УДК 51(07)

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Азарова Н.В., Муравская А.В.

Донецкий национальный технический университет

Розглянуто прикладні задачі, які можуть бути використані при вивченні розділів «Диференційне числення функцій однієї змінної» та «Визначений інтеграл» курсу вищої математики для студентів електротехнічного факультету.

Математика является основой всех инженерных дисциплин. Инженер должен знать фундаментальные положения высшей математики и уметь их применить, если потребуется.

Существенную роль в подготовке инженера играют задачи прикладного характера. Они оживляют учебный процесс, вызывают интерес к углубленному изучению математики. При этом желательно рассматривать задачи, характерные именно для тех областей знания, которые изучаются студентами определенной специальности.

Решение задач является важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой студентами усваивается содержание курса математики, развиваются их творческие способности. Основным источником познавательного интереса является процесс сосредоточенной, углубленной деятельности, направленной на решение познавательной задачи.

Задачи прикладного характера должны соответствовать ряду требований.

1. Задачи должны иметь реальное, практическое содержание, обеспечивающее показ практической ценности и значимости приобретенных математических знаний.

2. Задачи должны обеспечивать показ взаимосвязей дисциплин на конкретных примерах с практическим содержанием.

3. Задачи должны решать ситуацию производства, техники, науки, показывая применение математических знаний и методов в выбранной профессии.

4. Численные данные в задаче должны соответствовать существующим на практике, т.е. быть реальными.

5. Задачи должны быть сформулированы на доступном и понятном студентам уровне.

6. В процессе решения необходимо пользоваться приближенными вычислениями, а также применять вычислительную технику.

7. Если студенты еще не знакомы с некоторыми фактами, то формулировка задачи может быть расширена и может представлять собой некоторое теоретическое введение к изучаемой проблеме.

Рассмотрим задачи, которые могут быть решены при изучении разделов «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» и «Определенный интеграл» курса высшей математики для студентов электротехнического факультета.

Задача 1 (определение производной). Найти силу тока I, который несет на себе заряд, заданный зависимостью $q=q_m \cos \omega_0 t$ (Кл) через поперечное сечение проводника.

<u>Решение.</u> Рассмотрим приращение заряда за малый промежуток времени $[t; t+\Delta t]$, тогда $\Delta q = I(t)\cdot\Delta t$.

Откуда $\Delta q/\Delta t = I(t)$.

Если $\Delta t \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\dfrac{\Delta q}{\Delta t}\right) = q'(t)$, то есть $I(t) = q'(t)$.

Тогда $I(t) = (q_m \cos\omega_0 t)' = -q_m\omega_0 \sin\omega_0 t$.

Задача 2 (экстремум функции одной переменной). Три резистора сопротивлениями $R1$, $R2$, $R3$ соединены параллельно. Сопротивление $R1$ в 9 раз больше сопротивления $R2$. Если все три резистора соединить последовательно, то сопротивление цепи равно R. Определить сопротивления резисторов, при которых сопротивление исходной цепи будет наибольшим.

<u>Решение.</u> По условию $R1 = 9\cdot R2$. При параллельном соединении резисторов $R1$, $R2$, $R3$ эквивалентное сопротивление вычисляется по формуле:

$$\frac{1}{R_{экв}}=\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R3}\,.$$

Требуется найти сопротивления резисторов $R1$, $R2$, $R3$, при которых сопротивление $R_{экв}$ будет наибольшим.

Выразим $R3$ через $R2$:

$$R3=R-R1-R2=R-10R2\,;$$

тогда

$$\frac{1}{R_{экв}}=\frac{1}{9R2}+\frac{1}{R2}+\frac{1}{R-10R2}=\frac{10R-91R2}{9R2(R-10R2)}=f(R2).$$

Задача сводится к определению наименьшего значения функции $f(R2)$ в интервале $[0;R/10]$.

Возьмем производную функции $f(R2)$ по $R2$ и преобразуем ее:

$$f'(R2)=\left(\frac{10R-91R2}{9R2(R-10R2)}\right)'=\frac{-910(R2)^2+200R\cdot R2-10R^2}{9(R2)^2(R-10R2)^2}=$$

$$=\frac{-910\left(R2-\dfrac{R}{7}\right)\left(R2-\dfrac{R}{13}\right)}{9(R2)^2(R-10R2)^2}\,.$$

В интересующем нас интервале только одна точка $R2 = R/13$, в которой производная $f'(R2)$ меняет знак с “—” слева на ”+”справа (рис. 1).

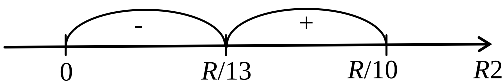

Рис. 1. Знаки производной $f'(R2)$ в интервале $[0;R/10]$

Поэтому в точке $R2 = R/13$ достигается минимум функции $f(R2)$, то есть минимум $1/R_{экв}$ и максимум $R_{экв}$, при этом

$$R1=\frac{9R}{13};\;R2=\frac{R}{13};\;R3=\frac{3R}{13}\,,$$

а наибольшее значение сопротивления $R_{экв}$ равно $9R/169$.

