

ТЕОРІЯ ВИМІРЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ ІЗ СКЛАДНОЮ ПРОСТОРОВОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Квасніков В.П.

Черкаська академія менеджменту

Abstract. *Квасніков В.П. Теория измерения объектов со сложной пространственной поверхностью. In clause overlapping physical object of measurement and his mathematical model are considered. Expressions for function Lagrange are received. The algorithm of overlapping of control detours of mathematical model and object of measurement is developed. The minimum quantity of points for restoration of an analytical part of a surface of object with a complex spatial surface is determined.*

Вступ. Для контролю об'єктів із складною просторовою поверхнею відмінною від поверхонь, що аналітично описуються широко використовують координатно-вимірвальні машини. Точність вимірювання на прецизійних координатно-вимірвальних машинах складає 0,5 мкм, що не задовольняє вимоги до вимірювання деталей машинобудівної та приладобудівної галузей.

Цифрові значення координат отримані за допомогою координатно-вимірвальних машин не вирішують повністю задачу контролю складних просторових поверхонь. Необхідно порівняти не тільки набори точок вимірвальних і отриманих по математичній моделі, а також рівняння поверхонь. На сучасному етапі розвитку технології вимірювання координат точок поверхні, по якій можна відтворити поверхню об'єкту, можна проводити за допомогою трикоординатної інформаційно-вимірвальної системи (ТІВС). Розвиток систем програмно-математичного забезпечення керування трикоординатних ІВС відкриває нові можливості для обходу поверхні об'єкту і з достатньо більшою точністю отримати математичну модель поверхні.

Від суміщення параметрів об'єкту вимірювання і його математичної моделі у великій мірі залежить точність вимірювання. Основні проблеми обробки результатів вимірювання складних просторових поверхонь полягають у наступному:

По-перше, це можливості точної установки моделі на поворотному столі трикоординатної ІВС. Уточнення базування моделі обмежується точністю виготовлення баз і розташування щодо баз контрольованої поверхні, а також точністю їхнього візування при вимірюваннях.

По-друге, безпосередні вимірювання координат контрольованих точок поверхні об'єкта можуть бути встановлені тільки відносно на підставі вимірювання досить великої множини в їхньому околі.

По-третє, кінцева геометрія щупа, що стосується вимірювання поверхні дозволяє оцінювати координати тільки відносно. Ймовірно фіксується координата нижньої точки щупа його центру.

Точка торкання при вимірюваннях складних поверхонь може в досить широкому діапазоні переміщатися по поверхні щупа.

У четвертих, внаслідок похибок базування обмірюваних точок поверхні необхідно знайти відповідні їм точки на математичній моделі об'єкту. Для складних поверхонь суміщення відповідних точок математичної моделі з результатами обходу навколо поверхні дозволяє зробити висновок про точність вимірювання об'єкту.

При вимірюваннях положення осей об'єкту (фізичної моделі і її елементів) після установки на поворотному столі в загальному випадку не збігається з осями трикоординатної ІВС. Відмінності визначають помилку базування, що повинна бути усунута перед суміщенням результатів вимірювання з вихідною математичною моделлю об'єкту.

Таким чином, оцінка точності базування повинна формуватися як на основі вимірювання баз, так і з урахуванням необхідної та достатньої кількості точок контрольованої поверхні.

Поряд з рішенням задачі базування поверхонь повинна бути також вирішена проблема базування контрольних обходів (перетинів і характерних ліній на поверхні) при різних використовуваних способах подання інформації.

Постановка задачі та основний матеріал. Необхідно провести оцінку суміщення об'єкту по отриманій математичній моделі, що описує реальну форму поверхні. Маємо математичну і вимірювану фізичну моделі. Початки власних систем координат O і O^1 моделей зміщені на вектор P . Крім того, система $(XYZO)^1$ повернута щодо осей OX , OY , OZ системи $(XYZO)$ на кути α , β , і γ . Математична модель суміщення. На математичній моделі задається ряд характерних точок. Проводиться вимірювання відповідних їм точок на фізичній мо-

делі. Число точок N і їхнє розташування залежить від конкретної форми моделі і визначається в залежності від точності вимірювання.

