УДК 65.011: 681.3

ПРОГНОСТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕКУРСИВНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ МАССИВОВ СЛОЖНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Ариненков Ю.Д., Башков Е.А.
Донецкий национальный технический университет

Поставлено завдання визначити умови продовження масивів даних складної залежності та дане її рішення з імітаційною перевіркою розробленого алгоритму.

В условиях высокой себестоимости продукции горнодобывающей промышленности повышение точности описания рудных тел, поверхностного рельефа, схем горных разработок, а также характеристик добываемой горной массы с целью уточнения методов и оптимизации параметров их отработки и совершенствования переработки сыпучих материалов является актуальной задачей, решению которой посвящены многочисленные исследования. В статье [1] рассмотрены наиболее распространённые математические модели поверхностей объектов сложной формы, используемые в современных системах моделирования и визуализации. Тем не менее, трудно указать отрасль промышленности, в которой поиск аппроксимирующего описания таких объектов можно было бы посчитать успешно завершённым. Следовательно, назрела необходимость изучить причины существования этой проблемы, выявить и обосновать возможности улучшения описания сложных кривых с использованием вычислительной техники. Решению такой задачи посвящена данная статья.

Анализ исследований по проблеме

В начале восьмидесятых годов прошлого столетия, в связи с открывшимися возможностями применения производительной вычислительной техники для сложных инженерных расчётов, появились публикации, в которых в явной или не вполне сформулированной форме выражалось мнение о недостатках существующих методов решения задач интерполяции в горном деле, в геологии. В [2] при разработке геостатического подхода к прогнозированию обогатимости угля выделено три этапа решения такой задачи: построение кривой выхода и зольности угля в зависимости от его обогатимости; оценка выхода и зольности угля при за-

данной плотности; применение крайгинга (или интерполяции). Для реализации этих этапов там предлагалось «… вычертить две кривые в соответствии с данными обогатимости угля по каждой из буровых скважин, делая это просто на глаз или используя какие-либо более совершенные методы как, например, интерполяцию с помощью кубических сплайн-функций; произвести оценку выхода и зольности угля при заданной плотности по данным обогатимости угля для каждой из буровых скважин и затем с помощью крайгинга определить эти величины в интересующих нас пределах… Второй подход к решению данной проблемы сводится к разработке параметрической модели для выражения выхода и зольности угля как функции плотности среды обогащения ([2], с.15).» Приведенная цитата проявляет неопределённость позиции её автора в предпочтительности построений на глаз, методом кубических сплайнов или крайгинтом. В работе [3] предлагается метод аппроксимации ступенчатого графика распределения золы в горном массиве, судя по приведенному там рисунку и условию равенства отбрасываемых и добавляемых площадей к полуступеням количества золы, напоминающий метод W.Maclarren [4], но, в отличие от последнего, предусматривающий наличие экстремумов в интерполируемой зависимости. Критерием решения задачи предагается минимум длины аппроксимирующей кривой. «Однако этот путь приводит к трудно разрешимым уравнениям ([3]).»

В [5] построение сложной геодезической кривой по экспериментальным точкам выполняют в два этапа: вначале строят ломаную кривую, а затем эту ломаную сглаживают. Для сглаживания применяют β-сплайны с параметрическим числом 8 (количество коэффициентов в уравнениях) [6, 7, 8]. Но так как на некоторых участках не хватает опорных точек для применения метода сплайнов, то такие участки интерполируют только ломаной линией. “Основным недостатком является то, что результирующая линия не проходит через узлы интерполяции. Для устранения этого недостатка при построении изолинии формируются как ломаная, так и сглаженная линия, что позволяет конечному пользователю оценить степень достоверности сглаживания и в случае необходимости воспользоваться другим методом [55”. Таким образом, работа [5] подтверждает наличие проблемы описания сложных кривых.

По-видимому, из всех встречающихся описаний кривых в промышленных технологиях наиболее простыми для описания были ситовые и фракционные характеристики полезных ископае-

мых и продуктов их переработки (как монотонные характеристики). Однако работы в области теории сепарационных процессов прошедшего столетия систематически возвращались к вопросу поиска предпочтительного метода описания таких относительно простых (строго или не строго монотонных!) характеристик. На практике, а также в научных исследованиях, ситовые и фракционные характеристики строили ручным способом, что занимало много времени и не обеспечивало надлежащей точности интерпретации экспериментальных данных. Только в работе [9] был предложен принцип описания характеристик сыпучих материалов как отказ от поиска подходящих аналитических функций для описания характеристик указанного типа в пользу применения к ним интерполяции на основе методов рекурсивного продолжения массивов.

