

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ  
ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССОВ СУШКИ УВЛАЖНЕННОЙ ГОРНОЙ  
МАССЫ В КИПЯЩЕМ СЛОЕ**

В.Н. Павлыш, И.В. Тарабаева

Донецкий национальный технический университет

E-mail: [pavlyshvn@mail.ru](mailto:pavlyshvn@mail.ru)

Процессы сушки являются важной составляющей технологии производства в различных отраслях промышленности (угольной, химической и др.). Проблема сушки решается в нашей стране по следующим основным направлениям: математические методы исследования и расчета параметров процесса сушки; исследование и уточнение механизма внешнего и внутреннего переноса энергии и массы при различных способах сушки; развитие технологии и техники сушки [1,2].

Математические исследования направлены на получение более полного математического описания сложных взаимосвязанных явлений тепло- и массообмена, уточнение краевых условий в различных процессах сушки и решение системы уравнений тепломассопереноса и количества движения. Одним из наиболее эффективных способов высушивания является технология сушки в «кипящем слое».

Физическая постановка задачи формулируется следующим образом. Сушка происходит в аппарате, схема которого показана на рис. 1. В камеру сушилки, снабженной газопроницаемым поддерживающим устройством в виде сетки, пористой перегородки и т.п., которое будем называть газораспределительной решеткой, помещается сыпучий материал.

Для создания режима локального фонтанирования применяют газораспределительную решетку, позволяющую вводить в псевдооживленный слой оживающий агент с высокой скоростью. Благодаря этому в слое

образуются зоны, в которых частица и среда движутся с более высокими, чем в слое, скоростями, а обмен между этими зонами делает более интенсивными процессы тепло- и массообмена [3].

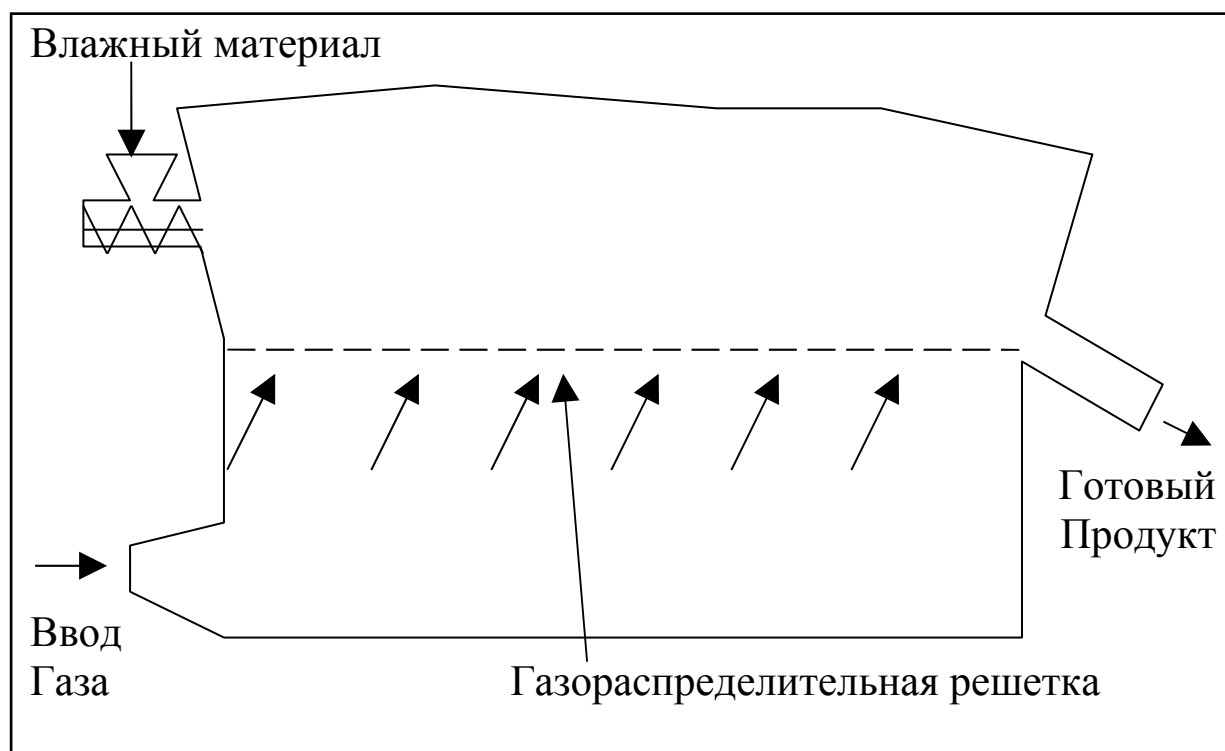


Рисунок 1 – Схема сушильного аппарата

Будем строить математическую модель процесса сушки сыпучей среды в сушильном аппарате.