Потрібно знайти перетворення R , що переводить систему $(XYZO)^1$ у систему $(XYZO)$ так, щоб сума квадратів відстаней від перетворених вимірюваних точок $c^i = R(b_i)$ до відповідних їм точок математичної моделі була мінімальною

$$\sum_{i=1}^N \left[(a_x^i - c_x^i)^2 + (a_y^i - c_y^i)^2 + (a_z^i - c_z^i)^2 \right] \Rightarrow \min. \quad (1)$$

Перетворення для вимірюваної точки b_i в координатній формі має такий вигляд:

$$C = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + b_x - b_y \gamma + b_z \beta \\ P_y + b_x \gamma + b_y + b_z \alpha \\ P_z - b_x \beta + b_y \alpha + b_z \end{bmatrix}.$$

Підставивши значення c_x , c_y і c_z у виразі для суми квадратів відстаней (1), одержуємо вираз для функції Лагранжа

$$J = \sum_{i=1}^N \left(a_x^i - b_x^i - P_x + b_y^i \gamma - b_z^i \beta \right)^2 + \sum_{i=1}^N \left(a_y^i - b_y^i - P_y + b_x^i \alpha - b_z^i \gamma \right)^2 + \sum_{i=1}^N \left(a_z^i - b_z^i - P_z - b_x^i \alpha + b_y^i \beta \right)^2.$$

Прирівняємо вирази для частинних похідних до нуля і згрупуємо подібні члени, одержимо систему лінійних рівнянь

$$[D] \times [P_x \ P_y \ P_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T = [H], \quad (2)$$

де $[D]$ — матриця розміром 6×6 , $[H]$ — стовпець вільних членів, T означає транспонування.

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{16} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{66} \end{bmatrix}; \quad [H] = \begin{bmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_6 \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці $[D]$ і стовпця $[H]$ визначаються так:

$$\begin{aligned} d_{11} &= -N; \quad d_{12} = 0; \quad d_{13} = 0; \quad d_{14} = 0; \quad d_{15} = -S_z; \quad d_{16} = S_y; \\ d_{21} &= 0; \quad d_{22} = -N; \quad d_{23} = 0; \quad d_{24} = S_z; \quad d_{25} = 0; \quad d_{26} = -S_x; \\ d_{31} &= 0; \quad d_{32} = 0; \quad d_{33} = -N; \quad d_{34} = -S_y; \quad d_{35} = S_x; \quad d_{36} = 0; \\ d_{41} &= 0; \quad d_{42} = -S_z; \quad d_{43} = S_y; \quad d_{44} = S_y^2 + S_z^2; \quad d_{45} = -S_{xy}; \quad d_{46} = -S_{xz}; \end{aligned}$$

$$d_{51} = S_z; \quad d_{52} = 0; \quad d_{53} = -S_x; \quad d_{54} = -S_{xy}; \quad d_{55} = S_{x^2} + S_{z^2}; \quad d_{56} = -S_{yz};$$

$$d_{61} = -S_y; \quad d_{62} = S_x; \quad d_{63} = 0; \quad d_{64} = -S_{xz}; \quad d_{65} = -S_{yz}; \quad d_{66} = S_{x^2} + S_{y^2};$$

$$h_1 = -\sum_{i=1}^N (a_x^i - b_x^i); \quad h_2 = -\sum_{i=1}^N (a_y^i - b_y^i);$$

$$h_3 = -\sum_{i=1}^N (a_z^i - b_z^i); \quad h_4 = -\sum_{i=1}^N (a_y^i b_z^i - a_z^i b_y^i);$$

$$h_5 = -\sum_{i=1}^N (a_z^i b_x^i - a_x^i b_z^i); \quad h_6 = -\sum_{i=1}^N (a_x^i b_y^i - a_y^i b_x^i).$$

Розв'яжемо систему рівнянь (2), одержуємо шукані значення $P_x, P_y, P_z, \alpha, \beta$ і γ , що визначають перетворення.