Применение этого принципа позволило разработать простой прогностический метод рекурсивного *knot*-продолжения коротких массивов для описания ситового состава угля и продуктов его обогащения [10]. Идея метода заключается в распознавании (по степени правдоподобия) положения новой опорной точки на каждом интервале массива данных в центре тяжести треугольника правдоподобия, который строится на хорде этого интервала продолжениями хорд смежных интервалов и если он (доверительный треугольник) размещается внутри области определения этого интервала, иначе новая опорная точка как точка перегиба гипотетической зависимости назначается посредине интерполируемого интервала.

По-существу, эта идея опирается на предположение о том, что каждый новый подинтервал продолженного массива наследует свойства гипотетической зависимости из исходного интервала и поэтому такая операция может быть рекурсивной.

В работе [11] показана эффективность такого метода на коротких массивах данных в сравнении с построением кривых полиномами Лагранжа по модифицированному методу Эйткена. Однако кривые общего вида по определению не являются монотонными, и для их интерполяции нужна постановка задачи с минимальными ограничениями на свойства распознаваемой гипотетической зависимости.

Постановка задачи

Пусть имеется массив С экспериментальных данных

$$X_y = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad (1)$$

$$Y_x = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \quad (2)$$

где x – условный аргумент, причём, шкала значений $x=x_i$, $i = 1, \ldots, n$ представлена рядом набора экспериментальных значений и может быть не ранжированной по величинам аргумента, а другие его значения остались ненаблюдёнными; y – условная функция, причём, шкала значений $y=y_i$, $i = 1, \ldots, n$ также представлена рядом набора экспериментальных значений и тоже может быть не ранжированной по своим величинам, а другие её значения остались ненаблюдёнными.

Здесь аргумент x и функция y названы условнными, так как при некоторых условиях их роли могут обмениваться как у обратимой функции. Упорядоченные пары элементов массива С задаются простым перечислением по результатам соответствующего “точного” исследования “гипотетического объекта” так, что они являются отношением

$$(y, (x)) \in C, \quad (3)$$

или, так как изменение порядка указания аргумента и функции во всех точках массива не меняет их отношения, т.е. массив С представляет собою обратимую функцию,

$$(x, (y)) \in C, \quad (4)$$

где

$$C \subset X \times Y. \quad (5)$$

Пусть гипотетическая функция $f(x)$, которую представляет выборочный массив С, непрерывная, её графическое изображение- плоская кривая без разветвлений. Другие особенности этой функции не известны, так что соответствующая ей кривая может быть сколь угодно сложной и многозначной.

Ставится задача: найти метод описания гипотетической функции $f(x)$ внутри интервалов массива С при минимальных ограничениях на свойства интерполирующей функции $Q(x)$. Эта постановка задачи в очень общей форме предлагается не как альтернатива классическим методам интерполяции, а как дополнение к

ним для остававшейся неизученной ниши в теории интерполяци для неизвестной (гипотетической) функции $f(x)$ другой, тоже неизвестной функции $Q(x)$.

Метод решения задачи

Описание функции $f(x)$ внутри интервалов $[i\text{-}1,\ i]$ зависит как от свойства массива С, так и от свойства применяемого метода интерполяции.

В теории интерполирования для данной функции $f(x)$ находят полином $Q_m(x)$ возможно низшей степени m, принимающей в заданных точках x_i (i=1, 2, …, n; $x_i \neq x_j$) те же значения, что и $f(x)$, т.е.такой, что $Q_m(x_i)=f(x_i)$ (i=1, 2, n) [12]. Это определение накладывает сильные ограничения на условия интерполяции в сравнении с поставленной задачей, в которой интерполируемая функция $f(x)$ не известна, не известна и функция $Q_m(x)$ или какие-либо требования к ней.

Меньшие ограничения накладывают методы поиска имперической формулы [12]. В этом случае функция $f(x)$ либо неизвестна, либо не используется из-за вычислительной сложности, но выбор подходящей формулы требует активного участия человека. Вместе с тем, для решения текущих задач наличие формулы не является обязательным атрибутом описания функции, достаточно уметь использовать числовые массивы, представляющие эту функцию.

