совпадают фактически с операторами (23) и (24). Оценки (28) и (29) можно переписать в виде

$$\|y_{\bar{x}}]|^2 + \frac{y_0^2}{h} \geq \frac{32}{9\ell^2}|[y||^2, \quad y_N = 0, \tag{30}$$

$$\|y_{\bar{x}}]|^2 + \frac{y_0^2}{h} \leq \frac{4}{h^2}|[y||^2, \quad y_N = 0, \tag{31}$$

Пусть, наконец, $y_0 = y_N = v_0 = v_N = 0$. Тогда формулу (2*) можно записать в виде: $y_1\frac{v_1}{h} + \left(\left(y, v_{\bar{x}}\right) = \left(-y_x, v\right)\right) + \frac{y_{N-1}}{h}v_{N-1}h,$ а операторы A и A* определить следующим образом:

$$(Av)_1 = {}^{v_1}\!/_{h}, \quad (Av)_i = v_{\bar{x},i}, \quad i = 1,2,\cdots,N-1, \tag{32}$$

$$(A^*y)_i = -y_{x,i}, \quad i = 1,2,\cdots,N-2, \quad (A^*y)_{N-1} = {}^{y_{N-1}}\!/_{h} \tag{33}$$

Отсюда, как и ранее, получаем оценку

$$\frac{8}{\ell^2}\|y\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}]|^2 \leq \frac{4}{h^2}\|y\|^2, \quad y_0 = y_N = 0 \qquad (34).$$

2. Функции разностных операторов.

В теории устойчивости разностных схем, приходится иметь дело с некоторыми «вспомогательными» операторами, связанными каким-либо образом с этими «основными» операторами. Так, если A - «основной» оператор, то в процессе промежуточных выкладок мы можем пользоваться, например, операторами A^{-1}, $A^{1/2}$, A^*A, A^2, $A_0=0,5(A+A^*)$ и другие.

Не все эти операторы являются разностными в том смысле, что они аппроксимируют какое-либо дифференциальное выражение. Однако они, как и основной оператор A, определен в пространстве сеточных функций. В некоторых случаях вспомогательные операторы A^{-1}, $A^{1/2}$, A^*A можно построить в явном виде.

Приведем примеры таких построений.

Будем рассматривать сетку $\overline{\omega}_h = \left\{x_i = ih\,,\quad i = 0,1,\cdots,N,\quad h = \tfrac{1}{N}\right\}$ и множество H функций, заданных на этой сетке.

Рассмотрим оператор левой разностной производной.

$$(Ay)_0 = \tfrac{y_0}{h}\,,\quad (Ay)_i = y_{\bar{x},i}\,,\quad i = 1,2,\cdots,N. \qquad (35)$$

Найдем оператор A^{-1}, обратный оператору (35). Для этого решим уравнение

$$Ay=f\,, \qquad (36)$$

где $f=\{f_0,f_1,\dots,f_N\}$ - произвольный вектор из H.

Записывая (35), (36) в виде $y_k=y_{k-1}+hf_k\,,\ k=1,2,\dots,N,\ \ y_0=hf_0$, находим

$$y_i = \sum_{k=0}^{i} hf_k\,,\quad i = 0,1,\cdots,N.$$

Следовательно, оператор A^{-1} существует и задается тождествами:

$$\left(A^{-1}y\right)_i = \sum_{k=0}^{i} hy_k\,,\quad i = 0,1,\cdots,N \qquad (37)$$

Матрица этого оператора имеет вид

$$A^{-1} = h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (38)$$

Введем скалярное произведение $[y,v] = \sum_{i=0}^{N} y_i v_i h$ (39)

и построим сопряженный оператору (35) оператор правой разностной производной

$$\left(A^* y\right)_i = -y_{x,i}\ , \quad i = 0,1,\cdots,N-1\ , \quad \left(A^* y\right)_N = {y_N}/{h} \tag{40}$$