Визначені значення лінійних і кутових зсувів ($P_x, P_y, P_z, \alpha, \beta$ і γ) складають вихідну інформацію для оператора-метролога трикоординатної ІВС з метою корекції системи координат фізичної моделі, що враховано в програмно-математичному забезпеченні “Plane-2”.

Алгоритм суміщення контрольних обведень математичної моделі і вимірюваного об'єкта. Після базування фізичної моделі на ній проводиться ряд кільцевих вимірів, що відповідають контрольним обводам (перетинам) математичної моделі. Точки вимірюваного перетину b^i лежать в одній площині. На рис.1 показане сполучення контрольних обводів математичної моделі і вимірюваного об'єкта на прикладі турбінної лопатки.

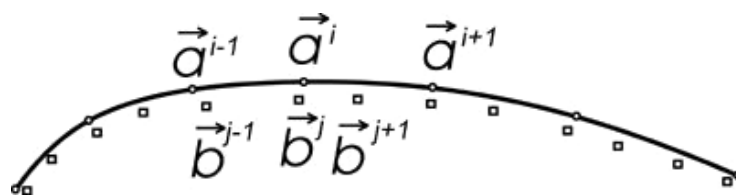


Рисунок 1 — Суміщення контрольних обводів математичної моделі і вимірюваної складної просторової поверхні

Число точок у перетині M залежить від геометрії конкретного перетину. Кожен вимірюваний перетин необхідно сумістити з відповідним йому перетином математичної моделі. Для цього його потрібно повернути на кут α , і зсунути на вектор P в площині перетину.

Необхідно знайти точки c^i , що лежать на обмірюваному перетині і відповідають точкам a^i перетину математичної моделі. Для цього спочатку знаходяться точки $c^{i(0)}$, що лежать на багатокутнику, що з'єднує виміряні точки b^i так, що відстань від точки a^i до точки $c^{i(0)}$ мінімально. Послідовно визначаються відстані від точки a^i до кожного з відрізків $[b^i, b^{i+1}]$, $j=1, \dots, M-1$. Точка d , що відповідає мінімальній відстані, визначається з умови перпендикулярності вектора $(a^i - d)$ прямої, що проходить через точки b^i і b^{i+1} .

Пряма, що проходить через точки b^i і b^{i+1} визначається рівнянням

$$d(t) = b^i + (b^{j+1} - b^j)t, \quad t \in [-\infty, \infty].$$

Умова перпендикулярності

$$(b^{j+1} - b^j)(a^i - d(t^*)) = 0.$$

Звідси визначається значення параметра t^*

$$t^* = \frac{(b_x^{j+1} - b_x^j)(a_x^i - b_x^j) + (b_y^{j+1} - b_y^j)(a_y^i - b_y^j)}{(b_x^{j+1} - b_x^j)^2 + (b_y^{j+1} - b_y^j)^2}.$$

Однак визначена в такий спосіб точка $d(t^*)$ може лежати за межами відрізка $[b^i, b^{i+1}]$, тому точка d , що відповідає мінімальній відстані, визначається як:

$$d = \begin{cases} b^j, & t \leq 0; \\ d(t^*), & 0 \leq t \leq 1; \\ b^{j+1}, & t \geq 1. \end{cases}$$

Визначивши відстань від точки a^i до кожного з відрізків $[b^j, b^{j+1}]$, вибираємо той відрізок, відстань якого мінімальна. Точка d , знайдена на цьому відрізку, і буде шуканою точкою $c^{i(0)}$.

Після цього визначається уточнена точка c^i . Для цього кілька точок обмірюваного перетину b^k , $k=j-L, \dots, j+L$, що знаходяться в околиці знайденої точки $c^{i(0)}$, апроксимуються сегментом сплайна. За допомогою вищевказаної процедури визначається точка c^i , що відповідає точці a^i .