Рассмотрим следующую задачу: в области  $G$  (см. рис. 1) рабочей камеры требуется определить распределение концентрации  $C(x, y, t)$  при заданном количестве отверстий на газораспределительной решетке. Функция  $C(x, y, t)$  является решением конвективного уравнения диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D(C_{xx} + C_{yy}) - V_1(x, y) \frac{\partial C}{\partial x} - V_2(x, y) \frac{\partial C}{\partial y} \quad (1)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии,  $V_1(x, y)$  – продольная компонента скорости,  $V_2(x, y)$  – поперечная компонента скорости. При этом концентрация  $C$  обязана удовлетворять граничным условиям:

$$\begin{aligned}
C_y(x, y, t) &= 0, & (x, y) \in F_1 \\
C_x(x, y, t) &= 0, & (x, y) \in F_2 \cup F_3 \\
C_y(x, y, t) &= 0, & (x, y) \in \Gamma_i, \quad i=1, 2, \dots, n \\
C(x, y, t) &= C_j, & (x, y) \in D_i, \quad i=1, 2, \dots, n+1 \\
C(x, y, t) &= \alpha, & (x, y) \in \Gamma_{BX} \\
C(x, y, t) &= \beta, & (x, y) \in \Gamma_{BYX}
\end{aligned} \tag{2}$$

и начальному условию:

$$C(x, y, 0) = C_0 \tag{3}$$

Здесь  $C_j, \alpha, \beta, C_0$  – постоянные величины.

Компоненты продольной и поперечной скорости определяются из решения краевой задачи [4,5]:

$$\begin{cases}
V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}, & (x, y) \in G \\
\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0;
\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
V_1|_{(x,y) \in B \cup \Gamma_k} &= V_2|_{(x,y) \in B \cup \Gamma_k} = 0, \\
V_1|_{(x,y) \in D_k} &= 1, \quad V_2|_{(x,y) \in D_k} = 0, \\
V_1|_{(x,y) \in T_1} &= V_{10}, \quad V_2|_{(x,y) \in T_1} = V_{20}, \\
V_1|_{(x,y) \in T_2} &= 0, \quad V_2|_{(x,y) \in T_2} = V_{20}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для решения задачи (1)-(3) применяется метод прямых. Проведем дискретизацию переменных  $x$  и  $y$ , т.е. рассмотрим точки  $x_i = i \cdot hx$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $y_j = j \cdot hy$ ,  $j = 1, 2, \dots, m-1$ . Тогда производные по переменным  $x$  и  $y$  можно заменить конечными разностями [5]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2 \cdot hx}, & \frac{\partial C}{\partial y} &= \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2 \cdot hy} \\
\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \frac{C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}}{hx^2}, & \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} &= \frac{C_{i,j+1} - 2C_{i,j} + C_{i,j-1}}{hy^2}
\end{aligned}$$

где  $C(x_i, y_j, t) = C_{ij}(t)$ , а уравнение (1) – дифференциально-разностными соотношениями:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \frac{dC_{ij}}{dt} &= \frac{D}{l^2} \frac{C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}}{hx^2} + \frac{D}{H^2} \frac{C_{i,j+1} - 2C_{i,j} + C_{i,j-1}}{hy^2} - \\
&- V_{1ij} \frac{1}{l} \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2hx} - V_{2ij} \frac{1}{H} \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2hy}
\end{aligned} \tag{6}$$

где  $l$  и  $H$  – характерные размеры, а  $T$  – характерное время,  
 $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $j = 1, 2, \dots, m-1$ . Эту систему обыкновенных  
дифференциальных уравнений можно представить в следующем виде:

$$\frac{dC_{ij}}{dt} = A_{ij} \cdot C_{i+1,j} - R \cdot C_{i,j} + G_{ij} \cdot C_{i-1,j} + B_{ij} \cdot C_{i,j} + S_{ij} \cdot C_{i,j} - 1 \quad (7)$$

