Сквирський Р.А.,
КІ-09 в, ФКНТ, ДонНТУ;
керівник: Азарова Н.В.,
асистент кафедри
«Вища математика», ДонНТУ

ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НЕРІВНОВАЖНОЇ ПРИРОДНО-ПРОМИСЛОВОЇ СИСТЕМИ

I. Вступ. Аналіз стійкості фізичних систем безпосередньо пов'язаний з визначенням умов рівноваги. У лінійних системах існує тільки один стан рівноваги. Тому залежні змінні, що характеризують стан системи, з часом наближаються або до стану спокою, або періодичної зміни. У нелінійних же системах можливі ситуації, коли існують декілька станів рівноваги. Причому достатньо малого збурення, щоб почався перехідний процес, який приведе систему до нового стану рівноваги, що істотно відрізняється від первинного. Отже, при розгляді подібних систем необхідно проаналізувати особливості їх поведінки в безпосередніх околах всіх можливих станів рівноваги.

Якщо достатньо мале (незалежно від того, якими причинами воно викликане) збурення приводить до істотного відхилення режиму від початкового (сталого) стану або від незбуреного руху, то говорять про нестабільність або нестійкість положення рівноваги або незбуреного руху. Якщо ж після припинення дії збурення система не відхиляється істотно від свого початкового стану, то такий режим називають стійким.

Таким чином, недостатньо тільки отримати увесь спектр можливих розв’язків диференціального рівняння (або системи диференціальних рівнянь), що описує поведінку фізичної системи. Необхідно ще провести дослідження всіх розв’язків на стійкість.

II. Постановка завдання. В роботі розглядається математична модель пружних деформацій земної кори, основою якої є нелінійне гіперболічне диференціальне рівняння для опису вертикального зсуву гірського масиву, яке залежить від деякого параметру нелінійності [1]:

$$h_{tt} = \frac{\mu}{\rho} \cdot h_{xx} + C_1 \cdot h^{\beta - 1} - C_2 \cdot h^{\beta}, \qquad (1)$$

де *h(x,t)* – зсув земної кори по вертикалі, μ – параметр пружності, ρ – густина середовища, β – параметр нелінійності, C_1, C_2 – емпіричні сталі реакції середовища на зовнішні збурення та зовнішнього впливу відповідно.

Мета роботи – знайти розв’язок наведеного рівняння із заданими початковими умовами у випадку, коли реакція середовища постійна і рівняння стає лінійним, та дослідити його на стійкість.

III. Результати. Розв’яжемо рівняння (1). Для зручності запишемо: $h(x,t) = h(\xi)$, де $\xi = x - Vt$. Тоді

$$h_x = \frac{dh}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = h'(\xi),\ h_{xx} = \frac{dh'(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = h''(\xi),$$

$$h_t = \frac{dh}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -V \cdot h'(\xi),\ h_{tt} = \frac{dh'(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = V^2 \cdot h''(\xi).$$

Отримаємо рівняння

$$V^2 \cdot h'' = \frac{\mu}{\rho} \cdot h'' + C_1 \cdot h^{\beta - 1} - C_2 \cdot h^{\beta};$$

$$\left(V^2 - \frac{\mu}{\rho} \right) \cdot h'' = C_1 \cdot h^{\beta - 1} - C_2 \cdot h^{\beta}.$$

Звідки маємо

$$h'' = \frac{C_1 \cdot h^{\beta - 1} - C_2 \cdot h^{\beta}}{V^2 - \frac{\mu}{\rho}} \Bigg| \cdot 2h';$$

$$2h' \cdot h'' = 2 \cdot \frac{C_1 \cdot h^{\beta - 1} - C_2 \cdot h^{\beta}}{V^2 - \frac{\mu}{\rho}} \cdot h';$$

$$\frac{d\left((h')^2 \right)}{d\xi} = 2 \cdot \frac{C_1 \cdot h^{\beta - 1} - C_2 \cdot h^{\beta}}{V^2 - \frac{\mu}{\rho}} \cdot \frac{dh}{d\xi};$$

