Міністерство освіти і науки України
Донецький національний технічний університет

Кафедра "Вища математика"

Збірник науково-методичних робіт

Випуск 4

Донецьк -2006

УДК 5:371.214.114, 621.923, 517.95(09), 531.18, 915.77.54, 531.38, 517.9,
517, 518, 531, 517.8, 539.5, 517.926.

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного технічного Університету
Протокол № 9 від 22.12. 2006 р.

Збірник науково-методичних робіт. - Вип. 4. - Донецьк: ДонНТУ, 2006. -167с.

В збірнику представлено різні напрямки застосування математичних методів до розв'зання інженерних задач, а саме, задач механіки твердого тіла, фізики магнітних явищ, статистичної фізики та інших.

Науково-методичні роботи є узагальненням досвіду викладачів кафедри по удосконалюванню математичної підготовки спеціалістів.

Видання розраховано на широке коло наукових робітників, а також аспірантів та студентів старших курсів університетів.

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учбовий корпус, кафедра "Вища математика", тел. (062) 3010901.

УДК 531.18

О влиянии неголономных связей на свойства регулируемых систем

Абдулин Р.Н.

Донецкий национальный технический университет

Вопрос о влиянии неголономной связи на стабилизируемость механической системы исследовался в работе [1] на примере управляемого движения системы, состоящей из двух тяжелых материальных точек, которые могут скользить вдоль тонкого невесомого стержня. Было показано, что неустойчивое положение равновесия точек на вершинах эллипсоидальных горок специального вида, нестабилизируемое действующим вдоль стержня скалярным управлением, станет стабилизируемым после наложения специально подобранной неголономной связи.

В данной статье приводятся некоторые модификации этого примера, иллюстрирующие результаты работы [2], в которой был указан общий вид неголономных связей, позволяющих стабилизировать нестабилизируемое (до наложения этих связей) состояние равновесия системы с сервосвязями. На этом же примере иллюстрируется указанный в [2] алгоритм выбора неголономных связей, позволяющих стабилизировать произвольную конфигурацию сервосистемы, не являющуюся ее состоянием равновесия.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух точек M_1 и M_2 единичной массы, которые могут скользить без трения вдоль тонкого невесомого стержня. Положение системы задается в неподвижной декартовой системе координат Oxyz (ось Oz направлена вертикально вверх) координатами точек M_1 и M_2: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.

Будем считать, что точки M_1 и M_2 находятся на некоторых поверхностях $z_1 = z_1(x_1, y_1)$, $z_2 = z_2(x_2, y_2)$, которые расположены таким образом, что система обладает состоянием равновесия

$$x_1 = 1,\ x_2 = y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0 \qquad (1)$$

совместным с сервосвязями

$$x_1 - 1 = 0,\ x_2 = 0 \qquad (2)$$

Предположим, что на систему действуют две силы управления (реакции сервосвязей) P_1 и P_2, приложенные соответственно к точкам M_1 и M_2 и действующие вдоль стержня, с условиями на (A)-перемещения:

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)\delta x_1 + (y_2 - y_1)\delta y_1 = 0\\ (x_2 - x_1)\delta x_2 + (y_2 - y_1)\delta y_2 = 0\end{aligned} \qquad (3)$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы в декартовых координатах задаются выражениями

$$T=\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2\right),\quad U=-g(z_1+z_2)$$

Для простоты будем полагать, что единицы измерения подобраны так, что ускорение свободного падения g=1. Поскольку точки находятся на некоторых поверхностях, то координаты z_1 и z_2 будут зависимыми. Введем обобщенные координаты $q_1=x_1-1,\quad q_2=y_1,\quad q_3=x_2,\quad q_4=y_2$.
В уравнениях движения с множителями сервосвязей [3] для этой задачи

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial U}{\partial q_i}+\lambda_\kappa c_{\kappa i}=0\quad(i=1,..,4;\ \kappa=1,2)\qquad(4)$$

будем иметь

$$c_{11}=q_3-q_1-1;\quad c_{12}=q_4-q_2;\quad c_{13}=c_{14}=0;$$
$$c_{21}=c_{22}=0;\quad c_{23}=q_3-q_1-1;\quad c_{24}=q_4-q_2.$$

Рассмотрим задачу о формировании реакций сервосвязей, стабилизирующих состояние равновесия (1) для некоторых типов поверхностей $z_1=z_1(x_1,y_1),\ z_2=z_2(x_2,y_2)$.

