Дискретне косинусне перетворення

1. Одномірне ДКП

Комп'ютерні мультимедійні сигнали (звук, графіка, відео) представлені речовинними числами. Застосування ДПФ для такого типу сигналів є не раціональним через необхідність розрахунку мнимої частини перетворення. Тому при обробці звуку, графіки або відео використовується різновид ДПФ, що передбачає розрахунок тільки дійсної частини – *дискретне косинусне перетворення (ДКП, DCT)*.

За допомогою ДКП вхідний вектор відліків перетворюється у вектор спектральних коефіцієнтів. Перетворення реалізується як множення квадратної косинусної матриці на вхідний вектор-стовпець:

$$X(k) = A(k,n)\cdot x(n).$$

Формула для елемента матриці, розташованого в n-*стовпці k-рядка*, має вигляд: $A(k,n) = \varepsilon(k)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n-1)(k-1)\right)$,

де k=1…N,n=1…N, $\varepsilon(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, k=1 \\ \sqrt{2/N}, k=2...N \end{cases}$

Загальне вираження для розрахунку ДКП має вигляд:

$$X(k) = \sum_{n=1}^{N} x(n)\cdot\left[\varepsilon(k)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n-1)(k-1)\right)\right].$$

Наприклад, при N=8 матриця має вигляд:

$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	…	$\frac{1}{\sqrt{8}}$
$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}1\cdot 1\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}3\cdot 1\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}5\cdot 1\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}7\cdot 1\right)$	…	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}15\cdot 1\right)$
$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}1\cdot 2\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}3\cdot 2\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}5\cdot 2\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}7\cdot 2\right)$	…	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}15\cdot 2\right)$
$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}1\cdot 3\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}3\cdot 3\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}5\cdot 3\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}7\cdot 3\right)$	…	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}15\cdot 3\right)$
$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}1\cdot 4\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}3\cdot 4\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}5\cdot 4\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}7\cdot 4\right)$	…	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}15\cdot 4\right)$
$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}1\cdot 5\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}3\cdot 5\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}5\cdot 5\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}7\cdot 5\right)$	…	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}15\cdot 5\right)$
…	…	…	…	…	…
$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}1\cdot 7\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}3\cdot 7\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}5\cdot 7\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}7\cdot 7\right)$	…	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 8}15\cdot 7\right)$

Рис.1 Матриця для DCT-8

Чисельні значення матриці являють собою функції, які називаються *базисними косинусними функціями*. В матриці присутня симетрія щодо середньої вертикалі, по черзі для рядків - парна й непарна:

0.3536	0.3536	0.3536	0.3536	0.3536	0.3536	0.3536	0.3536
0.4904	0.4157	0.2778	0.0975	-0.0975	-0.2778	-0.4157	-0.4904
0.4619	0.1913	-0.1913	-0.4619	-0.4619	-0.1913	0.1913	0.4619
0.4157	-0.0975	-0.4904	-0.2778	0.2778	0.4904	0.0975	-0.4157
0.3536	-0.3536	-0.3536	0.3536	0.3536	-0.3536	-0.3536	0.3536
0.2778	-0.4904	0.0975	0.4157	-0.4157	-0.0975	0.4904	-0.2778
0.1913	-0.4619	0.4619	-0.1913	-0.1913	0.4619	-0.4619	0.1913
0.0975	-0.2778	0.4157	-0.4904	0.4904	-0.4157	0.2778	-0.0975

Наприклад, вхідний дискретний сигнал має відліки $x(0)$=0,3536, $x(1)$=0,3536, $x(2)$=0,6464, $x(3)$=1,0607, $x(4)$=0,3536, $x(5)$=-1,0607, $x(6)$=-1,3536, $x(7)$=-0,3536. Результат ДКП такого сигналу має значення, які показано в таблиці, а спектр показаний на рис.2. Значення коефіцієнтів:

	N=8	N=16	N=24	N=32
X(1)	0	0	0	0
X(2)	1.5997	0.9091	0.7164	0.6129
X(3)	-0.7654	0	0	0
X(4)	-0.9061	1.9238	0.9236	0.7000
X(5)	1.0001	-1.0824	0	0
X(6)	-0.1803	-1.4550	2.2412	0.9810
X(7)	-0.0001	0	-1.3257	0
X(8)	-0.0423	-0.3774	-1.8616	2.5256
X(9)		1.4143	0	-1.5308
X(10)		-0.1758	-0.5231	-2.1978
X(11)		0	0	0
X(12)		-0.0933	-0.2661	-0.6433
X(13)		-0.0001	1.7322	0
X(14)		-0.0472	-0.1607	-0.3406
X(15)		0	0	0
X(16)		-0.0145	-0.1041	-0.2150
X(17)			0	2.0001
X(18)			-0.0686	-0.1475
X(19)			-0.0001	0
X(20)			-0.0438	-0.1056
X(21)			0	0
X(22)			-0.0244	-0.0771
X(23)			0	0
X(24)			-0.0079	-0.0563
X(25)				-0.0001
X(26)				-0.0403
X(27)				0
X(28)				-0.0270
X(29)				0
X(30)				-0.0156
X(31)				0
X(32)				-0.0051