Аппроксимация граничных условий приводит к следующим соотношениям:

$$C_{0j} = C_{1j}, \quad j = 0, 1, \dots, m; \quad j \neq m_1$$

$$C_{0j} = \alpha, \quad j = m_1$$

(здесь использовалось граничное условие  $\frac{\partial C(0, y, t)}{\partial x} = 0$ );

$$C_{Nj} = C_{N-1,j}, \quad j = 0, 1, \dots, m; \quad j \neq m_2$$

$$C_{Nj} = \beta, \quad j = m_2$$

(использовалось граничное условие  $\frac{\partial C(1, y, t)}{\partial x} = 0$ );

$$C_{i0} = C_{il}, \quad (x, y) \in F_1 \cup F_3 \cup D_\kappa$$

$$C_{i0} = C, \quad (x, y) \in \Gamma_\kappa$$

(применялось граничное условие  $\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_\kappa$ )

$$C_{im} = C_{im-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Таким образом, решение краевой задачи (1) – (3) свелось к численному решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) при начальных условиях

$$C_{ij}(0) = C_0 \quad (8)$$

Задача Коши (7) – (8) численно интегрировалась при помощи метода Рунге-Кутты, причем погрешность метода равна  $O(hx^2 + hy^2)$ .

На рис. 2 приведены результаты решения задачи в безразмерной форме.

Разрабатываемая модель может быть применена к исследованию процесса сушки с учетом комплекса механических, термодинамических и конвективных параметров.

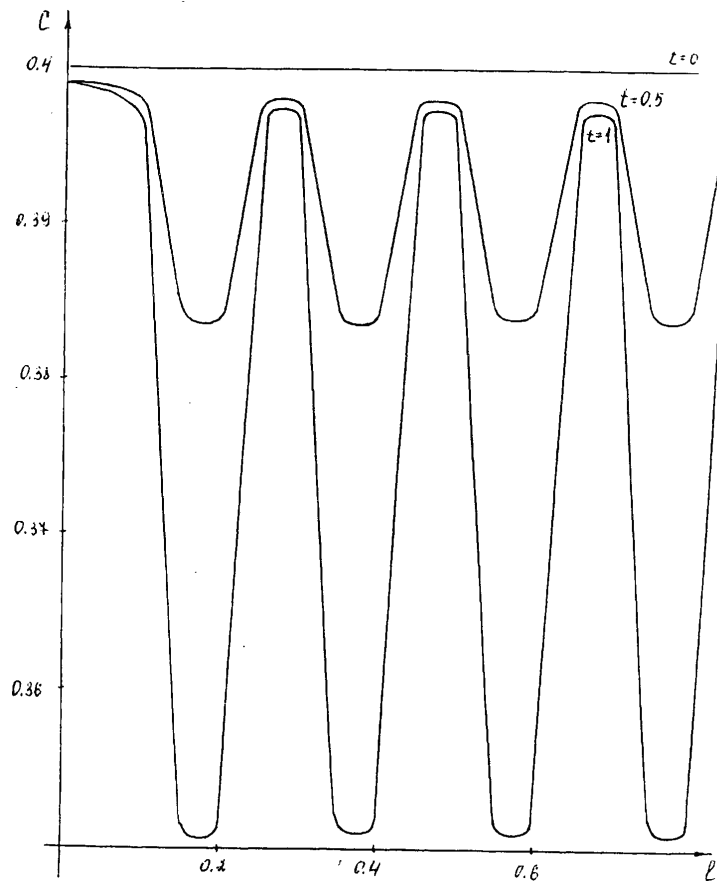


Рисунок 2 Распределение концентрации вещества в камере сушилки при  $y=0.2$ , для моментов времени  $t = 0.0 ; 0.5 ; 1.0$ .

Следующим этапом исследования процесса сушки является рассмотрение характера изменения основных параметров, в частности, продольных и поперечных скоростей перемещения вещества в сушильной камере.

Пусть далее  $u(x,y)$  – продольная, а  $v(x,y)$  – поперечная скорость вещества в сушилке. Эти компоненты скорости определяем как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dP}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (x,y) \in G \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

при следующих граничных условиях

$$u=0, \quad v=0, \quad (x,y) \in B \cup \Gamma_k \quad (10)$$

$$u=1, \quad v=0, \quad (x, y) \in D_{\kappa} \quad (11)$$

$$u=u_0, \quad v=v_0, \quad (x, y) \in T_1 \quad (12)$$

$$u=0, \quad v=v_0, \quad (x, y) \in T_2 \quad (13)$$

Поле скоростей рассчитывается в результате решения задачи (9) – (13).

При применении разностного метода производные, входящие в дифференциальные уравнения, заменяются конечно-разностными соотношениями [5].