<u>Пример 1.</u> Пусть обе поверхности – сферические:

$$z_1=\sqrt{1-(x_1-1)^2-y_1^2}-1,\quad z_2=\sqrt{1-x_2^2-y_2^2}-1.$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы в этом случае задаются равенствами

$$T=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+\dot{q}_4^2\right)+T_1(\dot{q},q),\quad U=\frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2\right)+U_1(q)\ (5)$$

Здесь функции $T_1(\dot{q},q),\ U_1(q)$ содержат члены выше второй степени разложения функции $T(\dot{q},q),\quad U(q)$ в ряд по степеням переменных $\dot{q},q$. При $\lambda_1\equiv 0,\ \lambda_2\equiv 0$ уравнения движения (4) допускают состояние равновесия

$$q_i=0\quad(i=1,..,4)\qquad(6)$$

Вводя возмущения множителей сервосвязей $\lambda_\kappa=u_\kappa\quad(\kappa=1,2)$ и выделяя в (4) линейную по возмущениям $\dot{q}_i,q_i,u_\kappa$ часть, получим

$$\ddot{q}_i=q_i-c_{\kappa i}^0u_\kappa+f_i(\dot{q},q,u)\quad(i=1,..,4;\ \kappa=1,2)$$

Линейная часть этой системы

$$\ddot{q}_1=q_1+u_1,\quad\ddot{q}_2=q_2,\quad\ddot{q}_3=q_3+u_2,\quad\ddot{q}_4=q_4$$

нестабилизируема, и более того, имеет порядок стабилизируемости (минимальную размерность управления), равный четырем. Согласно результатам работы [2] для достижения стабилизируемости на систему достаточно наложить две идеальные неголономные связи вида

$$a_{si}(q)\dot{q}_i=0,\quad a_{si}^0=\delta_i^s.\ (i=1,..,4;\ s=2,4).$$

Для этого можно поместить колесики с режущим краем в точках M_1 и M_2 так, чтобы скорость этих точек была направлена вдоль стержня:

$$(q_4 - q_2)\dot{q}_1 + (q_1 - q_3 + 1)\dot{q}_2 = 0 \qquad (7)$$

$$(q_4 - q_2)\dot{q}_3 + (q_1 - q_3 + 1)\dot{q}_4 = 0 \qquad (8)$$

Нетрудно проверить, что условия (3) на (А)-перемещения совместны со связями (7), (8). Составим уравнения движения системы со связями (7)-(8) в виде (5) и выделим в них линейные части:

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= q_1 + u_1 + \varphi_1(\dot{q}, q, u, \Lambda) \\
\ddot{q}_2 &= q_2 + \Lambda_1 + \varphi_2(\dot{q}, q, u, \Lambda) \\
\ddot{q}_3 &= q_3 + u_2 + \varphi_3(\dot{q}, q, u, \Lambda) \\
\ddot{q}_4 &= q_4 + \Lambda_2 + \varphi_4(\dot{q}, q, u, \Lambda)
\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\dot{q}_2 = \psi_1(\dot{q}, q) \quad \dot{q}_4 = \psi_2(\dot{q}, q) \qquad (10)$$

Продифференцируем по времени связи (10), подставим туда вторые производные из (9) и разрешим относительно Λ_1 и Λ_2:

$$\Lambda_1 = -q_2 + \psi_1^*(\dot{q}, q, u), \quad \Lambda_2 = -q_4 + \psi_2^*(\dot{q}, q, u)$$

Исключая теперь Λ_1 и Λ_2 из первого и третьего уравнений (9) и добавляя уравнения связей (10), получим уравнения движения системы без множителей идеальных неголономных связей:

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= q_1 + u_1 + \tilde{\varphi}_1(\dot{q}, q, u) \\
\ddot{q}_3 &= q_3 + u_2 + \tilde{\varphi}_2(\dot{q}, q, u) \\
\dot{q}_2 &= \psi_1(\dot{q}, q) \\
\dot{q}_4 &= \psi_2(\dot{q}, q)
\end{aligned} \qquad (11)$$

Линейная подсистема

$$\ddot{q}_1 = q_1 + u_1, \quad \ddot{q}_3 = q_3 + u_2 \qquad (12)$$

вполне управляема и, следовательно, стабилизируема некоторым линейным регулятором [4]:

$$u_\kappa = \alpha_{\kappa\mu} \cdot \dot{q}_\mu + \beta_{\kappa\mu} \cdot \dot{q}_\mu \quad (\kappa = 1{,}2;\ \mu = 1{,}3) \qquad (13)$$

причем коэффициенты $\alpha_{\kappa\mu}, \beta_{\kappa\mu}$ можно подобрать так, чтобы характеристическое уравнение замкнутой системы (12) имело наперед заданные корни [5]. В силу теоремы Ляпунова-Малкина любой регулятор (13), стабилизирующий линейную подсистему (12), будет стабилизировать систему (11) до устойчивости по-Ляпунову.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда система движется по наклонной плоскости: $z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2$, тогда

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_4^2\right), \quad U = -(q_2 + q_4)$$

В этом случае уравнение движения (4) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ не допускает состояний равновесия на наклонной плоскости. Будем считать, что для стабилизации конфигурации (1) на систему наряду с сервосвязями (2) наложены идеальные неголономные связи (7), (8). Из уравнений движения

$$\ddot{q}_1 = u_1 + \Lambda_1(q_4 - q_2) + u_1(q_1 - q_3)$$
$$\ddot{q}_2 = -1 + \Lambda_1(q_1 - q_3 + 1) + u_1(q_2 - q_4)$$
$$\ddot{q}_3 = u_2 + \Lambda_2(q_4 - q_2) + u_2(q_1 - q_3)$$
$$\ddot{q}_4 = -1 + \Lambda_2(q_1 - q_3 + 1) + u_2(q_2 - q_4)$$

исключим множители Λ_1 и Λ_2 с помощью уравнений связей (7), (8) и выделим линейные части:

$$\ddot{q}_1 = u_1 + \varphi_1^*(\dot{q}, q, u), \quad \dot{q}_2 = \varphi_2^*(\dot{q}, q)$$
$$\ddot{q}_3 = u_2 + \varphi_3^*(\dot{q}, q, u), \quad \dot{q}_4 = \varphi_4^*(\dot{q}, q)$$

Линейная подсистема $\ddot{q}_1 = u_1$, $\ddot{q}_3 = u_2$ вполне управляема и, следовательно, стабилизируема некоторым линейным регулятором

$$u_\kappa = \alpha^*{}_{\kappa\mu} \cdot \dot{q}_\mu + \beta^*{}_{\kappa\mu} \cdot q_\mu \quad (\kappa = 1,2;\ \mu = 1,3) \qquad (14)$$

Этот же регулятор, в силу теоремы Ляпунова-Малкина будет стабилизировать конфигурацию (1) системы на наклонной плоскости после наложения неголономных идеальных связей (7), (8).

В заключении отменим, что конкретный вид линейных регуляторов (13) и (14), в соответствии с которыми формируются стабилизирующие реакции сервосвязей, может быть найден методами, изложенными в дополнении IV работы [4].

Литература

1. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. О влиянии неголономной связи на стабилизируемость механической системы. – ПММ, 1968, т. XXXII, вып. 4, с. 744-747.
2. Абдулин Р.Н. О стабилизации состояния равновесия неголономной системы. Рукопись депонирована в УзНИИНТИ 9 сент. 1980 г., деп. №22, - 24 с.
3. Беген А. Теория гироскопических компасов. –М.:Наука, 1967.–192 с.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения.–М.,Наука, 1966,-530 с.
5. Уонем М. Линейные многомерные системы управления. – М.: Наука, 1980, -376 с.

СОДЕРЖАНИЕ