Таким чином, маємо N точок a^i контрольного перетину математичної моделі і відповідні їм N точок c^i обмірюваного перетину. Необхідно знайти вектор P , на який потрібно зсунути точки, і кут α , на який їх потрібно повернути до повного збігу. Компоненти вектора P_x і P_y і кут α визначаються так само, як і в попередньому розділі.

Мінімізується функція Лагранжа

$$J = \sum_{i=1}^N (a_x^i - c_x^i)^2 + \sum_{i=1}^N (a_y^i - c_y^i)^2,$$

де c^i — зсунута на вектор P і повернута на кут α точка c^i

$$c^i = \begin{bmatrix} c_x^i \\ c_y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x^i + P_x - c_y^i \alpha \\ c_y^i + P_y + c_x^i \alpha \end{bmatrix}.$$

Умовами мінімуму функції Лагранжа є

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial P_x} &= -2 \left[-P_x N + \alpha \sum_{i=1}^N c_y^i + \sum_{i=1}^N (a_x^i - c_x^i) \right] = 0; \\ \frac{\partial J}{\partial P_y} &= -2 \left[-P_y N - \alpha \sum_{i=1}^N c_x^i + \sum_{i=1}^N (a_y^i - c_y^i) \right] = 0; \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= 2 \left[-P_x \sum_{i=1}^N c_y^i + P_y \sum_{i=1}^N c_x^i + \alpha \sum_{i=1}^N \left((c_x^i)^2 + (c_y^i)^2 \right) + \sum_{i=1}^N (a_x^i c_y^i - a_y^i c_x^i) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Розв'язавши систему з трьох лінійних рівнянь (3), одержуємо значення P_x і P_y і α :

$$\begin{aligned} P_x &= (h_1 + d_{13}\alpha)/N; \quad P_y = (h_2 + d_{32}\alpha)/N; \\ \alpha &= \frac{-Nh_3 + h_1 d_{13} - h_2 d_{32}}{Nd_{33} - (d_{13})^2 - (d_{32})^2}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} d_{13} &= \sum_{i=1}^N c_y^i; \quad d_{32} = \sum_{i=1}^N c_x^i; \quad d_{33} = \sum_{i=1}^N \left((c_x^i)^2 + (c_y^i)^2 \right); \\ h_1 &= \sum_{i=1}^N (a_x^i - c_x^i); \quad h_2 = \sum_{i=1}^N (a_y^i - c_y^i); \quad h_3 = \sum_{i=1}^N (a_x^i c_y^i - a_y^i c_x^i). \end{aligned}$$

Використовуючи ланцюгове правило виразимо умову (2) через градієнт і другі похідні.

Визначення довжини кроку залежить від використаної схеми інтерполяції та від поверхні об'єкту [1, 2]. При використанні лінійної інтерполяції, взагалі встановлюють допуск на максимальне відхилення δ дійсної кривої від хорди по нормалі, що з'єднують дві послідовні точки вимірювання. У випадку малих кроків здійснюється апроксимація кривої її спряженої сфери, так що кривизну перетину в даному місці можна використати для визначення довжини кроку

$$L^2 = 4\delta(2\rho - \delta),$$

де L — довжина кроку, δ — відхилення, ρ — радіус кривизни.

Для практичного розв'язання задач вимірювання необхідно: дослідити взаємовплив на точність вимірювання форми головки датчика, а також кривиз-

ни і напрямку нормалі поверхні об'єкту; розробити методика нанесення координат точок вимірювання; провести оцінку точності проведених вимірювань.

Визначимо похибку точки дотику однозначної поверхні об'єкту сферичною або циліндричною голівкою датчика. Якщо поверхня вигинається достатньо гладко, тобто в границях радіуса вимірювального наконечника, то поверхню можна задати дотичною площиною. Тоді похибка визначення точки дотику може бути визначена з наступної системи рівнянь [8].

$$\Delta_{cf} = R \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4)$$

де R — радіус наконечника, α — кут між вектором швидкості та горизонтальною віссю.