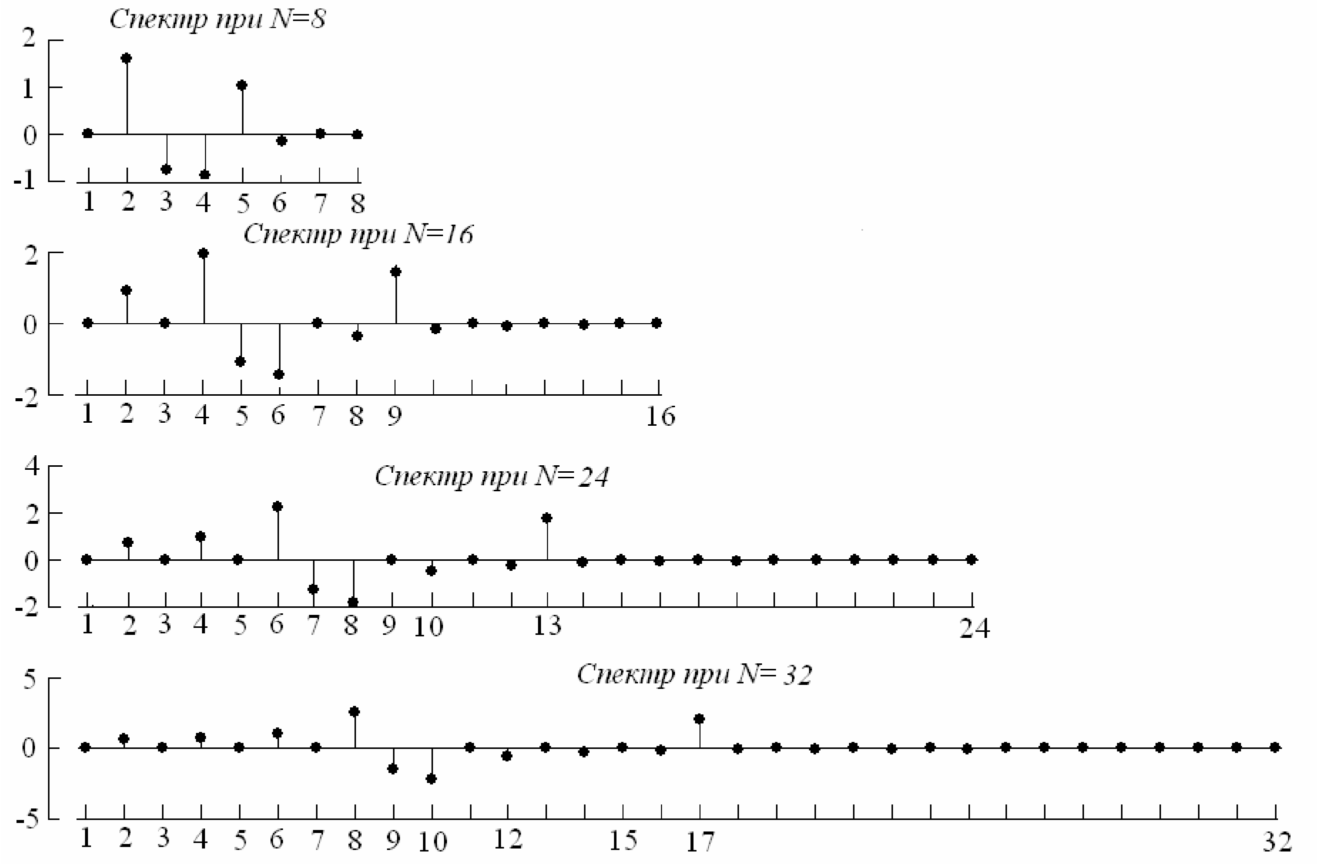


Рис.2 Спектр ДКП

При збільшенні кількості періодів розглянутого сигналу, наприклад до двох, трьох або чотирьох, у спектрі ДКП чітко розрізняється область концентрації інформації про сигнал. Ця область має розмір, дорівнює половині числа коефіцієнтів плюс один.