Вычислим операторы A^*A и AA^*. Пусть $y = \{y_0, y_1, \cdots, y_{N-1}, y_N\}$. Тогда

$$Ay = \frac{1}{h}\{y_0, y_1 - y_0, \cdots, y_{N-1} - y_{N-2}, y_N - y_{N-1}\},$$

$$A^* Ay = \frac{1}{h^2}\{-y_1 + 2y_0, -y_2 + 2y_1 - y_0, \cdots, -y_N + 2y_{N-1} - y_{N-2}, y_N - y_{N-1}\} \tag{41}$$

Точно так же

$$A^* y = \frac{1}{h}\{-y_1 + y_0, -y_2 + y_1, \cdots, -y_N + y_{N-1}, y_N\},$$

$$AA^* y = \frac{1}{h^2}\{-y_1 + y_0, -y_2 + 2y_1 - y_0, \cdots, -y_N + 2y_{N-1} - y_{N-2}, 2y_N - y_{N-1}\}.$$

Следовательно, во внутренних точках i=1,2,…,N-1 значения операторов A^*A и AA^* совпадают: $\left(A^* Ay\right)_i = \left(AA^* y\right)_i = -y_{\bar{x}x,i}\ , \quad i = 1,2,\cdots,N-1$. В граничных точках такое совпадение имеет место лишь в том случае, если $y_0=y_N=0$.

Итак, рассмотрим подпространство $\overset{0}{\Omega}$ пространства H, состоящее из сеточных функций, обращающихся в нуль при i=0 и i=N. В этом подпространстве $A^*A=AA^*$, т.е. A - нормальный оператор.

Кроме того, $0{,}5\left(A + A^*\right)y = \dfrac{1}{2h}\{2y_0 - y_1, -y_2 + 2y_1 - y_0, \cdots, 2y_N - y_{N-1}\}$

и, следовательно, $A_0 = 0{,}5\left(A^* + A\right) = \dfrac{h}{2} A^* A\ ,$ (42)

если $y \in \overset{0}{\Omega}$.

Перестановочность со своим сопряженным оператором не имеет места, если вместо (35) рассматривать оператор с переменными коэффициентами

$$\left(Ay\right)_i = a_i y_{\bar{x},i}\ , \quad i = 1,2,\cdots,N-1\ , \quad y_0 = y_N = 0 \tag{43}$$

Применяя первую разностную формулу Грина (7^*) получаем

$$\left(Ay, v\right) = -\left(y, \left(av\right)_x\right),$$

т.е. сопряженным оператору (43) является оператор

$$\left(A^* y\right)_i = -(ay)_{x,i}\ ,\quad i = 0,1,\cdots,N-1\ ,\quad y_0 = y_N = 0. \tag{44}$$

Поэтому

$$\left(A^* Ay\right)_i = -\left(a^2 y_{\bar{x}}\right)_{x,i}\ ,\ \left(AA^* y\right)_i = -a_i\left((ay)_x\right)_{\bar{x},i}\ ,$$

откуда получаем

$$h^2\left[\left(AA^* y\right)_i - \left(A^* Ay\right)_i\right] = \left(a_{i+1} - a_i\right)\left(a_{i+1} y_{i+1} - \left(a_{i+1} + a_i\right) y_i\right) + \left(a_i - a_{i-1}\right) a_i y_{i-1}$$

т. е. $A^* A = AA^*$ лишь в случае $a \equiv const$.

Рассмотрим теперь в пространстве $\overset{0}{\Omega}$ оператор

$$(Ay)_i = -\left(ay_{\bar{x}}\right)_{x,i}\ ,\quad i = 1,2,\cdots,N-1\ , \tag{45}$$

и построим в явном виде обратный ему оператор.