Очевидно, метод сплайнов был предназначен для замены подбора эмпирической формулы ко всему массиву данных на подбор коэффициентов кусочной функции в пределах одного интервала данных массива. Недостатки этого метода, отмеченные при анализе работ [5, …, 8], усугубляются необратимостью и нелинейностью сплайнов второй и более высокой степени, а также возможными неконтролируемыми всплесками функции сплайна. Эти недостатки особенно проявляются при описании сложных кривых, и поэтому в работе [5] обсуждался вопрос построения точек излома кривой, точек возврата, которые в [6] вообще не рассматривались.

В математическом словаре ВШ [13] перечислено множество (несколько десятков) типов специальных точек, в том числе и точка перегиба, и даны их критерии (определения). “Точку $c \in]a,\ b[\subset D(f)$ называют Т.п. дифференцируемой функции f, если существуют α и β, такие, что функция f на промежутках $]\alpha,\ c\ ]$ и $[c,\ \beta[$ имеет различные направления выпуклости ([13])”. Там же указы-

вается: точка c будет точкой перегиба в том и только в том случае, если вторая производная от f меняет знак при переходе через $x=c$.

Однако, результаты дифференцирования функции зависят от выбора системы координат описываемой кривой. Следовательно, если представление кривой будет не каноническим, то и типы особых точек будут отличаться от возможного их канонического типа. Например, при повороте системы координат точка локального максимума последовательно переходит в обычную точку на участке кривой, становится точкой, в которой производная принимает бесконечно большое значение, снова переходит в обычную точку на участке кривой, превращается в точку локального минимума.

Таким образом, нужно обратить внимание на тот факт, что понятие специальных точек кривой как графического изображения определённой функции основано на чётком различении аргумента этой функции (независимой величины) и самой функции (зависимой величины). Для кривой общего вида эти понятия утрачивают всякий смысл: то, что при взгляде с одной позиции можно было бы назвать аргументом, при просмотре с другой позиции может восприниматься как функция (простой пример: прямая и обратная её функция – это одна и та же кривая).

Рассмотрим изложенный в работах [9, 10, 11] прогнозный метод рекурсивного *knot*-продолжения коротких массивов, который предлагался как предпочтительный для монотонных зависимостей, присущих гранулометрическим характеристикам. Для таких характеристик вполне определённо задаётся система координат, а строгая монотонность может нарушаться в единственном случае – только с появлением одной или нескольких точек перегиба. Это позволяло устанавливать факт наличия точки перегиба в интерполируемом интервале по выходу вершины доверительного треугольника за его границы.

Для кривой общего вида такой выход вершины доверительного треугольника может иметь место, например, и в том случае, если в интерполируемом интервале оказывается максимум или минимум кривой. Следовательно, нужен более сильный признак наличия точки перегиба в интерполируемом интервале (или меньшее ограничение на определение выпуклости/вогнутости кривой).

Точный признак наличия точки перегиба по изменению знака второй производной от функции кривой в рассматриваемой за-

даче реализовать нельзя, так как сама зависимость ещё не известна, только отыскивается. Но если учесть, что знак второй производной от функции соответствует знаку направления закручивания кривой в анализируемой точке, то проблема проверки интервала интерполяции на наличие точки перегиба (назовём её точкой закручивания кривой, так как в ней первая производная может быть равной и 0, и $\pm\infty$) снимется.

Эти направления закручивания кривой в начале и конце интерполируемого интервала можно определить сопоставлением коэффициента наклона хорды интерполируемого интервала по сравнению с коэффициентами наклона хорд предыдущего и последующего интервалов. Однако такое решение задачи связано с громоздкими логическими построениями для перехода от коэффициентов наклона к направлениям поворота рассматриваемых хорд.

Значительно проще решается задача выяснением, по какую сторону от хорды интерполируемого интервала оказываются удалённые концы хорд смежных с ним интервалов. При этом измерение указанных расстояний следует выполнять вдоль осей принятой для массива данных системы координат, а не по ортогональному к хорде интерполируемого интервала направлению, так как в неевклидовой системе это направление не даёт каких-либо преимуществ, но усложняет алгоритм.