Для частных производных продольной скорости  $u$  получим следующие выражения через конечно-разностные соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3u_{m+1,n} - 4u_{m,n} + u_{m-1,n}}{2\Delta x} + \frac{1}{3}\Delta x^2 u_{xxx} + \dots \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n-1}}{2\Delta y} - \frac{1}{6}\Delta y^2 u_{yyy} + \dots \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{m+1,n+1} - 2u_{m+1,n} + u_{m+1,n-1}}{\Delta y^2} - \frac{1}{12}\Delta y^2 u_{yyy} + \dots \quad (16)$$

Для линеаризации разностных уравнений используем соотношение:

$$u_{m+1,n} - 2u_{m,n} - u_{m-1,n} + \Delta x^2 u_{xx} + \dots \quad (17)$$

В линеаризованной форме выражения вида  $u(\partial u / \partial x)$  заменяем следующим:

$$(2u_{m,n} - u_{m-1,n}) \cdot \left( \frac{3u_{m+1,n} - 4u_{m,n} + u_{m-1,n}}{2\Delta x} \right).$$

После подстановки этих разностных выражений в уравнения пограничного слоя получается разностное уравнение:

$$A_n u_{m+1,n-1} + B_n u_{m+1,n} + C_n u_{m+1,n+1} = F_n, \quad (18)$$

причем

$$A_n = -\frac{\Delta x}{2\Delta y} (2v_{m,n} - v_{m-1,n}) - \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}; \quad (19)$$

$$B_n = \frac{3}{2} (2u_{m,n} - u_{m-1,n}) + \frac{2\Delta x}{(\Delta y)^2}; \quad (20)$$

$$C_n = \frac{\Delta x}{2\Delta y} (2v_{m,n} - v_{m-1,n}) - \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}; \quad (21)$$

$$F_n = \frac{1}{2}(2u_{m,n} - u_{m-1,n}) \cdot (4u_{m,n} - u_{m-1,n}) - \Delta x \cdot \left( \frac{dP}{dx} \right)_{m+1,n}. \quad (22)$$

Матрица, соответствующая неизвестным  $u_{m+1,n}$ , такова, что позволяет использовать прямой путь решения, не требующий составления обратной матрицы.

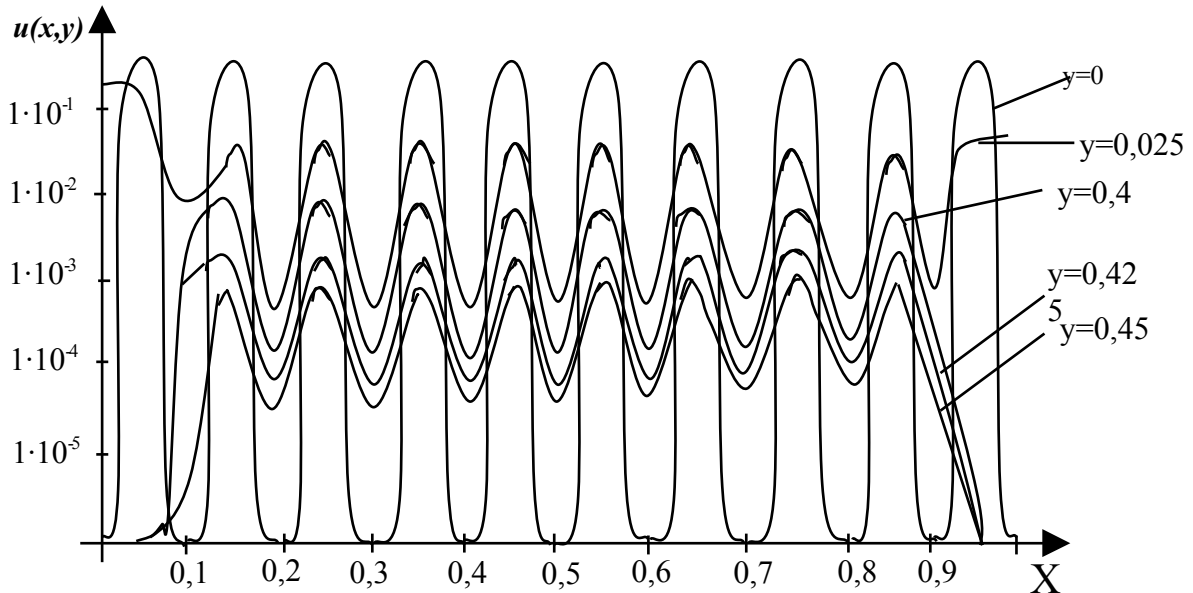


Рисунок 3 График зависимости продольной скорости  $u$  от  $x$  при фиксированном значении  $y$  ( $\omega_1 = 0,25$ ,  $\omega_2 = 0,2$ ).