Для этого достаточно решить уравнение

$$\left(ay_{\bar{x}}\right)_{x,i} = -f_i\ ,\quad i = 1,2,\cdots,N-1\ ,\quad y_0 = y_N = 0\,. \tag{46}$$

Вводя функцию

$$\eta_i = \sum_{k=0}^{i-1} hf_k \quad i = 1,2,\cdots,N\ , \tag{47}$$

получаем $\eta_{x,s} = f_s$, $\left(ay_{\bar{x}}\right)_{x,s} = -\eta_{x,s}$, $s = 1,2,\cdots,N-1$, и, следовательно,

$$a_s y_{\bar{x},s} = -\eta_s + c\ ,\quad s = 1,2,\cdots,N \tag{48}$$

где c – постоянная, которая будет определена из граничных условий. Далее, поделив (48) на a_s и просуммировав по s от 1 до i, получим

$$y_i = -\sum_{s=1}^{i} \frac{h\eta_s}{a_s} + c\sum_{s=1}^{i} \frac{h}{a_s}\ ,\quad i = 1,2,\cdots,N.$$

В частности, при i=N имеем

$$0 = y_N = -\sum_{s=1}^{N} \frac{h\eta_s}{a_s} + c\sum_{s=1}^{N} \frac{h}{a_s}\ ,$$

откуда находим значение постоянной c:

$$c = \left(\sum_{s=1}^{N} \frac{h\eta_s}{a_s}\right) \Big/ \left(\sum_{s=1}^{N} \frac{h}{a_s}\right) \tag{49}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$y_i = \left(A^{-1}f\right)_i = -\sum_{s=1}^{i}\frac{h\sum\limits_{k=0}^{s-1}hf_k}{a_s} + \left(\sum_{s=1}^{i}\frac{h}{a_s}\right)\left(\sum_{s=1}^{N}\frac{h\sum\limits_{k=0}^{s-1}hf_k}{a_s}\right)\Bigg/\left(\sum_{s=1}^{N}\frac{h}{a_s}\right) \qquad (50)$$

Если $a_s \equiv 1$, то это выражение несколько упрощается:

$$y_i = \left(A^{-1}f\right)_i = -\sum_{s=1}^{i}h\sum_{k=0}^{s-1}hf_k + x_i\sum_{s=1}^{N}h\sum_{k=0}^{s-1}hf_k \qquad (50^*)$$

Если $a_i \succ 0$, то с помощью оператора (45) можно определить так называемую негативную норму

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} = \sqrt{\left(A^{-1}\varphi,\varphi\right)}\ .$$

Вычислим скалярное произведение $\left(A^{-1}\varphi,\varphi\right)$, предполагая для простоты, что $a_i \equiv 1$. Рассмотрим уравнение

$$-y_{\bar{x}x,i} = \varphi_i\ ,\quad i = 1,2,\cdots,N-1\,,\quad y_0 = y_N = 0\,, \qquad (51)$$

или, в операторной форме $\quad Ay = \varphi$ (52)

Тогда $y = A^{-1}\varphi$ и $\left(A^{-1}\varphi,\varphi\right) = \left(y,\varphi\right)$. Таким образом, нам надо вычислить скалярное произведение $\left(y,\varphi\right)$, где y есть решение задачи (51). Умножая (51) скалярно на y и учитывая формулу Грина (7*), получаем

$$\left(A^{-1}\varphi,\varphi\right) = \left(y,\varphi\right) = \left\|y_{\bar{x}}\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}y_{\bar{x},i}^2 h.$$

Но согласно (48), (49) и (47) имеем

$$-y_{\bar{x},i} = \eta_i - c\,,$$

$$\left\|y_{\bar{x}}\right]\right| = \|\eta]|^2 - 2c\sum_{i=1}^{N}h\eta_i + c^2 = \|\eta]|^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{N}h\eta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N}h\eta_i\right)^2, \text{ т. е.}$$

$$\left(A^{-1}\varphi,\varphi\right) = \sum_{i=1}^{N}h\left(\sum_{k=0}^{i-1}h\varphi_k\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}h\sum_{k=0}^{i-1}h\varphi_k\right)^2 \qquad (53)$$

Отсюда следует, в частности, оценка

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = \left(A^{-1}\varphi,\varphi\right) \le \sum_{i=1}^{N}h\left(\sum_{k=0}^{i-1}h\varphi_k\right)^2. \qquad (54)$$

