УДК 531.12

ВОЛКОВ С.В. (КИИ ДонНТУ)

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОГО ОПОЛЗНЯ ЭТАЛОННОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В рамках решения задачи моделирования траектории оползня в «идеальных условиях» по наклонной плоскости, получены координаты оползня в произвольный момент времени. Указаны перспективы дальнейшего развития поставленной задачи.

Оползень – сползание и отрыв масс горных пород вниз по склону под действием силы тяжести, нередкое природное явление, которое является следствием целого комплекса специфических природных факторов. Никакой фактор в отдельности не позволяет корректно построить математическую модель данного явления. Поэтому при моделировании этого явления речь должна идти только комплексе физических условий и предпосылок. Однако, изучение комплекса условий невозможно без изучения сути пофакторного влияния этих условий на некую материальную точку.

Пусть заданы «идеальные условия»: в состоянии покоя эталонная материальная точка M_0 (далее МТ), заданной массы m_0 расположена на наклонной плоскости α. Под воздействием сил тяжести $\overline{F}_T$ и напряжения плоскости $\overline{F}_N$, вопреки силе трения $\overline{F}_{TR}$, происходит смещение данной МТ. Объектом исследования есть МТ M_0, целью исследования – получить модель траектории движения (перемещения) данной МТ.

На начальном этапе моделирования действием сил, кроме $\overline{F}_T$, $\overline{F}_N$ и $\overline{F}_{TR}$ пренебрегаем. Считая суммарное действие $\overline{F}_T$ и $\overline{F}_N$ превосходящим силу трения $\overline{F}_{TR}$. В качестве эталонной МТ можно рассмотреть наиболее распространенный тип (по размеру, плотности и т.д.) точки движущейся по плоскому склону. Для остальных МТ можно использовать поправочные коэффициенты k_i. Логично предположить, что наиболее тяжелая МТ имеет более высокие показатели фактической силы трения, и коэффициент будет больше единицы.

Исходя из поставленной задачи, считаем известным местоположение МТ в начальный момент времени $M_0(x_0;y_0;z_0)$, которая выполняет движения по наклонной плоскости α: $Ax+By+Cz+D=0$ с нормалью $\overline{N}=(A;B;C)$, только под действием суммарных сил источников энергии, а именно $\overline{F}_T, \overline{F}_N, \overline{F}_{TR}$.

Поскольку действия сил $\overline{F}_T, \overline{F}_N$ на каждую точку M_i искомой траектории постоянны (случай однородной поверхности), то, очевидно, линией такого перемещения будет прямая, определяемая направляющим вектором $\overline{s}$. Также исходя из основных законов динамики и статики, такое перемещение будет производится по лини наименьшего сопротивления, что обеспечивается смещением по кратчайшему расстоянию к линии горизонта.

Состояние рассмотренной системы описывается уравнением равновесия сил:

$$\overline{F}_O = \overline{F}_T + \overline{F}_N + \overline{F}_{TR}, \tag{1}$$

причем условие

$$\overline{F}_O = 0, \tag{2.а}$$

определяет стадию покоя, а условие

$$\overline{F}_O \neq 0 (>0), \tag{2.б}$$

определяет стадию оползня.

В принятых обозначениях:

$\overline{F}_O = \dfrac{m_0 \cdot a(t)}{\left|\overline{s}\right|} \cdot \overline{s}$ – вектор силы оползня;

$\overline{F}_T$ – направлена перпендикулярно к уровню горизонта (координатной плоскости xOy), а значит $\overline{F}_T = (0;0;m_0 g)$ откуда $\left|\overline{F}_T\right| = m_0 g$;

$\overline{F}_N$ – направлена по нормали к плоскости, а значит $\overline{F}_N = \dfrac{F_N}{\left|\overline{N}\right|} \cdot \overline{N}$ откуда $\left|\overline{F}_N\right| = F_N$;

$\overline{F}_{TR}$ – направлена в сторону противоположную к линии оползня МТ $\overline{F}_{TR} = -\dfrac{F_{TR} \cdot m_0}{\left|\overline{s}\right|} \cdot \overline{s}$.

На основе указанного получим линию перемещения данной МТ M_0.