С принятием таких условий в алгоритме потребуется только обеспечить защиту от некорректных операций – от деления на нуль. Так как по условию интерполирующая функция должна быть обратимой, то от операции деления на нуль логично освободиться обращением функции на анализируемом интервале.

В результате применения метода knot-продолжения короткого массива создаётся кусочно-линейная функция, заданная параметрически, которая и является именно такой обратимой функцией.

Основные результаты и применения

Для осуществления рекурсивного knot- продолжения исходного массива необходимо индексы его элементов умножить на 2. Тогда старые опорные точки получат чётные значения индексов, а для новых опорных точек будут зарезервированы нечётные значения индексов.

Для нахождения новой опорной точки на каждом интервале чётных опорных точек массива строится доверительный треугольник. Перед вычислением вершины доверительного треугольника коэффициенты наклона хорд, образующих этот треугольник и численно равные разностным отношениям на соответствующих интервалах, обозначим машинными коэффициентами следующим образом [11]:

$$A_y = \frac{y_{k-2} - y_{k-4}}{x_{k-2} - x_{k-4}} = \frac{\Delta y_{k-4}}{\Delta x_{k-4}}, \tag{6}$$

$$B_y = \frac{y_k - y_{k-2}}{x_k - x_{k-2}} = \frac{\Delta y_{k-2}}{\Delta x_{k-2}}, \tag{7}$$

$$C_y = \frac{y_{k+2} - y_k}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}. \tag{8}$$

Для k-го интерполируемого интервала искомые отклонения представим следующими формулами:

1. Если условия $x_{k-4} \neq x_{k-2}$ и $x_{k-2} \neq x_k$ и $x_k \neq x_{i+2}$ все выполняются, то вычисляем коэффициенты наклона хорд A_y, B_y и C_y по (6) – (8) и удаление концов хорд смежных интервалов от хорды интерполируемого интервала по формулам

$$\Delta_{k-4} = y_{k-2} - y_{k-4} + (x_{k-4} - x_{k-2}) \cdot B_y, \tag{9}$$

$$\Delta_{k+2} = y_{k-2} - y_{k+2} + (x_{k+2} - x_{k-2}) \cdot B_y, \tag{10}$$

и проверяем условие $sign(\Delta_{k-4}) \neq sign(\Delta_{k+2})$. Если оно выполнено, то в этом интервале находится точка перегиба, назначаем её посредине интерполируемого интервала (движение по интервалу прямо), иначе вычисляем для этого интервала новую опорную точку в центре тяжести треугольника правдоподобия (движение по интервалу с поворотом) и переходим к пункту 3. Но если условия по пункту 1 не выполнены, то переходим к пункту 2.

2. Если условия $y_{k-4} \neq y_{k-2}$ и $y_{k-2} \neq y_i$ и $y_k \neq y_{k+2}$ все выполняются, то вычисляем коэффициенты наклона хорд A_x, B_x и C_x как обратные определениям (6-8) и находим удаление концов хорд смеж-

ных интервалов от хорды интерполируемого интервала по формулам

$$\Delta_{k-4} = x_{k-2} - x_{k-4} + (y_{k-4} - y_{k-2}) \cdot B_x, \tag{11}$$

$$\Delta_{k+2} = x_{k-2} - x_{k+2} + (y_{k+2} - y_{k-2}) \cdot B_x, \tag{12}$$

и проверяем условие $sign(\Delta_{k-4}) \neq sign(\Delta_{k+2})$. Если оно выполнено, то в этом интервале находится точка перегиба, назначаем её посредине интерполируемого интервала (движение по интервалу прямо) и переходим к пункту 3, иначе вычисляем для этого интервала новую опорную точку в центре тяжести треугольника правдоподобия (движение по интервалу с поворотом) и переходим к пункту 3.

3. Назначаем следующий интервал k по правилу k+2 и переходим в пункт 1 к прогнозу очередной опорной точки. Аналогично обрабатываются все без исключения интервалы массива данных.