Покажем теперь, не приводя всех выкладок, как можно построить квадратный корень из оператора

$$\left(Ay\right)_i = -y_{\bar{x}x,i}, \quad \text{i=1,2,…,N-1}, \quad y_0=y_N=0. \tag{55}$$

Матрица оператора (55) является квадратной матрицей (N-1)-го порядка и имеет вид

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{56}$$

Вопрос сводится фактически к построению квадратного корня из этой матрицы. Так как (56) – симметричная положительно определенная матрица, то ее можно привести к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования подобия

$$Q^{-1}AQ=D. \tag{57}$$

Здесь Q – ортогональная матрица, т.е. $Q^{-1}= Q^{*}$, а D – диагональная матрица, диагональ которой состоит из собственных значений матрицы (56).

$$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{N-1}), \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi kh}{2} \tag{58}$$

В качестве матрицы Q можно взять матрицу, столбцы которой состоят из соответствующим образом нормированных собственных функций оператора (55). Ортонормированные собственные функции оператора (55) имеют вид

$$\mu_k(x_i) = \sqrt{2}\sin \pi k x_i, \qquad x_i = ih, \text{ причем } \left\|\mu_k\right\|^2 = h\sum_{i=1}^{N-1}\mu_k^2(x_i) = 1.$$

Следовательно, матрица $Q=(q_{ki})$ имеет составляющие:

$$q_{ki} = \sqrt{h}\mu_k(x_i) = \sqrt{2h}\sin \pi kih. \tag{59}$$

При таком выборе собственных функций матрица Q является ортогональной и, кроме того, симметричной, так как $q_{ki}=q_{ik}$.

Поэтому из (57) получаем $A=QDQ^{-1}=QDQ$, следовательно,

$$A^{1/2}=QD^{1/2}Q^{-1}=QD^{1/2}Q. \tag{60}$$

Согласно (58) матрица $D^{1/2}$ имеет вид $D^{1/2} = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_{N-1}})$,

где под корнем $\sqrt{\lambda_k}$ понимается положительное значение корня:

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{2}{h}\sin\frac{\pi kh}{2}\,, \qquad k=1,2,\ldots,N-1,\ h=1/N. \tag{61}$$

Из выражений (59) – (61) следует, что составляющие $a_{\alpha\beta}$ матрицы $A^{1/2}$ вычисляются по правилу $a_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{N-1} q_{\alpha\gamma}\sqrt{\lambda_\gamma}\,q_{\gamma\beta}$, т. е. $A^{1/2}=(a_{\alpha\beta})$, где

$$a_{\alpha\beta} = 4\sum_{\gamma=1}^{N-1}\sin\pi\alpha\gamma h\sin\frac{\pi\gamma h}{2}\sin\pi\gamma\beta h. \tag{62}$$

В отличие от исходной матрицы (56), матрица (62) не является трехдиагональной. Например, в случае N=4, когда

$$A = 16\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{63}$$

матрица $A^{1/2}$ имеет вид $A^{1/2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{12} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$, где

$$a_{11} = \sqrt{2+\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,,\ a_{12} = -\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right),$$

$$a_{13} = \sqrt{2+\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,,\ a_{22} = 2\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

Вычислим теперь квадрат оператора (55). Ясно, что в точках i=2,3,…,N-2 оператор A^2 определяется как четвертая разностная производная,

$\left(A^2 y\right)_i = y_{\bar{x}x\bar{x}x,i}$, i=2,3,…,N-2, и нам остается определить оператор A^2 в точках i=1, i=N-1. Возводя матрицу (56) в квадрат, получим

$$A^2 = \frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & & & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Следовательно, в точках i=1, i=N-1 имеем

$$\left(A^2 y\right)_1 = \frac{1}{h^4}(5y_1 - 4y_2 + y_3) = -\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}x,1} + \frac{1}{h} y_{\bar{x}xx,1},$$

$$\left(A^2 y\right)_{N-1} = \frac{1}{h^4}(y_{N-3} - 4y_{N-2} + 5y_{N-1}) = -\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}x,N-1} - \frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}x,N-1},$$