Для наглядности расположим плоскость оползня в декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 1). Изобразим также нормальную плоскость, содержащую линию оползня МТ (рис. 2)

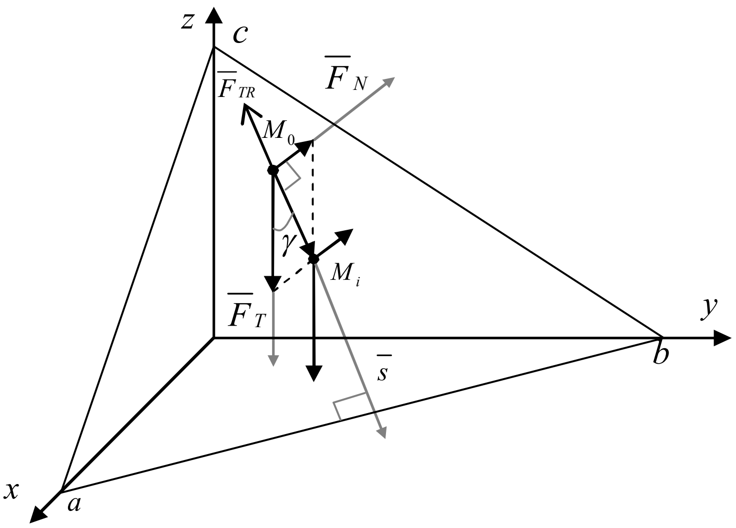

Рисунок 1.

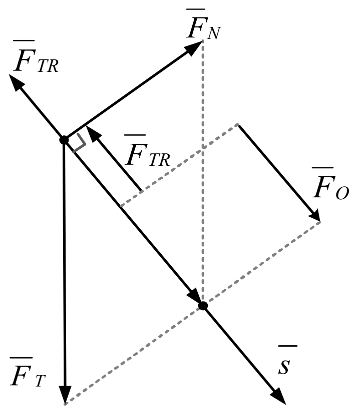

Рисунок 2.

Вектор перемещения, фактически вектор скорости, $\overline{s} \perp l_{ab}$. Направляющий вектор прямой l_{ab} можно определить как $\overline{s_l} = (-a;b;0)$, где a,b – величины отрезков, отсекаемые плоскостью на осях Ox, Oy соответственно, а значит $\overline{s_l} = \left(\dfrac{D}{A};\dfrac{-D}{B};0\right)$. В свою очередь, вектор перемещения $\overline{s}$ взаимно перпендикулярен к $\overline{N}$ и $\overline{s_l}$, а значит, может быть получен в результате их векторного умножения:

$$\overline{s} = \overline{s_l} \times \overline{N} \tag{3}$$

$$\overline{s} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{D}{A} & -\dfrac{D}{B} & 0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{D}{B} & 0 \\ B & C \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} \dfrac{D}{A} & 0 \\ A & C \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{D}{A} & -\dfrac{D}{B} \\ A & B \end{vmatrix} \overline{k} = D\left(-\dfrac{C}{B}\overline{i} - \dfrac{C}{A}\overline{j} + \left(\dfrac{A}{B} + \dfrac{B}{A}\right)\overline{k}\right) \Rightarrow$$

$$\bar{s} = \frac{D}{AB}\left(-AC; -BC; A^2 + B^2\right) \tag{4}$$

Тогда МТ M_0 в определенный момент времени t будет находиться в положении $M_i\left(x_i; y_i; z_i\right)$:

$$\begin{cases} x_i = x_0 - \dfrac{C \cdot D}{B}\varphi(t); \\ y_i = y_0 - \dfrac{C \cdot D}{A}\varphi(t); \\ z_i = z_0 + \dfrac{D}{A \cdot B}\left(A^2 + B^2\right)\varphi(t), \end{cases} \tag{5}$$

то есть уравнением траектории оползня МТ M_0 есть прямя

$$\frac{x - x_0}{-\dfrac{C \cdot D}{B}} = \frac{y - y_0}{-\dfrac{C \cdot D}{A}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{D}{A \cdot B}\left(A^2 + B^2\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{x - x_0}{A \cdot C} = \frac{y - y_0}{B \cdot C} = \frac{z - z_0}{-\left(A^2 + B^2\right)}. \tag{6}$$

В данной работе представлены «первые шаги», по исследованию траектории перемещения точки M_0. В перспективе автор видит изучение траектории перемещения МТ M_0 по произвольной поверхности (получен результат), по плоскости и поверхности под воздействием дополнительных раздражителей. И, как итог, моделирование поведения системы МТ на поверхности под воздействием различных сил.

Библиографический список

1. Емельянова Е.П. Основные закономерности оползневых процессов. – М.: Недра, 1972. – 226с.
2. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы 1973г. – 351 с.
3. Кафтанова Ю. В. Специальные функции математической физики. Ч. 3 Моделирование аномальных и экстраординарных природных и техногенных процессов. Научнопопулярное издание. – Х.: ЧП Издательство «Новое слово», 2009. – 596 с.
4. Краснов М. Л., Киселев А. И. и др. Вся высшая математика: Учебник. Том 1. – М.: Едиториал УРСС, 2003 г. – 328 с.
5. Краснов М. Л., Киселев А. И. и др. Вся высшая математика: Учебник. Том 4. 2-е изд., испр. – М.: Едиториал УРСС, 2005 г. – 352 с.