В принятых обозначениях координаты точки (x_c, y_c) как вершины доверительного треугольника определятся следующими рекурсивными функциями [14]:

$$x_c = \frac{B_y - A_y}{C_y - A_y} \cdot x_{k-2} + \frac{C_y - B_y}{C_y - A_y} \cdot x_k, \tag{13}$$

$$y_c = \frac{B_y^{-1} - A_y^{-1}}{C_y^{-1} - A_y^{-1}} \cdot y_{k-2} + \frac{C_y^{-1} - B_y^{-1}}{C_y^{-1} - A_y^{-1}} \cdot y_k. \tag{14}$$

Пару (13) и (14) нужно рассматривать как рекурсивную функцию [14], обеспечивающую единственность решения независимо от того, которая из переменных принята за аргумент и функцию, x и y или y и x. Это обозначает функциональную обратимость решения, которая существенно упрощает постановку перемежающихся прямых и обратных задач при моделировании сложной технологической схемы сепарационных процессов или просто сложной кривой общего вида на основе данного описания.

Новая опорная точка должна лежать на медиане, проведенной из полученной вершины доверительного треугольника к средине противолежащей ей стороны в точку (x_a, y_a), имеющую следующие координаты:

$$x_a = \frac{x_k + x_{k-2}}{2}, \tag{15}$$

$$y_a = \frac{y_k + y_{k-2}}{2}. \tag{16}$$

На интервале прямого движения координаты новой опорной точки определяются точно формулами (15) и (16), на интервале поворота используются формулы

$$x_{k-1} = (1 - U) \cdot x_a + U \cdot x_c, \tag{17}$$

$$y_{k-1} = (1 - U) \cdot y_a + U \cdot y_c, \tag{18}$$

где U – коэффициент поворота на k-ом интерполируемом интервале.

Простейшее обоснование положения новой опорной точки состоит в отождествлении её с центром тяжести треугольника правдоподобия как единственной единообразно определяемой точкой, при этом всегда U=1/3.

Однако имитационные исследования показали, что даже на монотонных зависимостях эта величина оказывается несколько завышенной [11]. Проявляется это именно в опорных точках первой рекурсии, т.е. в точках максимальной выпуклости или вогнутости интерполируемых интервалов. Для ослабления этого эффекта предлагается величину коэффициента поворота U представить функцией номера рекурсии по формуле

$$U = 2^{-2}\left(1 - 2^{-(r+1)}\right), \tag{19}$$

где r – номер рекурсии.

Отметим следующие условия применения формул (6) – (8). Для разомкнутого массива длиной n при k=1 вместо формулы (1) следует воспользоваться формулой экстраполяции производной назад

$$A_y = 1{,}5\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - 0{,}5\frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} \tag{20}$$

и формулами (7) и (8). На последующих интервалах можно переопределять коэффициенты в порядке $A_y=B_y$, $B_y=C_y$, и только коэффициент C_y вычислять по формуле (8), а при $k=n$ вместо формулы (8) следует применять формулу экстраполяции производной вперёд:

$$C_y = 1,5\frac{y_n - y_{n-2}}{x_n - x_{n-2}} - 0,5\frac{y_{n-2} - y_{n-4}}{x_{n-2} - x_{n-4}}. \qquad (21)$$

Но в том случае, когда продолжаемый массив замкнут (кривая закольцована), вместо формулы (20) применяется формула (6) с заменой в ней параметров с индексом 2 на параметры с индексом n, а вместо (21) применяется (8) с заменой в ней параметров с индексом n+2 на параметры с индексом 0. Очевидно, в этом случае задание начальных условий продолжения массива точно соответствует применяемому методу рекурсивного продолжения массива.

Пример продолжения массива данных от неизвестной сложной функции показан рисунком.