и оператор A^2, соответствующий (55), определяется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(A^2 y\right)_i = y_{\bar{x}x\bar{x}x,i}, \quad i = 2,3,\cdots,N-2,\\
&\left(A^2 y\right)_1 = -\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}x,1} + \frac{1}{h} y_{\bar{x}xx,1},\\
&\left(A^2 y\right)_{N-1} = -\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}x,N-1} - \frac{1}{h} y_{\bar{x}x\bar{x},N-1},\\
&y_0 = y_N = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Если ввести дополнительные точки i=-1 и i=N+1 и положить $y_{-1}=-y_1$, $y_{N+1}=-y_{N-1}$, то оператор (65) совпадает с оператором $\left(A^2 y\right)_i = y_{\bar{x}x\bar{x}x,i}, \quad i = 1,2,\cdots,N-1, \quad y_0 = y_N = 0.$

Рассмотрим еще оператор сдвига

$$(Ty)_i = y_{i+1}, \quad i = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots, \qquad (66)$$

который, в отличие от изученных ранее операторов, определен на сетке

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}. \qquad (67)$$

Обратным оператору (66) является оператор

$$\left(T^{-1} y\right)_i = y_{i-1}, \quad i = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots, \qquad (68)$$

Вводя скалярное произведение $(y,v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_i v_i h,$ получим

$(Ty,v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_{i+1} v_i h = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_i v_{i-1} h = \left(y, T^{-1} v\right),$ т. е. T – унитарный оператор, $T^*=T^{-1}$. На основе оператора (66) можно построить и другие разностные операторы, определенные на сетке (67). Например, можно определить операторы левой и правой разностных производных

$$y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = \frac{1}{h}(E - T^{-1})y_i, \qquad y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{h}(T - E)y_i,$$

оператор второй разностной производной

$$y_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h^2}(T - 2E + T^{-1})y_i,$$

многочлен от оператора сдвига

$$(Py)_i = \sum_{\alpha=-m}^{m} a_\alpha y_{i+\alpha} = \left(\sum_{\alpha=-m}^{m} a_\alpha T^\alpha\right) y_i .$$

Переходя к сетке $\overline{\omega}_h = \left\{x_i = ih, \quad i = 0,1,\cdots,N, \quad h = 1/N\right\}$, оператор сдвига можно определить, например, следующим образом:

$$(Ty)_i = y_{i+1}, \quad i = 0,1,\cdots,N-1, \quad (Ty)_N = y_0 . \qquad (69)$$

При этом оператор T^{-1} существует и определяется формулами

$$(T^{-1}y)_0 = y_N, \quad (T^{-1}y)_i = y_{i-1}, \quad i = 1,2,\cdots,N. \qquad (70)$$

Сохраняется свойство унитарности оператора сдвига:

$$[Ty,v] = \sum_{i=0}^{N} (Ty)_i v_i h = \sum_{i=0}^{N-1} y_{i+1} v_i h + y_0 v_N h = \sum_{i=1}^{N} y_i v_{i-1} h + y_0 v_N h = [y, T^{-1}v]$$

Отметим, что оператор T можно доопределить в точке i=N различными способами, наиболее общим из которых является задание $(Ty)_N$ как произвольной линейной комбинации y_i, i=0, 1, …, N, т. е.

$$(Ty)_N = \sum_{\alpha=0}^{N} c_\alpha y_\alpha .$$

При этом оператор T^{-1} существует тогда и только тогда, когда $c_0 \neq 0$.

Заключение

Таким образом, проведенные исследования позволяют записать разностную схему, как самостоятельный математический объект и может изучаться вне связи с породившей ее дифференциальной задачей. При этом отпадают проблемы аппроксимации и сходимости и остается лишь проблема корректности разностной схемы, т. е ее разрешимости и устойчивости. При этом устойчивость записывается в виде операторных неравенств.

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем.-М.:Наука, 1977.- 656 с.

2. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем.-М.:Наука, 1973.- 416 с.