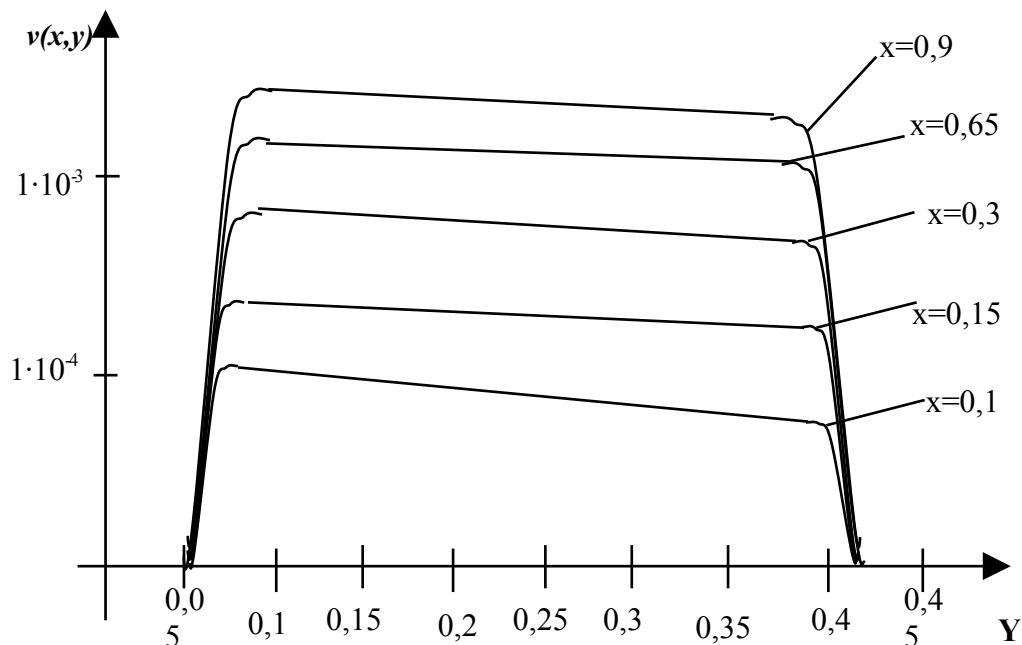


Рисунок 4 График зависимости поперечной скорости  $v$  от  $y$  при фиксированном значении  $x$  ( $\omega_1 = 0,25$ ,  $\omega_2 = 0,2$ ).

Метод конечных разностей сводит задачу расчета пограничного слоя, т.е. задачу интегрирования уравнений в частных производных, к более

простой задаче, а именно к решению системы линейных алгебраических уравнений. Т.к. рассматриваемый численный метод всегда устойчив, то ширина шага определяется только погрешностью обрыва процесса. Поэтому ее можно выбрать довольно большой, что позволяет сильно сократить время расчета. На рис. 3, 4 приведены графики зависимостей продольной и поперечной скоростей.

Результаты математического моделирования процесса высушивания влажной горной массы позволяют сформировать основы методики расчета параметров технологической схемы и аппаратуры.

Ввиду сложности процессов и характера описывающих их математических моделей расчет параметров необходимо производить на базе применения компьютерных технологий.

Дальнейшей перспективой разработок является создание системы автоматизированного проектирования технологии сушки (САПТС), основу которой составляет математические модели и программное обеспечение, описанное выше.

1. *Филиппов В.А.* Технология сушки и термоаэроклассификации углей. – М., «недра», 1987, 287с.
2. *Лыков А.В.* Сушка в химической промышленности.- М., «Химия», 1970, 432с.
3. *Джалурия И.* Естественная конвекция. – М., Мир, 1983, 399с.
4. *Павльши В.Н., Тарабаева И.В.* Математическое моделирование процесса сушки при переработке углей. Наукові праці ДонНТУ, серія: „Гірничо-електромеханічна”, випуск 94. – Донецк, 2005, с. 165-171.
5. *Павльши В.Н., Тарабаева И.В.* Расчет параметров машин, осуществляющих сушку в “кипящем слое”. Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Международный сборник научных трудов, вып. 30. – Донецк, 2005, с. 176-181.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.:Наука, 1977. – 656с.