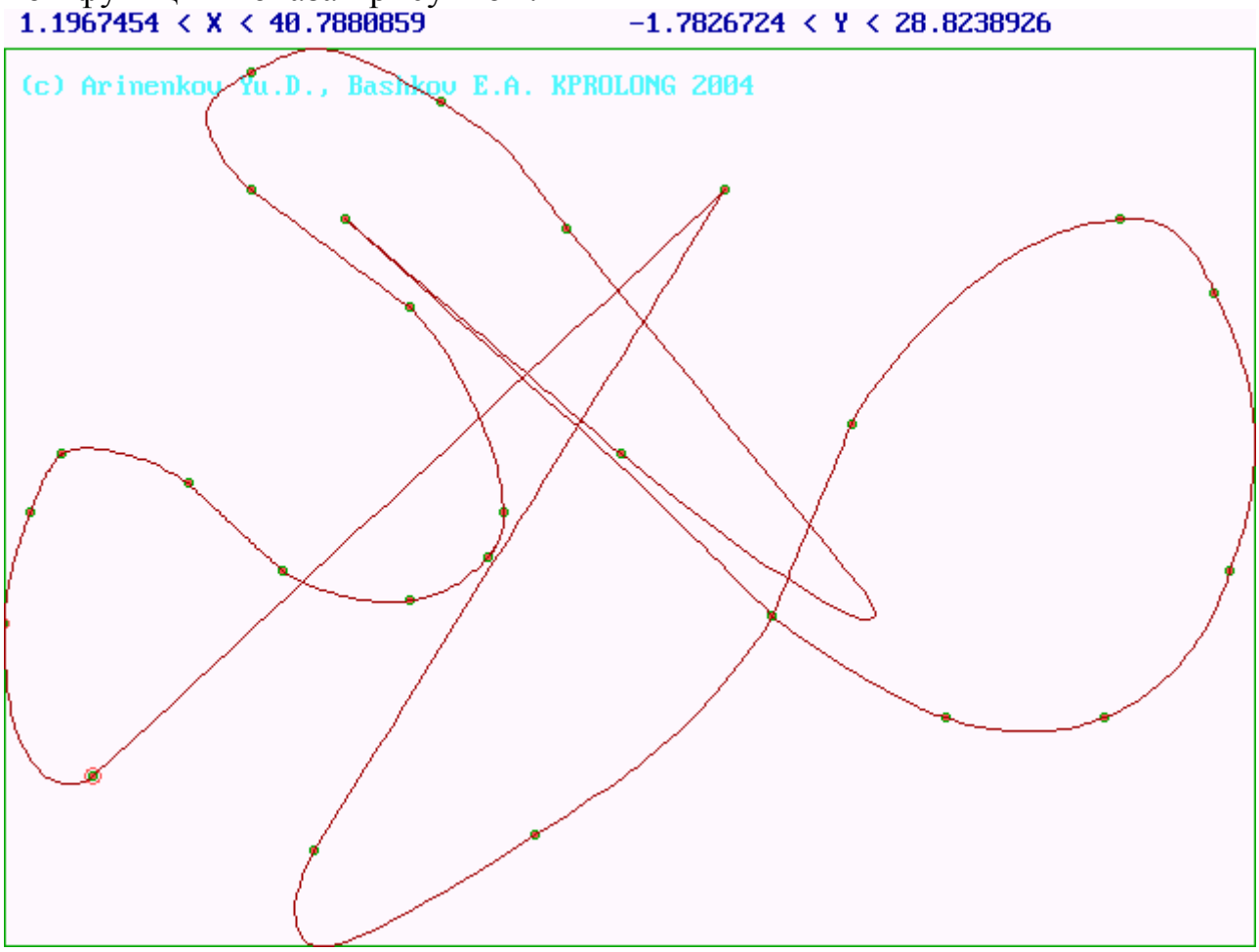

Рисунок – Сложная кривая построена программой KPROLONG

Представленная рис.3 кривая воспринимается как весьма сложная. Однако, алгоритм построения разомкнутой кривой почти не отличается от алгоритма построения замкнутой кривой: 1/3 всех операторов выполняет описание начала и конца разомкнутой кривой, ещё 1/3 зацикливает описание начала и конца массива для замкнутой кривой и только 1/3 является общей – для описания внутренних интервалов интерполируемой зависимости.

Визуальный анализ различных участков полученной кривой не выявляет признаков аномальности в её форме, кроме слабо заметной подмены точки перегиба интервалом перегиба. В последующем этот недостаток может быть устранён, в целом же график воспринимается как правдоподобный.

Очевидно, на основе предложенного метода можно составить алгоритм минимизации длины массива описания сложной кривой, что будет полезно для создания базы данных при обработке сложных поверхностей.

Предложенная модификация рекурсивного метода *knot*-продолжения короткого массива данных не усложняет, а только упрощает его алгоритм. Метод остаётся пригодным для описания монотонных гранулометрических характеристик распределения частиц по крупности, но теперь он пригоден для описания и немонотонных, колеблющихся зависимостей содержания серы во фракциях угля от их зольности, а также колеблющейся зависимости зольности фракций от выхода продукта в циркулирующих потоках при моделировании технологической схемы углеобогатительной фабрики и других приложений в горнодобывающей промышленности. Обсуждаемый метод, основанный на элементах распознавания графических образов в информационной форме, будет полезен в когнитивной компьютерной графике [15], а также в решении задач визуального мышления.