$$(h')^2 = 2 \int \frac{C_1 \cdot h^{\beta - 1} - C_2 \cdot h^{\beta}}{V^2 - \frac{\mu}{\rho}} \, dh;$$

$$(h')^2 = \frac{2C_1}{V^2 - \frac{\mu}{\rho}} \cdot \frac{h^\beta}{\beta} - \frac{2C_2}{V^2 - \frac{\mu}{\rho}} \cdot \frac{h^{\beta+1}}{\beta+1} + C\,;$$

$$h' = \sqrt{\frac{2C_1}{V^2 - \frac{\mu}{\rho}} \cdot \frac{h^\beta}{\beta} - \frac{2C_2}{V^2 - \frac{\mu}{\rho}} \cdot \frac{h^{\beta+1}}{\beta+1} + C}\,.$$

Позначимо $a = \frac{2C_1}{\left(V^2 - \frac{\mu}{\rho}\right)\beta}$; $b = \frac{2C_2}{\left(V^2 - \frac{\mu}{\rho}\right)(\beta+1)}$.

Тоді

$$\frac{dh}{d\xi} = \sqrt{a \cdot h^\beta - b \cdot h^{\beta+1} + C}\,;$$

$$\xi = \int \frac{dh}{\sqrt{a \cdot h^\beta - b \cdot h^{\beta+1} + C}}\,.$$

Розглянемо випадок, коли реакція середовища постійна, тобто β=1, і рівняння (1) стає лінійним.

$$\xi = \int \frac{dh}{\sqrt{a \cdot h - b \cdot h^2 + C}} = \int \frac{2\sqrt{b}\ dh}{\sqrt{(a^2 + 4bC) - (2bh - a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \arcsin \frac{2bh - a}{\sqrt{a^2 + 4bC}} + \tilde{C}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \arcsin \frac{2bh - a}{\sqrt{a^2 + 4bC}} = \xi - \tilde{C};$$

$$\arcsin \frac{2bh - a}{\sqrt{a^2 + 4bC}} = \sqrt{b} \cdot \left(\xi - \tilde{C}\right);$$

$$\frac{2bh - a}{\sqrt{a^2 + 4bC}} = \sin\left(\sqrt{b} \cdot \left(\xi - \tilde{C}\right)\right);$$

$$2bh - a = \sqrt{a^2 + 4bC} \cdot \sin\left(\sqrt{b} \cdot \left(\xi - \tilde{C}\right)\right);$$

$$2bh = a + \sqrt{a^2 + 4bC} \cdot \sin\left(\sqrt{b} \cdot \left(\xi - \tilde{C}\right)\right);$$

$$h(\xi) = \frac{1}{2b}\left(a + \sqrt{a^2 + 4bC} \cdot \sin\left(\sqrt{b} \cdot \left(\xi - \tilde{C}\right)\right)\right);$$

$$h'(\xi) = \frac{1}{2b} \cdot \sqrt{a^2 + 4bC} \cdot \sqrt{b} \cdot \cos\left(\sqrt{b} \cdot \left(\xi - \tilde{C}\right)\right).$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} h(\xi)\big|_{\xi=0} = 0; \\ h'(\xi)\big|_{\xi=0} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{2b}\left(a + \sqrt{a^2 + 4bC} \cdot \sin\left(\sqrt{b} \cdot \left(-\tilde{C}\right)\right)\right); \\ 0 = \dfrac{1}{2b} \cdot \sqrt{a^2 + 4bC} \cdot \sqrt{b} \cdot \cos\left(\sqrt{b} \cdot \left(-\tilde{C}\right)\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a - \sqrt{a^2 + 4bC} \cdot \sin\left(\sqrt{b} \cdot \tilde{C}\right); \\ 0 = \cos\left(\sqrt{b} \cdot \tilde{C}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{a^2 + 4bC} \cdot \sin\left(\sqrt{b} \cdot \tilde{C}\right); \\ \tilde{C} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{a^2 + 4bC} \cdot \sin\frac{\pi}{2}; \\ \tilde{C} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = a^2 + 4bC; \\ \tilde{C} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 0; \\ \tilde{C} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}. \end{cases}$$