На рис. 2. показана точка дотику однозначної гладкої поверхні із сферою вимірювального наконечника радіуса R

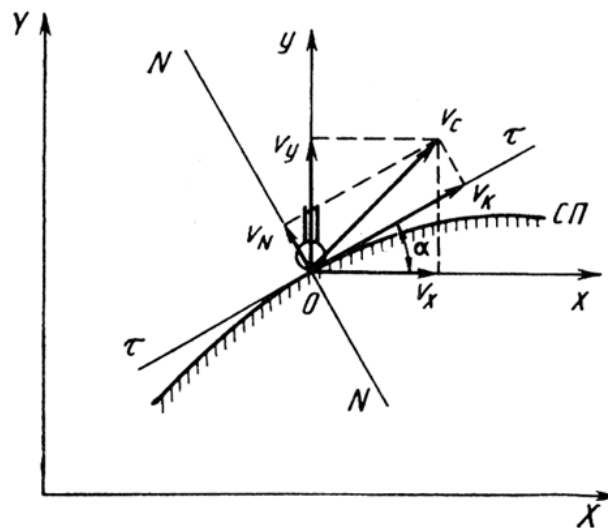


Рисунок 2 — Геометрія дотику сфери вимірювального наконечника та поверхні

Сумарна похибка вимірювань датчика буде складатися з трьох похибок

$$D_e = D_n + D_k + D_z,$$

де $D_n = \delta \cdot \max\left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)$ — похибка позиціонування, D_k — похибка датчика, D_z — похибка взаємного впливу форми поверхні та датчика.

Ці залежності дозволяють отримати для деякого класу поверхонь оцінку похибки визначення координат поверхні об'єкту при використанні трикоординатного датчика.

Мінімальна кількість точок для відновлення аналітичного еталону поверхні у сплайновій геометрії буде [1]

$$N_{min} = n_s \cdot n_l, \quad (5)$$

де n_s — кількість параметрів, що описують аналітичну частину, n_l — кількість частин поверхні. Для більш точного відтворення аналітичного еталону поверхні з міркувань, що N точок необхідно для відновлення значень z , N — для z' , та N — для z'' , беруть $N = 3N_{min}$. Якщо ці точки рівномірно розподілені по поверхні, то можна стверджувати, що вони утворюють множину відновлюваної поверхні.

Висновок. Визначено кількість точок контрольного перетину математичної моделі і відповідна їм кількість точок виміряного перетину та вектор P , на який потрібно зсунути точки, і кут α , на який необхідно повернути до повного суміщення.

Література

1. Фокс А. Пратт М. Вычислительная геометрия. — М.: Мир, 1982. — 304 с.
2. Юнусов Ф.С. Формообразование сложнопрофильных поверхностей шлифованием. — М.: Машиностроение, 1987. — 248 с.
3. Перепилица Б.А. Отображение аффинного производства в теории формообразования поверхностей резанием. — Харьков: Высшая школа, 1981. — 152 с.
4. Платонов А.И. Геометрические преобразования в робототехнике. — М.: Знание, 1988. — 376 с.
5. Кальченко В.И. Шлифование криволинейных поверхностей крупногабаритных деталей. — М.: Машиностроение, 1979. — 160 с.
6. Дружинский И.А. Сложные поверхности. Математическое описание и технологическое обеспечение. — Л.: Машиностроение, 1985. — 263 с.
7. Данилов В.А. Формообразования и обработка сложных поверхностей резанием. — М.: Наука, 1995. — 187 с.
8. Координатные измерительные машины и их применение/Гапшис А.А., Каспарайтис А.Ю., М.Б. Модестов, Раманаускас З.А., Серков Н.А., Чудов В.А. — М.: Машиностроение, 1988. — 328 с.

Здано в редакцію: 11.03.2003р.

Рекомендовано до друку: д.т.н., проф. Зорі А.А.