Последующие исследования будут направлены на улучшение описания интервалов с «закручиванием» кривой, автоматическое определение вида кривой (замкнутая или разомкнутая кривая), интерактивное изменение массива данных (управление формой кривой), описание многомерных (векторных), пространственных и гиперпространственных кривых.

Заключение

Установлено, что для описания сложных плоских кривых по заданным точкам прогностическим методом *knot*-продолжения массива

исходных данных необходимо изменить определение точки изгиба на точку закручивания кривой, обеспечить обратимость описания.

При выполнении этого условия метод рекурсивного продолжения коротких массивов эффективно распознаёт и с достаточной для практики точностью интерполирует сложные зависимости без поиска их аналитического описания и поэтому его можно рекомендовать для описания поверхностного рельефа, схем горных разработок, а также характеристик добываемой горной массы для переработки её на обогатительных фабриках и в макромодели для АСУ ТП ОФ.

Литература:

1. Башков Е.А., Пауков Д.П. Математические модели поверхностей сложной формы в системах моделирования и визуализации // Моделирование и компьютерная графика: Материалы 1-й международной научно-технической конференции, г. Донецк, 04-07 октября 2005 г. –Донецк, ДонНТУ, Министерство образования и науки Украины, 2005. –285 с. -С.59-65.
2. Армстронг М. Геостатический подход к прогнозированиюобогатимости угля // Применение ЭВМ и математических методов в горных отраслях промышленности. Тр. 17-го Междунар. симпозиума. СССР. Москва, 20-25 октября 1980 г. В 3 т. - М.: Недра, 1982, т. 2. -С.15-20.
3. Фомин В.А., Хайченко В.Н. Численный метод построения пространственной модели месторождения угля // Применение ЭВМ и математических методов в горных отраслях промышленности. Тр. 17-го Междунар. симпозиума. СССР. Москва, 20-25 октября 1980 г. В 3 т. - М.: Недра, 1982, т. 2. -С.151-154.
4. Maclarren W. A gaurantie of performance for coal washing plant – Coll. Guard. Vol. CXLIII, pp. 198-201; 375 (1931).
5. Спорыхин В.Я., Омельченко А.А., Анциферов А.В. Особенности построения линий равных параметров // Наукові праці Донецького державного технічного університету. Серія: Обчислювательна техніка та автоматизація - Донецьк, 1999. - Випуск 3.-С.217-223.
6. Л. Амерал. Принципы программирования в машинной графике. Пер. с англ. –М.: “Сол Систем”, 1992. –224с.
7. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск: Наука. –1983. –214с.
8. Завьялов Ю.С. и др. Сплайны в инженерной геометри/Ю.С. Завьялов, В.А. Леус, В.А. Скороспелов. –М.: Машиностроение, 1985. –224с.
9. Arinenkov Y. Universal model for research both optimization of tecnological processes of coal preparation factories on the COMPUTER / 2nd Regional APCOM’97 Symposium. Published by: The Moscow State Mining University Publishing Center. Moscow, Russia - 1997. -P. 209-214.

10.Ариненков Ю.Д. Метод описания гранулометрических характеристик сыпучего материала//Збагачення корисних копалин: Н.-техн.зб. – Дніпропетровськ, 2002. № 15 (56).–С.39-45.
11. Ариненков Ю.Д. Эффективность рекурсивного продолжения коротких массивов данных состава угля // Вісті Донецького гірничого інституту. ДонНТУ. –Донецьк. –2003. №2. С.88-92.
12. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Изд-во Наука, Гл.редакция физ.-мат.лит., 1966. –664 с.
13. Математический словарь высшей школы: Общ.часть/В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович; Под ред. Ю. С. Богданова.-Мн.: Выш.шк., 1984.-527.
14. Degrees of unsolvability. North-Holland Publishing Company, American Elsevier Publishing Company, 1971, 192p.
15. Зенкин А.А. Когнитивная компьютерная графика. –М.: Наука, 1991.