Такий розподіл інформації про сигнал не є випадковим. ДКП застосовується для стиску даних у системах *кодування перетворенням*. В основу ДКП покладені методи перетворення матриць, що дозволяють ущільнити енергію сигналу, тобто концентрувати основну частину інформації про сигнал у мінімальному числі коефіцієнтів перетворення.

Сигнали відновлюються відповідно до формули зворотного ДКП:

$$x(n) = A^T(k,n) \cdot X(k),$$

При відновленні сигналу застосовується транспонована матриця прямого ДКП.

ДКП ставиться до класу синусоїдальних унітарних перетворень, у яких матриця перетворення описує безліч базисних косинусоїдальних функцій. Існують 4 типи ДКП: I, II, III, IV. Розглянутий варіант є типом ДКП-II (транспонована матриця - ДКП-III).

На основі типових ДКП розроблено швидкі алгоритми ДКП.

2. Двовимірне ДКП

Двовимірне NxN ДКП виконується згідно наступного вираження:

$$X(s,r) = \varepsilon(s)\varepsilon(r)\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} x(l,m)\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2l+1)\cdot s\right)\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2m+1)\cdot r\right),$$

де $\varepsilon(i) = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, i=0 \\ \sqrt{2/N}, i=1...N-1 \end{cases}$, s=0…N-1–номер рядка, r=0…N-1–номер стовпця.

Одним із властивостей двовимірного ДКП (2ДКП) є його роздільність, відповідно до якої 2ДКП можна виконати за допомогою одномірних ДКП по рядках і стовпцям.

При такому підході пряме 2ДКП задається виразженням: $X = A \cdot x \cdot A^T$, яких можна трактувати як два добутки. Спочатку перемножуються вихідна матриця відліків сигналу та косинусна матриця, у результаті чого формується проміжна двовимірна матриця, тобто $X_1 = A \cdot x$. Ця операція відповідає обчисленню одномірного ДКП для кожного *стовпця* вхідної матриці відліків.

На другому етапі необхідно проміжну матрицю помножити на транспоновану матрицю ДКП, тобто $X = X_1 \cdot A^T$, що еквівалентно одномірному ДКП для кожного *рядка* проміжної матриці.

Матриця одномірного ДКП задається виразженням:

$A(k,n) = \varepsilon(k)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)\cdot k\right)$, де k=0…N-*1*,n=0…N-*1*, $\varepsilon(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, k=0 \\ \sqrt{2/N}, k=1...N-1 \end{cases}$

ДКП оперує з вихідними блоками, розміром NxN відліків, і формує блок розміром NxN деяких коефіцієнтів. При N=4 дію ДКП можна виконати за допомогою матриці перетворення, елементи якого рівні (k – номер рядка, n – номер стовпця):

$$\mathbf{A=} \begin{matrix} \frac{1}{2}\cos(0) & \frac{1}{2}\cos(0) & \frac{1}{2}\cos(0) & \frac{1}{2}\cos(0) \\ \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}1\cdot 1\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}3\cdot 1\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}5\cdot 1\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}7\cdot 1\right) \\ \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}1\cdot 2\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}3\cdot 2\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}5\cdot 2\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}7\cdot 2\right) \\ \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}1\cdot 3\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}3\cdot 3\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}5\cdot 3\right) & \sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}7\cdot 3\right) \end{matrix}$$

Тому що косинус є симетричною функцією з періодом 2π, то матрицю можна спростити:

$$\mathbf{A}=\begin{matrix} a & a & a & a \\ b & c & -c & -b \\ a & -a & -a & a \\ c & -b & b & -c \end{matrix}\quad \text{, де}\quad a=\frac{1}{2}, b=\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), c=\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$

Обчисливши косинуси, одержують матрицю числових коефіцієнтів:

$$\mathbf{A}=\begin{matrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}6533 & 0{,}2706 & -0{,}2706 & -0{,}6533 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}2706 & -0{,}653 & 0{,}653 & -0{,}2706 \end{matrix}$$

Наприклад, у результаті цифрування отриманий фрагмент зображення, що має наступні значення відліків:

$$x=\begin{matrix} 5 & 11 & 8 & 10 \\ 9 & 8 & 4 & 12 \\ 1 & 10 & 11 & 4 \\ 19 & 6 & 15 & 7 \end{matrix}$$

Результат обчислення одномірного ДКП для кожного *стовпця* вихідної матриці, тобто $X_1 = A \cdot x$, для даного приклада має значення:

X_1=	17	17.5	19	16.5
	-6.9812	2.7252	-6.4672	4.1246
	7	-0.5	4	0.5
	-9.0146	2.6596	2.6788	-4.4145

Результат множення проміжної матриці на транспоновану косинусну матрицю ($X = X_1 \cdot A^T$), що еквівалентно одномірному ДКП для кожного *рядка* проміжної матриці, тобто остаточний результат 2ДКП, має вигляд:

X=	35	-0.0793	-1.5000	1.1152
	-3.2992	-4.7678	0.4427	-9.0104
	5.5	3.0286	2	4.6987
	-4.0454	-3.0104	-9.3837	-1.2322

Порядок виконання матричних операцій множення (по стовпцях і рядкам) не має значення. Правильний результат буде отриманий при одномірному ДКП по рядках, а потім по стовпцях, що відповідає виразенню:

$$X = A \cdot x \cdot A^T = A \cdot \left(x \cdot A^T\right) = A \cdot X_2 .$$

Зворотне 2ДКП задається виразенням: $x = A^T \cdot X \cdot A$, яких можна розглядати як два добутки. Добуток $A^T \cdot X$ задає одномірне зворотне ДКП для *стовпців* вихідної матриці, а добуток $X \cdot A$ - одномірне зворотне ДКП для її *рядків*. Послідовність цих множень для одержання правильного результату не має значення.

На основі типової методики 2ДКП розроблені швидкі двовимірні алгоритми ДКП.

3. Застосування ДКП для стиску даних

У спектрі одномірного та двовимірного ДКП чітко помітна область концентрації інформації про сигнал. Концентрування основної частини інформації про сигнал у мінімальному наборі коефіцієнтів перетворення визначає застосування ДКП у методах стиску даних.

У методах стиску даних розраховані спектральні коефіцієнти *квантуються*. У даному застосуванні поняття квантування означає округлення речовинних чисел до цілих або перетворення цілих чисел у менші цілі за значенням. Розрізняють скалярне і векторне квантування.

При скалярному квантуванні рівень обнуління задається стосовно кожного коефіцієнта. Для забезпечення необхідного ступеня стиску незначущі коефіцієнти видаляються зазначенням необхідної ширини зони обнуління (рис.3).

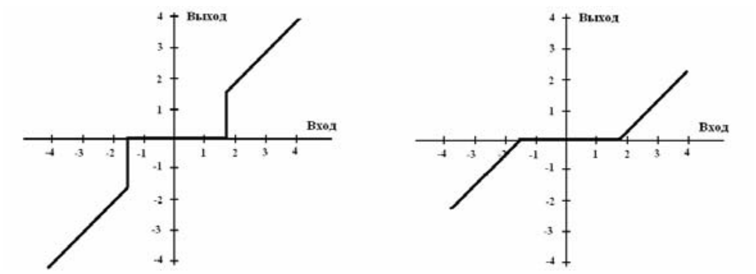
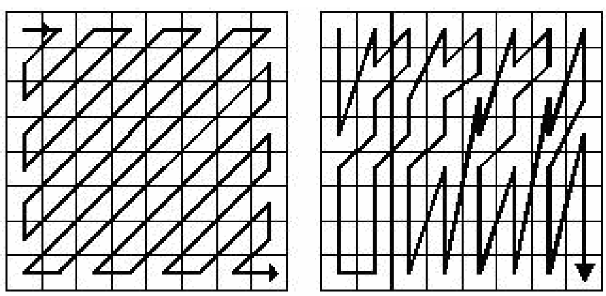


Рис.3 Нелінійний квантуватель із нульовою зоною

Наприклад, при рівні обнуління, рівному 4.0, з одночасним усіканням до цілого результат квантування коефіцієнтів DFT для попереднього випадку прийме вид:

X=	35	0	0	0
	0	-4	0	-9
	5	0	0	4
	-4	0	-9	0

У результаті квантування формується цифровий потік, у якому, в основному, присутні нулі. Значимі коефіцієнти звичайно групуються в області лівого верхнього коефіцієнта із приблизно симетричним розподілом уздовж діагоналі блоку. Для такого розподілу придатним порядком перегруппування є зиґзаґоподібне сканування з початком у верхньому лівому куті. Використовується також модифікований порядок *сканування*, при якому коефіцієнти в лівій частині блоку скануються раніше симетричних їм пар в правій частині блоку.



а) б)

Рис.4 Варіанти сканування в блоках

Для попереднього прикладу буде сформований наступний потік значень: 35, 0, 0, 5, -4, 0, 0, 0, 0, -4, 0, 0, -9, 4, -9, 0.