Задача 3 (экстремум функции одной переменной). Имея N одинаковых электрических элементов, можно различными способами составить из них батарею, соединяя по n элементов последовательно, а затем полученные группы (в количестве N/n) — параллельно. Ток, даваемый такой батареей, определяется формулой

$$I = \frac{NnE}{NR + n^2 r},$$

где E − электродвижущая сила одного элемента,

r − внутреннее сопротивление одного элемента,

R − внешнее сопротивление одного элемента.

Определить, при каком значении n батарея дает наибольший ток.

Решение. Исследуем функцию $I(n)$ на экстремум, используя второе достаточное условие. Найдем стационарные точки, т.е. точки, в которых первая производная равна нулю:

$$I'(n) = \left(\frac{NnE}{NR + n^2 r}\right)' = \frac{NE \cdot (NR + n^2 r) - NnE \cdot 2nr}{(NR + n^2 r)^2} =$$

$$= \frac{NE \cdot (NR + n^2 r - 2n^2 r)}{(NR + n^2 r)^2} = \frac{NE \cdot (NR - n^2 r)}{(NR + n^2 r)^2}.$$

Отсюда следует, что $I'(n) = 0$ при $n = \sqrt{\dfrac{NR}{r}}$.

Вторая производная равна:

$$I''(n) = \left(\frac{NE \cdot (NR - n^2 r)}{(NR + n^2 r)^2}\right)' =$$

$$= NE \frac{-2nr \cdot (NR + n^2 r)^2 - (NR - n^2 r) \cdot 2(NR + n^2 r) \cdot 2nr}{(NR + n^2 r)^4} =$$

$$= NE \frac{2nr \cdot (n^2 r - 3NR)}{(NR + n^2 r)^3}.$$

Тогда

$$I''\left(\sqrt{\frac{NR}{r}}\right) = NE\frac{2\sqrt{\frac{NR}{r}r}\cdot\left(\frac{NR}{r}r-3NR\right)}{\left(NR+\frac{NR}{r}r\right)^3} =$$

$$= 2NE\frac{\sqrt{NRr}\,(-2NR)}{(2NR)^3} = -\frac{E}{4R}\sqrt{\frac{r}{NR}}..$$

Очевидно, что $I''(n) < 0$ при $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$.

Следовательно, $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$ − точка максимума. Если это число не целое, то следует взять ближайшее к найденному значению целое число.

Задача 4 (свойства определенного интеграла). Напряжение в электрической цепи на протяжении четырех секунд равномерно увеличивается от U_0=120 В до U_1=220 В. Найти среднюю силу тока *I(ξ)* за это время, если сопротивление цепи *R*=80 Ом. В какой момент времени это значение достигается?

Решение. Найдем зависимость напряжения от времени. По условию задачи напряжение равномерно увеличивается, т.е. $U(t) = kt + b$. Определим коэффициенты *k* и *b*, воспользовавшись дополнительными условиям $U(0) = 120$ и $U(4) = 220$:

$$\begin{cases}120 = b, \\ 220 = 4k + b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k = 25, \\ b = 120.\end{cases}$$

Следовательно, $U(t) = 25t + 120$.

Зависимость силы тока от времени выражается *законом Ома*

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} \Rightarrow I(t) = \frac{25t+120}{80} = \frac{5t+24}{16} .$$

Согласно *теореме о среднем* для функции *I(t)* на промежутке [0;4] имеем

$$I(\xi)=\frac{1}{4}\int_0^4\frac{5t+24}{16}\,dt=\frac{1}{64}\left(\frac{5t^2}{2}+24t\right)\Bigg|_0^4=\frac{1}{64}(40+96)=\frac{17}{8}\approx 2{,}125\ (A).$$

Теперь определим момент времени t_0, когда сила тока принимает это значение

$$\frac{5t_0+24}{16}=\frac{17}{8}\Rightarrow t_0=2\ c.$$

Таким образом, реализация профессиональной направленности процесса обучения математике в технических вузах осуществляется через рассмотрение прикладных задач, при решении которых реализуются межпредметные связи математики с другими дисциплинами. Такие задачи развивают логическое мышление, формируют представление о математическом моделировании, помогают студентам технических специальностей в овладении математическими методами при решении инженерно-технических задач, возникающих в процессе обучения, производства или научной деятельности.

Литература

1. Тю Н.С. О прикладных задачах в курсе высшей математики / Н.С. Тю, И.К. Локтионов, А.А. Медовникова // Збірник науково-методичних робіт. – Вип. 3. − Донецьк: ДонНТУ, 2005. – С. 190-196.

2. Горбатова Л.О. Особливості навчання математики студентів електричних спеціальностей / Л.О. Горбатова, Д.О. Мельничук // Застосування і удосконалення методики викладання математики: Матеріали XIII регіонального науково-методичного семінару. – Донецьк: ДонУЕТ, 2007. – С. 139-141.

3. Герасимчук В.С. Курс классической математики в примерах и задачах. Ч. 1. / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.И. Кравцов. – Донецк: ДонНТУ, 2005. – 584 с.

4. Герасимчук В.С. Курс классической математики в примерах и задачах. Ч. 2. / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.И. Кравцов. – Донецк: ДонНТУ, 2005. – 467 с.