$$h(\xi) = \frac{1}{2b}\left(a + \sqrt{a^2} \cdot \sin\left(\sqrt{b} \cdot \left(\xi - \frac{\pi}{2\sqrt{b}} \right)\right)\right);$$

$$h(\xi) = \frac{a}{2b} + \frac{a}{2b} \cdot \sin\left(\sqrt{b} \cdot \xi - \tfrac{\pi}{2}\right);$$

$$h(\xi) = \frac{a}{2b} - \frac{a}{2b} \cdot \cos\left(\sqrt{b} \cdot \xi\right).$$

З урахуванням того, що у даному випадку (коли β=1)

$$a = \frac{2C_1}{V^2 - \frac{\mu}{\rho}}, \; b = \frac{C_2}{V^2 - \frac{\mu}{\rho}} \text{ і } \frac{a}{2b} = \frac{C_1}{C_2},$$

розв'язок рівняння (1) із заданими початковими умовами (2) набуває наступного вигляду

$$h(\xi)=\frac{C_1}{C_2}-\frac{C_1}{C_2}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{C_2}{V^2-\frac{\mu}{\rho}}}\cdot\xi\right).$$

Проведемо дослідження на стійкість.

Розв'язок рівняння має вигляд: $h=h_0(\xi)=\gamma+\delta\cos(\varepsilon\xi)$. Розглянемо збурення $h(\xi)=h_0(\xi)+z(\xi)\cdot\lambda$, де $0<\lambda<1$, $z(\xi)$ – деяке збурення.

$$h''(\xi)=f(h);\ h_0''(\xi)=f(h_0);\ h_0''+\lambda z''=f\left(h_0+\lambda z\right);$$

$$\lambda z''=f(h_0+\lambda z)-f(h_0)=f'(h_0)\lambda z;$$

$$z''-f'(h_0)z=0;$$

$$h_0'''(\xi)=f'(h_0)\cdot h_0';\ f'(h_0)=\frac{h_0'''}{h_0'};$$

$$h_0'=-\delta\varepsilon\sin(\varepsilon\xi);\ h_0''=-\delta\varepsilon^2\cos(\varepsilon\xi);\ h_0'''=\delta\varepsilon^3\sin(\varepsilon\xi);$$

$$\frac{h_0'''}{h_0'}=-\varepsilon^2=f'\left(h_0\right);$$

$$z''+\varepsilon^2 z=0;$$

$$z=\tilde{C}_1\cos\left(\varepsilon\xi\right)+\tilde{C}_2\sin\left(\varepsilon\xi\right);$$

Таким чином, $h=h_0(\xi)$ стійке по Ляпунову.

IV. Висновки. Отримані результати можуть бути використані, наприклад, для прогнозування газодинамічних явищ у вугільних шахтах, при дослідженні поведінки тектонічних плит, а також при описі багатьох інших явищ в геофізиці і геодинаміці.

Література. 1. Таранец Р.М. Влияние массовых сил на тектоническое поведение поверхности на примере Донецкого бассейна / Р.М. Таранец, В.А. Привалов, С.Ю. Приходько // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: гірничо-геологічна. – Донецьк: ДонНТУ. − 2007. – №6 (125). – С. 205-209. **2.** Тихонов А.Н. Рівняння математичної фізики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарський. − М.: Наука, 1997. − 736 с. **3.** Ільїн В.А. Математичний аналіз. Початковий курс / В.А. Ільїн, В.А. Садовнічий, Б.Х. Сендов; Під ред. А.Н. Тихонова. − М.: Вид-во МГУ, 1985. − 662 с.