Після перегруппування формується масив, що звичайно складається з одного або декількох наборів ненульових коефіцієнтів, що групуються з високим ступенем імовірності на початку масиву, за якими ідуть серії нульових коефіцієнтів. Такий масив представляють у вигляді "серія, значення", де "серія" позначає кількість послідовних нулів, за яких треба ненульовий елемент, величина якого задається числом "значення".

Наприклад, при вхідному масиві 35, 0, 0, 5, -4, 0, 0, 0, 0, -4, 0, 0, -9, 4, -9, 0 вихідні пари "серія, значення" мають вигляд (0,35), (2,5), (0,-4), (4,-4), (2,-9), (0, 4), (0,-9), (1,0), які надалі кодуються *ентропійним кодером*.

При векторному квантуванні зображення ділиться на рівні блоки відліків, які називають векторами. Набір значень кожного блоку порівнюється з наборами значень блоку з кодової таблиці кодувальника, у результаті чого визначається найбільш подібний блок. Результатом пошуку є номер блоку з кодової таблиці, тобто індекс. Вихідний потік замість значень коефіцієнтів містить індекси векторів з відповідної кодової таблиці. Визначальну якість векторного квантування є побудова кодової таблиці та алгоритму швидкого пошуку подібного вектора. Особливістю застосування векторного квантування до відеопослідовності є формування блоку, що квантується, з пикселів декількох сусідніх кадрів.

Приклад. Стиск зображень відповідно до алгоритму JPEG.

Алгоритм JPEG, який розроблено фахівцями “Joint Photographic Expert Group” в 1991р., реалізує ДКП і призначений для стиску напівтонових зображень. ДКП застосовується стосовно непересічних фрагментів зображення розміром 8*8 пикселів.

Розраховані спектральні коефіцієнти квантуються діленням на відповідні коефіцієнти зі спеціальної матриці квантування з наступним округленням до найближчого цілого.

Матриця квантування формується різними способами. Один з них заснований на використанні спеціального параметра ”фактор якості”, що задається користувачем. При цьому елементи матриці приймають значення $Q(i,j) = 1 + (1 + i + j)R$, де R – фактор якості. Приклад матриці для R=2 і R =3 показаний на мал.5 (i=0...7…7,j=0…7)

3	5	7	9	11	13	15	17
5	7	9	11	13	15	17	19
7	9	11	13	15	17	19	21
9	11	13	15	17	19	21	23
11	13	15	17	19	21	23	25
13	15	17	19	21	23	25	27
15	17	19	21	23	25	27	29
17	19	21	23	25	27	29	31

а)

4	7	10	13	16	19	22	25
7	10	13	16	19	22	25	28
10	13	16	19	22	25	28	31
13	16	19	22	25	28	31	34
16	19	22	25	28	31	34	37
19	22	25	28	31	34	37	40
22	25	28	31	34	37	40	43
25	28	31	34	37	40	43	46

б)

Рис.5 Матриця квантування при R=2 (а) і R=3 (б)

По суті, фактор якості призначає рівень обнуління коефіцієнтів матриці після ДКП. Наприклад, якщо коефіцієнт ДКП із координатами (7,7) має значення 22, те після його розподілу на 31 (*R=2*) і округлення буде отримане значення 1, але після розподілу на 46 (*R=2)* і округлення буде отриманий 0.

Застосовуються також стандартні матриці, які рекомендовано до використання в типових додатках, наприклад при обробці кольорових зображень, що мають у матриці один із шарів яскравості, а інші шари вказують на кольоровість. У такому випадку для шарів яскравості та кольоровості використовуються різні матриці квантування, що визначають рівень втрат відповідної спектральної інформації (рис.6).

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	58	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

а)

17	18	24	47	99	99	99	99
18	21	26	66	99	99	99	99
24	26	56	99	99	99	99	99
47	66	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99

б)

Рис.6 Рекомендуються матрицы, що, квантування для колірної моделі YC_bC_r *для шару яскравості (а) і кольоровостей (б)*

Відповідно до трактування міжнародного стандарту ISO, JPEG установлює алгоритм перетворення, а не конкретний формат подання графічних даних, оскільки по цьому алгоритмі можна перетворити будь-яке графічне зображення. Формат файлів, отриманих по алгоритму JPEG, формально називається JFIF (JPEG File Interchange Format).

На основі JPEG розроблені алгоритми TIFF, QuickTime і ін.

НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов.- М.:”Техносфера”,2006.-856с.*
2. *Ричардсон Я. Видеокодирование. H.264 и MPEG-4 – стандарты нового поколения.-М:”Техносфера”,2005.-368с.*
3. *Яне Б. Цифровая обработка изображений.- М:”Техносфера”,2007.-584с.*